國立中山大學教育研究所碩士在職專班

碩士論文

國二學生在兩種表徵題中商高定理概念及解題歷程之研究

研究生：邱欣慧　撰

指導教授：梁淑坤　博士

中華民國九十七年六月

國二學生在兩種表徵題中商高定理概念及解題歷程之研究

摘要

本研究在商高定理單元中，使用九年一貫數學領域能力指標，分析學生面對文字題及圖文題，解題時所使用的相關數學概念，並透過 Schoenfeld 數學解題歷程，分析學生在兩種表徵題的解題歷程順序及時間差異。四位研究對象為高雄市某完全中學國中部二年級數學程度及表達能力佳的學生，將商高定理題目分為「形」、「面積」、「數」三類型，以放聲思考法及半結構性晤談來蒐集資料，並採三角檢證法進行原案分析。

研究結果發現，第一，數學概念展現上，在「形」的商高定理題目中，學生展現的解題概念種類的確因題目表徵不同而有所不同；而「面積」、「數」的題目中，除了文字題因畫圖輔助解題，需比圖文題多出幾何的概念外，其餘解題概念因題目表徵不同而造成的差異較少，但學生使用的解題方法不同會造成使用概念種類及順序上的不同。總體來說，數學概念種類可用使用概念次數來彌補，而且文字題使用的解題概念種類會比圖文題多。第二，解題時間中，學生在 Schoenfeld 前三個解題階段所花的時間，文字題是圖文題的 1.6 倍；整個解題所花的總時間，文字題是圖文題的 1.25 倍。在解題階段上，學生面對文字題時，較多會經歷探索階段，才能往下解題，而且在解題階段的往返次數較多。第三，無論是文字題或圖文題，學生答對題數最多的，其概念使用次數最多、解題階段往返次數最少；反之亦然。

教學建議方面，商高定理的教學順序中，研究者建議教師活用教具，先由「形」的面積拼補概念導出商高定理公式，再將公式應用在各類型「數」的題目中，學生有了以上「形」及「數」的商高定理概念後，教師再從「面積」的角度去解釋並應用商高定理。另外，在佈題時，教師需發展要運用許多數學概念的問題情境並涵蓋不同題目表徵，以加強學生數學概念的活用及兼顧不同學生的需求。

關鍵字：商高定理，表徵，形、面積、數。

A Study of Grade Eight Students' Concepts on Pythagorean Theorem and Problem-Solving Process in Two Problem Representations

Abstract

The aim of this study is to analyze students' mathematics concepts in solving Pythagorean Theorem problems presented in two different representations (word problems and word problems with diagrams). The investigators employed the mathematics competence indicators in Grade 1-9 Integrated Curriculum in developing such problems. In analyzing data, the investigator used Schoenfeld's method in depicting their problem-solving processes, with attention to students' sequence and difference in time consumption. Four eight grade students with good competence in mathematics and expressions from a secondary school were selected as research subjects. Problems related to Pythagorean Theorem were divided into three types: Shape, Area, and Number. Data were collected using thinking aloud method and semi-structured interview, and triangulation was further applied in protocol analysis.

The research results revealed 3 findings: (1) For the "Shape" type problems, students' problem-solving concepts varied with different problem representation. For the "Area" and "Number" types of problems (without diagram), students were required to use their geometric concept when processing word problems. Students" use of problem-solving concepts would not significantly vary with problem representation types. However, students' use of problem-solving methods would affect the types and priorities of concepts used. Generally, the types of mathematics concepts could be made up by the frequency of concepts used, and more types of problem-solving concepts would be used for word problems representation than for word problems with diagrams representation. (2) In terms of the time consumed in the first three problem-solving stages of Schoenfeld, the time required to solve word problems was 1.6 times of that required to solve word problems with diagrams. In terms of the total time consumed, the time required to solve word problems was 1.25 times of that required to solve word problems with diagrams. In the problem-solving stages, students needed to explore the problem first when dealing with word problems before they could go on to solve the problem, and such repetition was more frequent when they dealt with word problems. (3) For both type of problem representations, there is a higher number of correctly-answered problems. This finding indicated that a higher frequency of problem-solving concepts and less repetition in the problem-solving stage were required; and vice versa.

As to the sequence of Pythagorean Theorem concepts to be taught, the investigator suggest teachers to start with the concept of area filling in the "Shape" type of problems to derive Pythagorean Theorem, and further apply the formula to

solving “Number” problems. After students have acquired basic competency in “Shape” and “Number” Pythagorean Theorem problems, teachers could explain and introduce this theorem from the perspective of “Area”. Finally, in problem posing, teachers were also advised to apply various contexts; covering all kinds of representations of problems that enhance students’ utilization of mathematics concepts; and to cater for various needs of students.

