國立中山大學教育研究所碩士在職專班

碩士論文

不同等號概念與一元二次方程式錯誤類型之分析

研究生：劉佩綺　撰

指導教授：梁淑坤　博士

中華民國 九十九 年 六 月

致　謝

完成論文之後的喜悅是無法形容的，終於完成一本屬於自己的論文。論文的完成，首先最要感謝的是指導教授梁淑坤老師的悉心指導，從論文題目的確立、研究方向、架構及內容的撰述、定期 meeting，老師總是給予關心卻未給我們壓力，適時的叮嚀與督促使我們不敢懈怠。也要感謝口試委員姚如芬老師與謝百淇老師，耐心的審查我的論文，指正其中的不足之處，並給予了許多寶貴的意見，使我的論文更臻完備。此外，還要感謝教研碩專班的每位教授在課堂上諄諄教誨，使我的學習收穫豐碩，在此致上萬分的謝意。

感謝亨足、瑋茵、淑怡、子琪在研究歷程中的相互扶持與一路走來的關懷與陪伴，若沒有你們的幫忙，研究工作則無法順利完成；感謝你們在這段時間的相互鼓勵，使我在遇到瓶頸時，得以繼續向前邁進。

最後還要感謝家人在我遭遇挫折時，聽我訴苦，在我承受壓力時為我擔憂，讓我在忙碌之餘，能緩一緩腳步，展露笑顏。

謹以此論文獻給我親愛的家人、師長及身邊所有重要的人。

不同等號概念

與一元二次方程式錯誤類型之分析

劉佩綺

摘要

本研究目的在探討國中二年級學生的不同等號概念與分析一元二次方程式錯誤類型，研究者採問卷調查法，樣本選取自高雄縣某國中二年級共 6 班，合計 215 人參與者均接受研究者自編之「等號概念認知與一元二次方程式的錯誤類型」測驗調查。本研究主要結果發現共三個，第一：參與的國二學生均有八成對等號概念是屬於關係型概念者，第二：關係型概念者在一元二次方程式的平均正確率較運算型概念者來的平均正確率高，第三：學生對等號概念的認知會影響其解題表現，相較於運算型概念者解題表現均以空白或亂猜居多，關係型概念者的解題表現是多元化的；建議教師在教學上應該加強學生對等號概念的認識並檢視學生的先備知識。

關鍵字：不同等號概念、一元二次方程式、錯誤類型

A study of the different understanding of the equal sign and error types of quadratic equation of one variable

Liu Pei-Chi

Abstract

The main purpose of this study is to investigate eighth-grade students' understanding of the equal sign and analyzed error types of quadratic equation in one variable. To achieve this purpose, the investigator did a survey and development instruments. Participants were 215 eighth-grade students who formed a convenient sample. There are three results. First, participants with a relational definition of the equal sign added to about 80% of the sample. Second, the performance of students with relational definitions is higher than the performance of students with operational definitions. Third, students' understanding of the equal sign was related to their respective problem-solving performance on quadratic equation in one variable. In this study, participants with an operational definition of the equal sign tended to guess randomly or leave a blank. Problem-solving performance of participants with a relational definition of the equal sign involved multiple strategies. The researcher suggested that teachers should strengthen students' understanding of equal sign and related students' prior algebraic knowledge.

Keywords: Different understanding of equal sign,

Quadratic equation in one variable, Error types

不同等號概念與一元二次方程式錯誤類型之分析

目錄

表次

圖次

第一章　緒論

第一節　研究動機

回憶起過去的求學階段時，數學佔了我生活中的絕大部分，在我的國小、國中、高中甚至到大學，唸數學是很快樂也從來不覺得可怕。一直到我懷抱著熱情當了數學老師之後，也希望學生們能像我從前一樣，能夠快快樂樂的學習數學，才發現這不是一件簡單的事。身為一個國中數學教師，我接觸到的是在國小學了六年數學的孩子們，雖然有些對數學依然保持興趣，但也有些因為成績差而失去成就感，以及對數學感到害怕和恐懼，甚至提早放棄學習數學。面對這些學習態度迥異的國中生，倘若我們當教師的能找出孩子感到學習困難的癥結，並盡力的幫助孩子們學習，相信一定可以提高孩子對數學的熱情與學習意願。

回到國民教育方面，在學生的知識養成教育中，數學一直是不曾缺席的，因為數學不僅是科學之母，更是一切科學研究的基礎。在科學領域之外，所要求的溝通數學方法不只計算能力還有高層次思考與溝通能力。其中數學「符號」的使用，就是一種溝通數學的方法。倘若溝通的第一步就是必須將正確的意義傳達給別人，當教師或學生透過符號將自己的概念、想法呈現出來時，符號便成為心智

概念的代言人，而心智概念也是符號的實質意義。例如，在數字表達方面，以阿拉伯數字「5」，或英文的「five」甚至羅馬數字的「V」是三種不同表達方式，用以代表此數字概念（陳澤民，1995），若當符號與概念無法相結合時，就會產生溝通上的問題，進而引起學習上的困難。

在學生進入國中之後，學生會開始接觸方程式的學習，國一開始學習一元一次方程式，而國二則學習一元二次方程式，這學習是國中階段解方程式的終點，也是高中課程中解高次方程式的基礎，足可見學好一元二次方程式對學生的重要性與影響。在解方程式時，對等號的理解相當重要。Knuth, Stephens, McNeil, Alibali (2006) 針對中學生的研究中就明白表示「要成功地解方程式，對等號概念的瞭解才是關鍵」，具備關係定義等號概念者在方程式解題表現較好，即使是控制數學成就測驗成績下，等號概念對解題表現仍是有顯著影響的。一般而言，若學生缺乏關係意義的等號概念，而將等號視為運算符號，他們對於算術等式「如 5＋6＝4＋7」的理解及等量方程式（有相等解的方程式）的判斷都出現極大的困難。反之，能夠將等號視為是關係意義符號者，較能夠以等量的觀點判斷等量方程式且其解題正確性也較高。

方程式除了是由數學式子構成之外，它還具備了左右相等的特

性，此時等號的意義則重視兩邊要維持平衡的等量關係，強調的是等號的對稱性及遞移性 (Kieran, 1989），而非運算後連結答案的符號。但是學生若仍然以運算的觀點理解等號，在代數學習中則無法理解非典型等式（如 3x+6 = 5x+12）的意義，同時會干擾其代數運算和解題規則的理解、運用（陳嘉皇，2008）。因此在學生的學習過程中，必須提昇對等號「關係意義」的瞭解，其重要性除了學生在算術領域中，可以熟悉算術中等量概念的表徵，有助於進行算術運算外；更希望學生在代數學習上，理解代數結構中方程式的等量意義，以強化代數解題策略的使用。

學生經常使用的「等號」便是其中一個容易產生符號與概念無法相連結例子。事實上在中小學階段，要建立學生等號兩邊數量相等的觀念，其所強調的等號是具備等量概念、代表關係意義的符號（教育部，2003），但研究中顯示，並非學生缺乏兩物件數量相等的概念，而是無法將等號的使用連結至代表等量的概念，因此在面對「5+6 = 4+7」的數學式子時，會產生認知上的衝突，這樣的衝突甚至延伸到代數學習階段而造成學習困難 (Behr et al., 1980; Kieran, 1992) 。小學階段是學生算術學習的開始，在大量要求運算結果的題目下，如6+8=( )，看到等號就相當於必須完成一件事情，因此對等號存在著根深蒂固的運算概念，認為等號就是單向性、由左至右且

必須連結運算結果的符號，象徵著「加起為…」，缺乏等號的等量概念。

等號概念意義的瞭解對代數的學習是如此重要，但在國中階段教師往往會忽略對等號意義的解釋，在以等號進行等量概念溝通的時候，學生是否仍存在運算的觀點而產生方程式理解及運算的困難是數學教師必須特別注意的（楊喻惟，2009）。

研究者追索國內研究文章中，目前國內針對國中一元二次方程式進行等號相關的研究並不多，因此研究者希望能夠瞭解目前國中學生對於等號意義的認知是否已具備兩邊等值的概念，再進一步探討學生等號概念對一元二次方程式解題策略使用之影響以及在解題表現之差異情形。除了探討等號概念的重要性之外，研究者期望能藉此研究結果對教師提出在教學上的相關建議，以協助學生在代數階段能夠更順利的學習。

第二節　研究目的與問題

根據以上的研究動機，本研究之研究目的及研究問題如下：

一、研究目的

（一）了解國二學生對等號概念概念的認知情形。

（二）了解國二學生在一元二次方程式的錯誤類型。

（三）了解等號概念與一元二次方程式錯誤類型之關係。

二·研究問題

（一）國二學生對等號概念的認知情形為何？

（二）國二學生在一元二次方程式的錯誤類型為何？

（三）等號概念與一元二次方程式的錯誤類型關係為何？

第三節　名詞界定

為使本研究中使用的名詞之意義明確，茲將其界定如下：

一、不同等號概念

依據教育部 (2003) 所公佈的九年一貫課程綱要，數學領域分年細目中，等號係指兩邊的數量一樣多、相等之意義。國外學者 McNeil 等人 (2006) 針對等號概念定義進行相關研究中，並將等號概念分成「運算型定義」、「關係型定義」二種，其分述如下：

（一）運算型 (operational) ：運算定義的等號概念，係指學生對等號的理解為經過加減乘除之後，所得到的結果答案。因此，學生將等號理解結果解釋為「答案」、「總和」、「全部數字加起來」、……等等。

（二）關係型 (relational) ：關係定義的等號概念係指學生具備等號兩邊等量的概念，是以平衡的觀點判讀等式。因此，學生會將等號理解結果解釋為「兩數（量）相同」、「等價（量）」、……等等。

本研究指的不同等號概念，係指以上之二種概念。

第四節　研究範圍與限制

本研究以九十八學年度高雄縣鳳山市某國中二年級學生作為研究對象，在探討國中生不同等號概念類型之下的一元二次方程式之解題表現，其中對於等號概念主要是使用 McNeil 等人 (2006) 所採的分類觀點。至於一元二次方程式題目，則是依據我國 92 年版九年一貫課程綱要來編製。

故本研究採高雄縣鳳山市某國中二年級學生為研究範圍，所得之研究結果僅能反映出該校二年級學生在不同等號概念下的作答表現，且在推論上亦僅限類型的作答情況，待進一步研究後才能推論至其他地區學校、或其他題型的方程式。

第二章　文獻探討

根據本研究的研究動機與目的，研究者蒐集國內、外與代數研究及等號概念相關的文獻資料，並加以整理、分析。

第一節　代數與文字符號

一、代數

（一）代數在歷史上的演進

代數語言在不同的時期有著不同的表徵方式，也蘊含著不同的意義。因此要去研究文字符號時，就要先去探討代數語言的歷史淵源，將有助於更清楚瞭解代數所蘊含的意義。

根據代數歷史演進的研究，可將文字符號演進的發展史分成以下三個階段：(簡珮華，2002)。

1. 文辭代數階段 (rhetorical algebra stage)

西元 250 年之前，人類以口語化的自然語言來描述解特定方程的過程，使用一般語言來敘述一些特殊問題的解決辦法，而沒有使用特殊的符號或記號來表示未知數。

2. 簡單代數階段 (syncopated algebra stage)

西元 250 年古希臘數學家 Diophantus 提出符號的運用之後，人們就開始懂得利用代數符號及較簡單的文字來代表未知量，但只會求特定方程式的解，並不能求出方程式的一般解。

3. 符號代數階段 (symbolic algebra stage)

Vieta (1549-1603) 以符號代表某一給定的數，此階段代數方程的係數能以文字符號表示且符號可以如同數字一般演算，而能求出方程式的一般解。

由以上代數的歷史發展三個階段可以看得出來，當代數的發展進入符號代數階段後，文字符號便成為數學家們用以表示數學通則性的方式，因此文字符號便成為在數學代數學習中一個重要的基礎概念。

（二）代數的相關研究

從學習的歷程來看，在國小階段，學生都是以數字來進行運算或解題，著重的是算術的運算法則；進入國中階段後，學生們便開始接觸到大量的文字符號，並且利用文字符號進行列式、解題活動。雖然代數的學習有賴於算術基本概念之養成，但受到算術規則及算術符號強烈制約下，反而影響了學生對代數結構的認知。例如，學生在計算 $(2x+1)$ 加上 $(x+4)$ 可能會出現 $3x + 5 = 8x$ 的迷思概念，這種情況是學生受到算術符號中加法運算的影響，認為看到「＋」就代表要

執行運算，無法接受以帶有加號的式子當成是代數運算後的答案。

戴文賓、邱守榕 (1999) 認為，在另一方面算術和代數之間有許多共同的符號，例如「＋」、「－」、「＝」等，但這些符號在算術和代數中的意義並不相同，學生在代數式的表徵與化簡上，往往會受到先前算術經驗所混淆，例如在算術階段學生認為數學就是要求出答案，答案通常是用一個“數”表示，如果不是一個“數”，那麼答案也要以單項式表示，因此會得到「3a＋5b＝8ab」或「3a＋5b＋a＝8aab」等的錯誤代數概念。

由以上相關文獻可知，學生要從算術階段進入代數學習階段時，往往會發生舊有的學習經驗而無法與新概念產生連結的情況。因為學生不瞭解代數結構，而且容易被結構中的符號、運算規則所混淆，認為在算術階段中使用的符號在代數階段的用途和意義仍是相同的，卻忽略了代數本身的結構及運算規則的意義，導致最後以記憶規則及程序的方式來學習代數，因而產生迷思概念，而在學習上遭遇到許多的挫折。

