

## 以實驗探討電吉他的電磁學及聲學

鄧善友 劉上傑 黃思端 林麟杰 嚴祖強\*

國立中山大學 物理系

\*通訊作者：yentc@mail.nsysu.edu.tw

(投稿日期：民國 105 年 10 月 18 日，接受日期：105 年 11 月 21 日)

**摘要：**電吉他是熱門音樂中的重要樂器，各種音樂場合也使用了越來越多的電子樂器，使得學生和一般人對電吉他等電子樂器的工作原理很感興趣。本研究將以實驗探討電吉他的物理原理，並且和古典吉他的物理原理比較。研究結果顯示：電吉他的拾音器是一組磁鐵及線圈，藉由金屬弦的作用而產生聲音，可以做為電磁學中『電流與磁場的交互作用』很好的應用。在聲學方面，電吉他則和古典吉他完全不同，兩者的比較可以幫助學生對於聲音的物理性質有更深入的了解。

**關鍵詞：**吉他、電流、磁場、聲音

### 壹、前言

人耳所感覺的樂音主要由三個因素所構成，即響度、音調和音色，一般稱之為樂音的三要素。

- 一、響度：聲音的大小，決定於物體的振動幅度，亦即振幅大小。
- 二、音調：聲音的高低，決定於發音體振動的頻率，亦即音調高低。
- 三、音色：聲音的特色，決定於聲音的波形。

以上這些要素就是進行本研究的主要依據。其中，音色是一般人最難量化和比較的因素，這個研究中將利用數學工具藉以得到更好的預測及觀察音色的方式。

古典吉他跟電吉他在發聲原理方面，都是源自於吉他弦的振動，但是聲音的產生方式卻有很大的差異。古典吉他的弦在振動後，會藉由共振箱的下弦枕把振動的能量傳給共振箱，而共振箱就會被“強迫”振動，發出同一頻率的聲音，但是聲音的音色卻會受共振箱的材質、形狀、大小所影響。電吉他的發聲原理利用了法拉第定律和安培定律；電吉他的弦一定要用金屬弦，更準確地說，必須是可以磁化的材質。電吉他弦的正下方會有一個稱作拾音器(pick up)的元件；拾音器是由其中央的柱狀小磁鐵以及磁鐵外圍緊密纏繞數千圈的漆包線

所組成。拾音器中的磁鐵會磁化其上方的金屬弦；被磁化的金屬弦彈動後，金屬弦會振動並且接近或遠離磁鐵，使得拾音器線圈中的磁場產生同一頻率的變化，並且由法拉第定律在線圈中產生同一頻率的感應電動勢。有了這個感應電動勢的電訊號後，把它接上喇叭就可以發出弦的聲音了。

## 貳、實驗原理

在電吉他與古典吉他中，吉他弦的振動都扮演著非常重要的角色，因此接下來將探討吉他弦的運動。

吉他弦可視為兩端固定的一條繩子，彈動弦後會在這兩固定端間產生駐波。(1)式為一維波動方程式：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中， $y$  為振幅， $x$  為水平位置， $t$  為時間， $v$  為波速。首先假設振幅為  $x$ 、 $t$  的函數，如(2)式：

$$y(x, t) = X(x)T(t) \quad (2)$$

將(2)式代入(1)式，可得到(3)式：

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Tv^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3)$$

在(3)式中，左邊為  $x$  的函數，等式右邊為  $t$  的函數。設等式左右皆為同一常數  $-K^2$  因此得到(4)式：

$$\begin{cases} X'' + K^2 X = 0 \\ T'' + v^2 K^2 T = 0 \end{cases}, K > 0 \quad (4)$$

(4)式之解為(5)式：

$$\begin{cases} X = A \sin Kx + B \cos Kx \\ T = C \sin Kvt + D \cos Kvt \end{cases} \quad (5)$$

將(5)式代入(2)式，得到(6)式：

$$y = (A \sin Kx + B \cos Kx)(C \sin Kvt + D \cos Kvt) \quad (6)$$

接下來代入吉他弦的邊界條件和初始條件；(7)式為邊界條件一、(8)式為邊界條件二、(9)式為初始條件，如圖 1 所示：

$$y(0, t) = 0 \quad (7)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (8)$$

$$y(x, 0) = f(x) \quad (9)$$

在(9)式中：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{L} & , x < \frac{L}{2} \\ 2h(1 - \frac{x}{L}) & , x \geq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (10)$$

以下說明(10)式中的  $f(x)$  是吉他弦一開始彈動的形狀：由於吉他弦兩端固定，所以兩端點的  $y$  (振幅) 值必為零；假設彈動弦的動作為拉起弦的中間、在半弦長  $L/2$  的位置，而且拉起的幅度為  $h$  (如圖 1 所示)，弦在  $t=0$  時的形狀即為  $f(x)$ ，也就是此運動的初始條件。