Keywords: Pythagorean Theorem; Representation; Shape, Number, and Area.

目錄

表目次

圖目次

第一章　緒論

本章共分成三節，分別爲「研究背景與動機」、「研究目的」與「名詞釋義」。詳述本研究之研究動機與目的，以及針對「不同表徵題」、「商高定理概念」 及「解題歷程」做解釋。

第一節　　研究背景與動機

從以前到近年，有關數學教學的研究，尤其是數學解題（problem solving）能力的研究發展越來越受到重視。1977 年美國督導學會（National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM）指出「解題是學習數學的主要理由」，美國教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，NCTM，1980）指出：「解題必須是學校數學教學的重點」，1989 年 NCTM 在其出版的中小學課程及評量標準中的第一項即指出「數學即解題」（Mathematics as problem solving），NCTM（2000）在＜學校數學原則和標準＞中將「解題」和「連結」、「溝通」、「表徵」等並列爲重要的學習標準，其中解題表現和題目的性質有密切的關係；並且在其 1991、1995、2000 年所公布的課程標準都把「問題解決」列爲重點之一（NCTM，2000）。我國九年一貫新課程中，數學學習領域的教學總體目標之一爲「學習應用問題的解題方法」。「獨立思考與解決問題---養成獨立思考及反省的能力與習慣，有系統地研判問題，並能有效解決問題和衝突」列爲國民教育階段中所要培養的十大基本能力之一、在課程目標中也明定「培養學生獨立思考與解決問題的能力」，由此可知學習數學解題的重要性，而如何培養學生的解題能力成爲數學教學的重要課題。

近年來的數學解題方面的研究，已不再只是看重解題的結果，也就是不只有依學生解題後的答對率作爲評量的資料，而是開始朝認知歷程的方向去探討

（Krutetskii， 1976），並配合使用晤談原案（protocol）分析法，來進一步了解學生解題時的心理歷程，從而對數學教學的診斷（diagnostic） 與處方（prescriptive）有所幫助（Marshall & Smith，1987）。因此，數學解題思考歷程的探討，是協助老師了解學生認知發展和認知結構的最佳方式（謝淡宜，1998）。經由解題歷程的探討，老師們可了解學生如何運用舊有的知識結構、如何綜合條件、如何系統化擬定計畫及解決問題等，並可深刻理解學生數學概念內化的程度。

文字題，就是一般所謂的應用問題。陳立倫（2000）認為文字題提供學生將數學的計算技巧運用於各個情境中。Lave（1992）認為應用題是孩童將其在學校所學的數學，轉換成未來進入世界所需要的一種數學工具。數學文字題在數學解題訓練過程中佔有重要地位，其最大的特徵是藉由文字來敘述題目，但不需直接陳述需要用哪一種計算過程來解題 （Marshall，1987）。目前而言，國中數學課程中，文字題及文字附圖之圖文題是主要的兩種應用問題模式。然而，數學文字題就學生數學學習上並不容易，一直以來，學生對文字題存有一定程度的畏懼（Vasquez，1982）。閱讀文字題的解碼過程中更涉及複雜的個人認知歷程（Cummins，1991）。學生要解決應用問題，除了具備計算能力之外，還涉及語意理解（comprehension）和問題解決（problem solving）的運作歷程（Kintsch & Greeno, 1985）。Lewis 與 Mayer（1987）指出數學文字題是一種涉及語言轉譯與數學理論的題型，就數學能力來說比一般計算題更需要高深的綜合能力，學生對此問題感到最困難的地方，就是如何將語文轉譯成算式。為了克服學生解文字題的困難，並引起學生興趣，倪玫娟（2004）研究發現，擬定適合各年級的教學目標，運用生活化的教學佈題，可以引起學生的學習興趣，提高學生解題意願並促進學生的思考。因此如何增進學生解決應用問題的能力，並提高學習興趣，一直都是數學教育研究者關注的焦點。

Kaput（1985）認為，表徵應用在數學解題和學習上的議題有（1）如何讓數學佈題者去操作表徵；（2）如何去選擇符號系統來影響我們使用數學概念的能力；（3）如何讓數學教育研究者以關鍵焦點的方式，去處理表徵系統和符號系統。

