

璀璨的駐波

與本主題有關的數學

一維駐波推導

Standing waves on strings | Physics | Khan Academy

<https://www.youtube.com/watch?v=gT0lqL1dyyk>

先寫出行進波的波方程式

$$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t), \text{ 和 } y_2 = y_0 \sin(kx + \omega t),$$

將這兩個波疊加可得 $y = 2y_0 \cos(\omega t) \sin(kx) \dots (1)$

由(1)可知，在座標等於 $0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$ 時，振幅皆為0，即為節點；在座標等於 $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ 時，振幅最大，即為波腹。

再來我們來推導駐波在兩端固定的線上(一維)，求解其上的橫向振動，基本上就是解波動方程。

先寫出波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

稍微修改一下

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] y(x, t) = 0$$

因為是兩端固定的一維駐波，所以在固定端會是節點，振幅為0；因此我可以給定條件，在t時刻，0和l的位置位移為0。

$y(0,t)=0$ and $y(l,t)=0$ ，再來用分離變量法解這個問題

$y(x,t)=F(x)G(t)$ 最後可以得出

$$y(x,t)=\sin(n\pi x/l)(A_n \sin(n\pi vt/l) + B_n \cos(n\pi vt/l))$$

對應的波長和頻率分別為：

波長： $\lambda_n=2l/n$

頻率： $\omega_n=nv/2l$

即弦線長度為半波長的整數倍。其中最小的本徵值對應波長最長，頻率最低的振動，該頻率被稱為基頻。其餘的振動頻率都是基頻的整數倍，在音樂中這些振動被稱為泛音。
