

以實驗探討邊界條件對二維駐波的影響

林靖棠 黃啟富 陳維琳 林麟杰 嚴祖強*

國立中山大學 物理系

*通訊作者：yentc@mail.nsysu.edu.tw

(投稿日期：民國 105 年 10 月 18 日，接受日期：105 年 11 月 14 日)

摘要：在學習物理的過程中，學生們在高中時就很熟悉一維的駐波了，對於一維駐波的理解及分析都少有問題。然而，許多學生對於二維駐波的學習卻很有困難，特別是理論和實驗之間的對應關係更難理解。本研究嘗試建議簡單的實驗方法，用以探討金屬片和肥皂膜兩個系統中的駐波，並且改變不同的邊界條件，設法藉此幫助學生了解二維駐波的物理性質。在動手做的過程中發現，學生由觀察到的現象去理解理論內容，的確對於二維駐波的學習很有幫助。論文中將對上述兩個系統中的駐波有更詳細的呈現。用很簡單的肥皂膜實驗就可以實現一般實驗室中很難做到的高階二維駐波為本研究的一個創新。

關鍵詞：二維駐波、金屬片、肥皂膜、邊界條件

壹、前言

現今的學生在學習物理時，往往只是背誦課本上的公式，然後直接代公式解題目，並沒有真正了解其中的物理意義。更因為有些公式十分冗長，學生死背這些公式使得「學習物理」變得困難又可怕，學生開始拒絕物理於千里之外。為了解決這個問題，本研究嘗試藉由動手做實驗來增添學習物理的趣味，讓學生了解那些複雜公式背後的物理意義。

此研究以探討二維駐波的物理現象為主題。學生們對於一維駐波很熟悉也好理解，但是在二維狀況下，物理系統的座標系統及邊界條件會導致較為複雜的模態及色散關係，不但數學複雜了許多，物理現象也很難想像，理論和實驗之間的對應關係更難理解，許多學生在二維駐波的學習上很有困難。因此本研究將會藉由肥皂膜及金屬片兩個系統的駐波實驗，設法幫助學生理解二維駐波的物理性質，並藉此提高學生的學習樂趣。研究中也會探討邊界條件對於二維駐波的影響。企圖建議一些讓學生動手學的實驗，幫助學生由觀察到的現象去理解理論內容。

貳、實驗原理

此研究之核心原理為波動方程式。對於二維之長方形平板，波動方程式必需以直角座標呈現；當系統的邊界條件為在邊界處其波函數為 0 時，其解為 sin 及 cos 函數，各波函數之頻率 ω 與波數 k 的色散關係(Dispersion relation)為：

$$\frac{\omega}{v} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (1)$$

其中 v 為波速， m 、 n 為大於 0 之整數。這個公式顯示每個穩定的模態(m,n)皆對應一個特性頻率 ω 。當系統的驅動頻率和此特性頻率相同時，對應的模態便會被激發，讓實驗者觀察到該模態。色散關係描述了駐波的空間（模態分佈）與時間（頻率）之間的關係。

在二維圓形平板的情況下，波動方程式必需以圓形極座標呈現；當系統的邊界條件為在邊界處其波函數為 0 時其解為 Bessel 函數，且同樣會得到類似(1)式的色散關係。各模態(m,n)所對應之圖形即為 Chladni pattern。

參、實驗步驟及方法

本研究使用兩個系統進行二維駐波的實驗，分別為肥皂膜及金屬片。研究過程中，使用 Wolfram CDF Player 的示範程式模擬各種二維駐波，藉以和實驗結果對照，幫助學生學習。

一、肥皂膜系統

以洗碗精:水:甘油為 4:2:1 的比例配製肥皂水。實驗以兩種方式進行，第一種是用聲波振動肥皂膜，使肥皂膜呈現二維駐波的現象；另一種則是以手振動。

在第一種方法中，接線如圖 1 所示，使用手機的 Frequency Sound APP 控制發出聲音的波形及頻率，再將手機訊號接到放大器及喇叭使音量變大。最後利用挖掉底部的塑膠碗支持肥皂膜置於喇叭上（塑膠碗不可接觸到喇叭），即可觀察到駐波圖形。

在第二種方法中，以鐵絲圍繞成一個長方形及一個圓形的框架，沾上肥皂膜，用手振動鐵絲框便可看見駐波。

二、金屬片系統

此實驗準備了兩片金屬片，一片為方形、另一片為圓形。金屬片的尺寸如圖 2 所示，其厚度皆為 0.5 mm，並在其正中央各鑽一個直徑為 0.7 cm 的圓孔，能讓固定裝置的螺絲穿過並用螺帽固定。