二、文字符號

（一）文字符號的概念

Collis (1975) 則由學生的觀點，把學校課程中關於文字符號的概

念細分為下列六種不同的使用層次：

1.文字符號為可算出的值 (letter evaluated) 。如：n＋1＝3 中的 n。

2. 文字符號視可忽略不用 (letter ignored) 。如：x＋y＝3，則 x＋y＋5＝3＋5＝8，此時 x＋y 可以忽略不用。

3. 文字符號當作物體 (letter as object) 。如：以 s 代表某一多邊形的一邊，而不是邊長數字的值。

4. 文字符號當作特定的未知數 (letter as special unknown) 。如：若正 n 邊形的邊長是 3，則周長為 3n。

5. 文字符號當作一般化的數字 (letter as generalized number) 。如：若 a＋b＝12 且 a＜b，則 a＜6。

6. 文字符號當作變數 (letter as variable) 。如：比較 n 和 2n 值的大小

由上述 Collis 的六個分類，前三者的描述文字符號的使用，停留在具體的層次，而後三者的分類，則過渡到抽象的思考模式。在方程式的概念學習，若學生對文字的認知，只是停留在具體階段，固然可以解決一些簡單的問題，不過若遇到結構較為複雜的問題時，則往往沒有辦法適當的使用文字符號，因此形成了解題的困難與概念的迷思。

（二）文字符號的相關研究

有關文字符號相關研究的陳述，分述如下：

Wanger (1981) 研究發現許多學生固執於所命名文字符號的刻板性用法，他們並不會隨著文字符號的改變而作適應性的解題，甚至有些學生認為更換了不同的文字符號，則題意將隨之改變，作答方式也將完全不同。諸多錯誤迷思都足以顯示學生對文字符號未能通盤理解。

Resnick (1981) 指出學生在數學中文字符號使用方面，有一些共同的錯誤。他發現學生混淆代表實物的文字符號和代表實物數值的文字符號概念，許多學生仍固著於所命名之文字符號的刻板印象，當原有的文字符號改變時，沒有辦法適應也無法正確的解題，甚至還會認為整個題意已經改變。

Booth (1984) 發現學生在解代數題時，對於文字符號的定義及運算都有困難。學生常將兩個未知數合併起來 (3x＋5y＝8xy) 或去掉括號。郭汾派、林光賢 (1988) 發現台灣地區有 26.6％的學生無法對單一文字符號作運算，僅有 0.1％的學生達到最高層次，也就是說，只有極少數的學生能夠將文字符號當作變數或一般數來使用。

廖瓊菁 (2001) 整理出代數概念是由數概念、文字符號概念及符號表徵運算三者所組合而成的概念架構，數概念為學生在接觸代數學習之前所具備的算術先備知識；文字符號則涉及以文字符號來代表數；符號表徵運算則包括以符號進行溝通記錄、表示關係及運算等功

能。而代數中所呈現的結構關係更是連結代數概念的重要一環。

由以上相關的研究發現，縱使國情與人文背景有所不同，但相同的是中學生在文字符號概念的成就表現層次都相當的低，所以文字符號的概念確實需要加以的研究與探討。

第二節　一元二次方程式錯誤類型與相關研究

本節將分為：方程式、解一元二次方程式策略、及代數方程式錯誤類型之相關研究三部分來探討。

一、方程式

代數的另一核心就是方程式，十七世紀法國偉大的哲學家笛卡兒 (Descartes) 曾說過：「一切問題都可以轉化為數學問題，一切數學問題都可以轉化成代數問題，一切代數問題都可以轉化成方程式，一切問題均將迎刃而解」。也就是說，以問題解決與數學角度來看，方程式在代數領域中，扮演著重要角色 (Polya, 1985) 。

方程式是將一般日常生活語言的問題描述，以未知數符號、運算符號轉譯為數學語言的簡化形式，結合等量公理的運算法則，達到以形式化的方法使問題獲得解決的目的，而此過程讓學習的學生感到困難，會因其中部分環節學習的不完整，加大在數學學習成就上的差異，這是學生數學學習感到挫折的原因。

二、解一元二次方程式策略

對於一元二次方程式，研究者依據國中數學第三冊教科書中所介紹的解題策略如下：因式分解、十字交乘、完全平方式、配方法及公式解。

（一）因式分解

在數學上，因式分解一般理解為把一個多項式分解為兩個或多個因式的過程。而在這個過程後，學生有可能會得出較原式簡單的多項式的積。例如，多項式x^2-4可被因式分解為$(x-2)(x+2)$。因式分解在解一元二次方程式上是一個重要方法，是解一元二次方程式中必須具備的一個技巧，而學生對因式分解往往不具信心，因為易學難精技巧性很重，在學生的學習中是一大難題。

（二）十字交乘法

把一個一元二次方程式的二次項係數和常數項，分別分解成兩整數的乘積，交叉之和等於一次項的係數。如此可以把此二次式分解為兩個一次式的乘積，稱為十字交乘法。其形式如下：

$$ax^2+bx+c=(px+q)(mx+n)，a=pm，b=pn+qm，c=qn$$

是因式分解解一元二次方程式中最重要的方法。

（三）完全平方式

一個二次多項式，如果可以寫成一個一次多項式的平方，則稱此二次多項式為完全平方式。完全平方式是配方法解一元二次方程式的基礎。

（四）配方法

把一個一元二次方程式，改寫成一個一次式的平方，再利用平方根的觀念，求出方程式的解之方法。這是解一元二次方程式的重要方法，所以是數學方法中的一個經典方法，是屬於建構式的一種方法，對學生而言也是學習推理的一種思考模式；因為其解法具一般性，可以推廣；並且可以由此推出一元二次方程式的公式解，得出一般性的解法。

（五）判別式

設方程式為$ax^2+bx+c=0$，a,b,c 乃實數，則稱 $\Delta=b^2-4ac$ 為判別式（discriminant of quadratic equation）；而當判別式等於0，大於0及小於0分別表示該方程具有等根、實根和虛根。 判別式是一元二次方程式中的重要算式，因為其決定了方程式解的形式，也是使用公式解方程式時，第一步必須要求出的算式，由判別式出發可以討論高次方程式解的形式，進而引致近世代數的產生。所以判別式在一元二次方程式中所扮演的角色相當重要。

三、代數方程式錯誤類型之研究

錯誤是學習過程的重要一環，不論教師在教課時怎樣用心，學生在解題時仍會出現錯誤（梁淑坤，1996）。學生存有的錯誤想法如果沒有改正，將會干擾學生後繼的學習，進而影響以後的學習效果。因此，幫助學生改正錯誤的概念是教師在教學時不可輕忽的工作。

以下是國內外對代數解題過程中所產生的錯誤類型之研究：

【表 2-2-1】代數解題歷程中錯誤類型之研究

1.	Clement, Lochhead & Monk (1981)	在研究中指出：有很大的比例主修科學的學生，甚至無法將簡單的句子轉換成方程式；且學生解題之所以出現錯誤也多半是在將文字轉成方程式所產生，而非是簡單代數技能或簡單的比例問題。
2.	Wollman (1983)	對 Clement 等人的研究工作做進一步研究，他發現造成這些解題錯誤的原因有下列幾點： （1）做的太快　（2）列完方程沒有立即檢驗 （3）未根據題意列式（4）未用文字符號列式。
3.	林清山、張景媛 (1994)	將學生在解決代數應用問題的錯誤類型分成四類： （1）問題轉譯的錯誤（2）問題整合的錯誤 （3）解題計畫及監控錯誤（4）解題執行的錯誤

4.	梁淑坤 (1996)	使用 MIZ 模式裡的六項類型分析一元二次方程式 （1）誤用資料　　（2）誤釋語文 （3）不合邏輯的推論（4）歪曲的定理或定義 （5）未驗算的答案 （6）技術上的錯誤 在六個類別當中，以「技術上的錯誤」最多。
5.	李登貴 (2008)	主要發現學生在一元二次方程式的錯誤類型如下： （1）不會辨別一元二次方程式和多項式 （2）配成完全平方式的過程不了解 （3）十字交乘法中交叉相乘時，正負號弄錯 （4）無法正確用判別式判斷一元二次方程式是否有解 （5）誤用等量除法，約去等號兩邊的公因式，造成減根。

從上述 1 至 5 項相關研究的比較之後，研究者針對一元二次方程式錯誤類型原因之分析，則採上述梁淑坤 (1996) 在文章中所使用的 MIZ 分類法，其主要原因是與本研究者的研究單元相同；再者，MIZ 模式是一個注重運算過程的分類系統，MIZ 的錯誤分類法包括非計算方面，適用於分析「一元二次方程式」方面的錯誤。

MIZ 模式是以色列數學家 (Movshoritz-Hadar, Inbar & Zaslavsky,

1987) 在分析大學聯考資料時，將其錯誤原因分為以下六類：

1.誤用資料 (Misused Data) ：作答時所用資料與原有資料不符。如：加插資料，附加條件與原有資料互斥等。

2.誤釋語文 (Misinterpreted Language) ：原文整理後轉譯到數學語言時所產生的錯誤。如：誤用符號，把圖形和符號作錯誤的連結。

3.不合邏輯的推理 (Logically Invalid Inference) ：推理過程產生錯誤。如：欠缺充分證據而把結論寫出來，使用錯誤的概念寫正確的結論。

4.歪曲的定理或定義 (Distorted Theorem or Definition) ：指已知的定理或定義其中的原則被曲解了。如：在不符的條件下使用定理，把定義、定理、公式轉為不精確的型態來使用。

5.未驗算的答案 (Unverified Solution) ：所求出的答案合乎列式，但不符題目中的情境。如：三角形一個內角不可超過 180 度。

6.技術上的錯誤 (Technical Error) ：指計算上的錯誤，抄錯答案等。

因此教學者應在教學準備時就能對學生常見的錯誤概念有所了解，在第一次教學時就能給與提示及解釋，以減少發生錯誤的機會，或發現學生產生錯誤概念時立即給與補救教學加以修正，以免影響往後的學習過程。

第三節　等號概念的相關研究

本節分為：等號概念的出現及定義、等號概念的類型、及等號概念之相關研究三部分來探討。

一、等號概念的出現及定義

（一）等號的出現

等號的出現與方程有關，早在中國古代“方程”的概念裡，等號就已經出現，但它是以“列表”的方法解之，並不需要等號，在書寫時則以漢字“等”或“等於”表示。而阿默斯紙草書中，則是“”表示相等；丟番圖則以“”或間中以“”為等號。直到雷科德於1557年出版的《礪智石》一書中，才首次採用現今通用之等號“＝”。

（二）等號的定義

學生在學習算術時最早接觸到的數學符號之一就是等號「＝」，而等號在數學中，其最基本的定義就是代表兩邊數量一樣多（教育部2003）。除此之外，等號尚有「計算結果之意義」及「對稱性」，此處所謂「對稱性」是指 A＝B 推出 B＝A。對國中小學階段的學生而言，較常接觸到的等號意義多屬於數值的相等及等式中等量的概念，

也是我們希望學生能夠具備的等量概念。

等號另一個在數學上較複雜的定義係指「等價關係 (equivalence relation) 」,其必須具備反身性、對稱性以及遞移性。反身性 (reflexive) 又稱自反性，因為 $a = a$ 對任何數都成立，所以它具有自反性；對稱性 (symmetric)，若 $a = b$ 則 $b = a$ 對任何 a、b 都成立，所以它具有對稱性；遞移性 (transitive)，若 $a = b$ 且 $b = c$ 則 $a = c$ 對任何 a、b、 c 都成立，所以它具有遞移性（楊喻惟，2009）。

二、等號概念定義的類型

國外學者 McNeil 等人 (2006) 針對等號概念定義進行相關研究中，並將等號概念分成「運算型 (operational) 定義」、「關係型 (relational) 定義」二種，其分述如下：

（一）運算型 (operational)

運算定義的等號，代表等號右邊是運算結果的解釋；其是指將等號視為進行計算之後的結果，因此將等號解釋為「答案等於……」、「結果是……」、「全部的數字是多少……」等。

（二） 關係型 (relational)

除了以上的運算型之外，第二種類是關係型。關係定義的等號概

念是指學生具備等號兩邊等量的概念，是以平衡的觀點判讀等式，而不再是由左至右代表運算結果的符號。因此，學生對於等號的解釋是「左右兩邊相等」、「一樣多、一樣大」等，代表等號兩邊數值相等、平衡的概念。

McNeil 對等號「＝」有上述兩種不同的概念類型，當我們將注意力放在「運算」部份時，等號的意義是「得到的答案是」或「結果的數值是」，例如「2＋5=7」代表「2 和 5 經過加法運算後，得到的答案是 7」；而當我們將注意力放在「關係」部份時，等號的意義則是「等價關係」，例如「2＋5=7」代表「2＋5 和 7 經過比較大小後，兩者一樣大，滿足等價關係」。

對國中生而言，等號概念的認知是介於「等號後代表答案」與「等號代表等量關係」兩者間的轉變期，學生從算術階段過渡到代數階段時，若缺乏對等式關係意義的瞭解將會成為學習上的困難。