因此，從表徵這個觀點來看學生解應用問題，教師可以使用不同表徵的題目來降低學生在語言轉譯上的困難。因此學生解文字題的困難，也可以從呈現問題的方式著手。 Paivio（1991）提出「雙代碼理論（dual-code theory）」，該理論主張人類利用形象的（imagined）、及語言的（verbal）兩種代碼表徵訊息。形象代碼專門處理非語言性物件的知覺訊息，能夠產生心像。此兩種代碼是人類處理訊息的主要模式。若同時利用兩種代碼表徵訊息，其解碼、組織、強化、擷取等表現會優於只有單一代碼。Lesh 等人亦（1987）指出，「圖像」（picture）可以內化爲心像（images）。解題者若能因此形成適當的心智表徵，則可以幫助學生了解數學題目的訊息及所有狀態的關係（Mayer，1985）。國內外也有不少研究是以不同題目表徵的型式呈現問題，來協助學生理解題意 （陳美芳，1995；林美惠，1997；Moyer, Sowder,Threadgill-Sowder&Moyer ,1984；Sowder & Sowder, 1982）。綜合來說，大部分的研究結果是學生在圖畫題的解題表現優於文字題，但是這些研究均是以小學生爲研究對象，鮮少有針對國中學生做研究。其中國二的學生，根據皮亞傑的認知發展論已進入形式運思期，他們可以處理假設情境並加以推理，尤其能從所得到的訊息產生抽象的關係。因此，研究者覺得國二學生在解文字題時，是否會因具備抽象思考的能力，而能減少在文字題中語言轉譯上的困難？或者，相同文字再加上較具體圖形之圖文題才較能增進學生的題意理解？因此，國二學生對於文字題及圖文題的理解，是否會如上述研究的一樣圖畫題會優於文字題？其解題歷程中所運用的概念及解題歷程是否會因題目外在表徵不同而有所不同？又有什麼差異？研究者覺得這是值得探討的問題。

由上述可知，無論國內外，在數學課程中都重視解題，而解題困難重重，包括文字題的理解，專家們均認爲數學文字題的理解與表徵有關，所以，表徵扮演了重要的角色。尤其國中的課程，深入探討了數與量、幾何及代數、統計與機率與連結五大主題，更可以利用表徵幫助學生解題，因此在國中課程中不難找得到表徵對解題的重要性。在國中課程中，研究者認爲，商高定理單元可充分利用表徵的轉換來探討學生的解題。商高定理單元在國中課程上來說是一個很重要的單

元，除了它是我國數學史上一個很重要的定理發現之外，單元內容中其所蘊含的概念包含了數與量、幾何及代數，因此學生如果能學好這個單元，除了能承接國一學習的數與量及代數的部分之外，更能為國二下的幾何學習奠定良好的基礎。根據美國學校數學的課程與評量標準（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）建議「數學教師要發展需要運用許多數學概念的問題情境」（NCTM，1989），教師在教學時最好在同一個問題中將許多所學過的數學概念連結在一起，而不是只運用某單一一個概念，這樣學生才會將數學視為一個整合的整體（Leung，1991）。因此，商高定理這個單元包含多種數學概念，更適合在學生的解題歷程中探討其所運用的概念及歷程。

基於上述理由，本研究期望以更深入的方式探討不同題目表徵型式下學生所運用的概念及其解題歷程，希望藉由研究成果，讓教師在佈題時做更詳盡的規劃及思考，以及更深入了解學生在面對文字題及圖文題時其概念的運用的差異及解題歷程的差異，以幫助學生學習、思考及解決數學問題。

第二節　研究目的

根據前一小節的研究背景與動機，本研究針對國二學生探討在不同表徵題中其解題過程中商高定理概念的運用，及解題歷程之研究，一方面從理論分析；一方面從實際解題中進行了解。本研究的目的如下：

一、探究國二學生在面對文字題及圖文題時，商高定理單元中「形」、「面積」、「數」三類型題目的數學概念展現。

二、探究國二學生在商高定理單元中面對「文字題」及「圖文題」時的解題歷程。

第三節　　名詞釋義

一、「兩種表徵題」

「表徵」(representation)， Kaput(1987a)認爲數學中的表徵主要爲個體腦海中的心智運作歷程及將心智活動的產物外在化。本研究所指之「兩種表徵題」是指題目用兩種表徵方式來呈現，其分別爲文字題及圖文題。文字題是指題目用文字的方式來呈現，而圖文題是指題目用文字加圖形的方式呈現。文字題與圖文題的文字敘述相同，只是圖文題除文字外再加上與文意相同的圖。