實驗時先將金屬片用螺絲固定到音響的喇叭上，並利用水平儀使金屬片擺放水平，均勻灑上細沙。接著將訊號產生器連接到喇叭，由低頻開始慢慢增加頻率，可適當調整振幅，觀察駐波的圖樣。

另一種作法為：在金屬片上撒一些沙子，在金屬片邊緣拉動弦樂器的琴弓振動金屬片，隨著產生的聲音頻率不同，金屬片上的沙子便會呈現不一樣的圖形，如圖 3 所示。

肆、實驗結果及討論

一、肥皂膜系統

(一) 用聲音振動肥皂膜

以手機輸出聲音的訊號驅動喇叭的振動頻率，在一些特定的頻率即可激發出穩定的駐波模態。本實驗結果分為方形邊界（如圖 4、圖 5 所示），以及圓形邊界（如圖 6、圖 7 所示）。這兩組圖片中可以明顯看出，在同樣的邊界條件時（方形邊界或圓形邊界），不同的振動頻率所激發出的肥皂膜的駐波模態會不同。另一個對比是，圖 5 和圖 6 都是 46 Hz，但是不同的邊界條件對應的駐波形狀有很大的不同。

在圖 6 和圖 7 實驗照片中，駐波的節點和腹點非常清晰，而且和理論模擬的圖形對應得非常好，可以說是這個研究的一大成功。在一般實驗室中，很難實現高階二維駐波的實驗，本研究能夠用這個簡單的方法實現這些實驗，可說是物理實驗教學的一大創新。

(二) 以手振動鐵絲框上的肥皂膜

這個實驗以簡單的方法就可以觀測到二維駐波，和理論的對照非常直接。而且實驗中可以清楚用肉眼觀察到模態的相位變化，對於學習駐波很有幫助。由於手能夠施加的振動頻率比較低，實驗中比較容易激發低階的模態(1,0)和(1,1)，比較難於激發高階的模態。這個方法的優點是讓實驗者親自用手振動鐵絲框，因此實驗者的體驗和學習比較深刻。當頻率較低時，激發的肥皂膜模態較為簡單；當頻率較高時，模態則較複雜。

二、金屬片系統

此實驗中有方形（如圖 9 所示）及圓形（如圖 10、圖 11 所示）兩種金屬片。在各圖中，沙子聚集的區域沒有振動，即為駐波的節點；反之，沒有沙子的區域即為腹點。各組圖片中，實驗和理論之間的對應也很良好，可以有效幫助學生的學習。

三、探討邊界條件對駐波的影響

重新整理以上的實驗結果，表 1 中比較了直角坐標下、邊界條件對駐波的影響。表 2 中則是極座標的情況。由表 1 及表 2 可以得知：無論在哪一種座標系下，只要邊界為固定，其二維駐波在邊界必為節點；反之，若其邊界為無固定，則二維駐波在邊界可為結點或腹點。

伍、結論

此一研究中的各項實驗的確可以幫助學生學習二維駐波的各種物理性質，其中包括座標系統、模態的激發、色散關係、以及邊界條件，各實驗結果和理論模擬結果之間的對應非常良好，可以幫助學生了解二維駐波理論的內容，大幅提昇學生的學習成效。

在實驗方法方面，肥皂膜和金屬片都是很容易獲得及掌控的器材，輔以一些支援性的基本實驗設備，就可以獲致很好的實驗效果，而且實驗內容及實驗現象都很豐富，是值得推廣的實驗。