三、等號概念之相關研究

有許多國內外學者針對等號概念進行相關研究，以下研究者將各研究整理如下：

表 2-3-1　等號概念相關研究整理

McNeil & Alibali (2005)	（1）認為國小是學生算術學習的開始，此階段的等號通常是運算型概念居多。 （2）國中開始接觸到方程式，運算型的等號概念已無法解釋等號兩邊皆具有運算符號的情況，因此必須建立關係型定義的等號概念。
Kieran (2005)	（1）指出在不同階段的學生對等號概念的認知情形是有顯著差異的，且隨著年級的增長具備關係型定義等號概念的人數比例愈高。 （2）若要建構和理解方程式，其必要的條件之一便是瞭解等號的對稱性與遞移性，亦即是等號兩邊左右等量的概念。
Knuth (2006)	（1）提出等號的關係型定義是建立等式結構的重要因素，並且會影響其判斷等式方程式以及對方程式的運算。 （3）學生進入代數階段後，對於方程式的解法開始是透過兩邊等量運算後得到未知數的答案。 （4）若學生對於等號的意義視為是「執行某項任務」時，因而造成解題上的錯誤。
McNeil, Grandau,	（1）利用三種不同等號概念表徵式 3＋4＝7；7＝3

Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur, Krill (2006)	＋4；7＝7 測驗學生對等號概念的理解，發現「非標準型式的等式，如 7＝3＋4 或 7＝7」會比「僅在等號左邊出現運算符號的等式，如 3＋4＝7」更能引起學生對於等號之關係型定義的解釋。 （2）七年級學生也僅有 44％的人數比例在看到非標準型式的等式後給予關係定義的解釋，對此原因，Alibali (2007) 表示因為早期所具備的關係定義概念是微弱的，因此在後續的學習階段仍會出現運算觀點的等號概念。
Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil, and Stephens (2007)	（1）針對 81 位的國中生進行等號概念轉變過程之研究，分為四階段：六年級、七年級、八年級、八年級學期末，進行為期三年的縱貫性研究。 （2）研究結果顯示，等號概念理解較複雜的情況與學生在等量方程式有好表現之間是有關連的。
廖學專 (2002)	（1）在初探等號概念心像的研究中發現，當學生感受到“＝”有「Do」的意思，則“＝”等號的心像中就容易忽略等號的等價性，此時學生使用的是「運算型」的等號概念。

	（2）學生在判斷一個等式是否具有等價性時，若是以「等價類的定義」來判斷這個等式，此時學生使用的就是「關係型」的等號概念。
陳嘉皇 (2008)	研究國小六年級學童342人進行等號概念理解測驗的調查，其結果與McNeil & Alibali (2005)「國小學童均將等號視為運算符號」的研究一致。
楊喻惟 (2009)	（1）針對七、八、九年級的國中生進行等號概念認知的瞭解，發現各年級學生對等號概念的認知均以「關係型」定義為主。 （2）研究中並指出具備關係型定義的等號概念者有較高比例是採用代數策略進行解題。

綜合以上相關研究發現，國小階段的學生對等號概念較偏向於運算型定義；國中階段的學生對於等號概念則偏向關係型定義。當學生等號概念的理解呈現不同時，其解題歷程與正確性也會有不同的結果表現。愈是傾向「關係型」的學生，其解題歷程與正確性就愈高，愈能成功解題。教師在教學過程中，必須拓展學生對等號代表等量的概念關係，才能幫助學生在代數學習中，對等式結構意義之瞭解。若是

等號概念未拓展好，當學生在學習代數方程式時，會將等號右邊永遠視為是運算的結果。學生對於兩邊具有運算的方程式結構不但會是陌生的，而且還會產生認知上的扭曲。由上述文獻可知，學生對等號概念的拓展是必須在學生在代數方程式前就必須進行的重要學習。

第三章　研究方法

本研究主要目的在探討國中生等號概念之認知情形，以及等號概念與一元二次方程式的錯誤情況，希望藉由此研究觀察等號概念類型對學生的解題狀況，並期望能提出建設性意見，做為教師實施補救教學或改進教學策略時之參考。以下就研究設計、研究對象、研究工具、資料處理與統計、研究流程與時程五個部分來說明。

第一節　研究設計

本研究採「調查研究法」，並依據研究目的，參閱相關的文獻與研究，自編「等號概念與解一元二次方程式」單元測驗之測驗工具。試題類型則採McNeil等人 (2006) 所研究之等號概念的五種類型來進行試題的設計與編排，主要透過紙筆測驗來探討學生在題目類型下的解題情形與錯誤類型，且將所蒐集的資料整理後，用統計軟體Excel進行資料的分析，並做綜合性的分析與討論。

第二節　研究對象

本研究的樣本為高雄縣鳳山市某國中二年級的學生，數學科教材採用 2008 年國二上學期康軒版，選取樣本為預試樣本 1 班 36 人、正式樣本因便利取樣而選取全年級 24 班中 6 個班級，共 215 名學生；每個班級均為常態編班。

第三節　研究工具

本研究為能確實瞭解學生在等號概念下進行一元二次方程式運算時產生的錯誤情形，依據 2008 康軒版國二上學期的數學課本及參考相關文獻資料進行分析題目內容目標，包括有：學生的等號概念、瞭解學生的等號概念對解一元二次方程式的情形。

本研究為了蒐集所需資料，利用之研究工具包含「等號概念與一元二次方程式試題」測驗，其試題內容說明如下：

一、 等號概念試題

（一）編製過程

等號概念的題型設計採開放式問題，此是根據研究等號概念多年的國外學者 McNeil 等人（2006）的研究內容做修改。McNeil & Alibali

(2006) 曾指出，透過開放式問題填寫的方式可以將學生的等號概念內容對應到其他與等號概念相關的研究測量上，而且可以反映出數學學習經驗愈豐富者，在等號概念表現愈傾向於關係型定義的描述。

（二）填答與計分方式

圖 3-3-1 等號概念開放式問題例示

一、請回答下列問題：

3＋5＝8

1. 上述式子中，箭頭所指之符號的名稱為何？________

2. 請你寫下此符號所代表的意義：__________________

____

在試題一中，開始會呈現一個等號，例如「3＋5＝8」，並且以箭頭指向「＝」的位置，請受試者填答此符號的名稱及意義，這兩個開放式的問題可以連結到受試者對於「＝」的名稱及概念，用以確認受試者對於「＝」意義的認知。此部分開放式問題並無絕對正確或錯誤的答案，主要計分方式是依據學生對等號意義的解釋，進行等號概念的分類，採歸類編碼的計分方式將「運算型定義」等號概念編碼為「0」、「關係型定義」等號概念編碼為「1」，用以進行建檔與統計

分析。

（三）預試結果分析

「等號概念之開放式問題」預試的題目採用「3＋5＝8」等式作為第一題的例子，經預試後，並無題意表達不清的部分，且學生均能完整填答其開放式問題的內容。

二、 一元二次方程式試題

（一）編製過程：

1. 參考 92 年九年一貫課程綱要數學領域之能力指標與分年細目，以了解學生應達成的學習階段，進行試題設計之依據。

表 3-3-1　一元二次方程式之能力指標與分年細目表

能力指標	分年細目
能熟練一元二次整係數方程式的解法 (A-4-05)	1. 能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。 (8-a-13) 2. 能利用因式分解來解一元二次方程式。 (8-a-14) 3. 能利用配方法來解一元二次方程式。 (8-a-15) 3. 能利用判別式, 並利用公式解來解一元二次方程式。(8-a-16)

資料來源：教育部 (2003) 九年一貫課程綱要數學領域

2.參考 2008 康軒版，此單元「一元二次方程式」在國一、二、三年級的教材地位分析。

圖 3-3-2　2008 康軒版「一元二次方程式」單的教材分析圖：

【己習教材】

1.一元一次方程式（國中第一冊第三章）

2.因式分解（國中第三冊第三章）

3.乘法公式（國中第三冊第一章）

4.平方根（國中第三冊第二章）

↓

【國中第三冊第四章概念】

1.一元二次方程式與其解的意義

↓

2.知道「若 ab＝0，則 a＝0 或 b＝0」

↓

3.利用十字交乘法解一元二次方程式

↓

4.利用乘法公式解一元二次方程式

↓

5.利用平方根概念解一元二次方程式

↓

6.利用配方法或公式解一元二次方程式

↓

【未來發展】

二次函數（國中第六冊）

3.「等號概念與一元二次方程式試題」是根據 McNeil 等人 (2006) 對等號概念的研究，將題型分成運算型與關係型兩大類五類型，依據國中數學相關單元之課本、習作內容編製而成，並與二名數學教師討論後再經由指導教授修正，藉以建立專家效度，完成預試試卷。

（二）預試

1. 實施目的：確立本研究施測試卷的可行性，作為刪減及修改試題之依據。

2. 施測對象: 高雄縣鳳山市某國中二年級學生一班共 36 人。

3. 測驗方式: 以班級為單位，採集體測驗，測驗前均說明測驗目的與作答時應注意事項。

4. 測驗時間: 45 鐘。

5. 測驗內容: 共 25 題，試題內容請參考（附錄一）。本測驗屬紙筆測驗，計分方式：每題答對給一分，答錯則不予計分。

6. 測驗結果: 根據預試測驗結果，對於太困難、空白率太高或無法測出學生概念的題型，予以刪除，最後的試題再經由指導教授的修正及指正，作為正式施測之試題。

7. 測驗的試題分析

（1）**試題難度：**

a. 本研究選取國二其中一班共 36 位學生實施預測，根據郭生玉 (2001)

提出在常態分配下最適當的比率是高低分組各佔 27%。故將高分組 P（前 27%人數）與低分組 P（後 27%人數）中答對每一題的人數百分比計算出本試題的難度與鑑別度。

b. 本試題受測人數為 36 人，而因有 6 名學生的成績為 0 分與 1 分，且其考卷均為空白或亂寫，為不影響統計結果，在難度與鑑別度部份將予以排除樣本之外（唯信度計算上仍予以保留）。

c. 故此，有效樣本 30 份，依前後 27%比例，共選取高分組有 8 人，低分組亦為 8 人。依此試題難度範圍經難度公式推算得 25%～88%（郭生玉 2001）。

難易度	難易度等級
P≧0.8	極容易
0.60≦P＜0.80	容易
0.40≦P＜0.60	難易適中
0.20≦P＜0.40	困難
P＜0.2	極困難

（2）**試題鑑別度：**

鑑別度指數值介於-1.00 到 1.00 之間，指數愈高，表示鑑別度愈大；指數愈低，表示鑑別度愈小。本試題鑑別度範圍經鑑別

度公式推算得 25%～88%（郭生玉 2001）。

鑑別指數	試題評鑑
0.4 以上	非常優良
0.30~0.39	優良，但可能需修改
0.20~0.29	尚可，但通常需修改
0.19 以下	劣，需淘汰或修改

P_H＝高分組得分率（總分前 27%學生答對該試題的百分比）

P_L＝低分組得分率（總分後 27%學生答對該試題的百分比）

難度 $P = \dfrac{P_H + P_L}{2}$.

鑑別度＝$P_H - P_L$

a.下表是預試各題高分組與低分組答對人數統計表

表 3-3-2　預試各題高分組與低分組答對人數統計表

題號	高分組答對人數	低分組答對人數	題號	高分組答對人數	低分組答對人數
1	8	6	14	6	1
2	8	6	15	8	6
3	8	4	16	8	3
4	7	1	17	5	0
5	8	3	18	8	3
6	6	1	19	6	0
7	8	4	20	8	2

8	7	1		21	7	2
9	8	1		22	7	3
10	8	3		23	7	3
11	8	5		24	4	1
12	6	0		25	6	3
13	4	0				

b. 下表是預試各題之難度、鑑別度、刪選與修改之統計表

表 3-3-3　預試之難度、鑑別度、刪選與修改之統計表

題號	高分組得分率（PH）	低分組得分率（PL）	難度（P）	鑑別度（D）	決策
1	1	0.75	0.88	0.25	刪除
2	1	0.75	0.88	0.25	刪除
3	1	0.0.5	0.75	0.38	修改
4	0.875	0.125	0.50	0.75	保留
5	1	0.375	0.69	0.63	保留
6	0.75	0.125	0.44	0.63	保留
7	1	0.5	0.75	0.5	修改
8	0.875	0.125	0.50	0.75	保留
9	1	0.125	0.56	0.88	保留
10	1	0.375	0.69	0.63	保留
11	1	0.625	0.81	0.38	刪除
12	0.75	0	0.38	0.75	保留
13	0.5	0	0.25	0.5	保留
14	0.75	0.125	0.44	0.63	保留

15	1	0.75	0.88	0.25	刪除
16	1	0.375	0.69	0.63	保留
17	0.625	0	0.31	0.63	保留
18	1	0.375	0.69	0.63	保留
19	0.75	0	0.38	0.75	保留
20	1	0.25	0.63	0.75	保留
21	0.875	0.25	0.56	0.63	保留
22	0.875	0.125	0.50	0.75	保留
23	0.875	0.375	0.63	0.5	保留
24	0.5	0.125	0.31	0.38	刪除
25	0.75	0.375	0.56	0.38	保留