把條件一(7)式代入(6)式，得到(11)式：

$$(B)(C \sin Kvt + D \cos Kvt) = 0 \quad (11)$$

(11)式可以有兩種可能：

第一種為  $(C \sin Kvt + D \cos Kvt) = 0$ ，則(6)式可寫成(12)式：

$$y = (A \sin Kx + B \cos Kx)(C \sin Kvt + D \cos Kvt) = 0 \quad (12)$$

相當於整條弦都沒有運動，這不是適合的結果。

因此需採取第二種可能  $B = 0$ ，則(6)式可寫成(13)式：

$$y = (A \sin Kx)(C \sin Kvt + D \cos Kvt) = 0 \quad (13)$$

再把條件二(8)式代入(13)式，得(14)式：

$$(A \sin KL)(C \sin Kvt + D \cos Kvt) = 0 \quad (14)$$

如(11)式的討論，可以得到  $\sin KL = 0$ ， $K = \frac{n\pi}{L}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ，將  $K$  代回(13)式得(15)式：

$$y = (A \sin \frac{n\pi x}{L})(C \sin \frac{n\pi vt}{L} + D \cos \frac{n\pi vt}{L}) = 0 \quad (15)$$

其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

因為  $t=0$  時  $y$  不全為零，所以得(16)式：

$$y = (A \sin \frac{n\pi x}{L})(D \cos \frac{n\pi vt}{L}) , n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

此式即為駐波的解。從(16)式可看出：吉他弦振動時不會只出現單一頻率的駐波，可以有  $n$  種頻率的駐波出現在弦上；更準確的說：弦上的波會是這  $n$  種駐波疊加而成，且每個駐波的頻率都是基頻( $n=1$ )的倍數頻率，也就是一般稱的第二諧波( $n=2$ )、第三諧波( $n=3$ )，所以更正確的寫法為(17)式：

鄧善友、劉上傑、黃思端、林麟杰、嚴祖強

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \quad (17)$$

(17)式中 $b_n$ 為各諧波的振幅；所以要知道這些諧波間的振幅關係，必須先知道 $b_n$ 的值。

樂音中所謂的不同音色，就是這些諧波以不同的振幅疊加所導致。即使是同一個音調(基頻)，古典吉他跟電吉他的音色會有很大的區別，不同的彈動方式也會造成不同音色。

為了進一步得知 $b_n$ 的值，就要使用初始條件。將(9)式代入(17)式，得(18)式：

$$y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

其中 $b_n$ 就是 Fourier sine series 的係數，(19)式：

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (19)$$

將(10)式代入(19)式，可得(20)式：

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2hx}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (20)$$

最後將(20)式代回(17)式，得(21)式：

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \quad (21)$$

到這裡，各諧波振幅比已經可以完全計算出來，也就是可以用(2.21)式分析及預測吉他的音色。先將(21)式展開如(22)式：

$$y = \frac{8h}{\pi^2} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi vt}{L}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{3\pi vt}{L}\right) + \dots \right] \quad (22)$$

其中可以清楚的看出：彈動弦的中間時，就只有奇數諧波會出現；若是彈動位置改變，(10)式中的 $f(x)$ 就會改變，使得 $b_n$ 項會因 $f(x)$ 的改變而有不同的值，導致了音色改變。

在電吉他中，拾音器的訊號是金屬弦在某一個位置的振動所感應產生的感應電動勢。因此，(17)式中的 $x$ 不是一個變數，而是拾音器位置的座標，使得(17)式變成更單純的餘弦波疊加，而且正弦函數讓諧波的振幅出現了相對於 $n$ 的週期性變化，後面的實驗中將說明並且證明。另一方面，法拉第定律(23)：

$$\oint E \cdot dl = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (23)$$

之中，拾音器產生的感應電動勢和它感受到的磁通量變化率有關；所以，不只是弦的振幅，

感應電動勢也和時間的變化有關，也就是頻率會直接影響磁通量的變化率以及感應電動勢，所以電吉他的理論方程式(17)必須修改如(24)式：

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n \pi v t}{L}\right) \quad (24)$$

也就是說：第  $n$  諧波的振幅要乘以  $n$  倍，這是考慮法拉第定律的結果。這個觀念會在以下的實驗中獲得證實。

### 參、實驗步驟及方法

這個實驗利用數位示波器的 FFT 功能分析接收到聲音的頻譜；量測電吉他時是將拾音器線圈產生的訊號直接接到示波器上；古典吉他實驗中，則是用麥克風收音，再將麥克風訊號傳至示波器。