二、「商高定理概念」

本研究所指的「商高定理概念」係指學生在解商高定理題目時所需要用到的相關數學概念。研究者依據九年一貫課程綱要(研究對象的國二學生在小學階段是依據 88 年暫行綱要、國中階段是依據 92 年正式綱要)，與商高定理中「形」商高定理、「面積」商高定理、「數」商高定理，分三個向度有關的能力指標來呈現概念，包括面積的保留概念、根號的運算、面積拼補、座標距離等。

三、「解題歷程」

「解題歷程」是指解題者在整個解題過程的個人行爲，包含組織和處理訊息的方法，用以計畫和執行的認知策略知識，以及用來評鑑解題的方法(Lester，1980)。本研究中，研究者依據 Schoenfeld (1985) 的「讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證」將解題歷程區分爲六階段編碼分析，以了解學生在題目不同表徵下的解題歷程順序與時間。

第四節　　研究限制

本研究所探討的是以放聲思考的方式來探討國二學生在面對兩種表徵題時，解題過程中商高定理概念的運用及解題歷程的差異。但由於受限於研究者本

身的能力與物力，本研究在推論對象、研究工具、研究方法上有若干的限制，若要將本研究的結果推論到研究範圍以外的材料與情境時必須謹慎。

（一）推論對象的限制

由於研究對象是高雄市某完全中學國中部二年級的 4 位學生，並非所有的國二學生，因此所得的結論未必能代表所有國中二年級學生的解題情況。因此，所得的結果僅供類似地區的學校參考，這是本研究在推論上的限制。

（二） 研究變項的限制

本研究所指的兩種表徵題是分爲文字題及文字附圖的圖文題。Moyer 等人（1984）對題目的表徵方式分爲圖畫題、短語題與文字題。因考慮到國中階段的題目比較複雜，題目較難直接由純粹的圖畫題或短語題表示出，因此研究者採用國中最常出現的應用問題兩種表徵型態，即文字題及圖文題，來做爲本研究的研究變項；其他形式的題目表徵也可能會影響學生解題的概念運用及歷程，此有待更多的研究加以驗證。

（三）研究方法的限制

本研究採用放聲思考的方式來探討國二學生在面對兩種表徵題時，解題過程中商高定理概念的運用及解題歷程。對於解題歷程採用 Schoenfeld（1985）的「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」，將解題歷程區分爲六個階段。雖然 Schoenfeld 對六個階段提出一些相關的問題，但卻不是具體的操作型定義。受試者在解題的歷程中，腦中的運作狀態是很迅速且複雜的，因此研究者在劃分階段時，有可能會有階段區分上的兩難。另外，因爲本研究是屬質性研究，研究者在整個資料蒐集、施測及分析中，雖然力求客觀，卻難免參雜個人偏見在內。這也是本研究的一個限制，有待更多的研究來努力與克服。

第二章　　文獻探討

本章共分成四節，主要根據國內外文獻研究 「數學解題的意義」、各專家學者的「解題歷程」及「題目的表徵型式與相關研究」，及針對本研究所探討單元「商高定理概念及歷史」。期在進行研究之前，先探討有關的重要理論與文獻，做為本研究的依據。

第一節　數學解題的意義

無論是在國內或是國外，訓練學生的解題能力已是數學教育重要的一環。美國數學教育強調解題能力，以發展學生的表述、抽象化、邏輯推理、歸納、尋找規律性的數學能力，是一種思考能力的訓練（NCTM，2000）。

國內九年一貫的數學課程目標中明定培養學生獨立思考與解決問題的能力，其中數學課程綱要也強調問題解決就是運用個人先前已備的經驗、知識、技能和了解，去思索、探索、推理，到新的或不熟悉的情境，去尋求解答的歷程（教育部，2003）。

解題的意義，美國督導學會（National Council of Supervisors of Mathematics , NCSM，1977）將數學解題界定為「個體將過去所獲得的知識，應用到一個未知或不熟悉的問題情境歷程」。

除了 NCSM 之外，有許多國內外學者提出個人的見解，例如 Brownell（1942）則認為「解題可界定在三種情境之下：1.題目要求一個在某一特定情況下的解題；2.此人並沒有任何已建立的或容易評估的程序來解這個問題；3.此人試著來解這個問題」。

Polya（1945）認為解決問題就是為了要達到一個被清楚意識到但又不能立即達到的目標，期間沒有方法被告知，但卻要克服困難，繞過障礙去發現達到此目

標的方法。

另外，Lester（1980）認為數學解題是指 「個人面臨一種情境，在此種情境下並沒有算式可以保證解答，個人必須利用所擁有的相關知識或訊息，去獲得問題解答所涉及數學技能、概念的過程」。