預試試題經二位數學教師與指導教授建議，第1、2、11、15、24題因考慮其難度與鑑別度後予以刪除；另外第3、7題則進行題目的修改；其餘試題皆保留。

（3）**試題信度**：

為了解測驗內容的一致性，其方法採庫李法。庫德 (Kuder) 與李查遜 (Richardson) 於1937年提出分析題目之間一致性的方法，簡稱庫李法。該方法適用於一個測驗僅施測一次，同時適用於答對一題的1分，答錯一題得0分的題目。藉由公式推算所得之庫李信度為0.960104，顯示該份試題有良好的信度（郭生玉，2001）。

表3-3-4　預試之試題信度

學生座號	得分	題目編號	答對人數	答對比例 P	答錯人數	答錯比例 Q	比例之積 P*Q	$(Xi-\mu)^2$
1	24	1	31	0.86	5	0.14	0.1204	86.08
2	18	2	28	0.78	8	0.22	0.1716	10.74
3	23	3	24	0.67	12	0.33	0.2211	68.52
4	6	4	14	0.39	22	0.61	0.2379	76.08
5	21	5	21	0.58	15	0.42	0.2436	39.41
6	16	6	18	0.50	18	0.50	0.2500	1.63
7	0	7	21	0.58	15	0.42	0.2436	216.74
8	22	8	18	0.50	18	0.50	0.2500	52.97
9	1	9	20	0.56	16	0.44	0.2464	188.30
10	7	10	21	0.58	15	0.42	0.2436	59.63
11	24	11	23	0.64	13	0.36	0.2304	86.08
12	22	12	11	0.31	25	0.69	0.2139	52.97
13	20	13	15	0.42	21	0.58	0.2436	27.86
14	1	14	17	0.47	20	0.53	0.2491	188.30
15	16	15	25	0.69	11	0.31	0.2139	1.63
16	19	16	23	0.64	13	0.36	0.2304	18.30
17	8	17	16	0.44	20	0.56	0.2464	45.19
18	7	18	23	0.64	13	0.36	0.2304	59.63
19	21	19	16	0.44	20	0.56	0.2464	39.41
20	20	20	21	0.58	15	0.42	0.2436	27.86
21	0	21	17	0.47	19	0.53	0.2491	216.74
22	8	22	20	0.56	16	0.44	0.2464	45.19
23	20	23	23	0.64	13	0.36	0.2304	27.86
24	8	24	15	0.42	21	0.58	0.2436	45.19
25	1	25	17	0.47	19	0.53	0.2491	188.30

26	21								39.41
27	22								52.97
28	25								105.63
29	11								13.85
30	21								39.41
31	20								27.86
32	23								68.52
33	23								68.52
34	0								216.74
35	22								52.97
36	9								32.74

題數 N＝25

比例乘積之和 ΣPQ＝5.7949

學生人數 n＝36

平均分數 μ＝14.7222

變異數 S＝$\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n-1}=\frac{2589.23}{35}$＝73.978

庫李信度＝$\frac{N}{N-1}(1-\frac{\sum PQ}{S^2})=\frac{25}{24}\times(1-\frac{5.7949}{73.978})$＝0.960104

（4）**試題效度：**

本份預測試卷由前所述為根據國中數學課本及教師手冊、國中數學教師教學經驗與建議、參考相關資料，再依據教學內容與等號類型將每個題目作內容分析，建立雙向細目表。

表 3-3-5　預試試題之雙向細目表

等號類型／教學內容	等號左邊包含運算	等號右邊是一個數字	等號右邊是未知數	等號右邊是運算	等號雙邊是運算方
式子的化簡	(5)(13)(18)				
因式分解解法一元二次方程式		(1)(3)	(2)(7)	(11)	(4)
配方法解一元二次方程式		(10)	(8)(12)	(14)	(6)
公式解一元二次方程式		(16)	(17)(19)(20)	(15)	(9)

(5)評分者信度：

由於本研究尚還針對一元二次方程式錯誤類型採 MIZ 模式進行分析，其分類之評分者信度，則由研究者與其他協同分析者進行獨立分析，評分者信度的計算方式，則依下列步驟進行計算（引自歐用生，1991)：

1. 抽取研究樣本

   研究者預試卷中有效卷 30 份，每份試卷 25 題，總共有 230 個錯誤試題，全部均納入研究樣本。

2. 邀請協同分析者二人共同評定。
3. 研究者將分析一元二次方程式錯誤類型評選單發給協同分析者，並說明分類方式和原則。
4. 由研究員和協同分析者就選取範圍內容，依分析類目自行歸類。

5. 根據歸類結果，依照下列公式計算之後，求得信度。

（1） 求相互同意值 P_i

$$Pi = \frac{2M}{N_1 + N_2}$$

M：兩人同意的項目數

N_i：每個人有的同意數

（2） 求平均相互同意值 P

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{N}$$

N：相互比較的次數

（3） 求信度 R

$$R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]}$$

n：協同分析者人數

研究者參考 MIZ 模式分析一元二次方程式之錯誤類型與協同分析結果一覽表後，根據信度計算公式，求得信度為 0.974，計算數據如下：

1. 評分者相互同意值 P_i

（1）分析者 A 與研究者分類相同的有 215 個

分析者 A 與研究者分類不同的有 15 個

分析者 A 與研究者相互同意值 P_i=0.966

（2）分析者 B 與研究者分類相同的有 212 個

分析者B與研究者分類不同的有18個

分析者B與研究者相互同意值為P_i=0.959

（3）分析者A與分析者B分類相同的有197個

分析者A與分析者B分類不同的有33個

分析者A與分析者B相互同意值為P_i=0.923

2. 平均相互同意值P

將二個評分者相互同意值相加後，除於比較次數3次

得到平均相互同意值P=0.949

3. 信度R：代入信度公式，求得評分者信度R=0.974。

（三）正式施測：

1.實施目的：確實了解國二學生在一元二次方程式單產生的錯誤情形。

2.施測對象：高雄縣鳳山市某國中二年級六個班級，學生共215人。

3.測驗方式：以班級為單位，採集體測驗，測驗前均說明測驗目的與作答時應注意事項。

4.測驗時間：45鐘。

5.測驗內容：共20題，試題內容請參考第四章。本測驗屬紙筆測驗，計分方式：每題答對給一分，答錯則不予計分。

6.測驗結果：請參考第四章的分析。

第四節 資料處理與統計

本研究主要目的在以「等號概念認知與一元二次方程式試題」瞭解學生對於等號概念的認知情況，以及對一元二次方程式的錯誤類型之影響。使用的研究工具為自編「等號概念認知與一元二次方程式試題」，試卷回收後，將有效試卷的資料建檔，並依據研究問題與研究假設，進行資料分析。

本研究資料處理分為二分來探討：第一部分為等號概念認知、第二部分是等號對一元二次方程式試題之結果分析。茲就各部分說明如下：

一、等號概念試題與編碼

（一）等號名稱：

依據受試者對箭頭指向等式中「＝」的符號所給予的名稱，將名稱歸類於「意義正確」、「名稱正確」、「空白」，並且前兩類分別編碼為「0」、「1」。若學生能填寫「等號」作為答案者，將歸類於「名稱正確」；若學生根據數學式中由左至右看到「＝」時的讀法，以「等於」作為答案者，將歸類於「意義正確」。

（二）等號意義

依據受試者在第二題中回答「＝」符號所代表的意義，將受試者

對於等號概念的認知歸類於「運算型定義」、「關係型定義」二類，並將這兩類分別編碼為「0」、「1」。若受試者對等號概念同時出現「運算型定義」、「關係型定義」，則依據數學概念發展的歷程及McNeil等人 (2006) 研究中對等號概念分類的方式，將其歸類於「關係型定義」。若學生的回答內容與研究者所分類有所衝突或矛盾時，則與指導教授、及二位數學教師以三角校正（王文科、王智弘，2005）的方式討論後，再進行分類。

三、一元二次方程式試題之結果分析

本研究主要利用套裝軟體 Excel 統計答題情形，計算答對率、難易度與鑑別指數等統計表。預試結束後，整理回收的試卷，歸納學生所有的錯誤作答情形，並使用 Excel 軟體統計各個題目錯誤率及試題的難度與鑑別度，並由公式推算所得之庫李信度 (Kuder-Richardson reliability) 為 0.960104。正式施測結束後，利用統計軟體 Excel，將所有有效樣本在「等號概念與一元二次方程式試題」中每一題的答錯率。並將所有的答案整理、歸納，列出學生主要的錯誤類型，以統計出每一題的答錯人數及各種錯誤類型的答錯人數與百分比（請參考第四章）。再由筆試的書面資料了解學生在等號概念下的想法及探討錯誤的類型。

第五節　研究流程與時程

本研究之研究流程分為：蒐集資料、樣本選取、編製工具、試題修正、正式施測、綜合分析等六個階段，茲就各階段說明如下：

一、蒐集資料階段：

在此階段一方面閱讀國內外相關文獻與蒐集資料，一方面參考各家版本在一元二次方程式單元教學內容相異與相同之處，另與國中數學老師及指導教授討論有關學生的等號概念與一元二次方程式錯誤類型的情形，開始著手設計本研究之研究架構。

二、樣本選取階段：

本研究樣本的選取，為高雄縣鳳山市某國中二年級的學生，屬男女混合，常態編班並請願意協助之班級進行研究，共計 6 個班級，215 名學生。

三、編製工具階段：

依據本研究之需要，研究者自編「等號概念與一元二次方程式試題」之試題卷。在編製時，研究者與數學科教師及指導教授討論，以了解國中二年級學生的等號概念在此單元容易出錯的題型。研究者將所蒐

集的國內外文獻及相關資料，編製成調查錯誤的試題，並與指導教授、數學科教師討論預試的內容，經由問卷調查分析效度及信度後刪減及修改題目內容，於 98 年 12 初編製出「等號概念與一元二次方程式試題」之預試卷，共計 25 題。

四、試題修正階段：

與數學科教師及指導授多次討論後，題目傾向基本觀念的紙筆測驗。預試的樣本為同校二年級的學生，預試之主要目的為瞭解本研究之研究工具，是否為確實調查出學生在等號概念與一元二次方程式之錯誤情形。由預試統計結果，推算得各題目之難度及鑑別度，刪除難度過高及過低、鑑別度太差、性質太過雷同，並與指導教授討論後，決定正式施測試之內容。

五、正式施測階段：

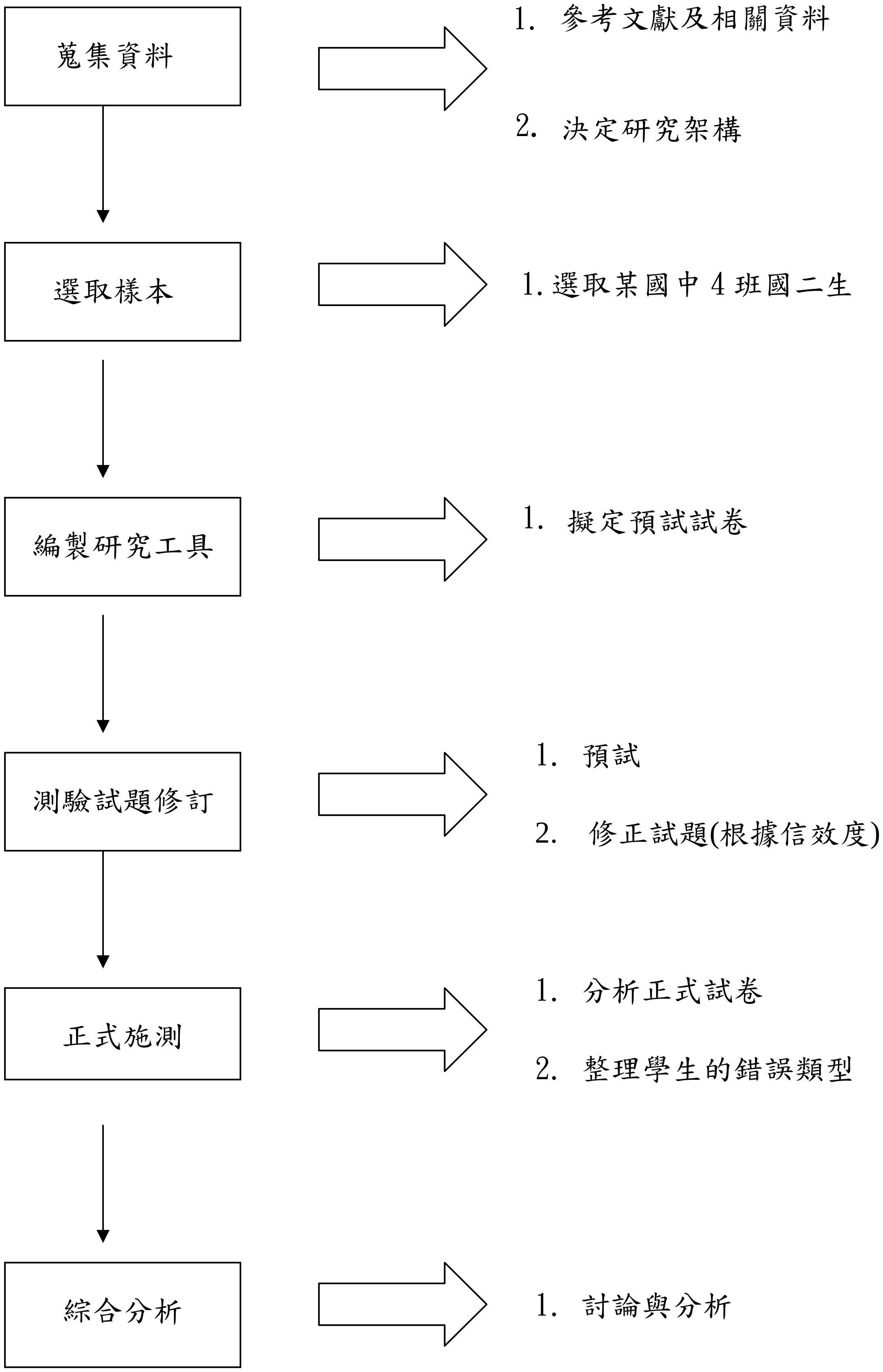
施測樣本為國中二年級學生，讓學生以團體測驗的方式進行施測，每次測驗前先由教師向學生說明測驗的目的及作答時必須注意的事項，每次測驗時間為 45 分鐘。