陸、圖表與照片

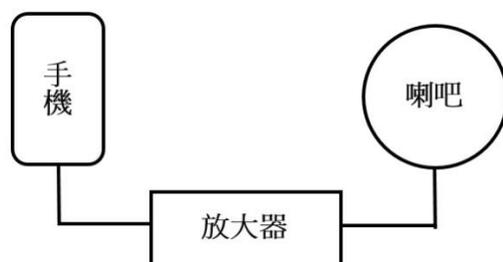


圖 1：肥皂膜實驗接線圖

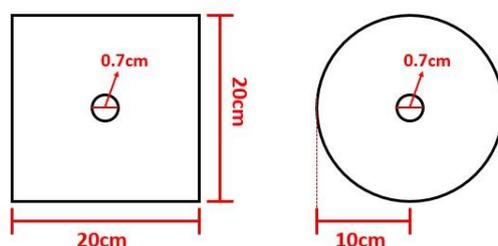


圖 2：方形及圓形金屬片大小示意圖

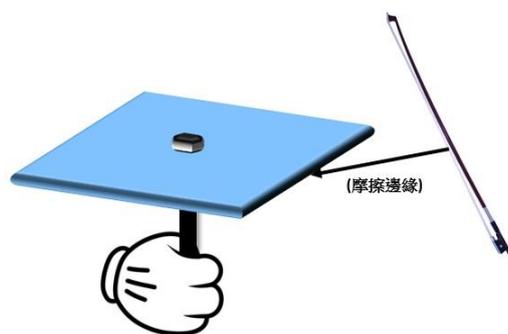


圖 3：金屬片駐波實驗操作示意圖

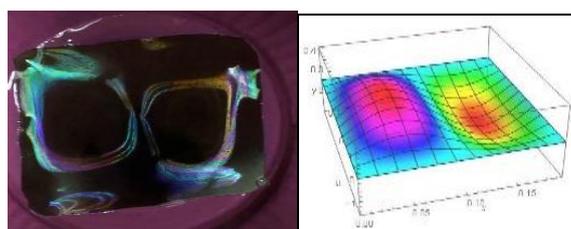


圖 4：頻率為 23 Hz 的方形肥皂膜駐波及模擬圖形

以實驗探討邊界條件對二維駐波的影響

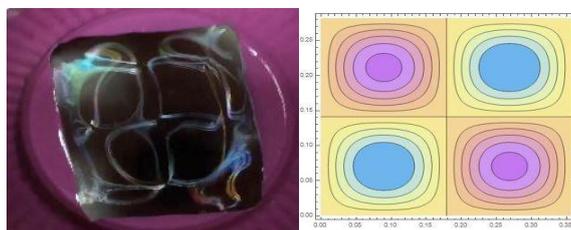


圖 5：頻率為 46 Hz 的方形肥皂膜駐波及模擬圖形



圖 6：頻率為 46 Hz 的圓形肥皂膜駐波及模擬圖形



圖 7：頻率為 67 Hz 的圓形肥皂膜駐波及模擬圖

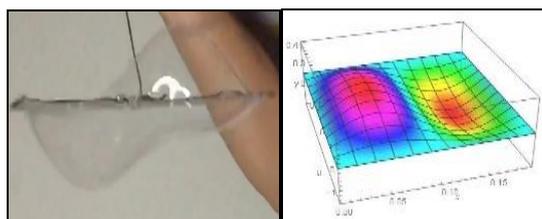


圖 8：振動鐵絲框的方形肥皂膜駐波及模擬圖形

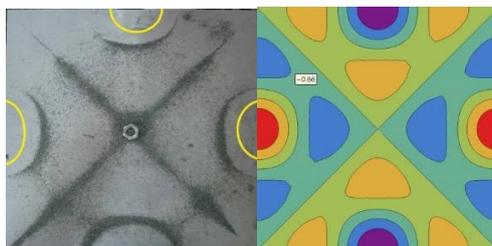


圖 9：方形金屬片振動的駐波及其模擬圖

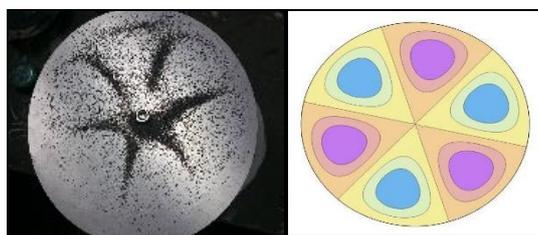


圖 10：圓形金屬片振動的低階駐波及其模擬圖

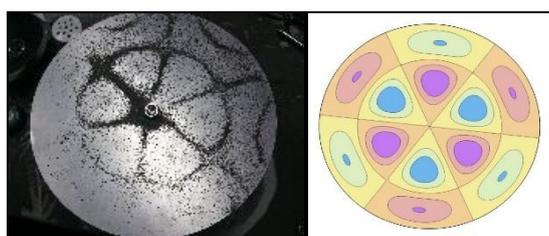


圖 11：圓形金屬片振動的高階駐波及其模擬圖

表 1：直角坐標下邊界條件之比較

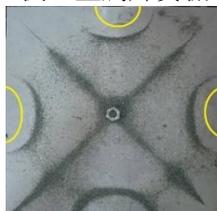
邊界固定 駐波在邊界 必為節點	邊界無固定 駐波在邊界可為 節點或腹點
例：肥皂膜實驗	例：金屬片實驗
	