### 肆、實驗結果及討論

#### 一、單拾音器與雙拾音器比較

如圖 2、圖 3 所示，從圖形比較可以觀察到：單拾音器和雙拾音器的差異為振幅強度差了 10 倍。

#### 二、拾音器擺放的位置影響

在一維駐波的(2.24)式中， $x$  為拾音器的擺放位置， $L$  為弦長。當拾音器放在弦長的  $1/5$  處，將  $x$  值代入  $L/5$ ，可以發現駐波形式中出現  $\sin \frac{\pi}{5}$  項，因此頻譜會以 5 個諧波為週期形成週期性。

將拾音器更換不同的位置，頻譜週期也會改變，因此，拾音器的位置對於電吉他的音色有明顯的影響。如圖 4~圖 9 所示。

#### 三、古典吉他與電吉他比較

用頻譜分析古典吉他與電吉他的差異，可以發現：古典吉他在高頻率的部分幾乎沒有振幅，這是由於古典吉他是透過共振箱來發聲，因此共振箱會有頻率上限；而電吉他是直接接收弦的震動，因此在高頻的部分也能完整呈現，如圖 10、圖 11 所示。

#### 四、古典吉他與民謠吉他比較

如圖 12、圖 13 所示，古典吉他與民謠吉他同樣具有共鳴箱，都是透過共鳴箱發聲，因此其頻譜都會有頻率上限。但是，由於民謠吉他的共鳴箱是不對稱的形狀，會使得其頻譜分佈比較雜亂。由此可知共鳴箱決定了古典吉他以及民謠吉他的音色。

#### 五、古典弦的彈動位置的影響

接著要研究：彈動弦的不同位置時頻譜的變化。首先回到(17)式，當彈動弦的不同位置

時，改變的是弦在  $t=0$  時的位置，因此需考慮的是  $b_n$  項，也就是初始條件，可以發現：當彈動在弦長的三分之一時，會出現  $\sin \frac{n\pi}{3}$  項，此時頻譜上將出現以 3 為週期的圖形。因此彈動位置的不同，可以改變在頻譜上表現的週期，也就可以改變古典吉他以及電吉他的音色，如圖 14~圖 23。在此處的研究中，電吉他的拾音器是放置在弦長的  $1/7$  處，如圖 24、圖 25 所示。

## 伍、結論

此研究包括吉他頻譜的理論推導以及實驗驗證。在理論方面，詳細的解釋及推導了一維駐波，並把電吉他拾音器的物理原理加入，延伸出了新的模型；研究過程中也加入了彈動位置(也就是初始條件)的影響。在實驗方面，實驗取得的頻譜逐一和模型的計算結果比較，不論是拾音器位置或是彈動位置的實驗結果，都和理論模擬一致，支持此一理論模型的正確性。研究中也利用頻譜呈現了古典吉他與電吉他的差異，並賦予物理詮釋，以及，對於樂器的音色之物理性質有較詳細的討論。因此，吉他是研究一維駐波很好的工具。雖然它很古老，仍有值得探討之處。