六、綜合分析階段：討論分析並提出建議。

表 3-5-1　研究實施時程表：

時間 預定進度	98年8月	98年9月	98年10月	98年11月	98年12月	99年1月	99年2月	99年3月	99年4月	99年5
蒐集文獻										
選取預試樣本										
編製研究工具										
測驗試題修訂										
正式施測										
綜合分析										
累積百分比%	15	25	30	45	55	60	75	85	95	100

圖 3-5-1　研究流程圖



蒐集資料
1. 參考文獻及相關資料
2. 決定研究架構
選取樣本
1. 選取某國中 4 班國二生
編製研究工具
1. 擬定預試試卷
測驗試題修訂
1. 預試
2. 修正試題(根據信效度)
正式施測
1. 分析正式試卷
2. 整理學生的錯誤類型
綜合分析
1. 討論與分析

第四章　結果與討論

本章將依據受試之國中生在接受一元二次方程式單元測驗正式施測的作答情形，來探討國中生對於等號概念的認知情形，以及學生在一元二次方程式的錯誤類型，並且探討等號概念與一元二次方程式錯誤類型之影響。本章共分為三節，第一節國中生對等號概念的認知情形、第二節討論學生在一元二次方程式的錯誤類型、第三節等號概念與一元二次方程式錯誤類型之關係。

第一節　國中生對等號概念的認知情形

本節主要是探討國中生對等號概念的認知情形，藉由分析學生在「等號概念認知的開放式問題」中對等號名稱以及等號意義的描述，並將答案進行分類、歸納，以利於瞭解國中生對等號概念的認知情形是否有所差異。以下分別就「等號名稱」及「等號概念」兩部分，分析其結果並說明：

一、　等號名稱分析

學生在填寫「等號概念認知的開放式問題」中，第一小題是依據箭頭所指的「＝」符號，給予其適當的名稱，並依學生的資料結果

分析顯示出學生對於「＝」名稱的回答可分為兩類，其一是能夠填寫出「等號」作為答案者，屬於「名稱正確」；另一種是根據數學的式子由左至右看到「＝」時習慣性的語法，以「等於」作為「＝」的名稱，屬「意義正確」。

表 4-1-1 各班學生等號名稱之統計

	意義正確	名稱正確	
	人數　%	人數　%	總計
201（n=33）	71.88%	28.12%	100%
207（n=30）	67.75%	32.25%	100%
209（n=32）	70.97%	29.03%	100%
214（n=33）	71.88%	28.12%	100%
220（n=34）	74.19%	25.81%	100%
224（n=29）	66.67%	33.33%	100%
總計　191	70.56%	29.44%	

註：215-191=24（無效卷－空白未答）

從上表得知，屬「意義正確」的學生佔 70%，且從這六班同學來看，情況都一樣，只有 30%同學寫的是屬「名稱正稱」，由以上資料

可知，多數的學生還是以習慣性的語法作為「＝」的名稱表現，對於等號的正確說法所佔的比例仍是少數，表示教師在教學上可針對學生說明等號的正確名稱。

二、等號概念分析

學生在填寫「等號概念認知的開放式問題」中，第二小題乃是依據箭頭所指的「＝」符號，請學生回答「＝」所代表的意義。然後根據學生對等號意義的描述將其歸類於「運算型等號」或「關係型等號」此二類的等號概念，並進行統計分析。

屬於「運算型」等號概念的學生，通常會將其等號視為運算結果或代表答案的符號，而且在判讀等式時，習慣上是由左至右解釋，因此會出現「答案算出來後要用等於代表結果」、「數字與數字之間使用加減乘除所得到的答案」、「等號右邊代表答案」、「後面要連接答案」、「代表答案是……」等描述。

屬於「關係型」等號概念的學生，則已經可以將等號視為代表關係性符號，不再僅限於等號的右邊是出現答案。具備此概念的學生已經能夠意識到等號兩邊是等值、等量的概念，因此在判讀等式時，會從平衡的觀點出發，對於等號意義的描述會出現「等號左邊的值等於

等號右邊的值」、「兩邊算出答案一樣」、「兩邊的值相等」、「一樣大」等描述。

依據學生對於等號意義的描述，可將其等號概念歸類於「運算型」或「關係型」兩者之一，編碼後進行統計分析，結果顯示：多數的學生對於等號的認知是屬於關係型等號，其中各班的人數比例分別為78.12%、80.65%、77.42%、84.37%、80.65%、84.85%，每個班級大約各佔八成。（如表4-1-2）。

表4-1-2　各班學生等號概念之統計

	等號概念		合計
	運算定義	關係定義	
201（n=33）	21.88%	78.12%	100%
207（n=30）	19.35%	80.65%	100%
209（n=32）	22.58%	77.42%	100%
214（n=33）	15.63%	84.37%	100%
220（n=34）	19.35%	80.65%	100%
224（n=29）	15.15%	84.85%	100%
平　均	18.99%	81.01%	

整體而言，各班中具備運算型等號概念的人數比例較少，相對關係型等號概念的人數比例較多（均有超過 50%）。由以上的資料中發現，各班的學生對於等號概念之認知情況大同小異，學生具備關係定義等號概念的人數比例 81.01%，有 18.99%的學生將等號視為是運算符號，**近八成**的學生是屬於關係型等號概念，但仍有近二成的學生對於等號概念的認知均以「運算定義」等號概念為主。

國中階段後是學習代數課程的開始，應該讓學生在熟悉的算術規則下，建立等號並非僅只代表由左至右的運算結果符號，還有代表著等量關係的意義符號，並且能夠以左右平衡的觀點判讀等式的關係型的等號；等號概念在國中正處於「等號後代表答案」與「等號代表等量關係」兩種不同含義之轉變期，若學生對等式關係的意義瞭解不清，將會影響日後代數課程的學習。

第二節　一元二次方程式的錯誤類型

本節就全體參與學生在接受「等號概念與一元二次方程試題」施測之後，整理其作答情形以了解學生的錯誤類型。

一、等號五大題型依 MIZ 分類之錯誤原因分析

本試題以 McNeil 等人 (2006) 研究等號類型的例題分類為主，將所要施測的一元二次方程式分成五大題型，分別為：等號左邊包含運算、等號右邊是一個數字、等號右邊是未知數、等號右邊是運算方程式、等號雙邊是運算方程式等五個題型。各題型與題號對照如下：

表 4-2-1　等號題型與題號對照表

等號題型		題號
一	等號左邊包含運算(化簡)	(5)(13)(18)
二	等號右邊是一個數字	(1)(3)(10)(16)
三	等號右邊是未知數	(2)(7)(8)(12)(17)(19)(20)
四	等號右邊是運算方程式	(11)(14)(15)
五	*等號雙邊是運算方程式*	(4)(6)(9)

針對五大題型共 20 題進行錯誤原因分析，依 MIZ 錯誤類型分析進行歸類與統計，再進一步針對各題型中學生解一元二次方程式，其主要的錯誤原因。

表 4-2-2　等號五大題型與 MIZ 六大錯誤類型

MIZ 錯誤類型 / 等號類型		1 誤用資料	2 語釋語文	3 不合邏輯	4 歪曲定理	5 未驗算	6 技術上	平均次數
一	等號左邊包含運算　(共 3 題)	9%	7%	25%	42%	4%	13%	100%
二	等號右邊是一個數字(共 4 題)	9%	4%	27%	45%	2%	13%	100%
三	等號右邊是未知數　(共 7 題)	10%	4%	22%	47%	2%	15%	100%
四	等號右邊是運算方程式(3 題)	8%	5%	26%	48%	2%	11%	100%
五	等號雙邊是運算方程(共 3 題)	7%	7%	25%	46%	2%	14%	100%

一、由表 4-2-3 初步可以看出：

1. 在 McNeil 五大等號題型中，屬「等號左邊是運算」題型的平均錯誤次數最多，而「等號右邊是一個數字」題型的平均錯誤次數最少。

2. 按 MIZ 六大錯誤類型分析來看，不論在那一種題型（共五種）下，以歪曲定理與不合邏輯為學生最主要出錯的錯誤原因。

3.「等號左邊是運算」題型是屬於多項式的四則運算的化簡，並非是解方程式，但從考卷的結果中顯示學生對此類型的易錯機率卻是最高，可見學生將「多項式的值」與「方程式的解」這兩種內容混淆了。

二、下面先用六個例題來解釋 MIZ 模式的分類法，將有助於了解本研究對一元二次方程式錯誤類型之分析

表 4-2-3 MIZ 錯誤類別、代碼、實例

1. 誤用資料 例：$(x-3)(x-3)=121$ $x^2-4^2=121$ 註:學生沒有使用題目中的「3^2」，而誤用 4^2 所造成的錯誤。
2. 誤釋語文 例:若有四個連續偶數，假設最大的數為 x，則最小的數為何 最小的數＝x-4 註：最小的數應為 x-8，將連續偶數誤釋為連續的整數。
3. 不合邏輯 例：$3x(x+2)=9x-9$ $x(x+2)=3x-3$ $x=0$，$x=-2$ 或 $x=1$ 註：把方程式看成 $x(x+2)(3x-3)=0$ 來作推論。
4. 歪曲定理 例：$2x^2+6x+5=0$ $2x^2+6x+9-9+5=0$ $(x+3)^2-4=0$ 註：使用 x^2 係數等於 1 的方法來處理 x^2 係數等於 2 的配方法。
5. 未驗證答案 例：x＝6（人)或 -6（人） 註：x＝-6 時，人數會變成負數，造成不合理。
6. 技術上的錯誤 例：$x^2+3x=2$ $x^2+3x+2=0$ 註：因不小心，2 之正負未注意到。

三、下列就 McNeil 對等號的五大類型分別進行討論分析：

（一）「等號左邊包含運算」

試題中屬於第一類型的題目共有三題，題目如下：

（5）$(-2x^2-8)-(2x^2+3x-8x)=$　（13）$(x^2-9)+2x^2-2x+1=$

（18）$-5+4x+x^2-(5x^2+4x+1)=$

表 4-2-5　**等號左邊包含運算**與 MIZ 分類之統計表

MIZ 錯誤類型 ＼ 等號左邊包含運算	（一）誤用資料	（二）語釋語文	（三）不合邏輯	（四）歪曲定理	（五）未驗算	（六）技術上	合計
第 5 題	8	6	20	32	3	4	78
第 13 題	10	11	25	39	5	13	107
第 18 題	3	0	18	33	3	16	78
合計	21	17	63	104	11	33	263

在 MIZ 分類統計中，以**歪曲定理**所佔的比例為最多，故將歪曲定理作進一步討論，並以七年在教學現場教師的立場，用四種代數的角度討論分析，並舉例說明。

歪曲定理 ＼ 等號左邊包含運算	（一）同類項合併錯誤	（二）將化簡當作解方程式	（三）分配律出錯	（四）未知數錯誤	合計
第 5 題	11	16	4	2	32
第 13 題	13	19	6	1	39

第 18 題	9	17	5	2	33
合計	33	52	15	5	104

第一種：同類項合併錯誤

所以，在第 5 題$(-2x^2-8)-(2x^2+3x-8x)$

$$=2x^2-8-2x^2-3x+8x=5x-8$$

學生因漏看題目中第一個括號內 x^2 係數為負數，把 $-2x^2$ 抄寫為 $2x^2$，而導致同類項合併的錯誤，正確的 x^2 項應為 $-2x^2-2x^2=-4x^2$，屬於此種佔了 33 個，佔所有歪曲定理的三分之一。

第二種：將化簡運算，當作在解方程式

所以，在第 13 題$(x^2-9)+2x^2-2x+1=3x^2-2x-8$

$$(x-2)(3x+4)=0$$

$$x=2 \text{ 或} -\frac{4}{3}$$

屬於此種的佔了 52 個，佔所有歪曲定理的二分之一，比例之高。

第三種：分配律出錯

所以，在第 18 題 $-5+4x+x^2-(5x^2+4x+1)=$

$$-5+4x+x^2-5x^2+4x+1=-4x^2+8x-4$$

屬於此種錯誤佔 15 個。

第四種：未知數錯誤

所以，在第 18 題 $-5+4x+x^2-(5x^2+4x+1)=$

$$-5+4x+x-5x-4x-1=-5x-6$$

此種錯誤完全是將一元二次式當作一元一次的式子。

「等號左邊是運算」的題型是屬多項式的化簡運算，課程內容編排在國二上學期的第一章，而解一元二次方程式則是第三章的教學內容，按理是學生己具有的先備知識，成功的機率應為高，但綜合學生解題的結果，發現此種題型的錯誤率頗高，探索其原因可能是學生對於多項式與方程式定義的認識一知半解，觀念糢糊懵懂，反而容易讓學生將多項式的題目逕行當作方程式，造成解題上的錯誤。