其邊界為節點	在邊界，黃色圈起處為腹點；沙子聚集處為節點

表 2：極坐標下邊界條件之比較

邊界固定 駐波在邊界 必為節點	邊界無固定 駐波在邊界可為 節點或腹點
例：肥皂膜實驗	例：金屬片實驗
	
其邊界為節點	在邊界，黃色圈起處為腹點；沙子聚集處為節點

以實驗探討邊界條件對二維駐波的影響

致謝

本研究是由科技部科普計畫補助（計畫編號：MOST 104-2515-S-110-001）。

參考文獻

1. Boas, M. L. (2005) *Mathematical Methods in the Physical Science* (3rd ed.). NY: John Wiley & Sons.
2. Serway, R. A. & Jewett, J. W. (2013) *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (9th ed.). Boston: Cengage Learning.
3. Wolfram CDF player: <https://www.wolfram.com/cdf-player/>

Experimental Investigation the Effect of Boundary Conditions on Two-dimensional Standing Waves

Jing-Tang Lin, Chi-Fu Huang, Wei-Lin Chen, Lin-Jie Lin, and Tsu-Chiang Yen*

Department of Physics, National Sun Yat-sen University

*Corresponding author: yentc@mail.nsysu.edu.tw

Abstract

In the learning of physics, students are familiar with one-dimensional standing waves in high schools. There is no problem to understand and to analyze one-dimensional standing waves. However, many students encounter difficulties in the learning of two-dimensional standing waves, especially, to understand the correspondence between the theories and experimental results. This research tried to propose some simple experimental methods for the investigations of the standing waves in metal plates and soap films. The effects of various boundary conditions were also considered, helping students to understand the physics characteristics of two-dimensional standing waves. In the processes of learning by doing, students can understand the theories through the observations of experimental phenomena, which is very helpful for the learning of two-dimensional standing waves. The standing waves in metal plates and soap films will be presented. The high-order two-dimensional standing waves are very difficult to observe in conventional laboratories. It can be realize with such a simple soap film experiment. That is an innovation of this research.

Key words: 2-dimensional standing wave, metal plate, soap film, boundary conditions

璀璨的駐波 進階學習

鋁棒發生駐波

摩擦鋁棒使鋁棒產生震動，此時鋁棒內部會產生許多不同頻率的波，我們藉由壓住鋁棒的中心點來整理波型，留下以中心點為節點的一種駐波。持續摩擦鋁棒會不斷累積駐波的能量，直到我們可以聽見駐波的聲音。

鋁棒的粗細並不會影響聲音的頻率，鋁棒的粗細影響的是發聲的難易度，我們比較相同長度但是不同粗細的鋁棒，越粗的鋁棒所含的原子越多，需要更多能量使鋁棒震動而發聲，所以粗的鋁棒較細的鋁棒難發聲。

鋁棒的材質也是影響發聲難易度的因素，密度越大的鋁棒分子結構越緊密，需要更多的能量才能使他震動，所以較難發聲。密度越小的材質則反之。因此以鋁、銅、鋼而言，鋁的密度小於銅小於鋼，因此發生的難易度依序為鋼最難，銅次之，而鋁是其中最容易發生的材質。影響聲音頻率的因素是鋁棒的長短，越長的鋁棒發出的波長就越長，頻率也就越低，越短的鋁棒發出的波長越短，頻率也就越高。

物理學系 112級 施柏安

駐波的自然頻率產生共振

如果我們持續發出與某個水晶玻璃杯的自然頻率 相符合的聲音，將會使水晶杯破碎；另外，有時如果有飛機或直升機從家裡附近的上空飛過時，會使房子內的門窗產生振動而發出聲音。而登山的山友在登山時嚴禁大聲喊叫，則是因為喊叫聲中若有某一個頻率正好與山上積雪的自然頻率相吻合時，就會因共振而引起雪崩，造成十分嚴重的後果。當我們在浴室唱歌，唱到某個特定的低音時，會覺得聲音好像變大，這是因為此特定頻率的低音與浴室牆壁間駐波的自然頻率產生共振的結果。