## 陸、圖表與照片

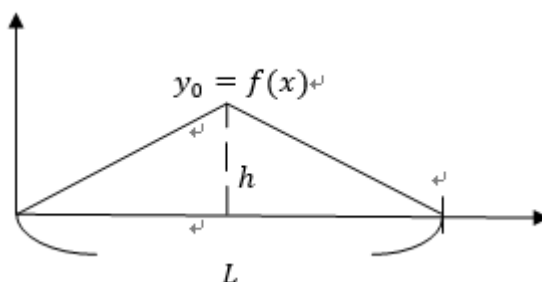


圖 1：弦的邊界條件及初始條件

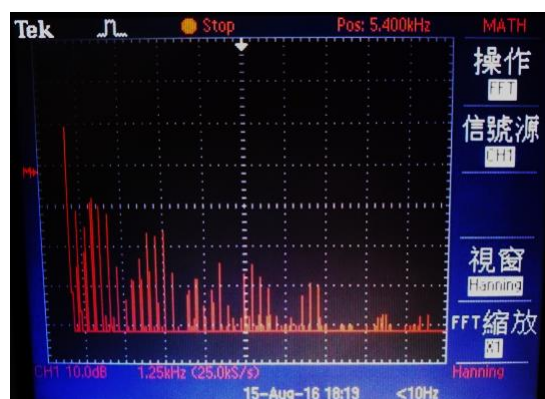


圖 2：單拾音器的頻譜

以實驗探討電吉他的電磁學及聲學

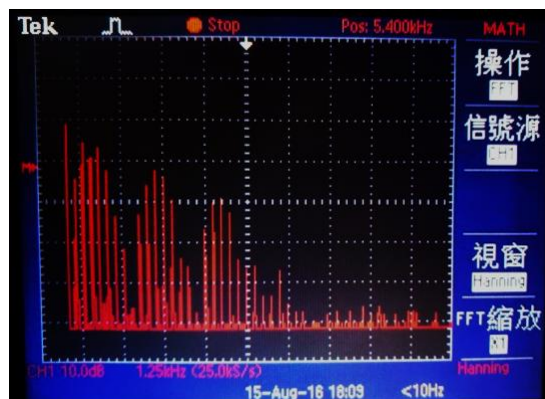


圖 3：雙拾音器的頻譜

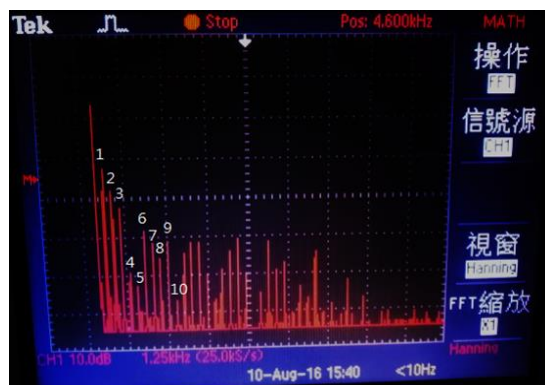


圖 4：拾音器擺放於  $L/5$  位置之頻譜

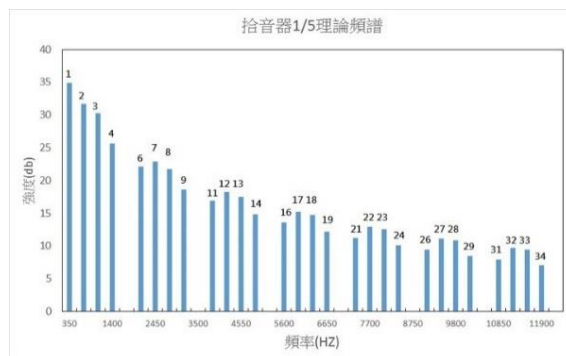


圖 5：拾音器擺放於  $L/5$  位置理論模擬圖

鄧善友、劉上傑、黃思端、林麟杰、嚴祖強

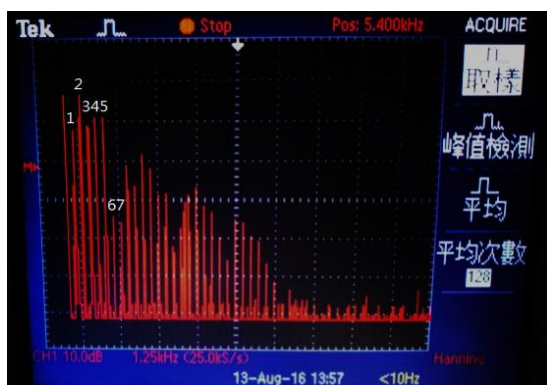


圖 6：拾音器擺放於  $L/7$  位置之頻譜

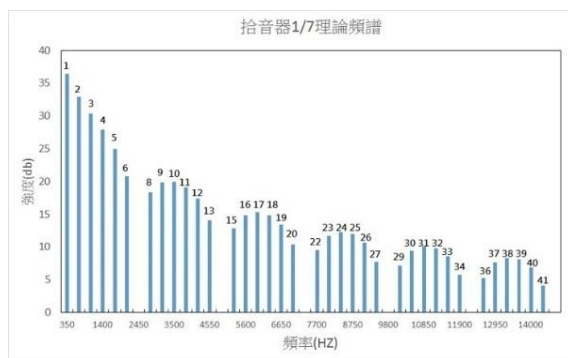


圖 7：拾音器擺放於  $L/7$  位置理論模擬圖

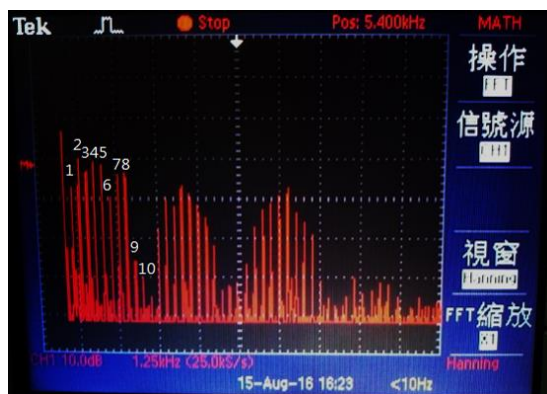


圖 8：拾音器擺放於  $L/10$  位置之頻譜



以實驗探討電吉他的電磁學及聲學

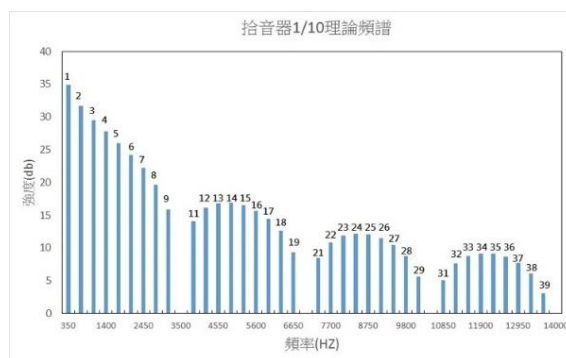


圖 9：拾音器擺放於  $L/10$  位置理論模擬圖

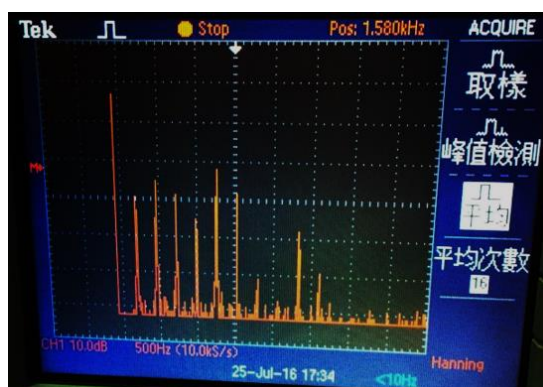


圖 10：古典吉他頻譜圖

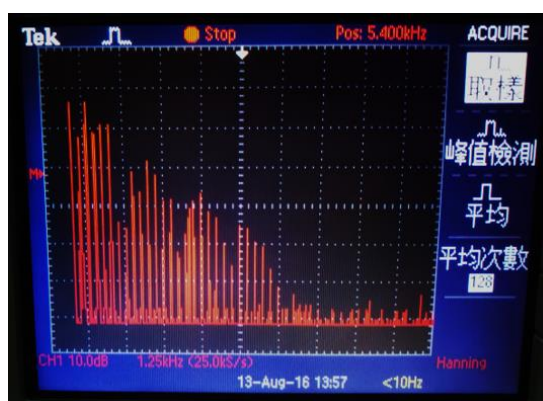


圖 11：電吉他頻譜圖

鄧善友、劉上傑、黃思端、林麟杰、嚴祖強