（二）「等號右邊是一個數字」

試題中第二類型的題目共有四題，題目如下：

（1）$9x^2-64=0$　　（10）$(2x-5)(x+4)=-6$

（3）$(4x-5)(\frac{x}{3}-2)=0$　　（16）$x^2+6x-9=0$

表 4-2-6　　**等號右邊是一個數字**與 MIZ 分類之統計表

MIZ 錯誤類型 ＼ 等號右邊是一個數字	（一）誤用資料	（二）語釋語文	（三）不合邏輯	（四）歪曲定理	（五）未驗算	（六）技術上	合計
第 1 題	4	6	13	17	0	2	42
第 3 題	5	1	16	26	3	4	55
第 10 題	4	0	10	15	0	20	39
第 16 題	4	0	13	30	1	11	59
合計	17	7	52	88	4	27	195

在 MIZ 分類統計中，以**歪曲定理**所佔的比例為最多，故研究者將歪曲定理作進一步的討論並說明。

歪曲定理 ＼ 等號右邊是一個數字	（一）開平方出錯	（二）乘法公式錯誤	（三）移項法則使用錯誤	（四）十字交乘錯誤	（五）等號右邊未化簡為 0	（六）硬湊成差的平方公式	合計
第 1 題	9	6	1	0	1	0	17
第 3 題	0	13	10	0	0	3	26
第 10 題	0	1	0	2	7	5	15
第 16 題	0	8	1	21	0	0	30
合計	9	28	12	23	8	8	88

第一種：開平方出錯

所以，在第 1 題 $9x^2-64=0$，先將式子移項為 $9x^2=64$，接著在

左右兩邊開平方時沒有注意到左式的 $9x^2$ 並非完全平方式，而寫成 $9x=\pm 8$，接著解出 $x=\pm\frac{8}{9}$。

屬於此種錯誤的比例佔 9 個，其運算錯誤的方式均大同小異。

第二種：乘法公式錯誤

所以，在第 1 題 $9x^2-64=0$ 此類錯誤的學生雖有觀察出題目可用乘法公式的方法解方程式，但卻錯用公式，將 $9x^2-64=0$ 化為差的平方 $(3x+8)^2=0$，進而解出 $x=-\frac{8}{3}$ 重根。再由前題的整理結果推測，此類的學生也並非完全不懂乘法公式，可能是在學習上一知半解，所以錯用公式。屬於此種佔了 28 個，佔所有歪曲定理錯誤近三分之一。

第三種：移項法則使用錯誤

所以，在第 3 題 $(4x-5)(\frac{x}{3}-2)=0$，此錯誤類型多半是在解題步驟 $4x+5=0$ 或 $\frac{x}{3}-2=0$ 準備解出 x 時，將 $4x+5=0$ 算得 x 為倒數錯誤之 $-\frac{4}{5}$ 或移項少負號之 $\frac{5}{4}$，還有學生算成 $\frac{5}{3}$，屬於此種佔了 12 個。

第四種：十字交乘錯誤

所以，在第 10 題 $(2x-5)(x+4)=-6$

$(2x-5)(x+4)=-6$

$2x^2+3x-20=-6$

$2x^2+3x-14=0$

$(2x-7)(x+2)=0$

$x=\frac{7}{2}$ 或 -2

屬於此種佔了 23 個，佔所有歪曲定理錯誤的四分之一。

第五種：等號右邊未化簡為 0

所以，在第 10 題 $(2x-5)(x+4)=-6$

$2x-5=-6$ 或 $x+4=-6$

$x=-\frac{1}{2}$ 或 -10

其錯誤原因是學生誤用乘法性質，未把等號右邊化簡為 0，而直接假設等號左邊的兩個算式為-6 和-6，才造成錯誤答案。

第六種：硬湊成差的平方公式

所以，在第 16 題 $x^2+6x-9=0$，此類的錯誤是先將 $x^2+6x-9=0$ 利用乘法公式之差的平方化為 $(x-3)^2=0$，這些錯誤都是學生不夠細心或者是硬湊，甚至可能是對乘法公式不熟悉，認為只要有個加項和減項，就滿足差的平方公式。

在「等號右邊是一個數字」類型，依 MIZ 錯誤類型統計，其最主要錯誤原因是歪曲定理，其次是不合邏輯，從上述的錯誤即可相互對照；推估應是受了前面「因式分解」單元的干擾而產生的混淆。

（三）「等號右邊是未知數」

試題中第三類型的題目共有七題，題目如下：

（2）$3x^2-4x-1=-9x-3$ （7）$23=x^2$

（8）$10x=5x^2$ （12）$x^2+3=6x$

（17）$-39x^2+15=24x$ （19）$3x^2+5=2x$

（20）$399-4x=x^2$

表 4-2-7 **等號右邊是未知數**與 MIZ 分類之統計表

MIZ 錯誤類型 / 等號右邊是未知數	（一）誤用資料	（二）語釋語文	（三）不合邏輯	（四）歪曲定理	（五）未驗算	（六）技術上	合計
第 2 題	4	2	14	21	0	6	47
第 7 題	4	3	14	17	0	7	45
第 8 題	7	3	10	24	2	9	55
第 12 題	4	4	14	25	3	6	56
第 17 題	5	2	11	29	0	10	57
第 19 題	6	0	19	31	0	14	70
第 20 題	11	0	10	48	1	11	81
合計	41	14	92	195	6	63	411

在 MIZ 分類統計中，以**歪曲定理**所佔的比例為最多，故研究者將歪曲定理作進一步的討論與說明。

歪曲定理 \ 等號右邊是未知數	（一）當成因式分解	（二）平方根的觀念錯誤	（三）十字交乘分解錯誤	（四）配方法的錯誤	（五）公式解使用錯誤或背錯	（六）忘了要先降冪排列	合計
第 2 題	9	1	7	2	2	0	21
第 7 題	1	8	5	0	0	3	17
第 8 題	5	7	0	2	0	10	24
第 12 題	0	0	10	8	7	0	25
第 17 題	0	0	16	2	11	0	29
第 19 題	0	8	14	0	9	0	31
第 20 題	0	13	20	15	0	0	48
合計	15	37	72	29	29	13	195

第一種：當作因式分解

所以，在第 2 題 $3x^2-4x-1=-9x-3$

$$3x^2-4x-1=-9x-3$$

$$3x^2-4x-1+9x+3$$

$$=3x^2+5x-2$$

$$=(3x+2)(x+1)$$

第二種：平方根的觀念錯誤

所以，在第 7 題 $23=x^2$ 會出現以下兩種最主要的錯誤

1. $x=\pm 23$，此類錯誤是等號右邊沒有開平方，根據學生的考卷內容推測應為粗心，或者是對根號的運算還有問題。

2. $x=\sqrt{23}$ **或者為** $x=\sqrt{23}$ **重根**：推測此類錯誤的學生多半對計算平方根時是否加±還分辨不清，而註明重根者亦同，且可觀察出此方面的錯誤人數不少。

屬於此種平方根觀念錯誤的佔 37 個，是所有歪曲定理錯誤的五分之一。

第三種：十字交乘分解錯誤

所以，在第 19 題 $x^2+5=2x$，此類錯誤的學生都是使用十字交乘，且配對得到答案為 $\frac{5}{3}$ 或-1，錯誤學生並不少，推測學生若不是沒有注意到常數配對並不是+5，就是對無解方程式沒有概念，因而硬湊答案試試。屬於此種的佔 72 個，佔所有歪曲定理錯誤的三分之一。

第四種：配方法的錯誤

1. **第 12 題** $x^2-6x+3=0$

$$x^2-6x+3=0$$

$$x^2-6x+(\frac{6}{2})^2=-3$$

學生進行配方的動作後，並沒有對式子作平衡的動作而繼續解題，此處顯示學生在等量公理上的概念比移項法則弱，且對配方法的概念仍然不夠熟悉。

2. 第 20 題 $399-4x=x^2$，此類型的學生配方法的計算都沒有問題，可惜的是在最後等式兩邊開平方時，右式沒有加上±，此類錯誤的學生依舊多半對計算平方根時是否要加±還分辨不清。

第五種：公式解使用錯誤或背錯

所以，在第 12 題 $x^2-6x+3=0$，將其公式解之係數寫錯，把題目中常數項係數 3 視為公式解之公式中的 b，一次項係數-6 視為 c，因而計算成 $\frac{-3\pm\sqrt{9+24}}{2}$，這類錯誤的學生並不少，大多因為沒有重新將式子先用降冪整理過而看錯。

第六種：忘了要先降冪排列

所以，在第 17 題 $-39x^2+15=24x$，因為大部分的方程式大都按照降冪排列，學生因為忘掉要先降冪排列再做，而在排列的過程中把正負號寫錯，導致無法將減號視為係數的性質符號。

在「等號右邊是未知數」類型中，可以發現學生的歪曲定理與不合邏輯，主要是發生在利用配方法解一元二次方程式；在配方法時，大家都知道過程，但是在移項的正負符號變化仍不熟練；重要的是因為學生在配方過程中對「完全平方式」定理的誤解或一些不合邏輯的觀念，而往往造成錯誤的結果。老師在教學時宜針對這些部份再加強，並且反覆練習，養成正確的解題習慣，也許學生們之錯誤情形就可減少。

（四）「等號右邊是運算方程式」

試題中第四類型的題目共有三題，題目如下：

（11）$17=(2x+1)^2$　　　　（14）$9=4(x-2)^2$

（15）$891=x(x-6)$

表 4-2-8　**等號右邊是運算方程式**與 MIZ 分類之統計表

MIZ 錯誤類型 \ 等號右邊是運算方程式	（一）誤用資料	（二）語釋語文	（三）不合邏輯	（四）歪曲定理	（五）未驗算	（六）技術上	合計
第 11 題	7	1	12	24	2	8	57
第 14 題	5	6	24	34	1	7	80
第 15 題	2	2	11	28	0	5	53
合計	14	9	47	86	3	20	179

在 MIZ 分類統計中，以**歪曲定理**所佔的比例為最多，故研究者將歪曲定理作進一步討論並舉例說明。

歪曲定理 \ 等號右邊是運算方程式	（一）錯用乘法公式	（二）平方根的觀念錯誤	（三）移項法則出錯	（四）分配律使用有誤	（五）十字交乘錯誤	（六）企圖直接解方程式	合計
第 11 題	9	7	2	1	0	5	24
第 14 題	10	17	2	3	0	2	34
第 15 題	8	16	1	0	3	0	28
合計	27	40	5	4	3	7	86

第一種：錯用乘法公式

所以，在第 11 題 $17=(2x+1)^2$

在學生的解題過程中，可知是預備用平方差的方法來解，但卻沒注意到 17 也應該要先化為$\left(\sqrt{17}\right)^2$才正確，而導致乘法公式的錯用。屬於此種的佔 27 個，佔所有歪曲定理錯誤近三分之一。

第二種：平方根的觀念出錯：。

所以，在第 14 題 $9=4(x-2)^2$

$9=4(x-2)^2 \rightarrow 4(x-2)=\pm 3$，另外還有不少學生的解題過程是將式子展開代簡整理後，才應用各類解方程式的方法去解題，但在展開過程中當然也避免不了一些學生在平方根上的粗心錯誤，此類錯誤的學生依舊多半對計算平方根時是否要加±還分辨不清。

第三種：移項法則出錯

所以，在第 14 題 $9=4(x-2)^2$

此類型的錯誤多半在移項上等出現計算錯誤的情形，大致上的錯誤如：$9=4(x-2)^2 \rightarrow 4(x-2)=\pm 3$，在開方時沒有注意到等號左邊還有倍數 4 的部份、直接兩邊開方後遺漏掉左式的倍數 4。

第四種：分配律使用有誤：

所以，在第 14 題 $9=4(x-2)^2$

此部份的錯誤為一開始將等式左邊 $4(x-2)^2$，利用分配律展開後，

接著在重新整理等式兩邊並解方程式，在使用分配律時發生錯誤。

第五種：十字交乘錯誤

所以，在第 11 題 $17=(2x+1)^2$

此類錯誤的學生，多半在展開化簡後準備使用十字交乘法解方程式，但卻無法找到適合配對而卡住解不出來，從學生的寫題痕跡可發現學生不斷的嘗試十字交乘的配對。這也顯示了學生太過倚靠十字交乘的解題方式，或者對解是無理數時，難以使用十字交乘的觀念不足。

第六種：企圖直接解方程式

所以，在第 15 題中 $891=x(x-6)$

1. $x=891$ 或$(x-6)=1$，若 $A\times B=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$ 觀念的錯誤連結。
2. 乘開化簡後，原式→$x^2-6x-891=0$，學生嘗試以十字交乘法解題，但數字太大，不易分解。大部份同學會把 891 做因數分解而算不出答案，部份同學寫出 $x^2-6x-891=0$，因拆不出十字交乘而停留在此，無法繼續下去。

此種當常數項係數非常大的題型，若學生可看出以配方法來解題，則可大幅降低其計算的難度，反之，就常會發生以上兩種主要的錯誤。

在「等號右邊是運算」類型，學生在解「用因式分解法解一元二次方程式」的題目時，經常在分解過程中忽略了要把等號右邊化簡為「零」的動作，而產生等號右邊為「非零整數」時也分解的錯誤情形。而另外，也常發現學生在方程式未分解完畢，但卻誤以為分解完畢，就用觀察法直接寫答案等未驗算的錯誤。