物理學系 112級 黃玫瑰



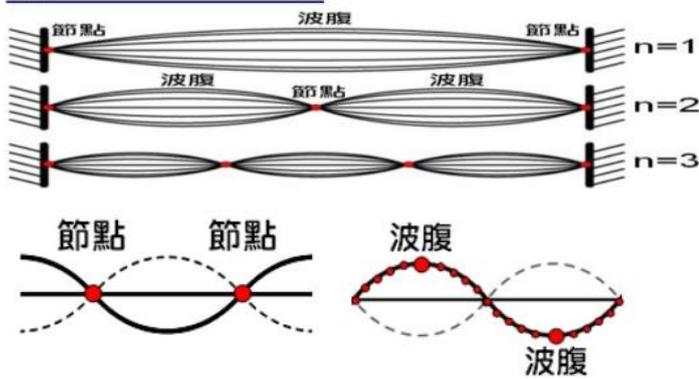
國立中山大學 物理系
生活物理演示 服務市民



璀璨的駐波

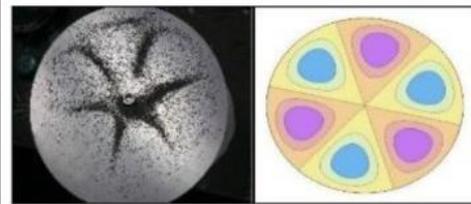
行動演示-1：繩上的駐波

高中生準備事項：每組自備童軍繩一條

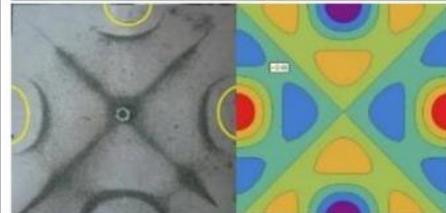
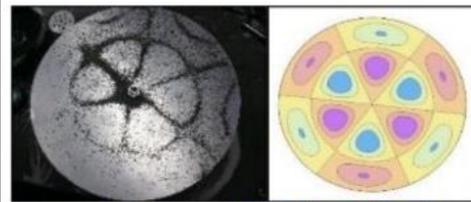


了解基本駐波的原理

行動演示-2：鋁片的駐波



利用鋁片的震動與沙子的跳動，了解駐波在二維的情形



行動演示-3：泡泡的低階駐波



用肥皂膜的震動，來演示二維的駐波

行動演示-4：鼓的駐波



利用鼓面的震動與沙子的跳動，來演示二維的駐波



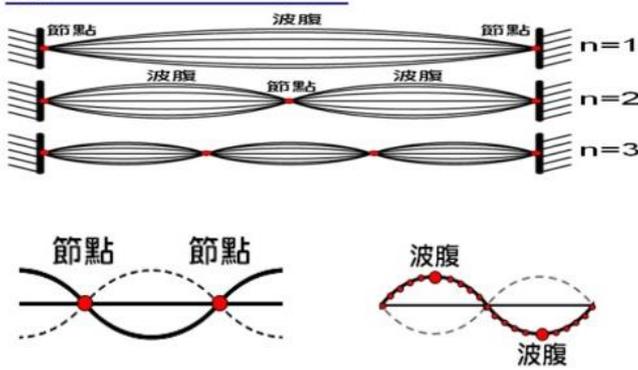
國立中山大學 物理系
生活物理演示 服務市民



璀璨的駐波

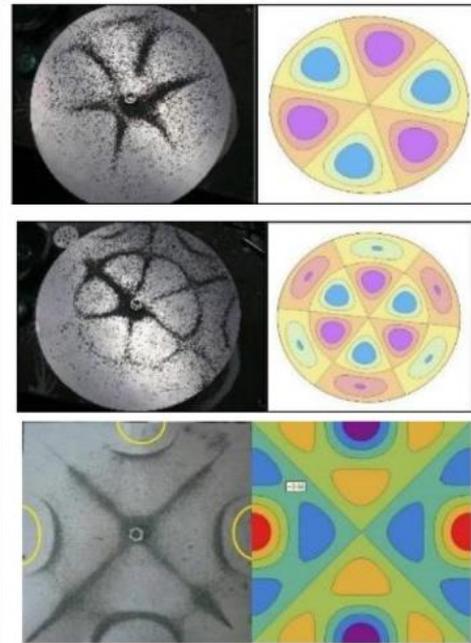
帳篷演示-1：繩上的駐波

高中生準備事項：每組自備童軍繩一條



了解基本駐波的原理

帳篷演示-2：鋁片的駐波



利用鋁片的震動與沙子的跳動，了解駐波在二維的情形

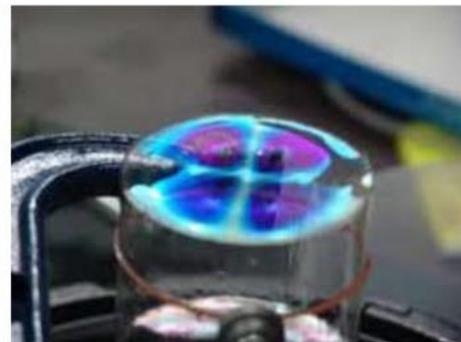
帳篷演示-1：泡泡的低階駐波



用肥皂膜的震動，來演示二維的駐波

帳篷演示-1：泡泡的高階駐波

高中生準備事項：需下載 Sound Frequenct Generator



用 speaker 來震動肥皂膜，產生更高階的駐波圖形