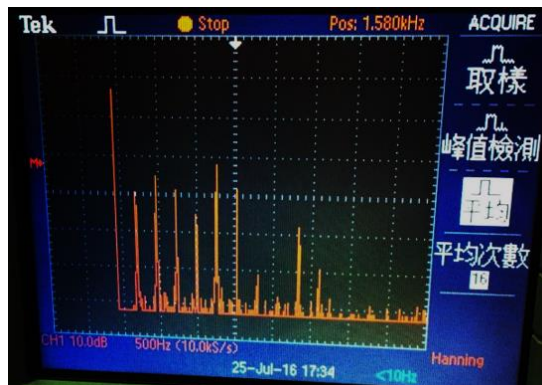


圖 12：古典吉他頻譜圖

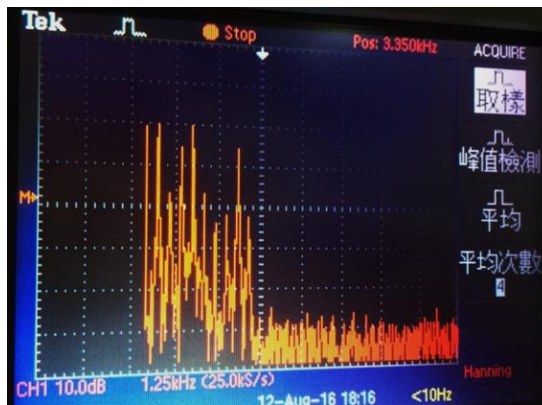


圖 13：民謠吉他頻譜圖

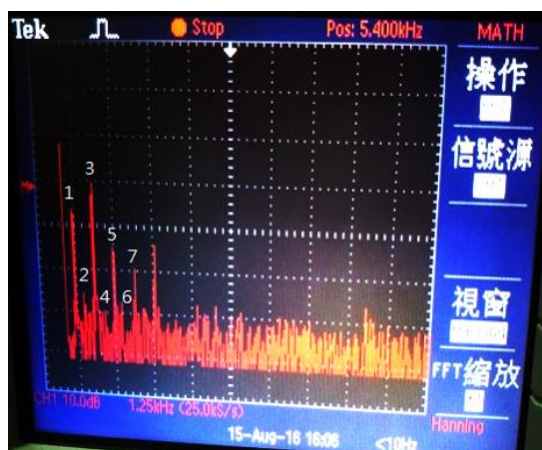


圖 14：古典吉他彈動弦的二分之一位置

以實驗探討電吉他的電磁學及聲學

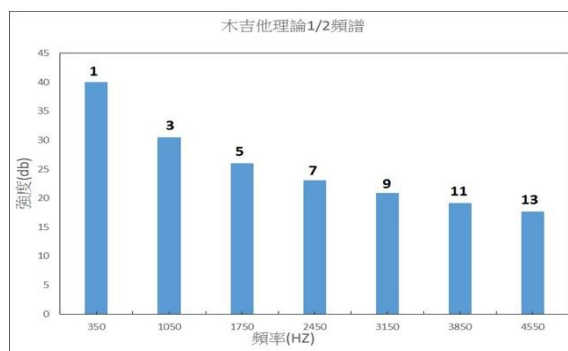


圖 15：古典吉他彈動弦的二分之一位置理論模擬圖

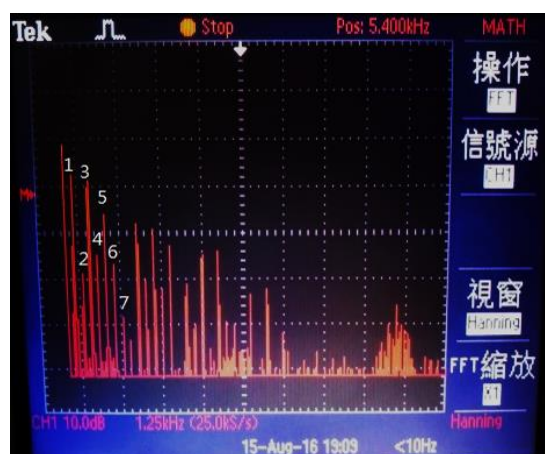


圖 16：電吉他彈動弦的二分之一位置



圖 17：電吉他彈動弦的二分之一位置理論圖

鄧善友、劉上傑、黃思端、林麟杰、嚴祖強

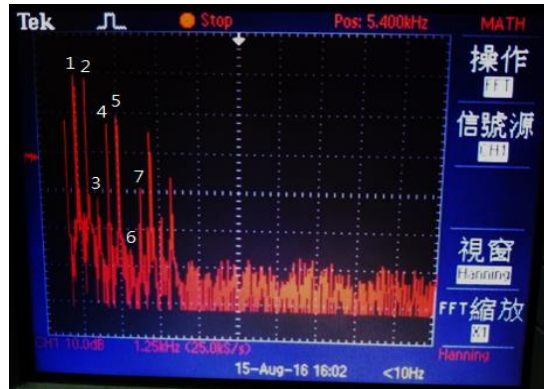


圖 18：古典吉他彈動弦的三分之一位置

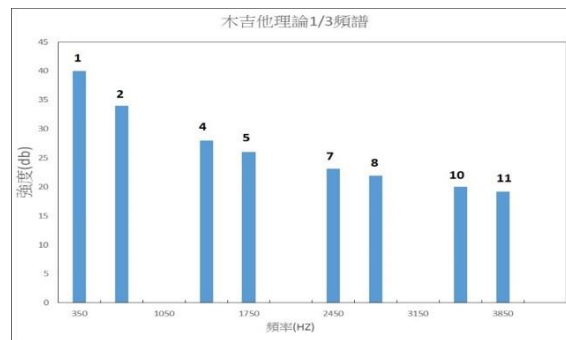


圖 19：古典吉他彈動弦的三分之一位置理論模擬圖



圖 20：電吉他彈動弦的三分之一位置

以實驗探討電吉他的電磁學及聲學

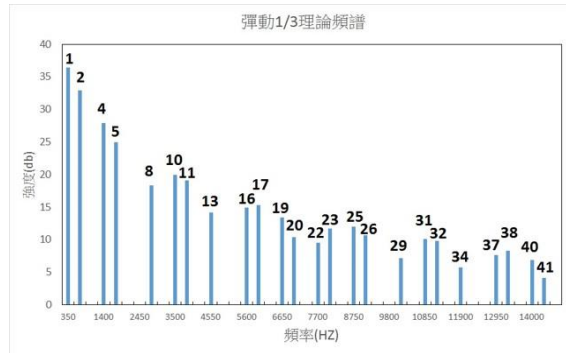


圖 21：電吉他彈動弦的三分之一位置理論模擬圖

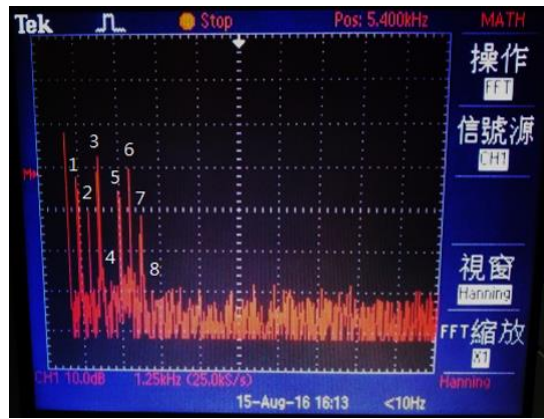


圖 22：古典吉他彈動弦的四分之一位置

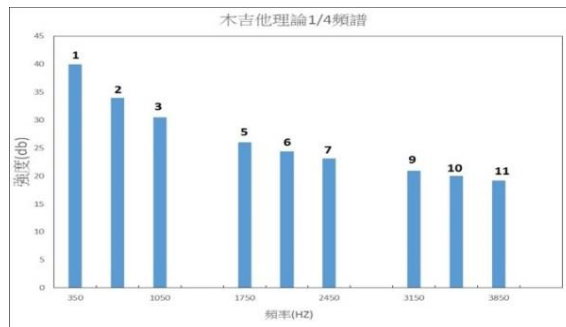


圖 23：古典吉他彈動弦的四分之一位置理論模擬圖

鄧善友、劉上傑、黃思端、林麟杰、嚴祖強

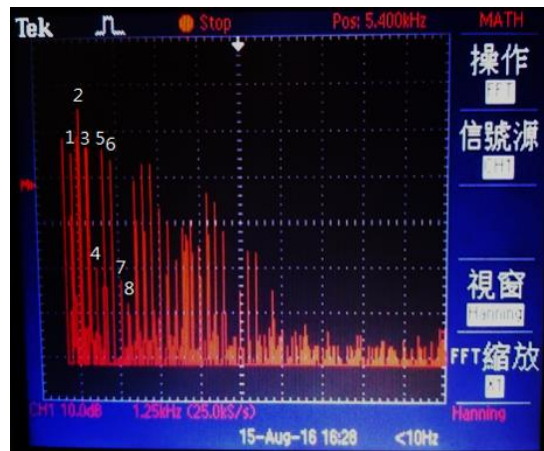