（五）「等號雙邊是運算方程式」

試題中第五類型的題目共有三題，題目如下：

（4）$(3x-1)(2x+3)=(x+4)(3x-1)$

（6）$(12x-5)^2=(11x-4)^2$　　　（9）$(x+4)^2=7(x+4)-12$

表 4-2-9　**等號雙邊是運算方程式**與 MIZ 分類之統計表

MIZ 錯誤類型 ＼ 等號雙邊是運算方程式	（一）誤用資料	（二）語釋語文	（三）不合邏輯	（四）歪曲定理	（五）未驗算	（六）技術上	合計
第 4 題	3	4	14	20	3	5	53
第 6 題	5	6	17	27	1	7	68
第 9 題	6	2	12	33	0	24	69
合計	14	12	43	80	4	25	178

在 MIZ 分類統計中，以**歪曲定理**所佔的比例為最多，故研究者將歪曲定理作進一步的討論並舉例說明。

歪曲定理 \ 等號雙邊是運算方程式	（一）消去未知數造成減根	（二）提公因式的錯誤	（三）錯用乘法公式	（四）誤當成因式分解	（五）用變數代換法的錯誤	合計
第 4 題	10	4	0	6	0	20
第 6 題	0	1	10	15	0	27
第 9 題	1	6	9	6	11	33
合計	11	11	19	27	11	80

第一種：消去未知數，造成減根

所以，在第 4 題 $(3x-1)(2x+3)=(x+4)(3x-1)$

此類型的錯誤人數比例超過一半，大致上分成兩種類型，一種為直接約去式子左右兩邊的$(3x-1)$，然後對 $2x+3=x+4$ 此式子做一元一次方程式的解法，因此解得 $x=1$，依然是出錯在學生對等量公理和約去未知數可能會碰上除以 0 的觀念還有問題。

第二種：提公因式化簡出錯

所以，在第 4 題 $(3x-1)(2x+3)=(x+4)(3x-1)$

此類錯誤的學生都是看到題目就分別對左右兩式乘開再移項化簡，出錯的也都是在這些步驟，比如分配律的計算錯誤，四則運算的計算錯誤，移項法則的運算錯誤等基礎運算錯誤。值得一提的是若包括答對卻用展開化簡解題的學生在內，乘開化簡的同學並不算

少，這顯示同學對稍微複雜的式子做提公因式化簡的能力不足。

第三種：錯用乘法公式

所以，在第 6 題 $(12x-5)^2=(11x-4)^2$

在使用平方差公式時，誤為差的平方公式，因錯用乘法公式或背錯乘法公式所產生的錯誤。

第四種：將解方程式誤當作因式分解：

所以，在第 6 題 $(12x-5)^2=(11x-4)^2$

$$=[(12x-5)+(11x-4)][(12x-5)-(11x-4)]$$

$$=(23x-9)(x-1)$$

由上述解題過程可知，學生的錯誤原因是不瞭解題意而影響其作答的正確性。普遍發現有部份學生認為「用因式分解法來解一元二次方程式」，就是「因式分解」的問題。也許是學生在學完「因式分解」單元，又緊接著學習「用因式分解法解一元二次方程式」，心態上無法馬上調整過來，還停留在以前的觀念，所以造成學習上的迷思。屬於此種錯誤的佔 27 個，佔所有歪曲定理錯誤的三分之一。

第五種：用變數代換法，忘了還原

所以，在第 9 題 $(x+4)^2=7(x+4)-12$

$$(x+4)^2-7(x+4)+12=0$$

令 $A=x+4$，$A^2-7A+12=0$

$$(A-4)(A-3)=0$$

$$x=4 \text{ 或 } 3$$

部份學生用變數代換法解題，但解到最後忘了還原 x，直接以代換的變數所求得的解作答。

在「等號雙邊是運算方程」的類型中，學生較易發生的歪曲定理是，當方程式兩邊有公因式時，誤用等量除法，約去等號兩邊的公因式，造成減根；另外，在此類型裡，學生也容易產生技術上的錯誤，例如：當提出各項公因式後，剩餘項在合併化簡時，常發生忘記括號的情形，若是剩餘項為相減時，就造成錯誤。

綜合以上五種題型，發現按照 MIZ 錯誤原因的統計結果，歪曲定理的錯誤皆普遍存在於五大題型裡，其中又屬多種概念匯集於同一單元或相近時間之單元的學習最容易發生，如：一元二次方程式單元之先備知識有關多項式與因式分解等等，以及本單元因式分解法解一元二次方程式、配方法、公式解、判別式等。因此教師在學生學習的過程中，可以將這些概念分類歸納，以加強學生的基本概念使用。

第三節　等號概念與一元二次方程式解題之關係

本節主要探討具備不同的等號概念的學生，在一元二次方程式解題表現之差異情形。以學生在「一元二次方程式試題」的答題情況，先瞭解具備不同等號念之學生在各個試題作答的正確性，藉以探討學生的解題表現是否因等號概念的不同而有所差異。

一、不同等號概念者的解題表現

針對學生在「一元二次方程式試題」各試題作答之正確性進行分析研究，分別以具備「運算型」、「關係型」不同等號概念的學生，探討其在各試題之答對率，第一題到二十題共分為五大類的答對率如下

表 4-3-1　　等號五大題型答對率

等號題型（題號） 答對題數/總題數 等號概念者×答對率	（一）等號左邊是運算（5.13.18）	（二）等號右邊是一個數字（1.3.10.16）	（三）等號右邊是未知數（2.7.8.12.17.19.20）	（四）等號雙邊是運算方程（11.14.15）	（五）等號右邊是運算（4.6.9）
	276/536 =51.67%	512/716 =71.5%	818/1256 =65.14%	346/536 =64.67%	343/536 =63.99%
運算型等號概念者	5.8%	0%	0%	0%	0%
關係型等號概念者	45.87%	71.5%	65.14%	64.67%	64.67

（一）運算型等號概念者：

從上表可知，運算型等號概念者的平均正確解題表現不論在那一類型中都遠遠低於關係型等號概念者，且運算型概念者僅在「等號左邊是運算」第一類（運：5.8%；關：45.87%），有答對者外，其餘四種類型皆無答對者；探究其主要原因為後面這四類型的等號是屬於等價關係之等號，若學生本身缺乏等量的概念，則對於這種有等式的題型必無法求出其解。

由於本研究中發現八年級學生具備運算型等號概念的人數比例占**近二成**的學生，代表這**近二成**的學生對於等號的概念僅僅停留在等號是由左至右的運算結果之運算型等號，然而進入國中階段後是代數課程的開始，等號不再只有運算型等號而是還有一個非常重要的意義就是關係型等號，若沒有這個概念，則對於日後有關解方程式的學習，將會造成莫大的困擾，所以建議教師在正式進行代數教學之前，可先建立學生對等號的等量概念並釐清不同等號概念的相關概念以減少學生學習上的迷思。

（二）關係型等號概念者：

與運算型概念者相較下，關係型概念者在正確解題表現不論是正確率與解題策略的多元化，關係型皆優於運算型；McNeil 等人

(2006) 指出學生在邁入中學階段，當年級越高時，出現「關係型」者就會越多相同，而方程式的作答正確性也會愈高；國內楊喻惟(2009) 的研究結果發現「關係型」定義的解題者有較高的人數比例是利用代數性質的解題策略及較高的機率利用代數性質的解題策略，本研究的結果與兩項的研究結果相同，也可看出對等號概念理解的重要性。

二、不同等號概念下一元二次方程式解題表現之綜合討論

在第一種「等號左邊是運算」的類型中，此題型的等號是屬於運算型等號，若已具備關係型等號的學生必也已具備運算型等號的概念，理應正確率應該不低，但研究結果卻發現，關係型的學生在這種類型卻是正確率最低的；研究者探究其主要原因發現，大多數的解題者誤將多項式化簡誤以為是方程式的型態，因為兩者間的混淆，而往往造成解題上的錯誤。因此在學生開始學習代數方程式時，教師應先將多項式與方程式間所出現的等號所代表的意義並不相同先做清楚的交待，接著再由方程式等量的概念作為出發點，建立學生完整的使用等量公理解題策略之概念，再進而將等量公理延伸至更具演算功能的移項法則，以加強學生對方程式等量結構的認識。

由上述結果可知，國中階段的學生對於等號概念是偏向關係型等號，而愈是傾向「關係型」的學生，其解題表現與正確性就愈高，也就愈能成功解題。所以學生對等號概念的拓展是在代數方程式之前就必須進行的重要工作，學生往往會因為不瞭解代數的結構，而容易被結構中的符號、運算規則所混淆，以導致原有的先備知識無法與新概念產生連結；學生會認為在算術階段中使用的等號與代數階段中所使用的等號用途與意義仍是相同，還會將等號右邊永遠視為是運算的結果，而導致最後以強記的方式來學習代數，並產生認知上的衝突，而在學習上遭遇到許多的挫折。

第五章　結論與建議

本章是根據第四章的研究結果與討論，針對不同等號概念對國中生在一元二次方程式錯誤類型之分析作出結論，並提出相關建議事項，分別就研究結論與建議，闡述如下：

第一節　結論

一、具「關係型概念者」與「運算型概念者」在一元二次方程式之解題表現比較

首先，本研究發現方程式的解題表現會因等號概念的不同而有差異，且等號概念是影響方程式解題表現的重要因素，進而影響其解題正確性。另外，本研究結果發現，對方程式等量概念不夠瞭解的學生，在進行解題活動時，因缺乏等量公理的概念，往往會造成解題錯誤或是在面對較複雜的方程式時，會不知如何處理。最後，在國中階段的學生對於等號概念是偏向關係型定義，當愈是傾向「關係型」的學生，愈能成功解題且解題策略也較多元，故對等號概念的理解實屬重要。

二、一元二次方程式主要錯誤類型

（一）方程式與多項式定義用法混淆不清

解方程式、化簡合併多項式、因式分解易混淆

（二）無等價的觀念以致扭曲等量的運用

1. 誤用等量公理於不正確的情況如:多項式

2. 同時加減乘除會遺漏某項如：常忘了加、乘等式的右方數字

3. 等式左右方欲配成完全平方數時，常左式是加某數平方，而右式卻是某數。

4. 解方程式時，無法判斷要用加或減、乘或除，先消去那一項、如何消及會與移項法則誤用。

（三）開根號與等量公理（移項法則）的順序錯置

1. 形如 $ax^2=b$ 的方程式，學生會直接將式子直接開根號而得到 $ax=\sqrt{b}$，然後得到 $x=\frac{\pm\sqrt{b}}{a}$ 的錯誤。

2. 形如 $(ax+b)^2=c$ 的方程式，學生在處理這類型的題目時，兩邊同時開平方根後，得到 $(ax+b)=\pm\sqrt{c}$，卻不知要利用等量公理先消去 a 或先消去 b。

3. 形如 $a(bx+c)^2=d$ 的方程式；

(1)學生易犯先兩邊同時開平方根的錯誤

(2)不會判斷要先開根號或移項，且移項時也不知道先移項 a、

b、c

(3)學生會將 a 乘入平方內，而得到$(abx+ac)^2=d$，然後再同時取平方根

（四）因式分解法解一元二次方程式

1.因式分解解一元二次方程式的基本原理不清楚

2.十字交乘法解一元二次方程式不夠熟悉

3.因式分解與解方程式的混淆

4.誤用等量除法公理，造成減根

5.乘法公式混淆、遺漏或遺忘

（五）配方法解一元二次方程式

1.平方根的觀念不清楚或平方與平方根意義混淆

2.負數平方還是負數或者出現方根內含負數

3.完全平方式的判斷與運用錯誤

4.配方法解一元二次方程式步驗或原理不清楚

（六）公式解解一元二次方程式

1.帶有根號之分數，在約分時產生錯誤

2.公式解之係數寫錯

3.無法正確用判別式判斷一元二次方程式是否有解

4.公式解的公式背錯

由研究學生的解題過程，發現多數學生以記憶公式的方法來學習。對於步驟過程的理由為何以及如何延伸的情形理解不夠完整。此種現象常出現在學校教育中，教師講述一次概念由來之後，就不再強調原因，導致學生只會用公式，而不了解原因。使教學與學生思考變得僵化，因此數學教師應以綜合性的概念教學，且概念的解釋能清楚詳細，讓學生正確理解概念為主，這才是教師教學中所要重視的原則。

三、等號概念與一元二次方程式錯誤類型之關係

1. 綜合學生的解題結果，在 McNeil 對等號的五大類型中，發現關係型概念者錯誤率最高是「等號左邊是運算」的類型，但按理此類型是屬多項式的化簡運算，其課程內容排在國二上學期的第一章，是學生已具有的先備知識，成功的機率應為高，探索其原因可能是學生對於多項式與方程式定義的認識一知半解，追本溯源其學生雖是已具有關係型的等號概念，但惟恐學生對其等號類型真正的觀念是模糊懵懂，因此反而容易讓學生將多項式的題目逕行當作方程式，造成解題上的錯誤。

2. 五大類型中，錯誤率次高是「等號雙邊是運算方程」類型，其中關係型概念者較易發生的歪曲定理是，當方程式兩邊有公因式時，誤

用等量除法，且約去等號兩邊的公因式，造成減根；另外，在此類型裡，學生也容易產生技術上的錯誤，例如：當提出各項公因式後，剩餘項在合併化簡時，常發生忘記括號的情形，而造成錯誤。

3. 本研究還採 MIZ 模式分析一元二次方程式的錯誤類型，其中也發現關係型概念者的錯誤類型，以歪曲定理的錯誤於五大題型中皆屬比例最高，其中又屬多種概念匯集於同一單元或相近時間之單元的學習最容易發生，如：一元二次方程式單元之先備知識有關多項式與因式分解等等。倘若學生對等號概念沒有真正的了解，則會對於方程式與多項式的定義與用法混淆不清，日後對同時出現解方程式、化簡合併多項式、因式分解也會因為混淆而寫錯答案，足見等號類型概念釐清之重要性。

4. 除此之外，研究者還發現運算型概念者僅有在「等號左邊是運算」是有作答正確者，其餘四種皆無人答對且錯誤類型多以空白或亂猜居多；相較之下，關係型概念者的錯誤類型多是使用一元二次的解題方法與代數有關且解題也較多元化。

第二節 建議

根據本研究之結論，擬對教學、教材與未來研究三方面，提出以下建議：

一、在教學上的建議

（一）加強學生對等號概念的認識

在教學過程中教師可積極加強學生對多項式的運算型等號與方程式的關係型等號的認識，且在學生尚未建立完整等量意義之前，盡量避免進行方程式的解題運算，但如何才能夠有效地加強學生對方程式結構的認識，則是一個值得研究代數教學者再深入探討的問題。

（二）檢視學生的先備知識

從教學現場中發現多數學生不喜歡這個單元，仔細觀察在九年一貫教材編排下，第三冊幾乎都是代數的運算，而解一元二次方程式是編排在最後一個單元，且又必須具備之前學過的基礎如：十字交乘法、乘法公式、等量公理、平方根的意義等等，因此容易造成學生的倦怠感。因此教師在學生學習的過程中，可以將這些概念分類歸納，以加強學生基本概念的使用。

（三）鼓勵學生說出自己的想法

針對同一種錯誤類型背後的錯誤原因可能不同，學生可能是平方

根的觀念錯誤，也可能是誤認為方程式的解都必須是正數。因此應多鼓勵學生說出自己對於整個解題過程的想法，才能糾正所有錯誤。建議教學時，不僅要多請學生上台解題，更要能引導學生說明自己的想法。

（四）適時完整地講解題目

發現不少學生在解配方法的題型過程中，錯誤類型未必是出現在配方法的過程。如：$(x+1)^2=3$，有的學生會配方法、開根號及等量公理的觀念，卻錯在開根號與等量公理的順序。大部份的老師常會將配方法解一元二次方程式的重點放在題目前面的配成完全平方式，而忽略題目後面的計算，而學生認真聽完老師的講解，最後自己做還是錯，將產生很大挫折感及影響日後學習。為了減少這種現象發生，建議在教學時應適時地完整地講解題目。

二、教材及評量方面

（一）教材的內容宜多方面的呈現，才能避免學生對相同類型題目的重複練習時，產生沒有理解或錯誤的學習。由研究結果可以發現許多學生對於多項式與方程式的混淆導致錯誤，表示學生雖有等號概念的名稱的概念，但僅是死記，而未能真正理解其意義；由多項式與解一元二次方程式即可看出學生對於等號概念並未了解。

（二）將研究中發現學生常出錯的錯誤類型，適時地提醒學生並納入教材內容加以標記，對老師的教學及學生的學習都有幫助。若能將這些學生可能有的錯誤概念及錯誤原因歸納整理後納入教師手冊，對於教師的教學及學生的學習必能有所助益。

三、未來的研究方面

（一）本研究主要在探討國中生在不同等號概念下在一元二次方程式單元學習後所呈現之解題表現，並未進一步探討其他變項，如：地區、性別、學習成就及學習態度的不同等，是否影響此單元錯誤類型或錯誤原因之研究探討。此外，本研究之研究樣本是使用康軒版的學校，並未加以比較使用各種版本的學生學習本單元之錯誤類型的差異，亦未比較不同縣市，使用同一版本之學習成效的不同，建議未來也可以針對此部分作比較研究。

（二）本研究受限於教師個人命題及分析試題，在編擬預試、選題、審題至最後完成正式試題上的一系列考慮篩選上，難免有顧此失彼之憾，且本研究僅大略性地探討一元二次方程式單元，並未對此單元之進行深入的細節探討，故謹期待未來相關方面的研究能夠在此處更加的完善。未來的研究亦可針對本單元提出的錯誤類型及原因設計有效的因應之道，提出適當的教學策略與授課教材，以對此單元之補救教

學做更一進一步的探討。

值得一提的是，繳交空白卷或無效卷之無效樣本人數在比例上並不算少，這不單單只先備知識不足的問題，可能與現行我國整個教育制度都有關聯。從此處思考，不難想像未來全面實施十二年國教時，會出現連國中數學基本的內容都有問題的學生被迫出現在高中的數學教室裡上課的大問題，此有待研究教育之專業人士進行探討。

參考文獻

一、中文部份

王文科、王智弘（2005）。**教育研究法（九版）**。台北：五南。

李登貴（2008）。**國二學生解一元二次方程式錯誤類型之研究**。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。

林清山、張景媛（1994）。國中生代數應用題教學策略效果之評估。**教育心理學報，27**，35-62。

倪斯杰（2006）。**一次方程與一次不等式**。台北：九章。

郭汾派、林光賢（1988）。國中生文字符號概念的發展。**中華民國第五屆科學教育學術研討論文彙編**，177-206。

郭生玉（2001）。**教育測驗與評量（修訂版）**。台北：精華。

梁宗巨（1995）。**數學歷史典故**。台北：九章。

梁淑坤（1996）。研究與教學合一：以分析「一元二次方程式」的錯誤為一個例子。**嘉義師院學報**，10，455-472。

教育部（2003）。**九年一貫課程綱要數學領域**。台北：教育部。

康軒文教事業(2009)。**國民中學第三冊數學2上教師手冊(第五版)**。台北：康軒文教。

陳澤民譯(1995)。**數學學習心理學**。台北：九章。

陳維民（1998）。**兒童的未知數概念研究一個國小六年級兒童的個案**

研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。

陳嘉皇（2008）。國小學童等號概念解釋與解題策略初探。**台灣數學教師電子期刊**，13，34-46。

楊喻惟（2009）。**等號概念對國中生一元一次方程式解題策略與解題表現的影響**。國立臺中教育大學數學教育所碩士論文，未出版，台中。

廖瓊菁（2001）。**國小六年級代數教學之研究**。國立屏東教育大學國民教育研究所碩士論文，未出版，屏東。

廖學專（2002）。**初探國中生等號概念之心像**。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文，未出版，台北。

戴文賓、邱守榕（1999)。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育**，10，148-174。

戴政吉、侯美玲、詹勳國(2002)。算術到代數的數學學習研究。**國教天地，150**，8-15。

簡珮華（2000）。ax+b=代數？。載於列志佳、簡珮華、黃家鳴（主編），**數學的故事**，（頁 48-61）。台北：九章。

二、英文部份

Alibali, Martha W., Knuth, Eric J., Hattikudur, Shanta, McNeil, Nicole M., & Stephens, Ana C.. (2007). A Longitudinal Examination of Middle School Students’ Understanding of the Equal Sign and

Equivalent Equations. *Mathematical Thinking And Learning, 9*(3), 221–247.

Asquith, Pamela, Stephens, Ana C., Knuth, Eric J., & Alibali, Martha W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking And Learning*, *9*(3), 249–272.

Baroody, Arthur J. & Ginsburg, Herbert P.(1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 198-212.

Behr, Merlin, Erlwanger, Stanley, & Nichols, Eugene. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-16.

Booth, L.R.(1984). Child-method in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 29-41。

Clement, J.,Lochhead, J., & Monk, G.(1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, 88, 286-290。

Collis, Kevin F. (1975). *The development of formal reasoning.* Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Knuth, Eric J., Stephens, Ana C., McNeil, Nicole M., & Alibali, Martha W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312.

Kuchemann, D.(1981) Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D.E. Kuchemann,D.Kerslake,G.Ruddock&M. McCaryney(Eds.),*Children's Understanding of Mathematics*:11-16,102-119.London : John Murrary.

McNeil, Nicole M., & Alibali, Martha W. (2005a). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development, 76*(4), 883-899.

McNeil, Nicole M., & Alibali, Martha W. (2005b). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. *Journal Of Cognition And Development, 6*(2), 285–306.

McNeil, Nicole M., Grandau, Laura, Knuth, Eric J., Alibali, Martha W., Stephens, Ana C., Hattikudur, Shanta, & Krill, Daniel E..(2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition And Instruction, 24*(3), 367–385.

Polya, G. (1985). *How to Solve It.-A New Aspect of Mathematical Method.* (Second Edition). Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Resnick, p.(1981). Sum misconceptions concerning the concept of variable *The Mathematics Teacher, 74*, 418-420。

Schliemann, Analucia D., Carraher, David W., & Brizuela Barbara M. (2007). Interpreting Research About Learning Algebra. In *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic From Children's Ideas to Classroom Practice*(pp. 1-13). Mahwah, NJ：Lawrence Erlbaum Associates.

Wanger, S(1981). Conservation of equation and function under transformation of variable. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*, 107-118。

Wollman, W.(1981). *Determining the sources of error in a translation from to sentence.*

附錄一　　「等號概念與一元二次方程式試題」預試卷

〈範圍〉一元二次方程式　　　年　　班　　姓名:　　　□男□女

給同學的話:　這份填寫卷主要是協助老師了解大家的學習情形。**不管會寫或不會寫，都請在空白處寫上你的想法及演算過程。請同學儘量不空白**，好讓老師了解大家是如何解題。填寫資料不算為考試成績，也不公開，以自然的想法填寫即可，謝謝合作。

一、請回答下列問題：

$$3+5\underset{\uparrow}{=}8$$

1.上述式子中，箭頭所指之符號的名稱為何？______。

2. 請寫下“＝”所代表的意義是什麼：(請你用自己的話寫下來)

____。

二、請你化簡或解出 x 值。(以下題目不限用方法作答)

(1) $x(x+7)=0$　　　　(2) $(x-5)(x+6)=0$

(3) $x^2-121=0$　　　　(4) $3x^2-4x-1=-9x-3$

(5) $(4x-5)(\frac{x}{3}-2)=0$　　(6) $(3x-1)(2x+3)=(x+4)(3x-1)$

(7) $x^2+6x+4+2x^2+3x+1=$　　(8) $(12x-5)^2=(11x-4)^2$

(9) $23=x^2$　　(10) $10x=5x^2$

(11) $(2x-3)(x-4)=0$　　(12) $(x+4)^2=7(x+4)-12$

(13) $(2x-5)(x+4)=-6$　　(14) $17=(2x+1)^2$

附錄一　「等號概念與一元二次方程式試題」預試卷

（15）$x^2+2x-3=0$

（16）$x^2+3=6x$

（17）$(x^2-9)+2x^2-2x+1=$

（18）$9=4(x-2)^2$

（19）$891=x(x-6)$

（20）$x^2+6x-9=0$

（21）$-39x^2+15=24x$

（22）$-5+4x+x^2-(5x^2+4x+1)=$

（23）$3x^2+5=2x$

（24）$x^2+7x-18=0$

（25）$399-4x=x^2$

試題結束，記得檢查一喔！

附錄二　　「等號概念與一元二次方程式試題」正式卷

〈範圍〉一元二次方程式　　　年　　班　　姓名:　　　□男□女

給同學的話:　這份填寫卷主要是協助老師了解大家的學習情形。**不管會寫或不會寫，都請在空白處寫上你的想法及演算過程。請同學儘量不空白**，好讓老師了解大家是如何解題。填寫資料不算為考試成績，也不公開，以自然的想法填寫即可，謝謝合作。

一、請回答下列問題：

$3+5=8$

1.上述式子中，箭頭所指之符號的名稱為何？______。

2. 請寫下“＝”所代表的意義是什麼：(請你用自己的話寫下來)

____。

二、請你化簡或解出 x 值。(以下題目不限用方法作答)

(1) $9x^2-64=0$

(2) $3x^2-4x-1=-9x-3$

(3) $(4x-5)(\frac{x}{3}-2)=0$

(4) $(3x-1)(2x+3)=(x+4)(3x-1)$

附錄二　「等號概念與一元二次方程式試題」正式卷

（5）$(-2x^2-8)-(2x^2+3x-8x)=$　（6）$(12x-5)^2=(11x-4)^2$

（7）$23=x^2$　（8）$10x=5x^2$

（9）$(x+4)^2=7(x+4)-12$　（10）$(2x-5)(x+4)=-6$

（11）$17=(2x+1)^2$　（12）$x^2+3=6x$

附錄二　　「等號概念與一元二次方程式試題」正式卷

（13）$(x^2-9)+2x^2-2x+1=$

（14）$9=4(x-2)^2$

（15）$891=x(x-6)$

（16）$x^2+6x-9=0$

（17）$-39x^2+15=24x$

（18）$-5+4x+x^2-(5x^2+4x+1)=$

（19）$3x^2+5=2x$

（20）$399-4x=x^2$