圖 24：電吉他彈動弦的四分之一位置



圖 25：電吉他彈動弦的四分之一位置理論模擬圖

## 致謝

本研究是由科技部科普計畫補助（計畫編號：MOST 106-2515-S-110-002-）。

## 參考文獻

1. Boas, M. L. (2005), *Mathematical Methods in the Physical Science* (3rd ed.), John Wiley & Sons.
2. French, R. M. (2009), *Engineering the Guitar: Theory and Practice*, Springer.
3. French, R. M. (2012), *Technology of the Guitar*, Springer.
4. Powell, J. (2011), *How Music Works: The Science and Psychology of Beautiful Sounds, from Beethoven to the Beatles and Beyond*, Little, Brown and Company.
5. Rossing, T. (2010), *The Science of String Instruments*, Springer.
6. Serway, R. A. and Jewett, J. W. (2013), *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (9th ed.), Cengage Learning.

## **Experimental Study on Electromagnetism and Acoustics of an Electric Guitar**

**Shan-You Teng, Shang-Jie Liou, Ssu-Tuan Huang, Lin-Jie Lin, Yen Tsu-Chiang Yen\***

Department of Physics, National Sun Yat-sen University

\*Corresponding author: yentc@mail.nsysu.edu.tw

### **Abstract**

Electric guitars are the iconic instrument of rock'n roll and most of the popular music. Due to the popularization of electronic musical instruments, more and more people interest in how electric guitars work. This study focuses on the physics of the electric guitar and the differences between it and the acoustic guitar. To produce sound and turn the vibrations of the strings into electronic signals, there are magnetic pickups in an electric guitar instead of the hollow resonating cavity found in the acoustic guitar. This study could help students to learn electromagnetism and acoustics more deeply and enjoyably.

**Key words:** electric guitar, magnetic pickup, electromagnetism, acoustics

鄧善友、劉上傑、黃思端、林麟杰、嚴祖強



# 聲音與音樂的物理

## 與本主題相關的進階學習

### 一、聽見宇宙的聲音:

【自然系列-物理 | 聲學】 (聲學)聽見宇宙的聲音【part1】

<https://www.youtube.com/embed/1pII2JJcZSY>

畢達哥拉斯有天走在路上，發現鐵匠敲鐵會發出不同頻率的聲音，所以推論出聲音來自於物質的震動，而聲音的高低取決於震動的快慢，弦是的長短或是鬆緊和震動的快慢有關聯，畢達哥拉斯還發現了天體音樂。

113 級 柯惠予

### 二、音樂的物理:

The Physics of Music: Crash Course Physics #19

<https://www.youtube.com/embed/XDsk6tZX55g>

音樂佔據我們生活很大的一部分，而音樂跟物理有很大的關聯。這個影片介紹了音樂中的物理，告訴我們聲波與音樂的關係，以及聲波如何使我們的耳朵聽到優美的音樂。

112 級 吳至恩

### 三、聲音從哪裡來？

<生命裡的科學>20130622-聲音從哪裡來

<https://www.youtube.com/embed/btOXecaFTy0>

摩擦杯子時，之所以會發出聲音是因為摩擦力使杯子產生震動，震動讓杯子發出聲音，透過空氣當作介質，再將聲音傳遞到我們的耳朵裡，不同介質來傳遞聲音，會有不同的聲速。 113 級 柯惠予



# 國立中山大學 物理系

## 生活物理演示 服務市民



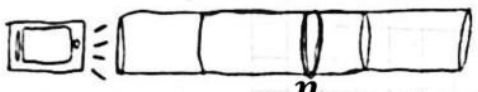
# 聲音及音樂的物理

### 行動演示-1：空氣柱的共振

高中生準備事項：手機·app

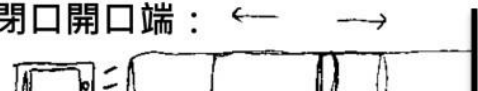
“frequency sound generator”

兩端開口端：← →



頻率取 1000Hz  $\frac{n}{2L} = \lambda$

閉口開口端：← →



頻率取 750Hz  $\frac{m}{4L} = \lambda$

移動捲紙的組合長度來調整適當管長在另一端撥放特定頻率

$v = f \lambda$  聲速取 340m/s

### 行動演示-2：都卜勒效應

高中生準備事項：手機·app” 科學日誌”



轉動播放特定頻率的手機發現聽到的聲音頻率變化

### 行動演示-2：唱歌的鋁棒

手指固定端用力壓住鋁棒中心，僅以大拇指與食指(以縮小節點的範圍)

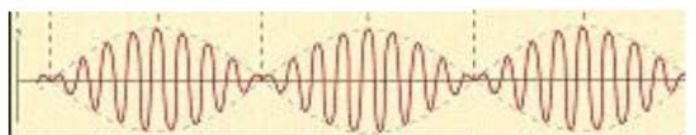


移動端僅以大拇指與食指出力摩擦

### 行動演示-2：波的干涉與拍頻

高中生準備事項：手機·app”

frequency sound generator & 科學日誌”




再播放 1000Hz

對上 1001Hz





# 國立中山大學 物理系

## 生活物理演示 服務市民



# 聲音及音樂的物理

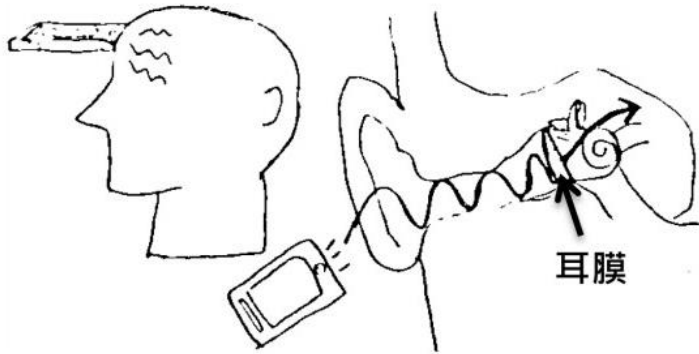
### 帳篷演示-1：用頭殼聽音樂

#### 準備事項：

手機錄音程式 預先下載音樂卡農。

將手機發聲道貼近額頭頭骨

頭殼內部共振 vs 耳部薄膜震動



### 帳篷演示-1：唱歌的鋁棒

手指固定端用力壓住鋁棒中心，僅以大拇指與食指 (以縮小節點的範圍)



移動端僅以大拇指與食指出力摩擦

### 帳篷演示-1：鋸琴

改變彎曲程度



大腿夾住

### 帳篷演示-1：降噪耳機原理

利用電子電路可產生和噪音音波相位相反之訊號的原理，產生時破壞性干涉消除噪音。以此特性改變電路板設定值調整撥放音樂的正反波型，恰改變波最大最小值出現之處；移動位置可聽見明顯大小聲差異。