美國的 Kilpatrick（1985）指出「所有的數學都是數學家們在形成問題及解題的過程中創造出來的」。他曾以三個不同的觀點來敘述數學解題的定義：

一、從心理層面而言：數學解題常被定義為一個情境，在此情境中，某人想到達某一目標，但直接通往此目標的路徑被封住了，因而產生問題，而在尋求答案的過程中，需要用到一些數學概念、原理、方法等，亦即把解題看成「人為了達成某種目的而做的一些活動」。

二、從社會－人類學的層面而言：把一個數學問題當作是老師給學生的一項任務，學生在接受此項任務時與老師產生微妙關係，師生雙方根據自己所關注的焦點，而相互解釋對方的行動和意圖，及從自我觀點出發來解釋對方的行為。

三、從數學及數學教學的層面而言：將數學問題當作是數學建構的泉源及數學教學的工具，亦即透過數學解題的教學，學生可以建構自己的數學知識。所以，數學解題是讓學生搭起數學鷹架的重要工具。

而 Mayer（1992）則認為一個問題的產生通常具有三種特徵，分別是：已知特徵、目標特徵、及障礙特徵，而解題就是從已知狀態移動到目標狀態的歷程。

國內學者黃敏晃（1991）認為解題者對他所面臨的問題，可憑其自然的推理能力，先前學過的知識或獲得的能力，或藉此問題之組織安排而加以了解，解題就是解題者如何把自己從困境中解脫出來的過程。劉秋木（1996）認為解題是縮減初始狀態與目標狀態的差異，是問題表徵的建構與再建構。

將上述各學者對解題各項特徵的敘述做比較整理成下表（表 2-1-1）。

表 2-1-1 學者的解題各項特徵整理比較表

解題特徵 各學者	**情境**	**無預設方法、程序**	**利用舊經驗**	**繞過障礙達到目標**	**建構數學知識**
Brownell（1942）	特定情況	沒有已建立的程序		試著來解這個問題	
Polya（1945）		沒有方法被告知		繞過障礙達到目標	
Lester（1980）	面臨某情境	沒有算式可以保證解答	利用所擁有的相關知識		獲得問題解答所涉及數學技能、概念
Kilpatrick（1985）	老師給學生一項任務	通往目標的路徑被封住		為了達成某種目的	學生可以建構數學知識
Mayer（1992）			已知特徵	障礙特徵 目標特徵	
黃敏晃(1991）			先前學過的知識	將自己從困境中解脫出	
劉秋木(1996）			初始狀態	目標狀態	問題表徵的再建構

綜合以上各學者的見解可知，數學解題的意義指解題者在面對一個新的或不熟悉的數學問題情境時，無法由記憶中立刻蒐尋出解答，必須重新思考並運用自己所擁有數學知識、經驗、策略技巧等，來解決問題獲得答案的心理歷程。

第二節　數學解題的歷程

本節參考 Polya (1945)、Schoenfeld (1985)、Lester (1980)等學者對解題歷程的論說。分述如下：

一、Polya 的數學解題歷程模式

Polya (1945)是最早有系統提出解題策略的學者，他在其所著的「怎樣解題」(How to solve it)一書中，強調解題的重要性，並將解題歷程分為四個階段：1.瞭解問題(understanding the problem)；2.擬定計劃(devising a plan)；3.執行計劃(carrying out the plan)；4.回顧解答(looking back)。

其解題歷程四階段說明如下：

(一)瞭解問題：

1. 解題者必須了解「未知數是什麼？」「已知數有什麼？」「有什麼條件？」「要確定未知數，條件是否充足？不夠或過多？或是矛盾？」

2.畫一個圖，引入適當的符號。

3.解題者是否可寫下條件的各個部分？

(二)擬定計劃

找出原有資料和未知數之間的關係，如果找不到，要考慮如何輔助以去解決，解題者應該有解決問題的計畫。

1.解題者以前看過這個題目嗎？或看過相同但以不同形式表達的題目？

2.解題者知道與這個題目有關的問題嗎？知道解題可用的定理嗎？

3.注意未知數！嘗試去想一個有相同或類似未知數的熟悉問題。

4.解題者能重述問題嗎？是否能用不同的方式來重新敘述它？

5.如果解題者不能直接解這個問題，先嘗試從一些相關的問題著手。解題相似或類比的問題嗎？或是能解這個問題的某個部分？解題者能從已知條件導出有用的結果嗎？若只保留已知條件的一部分，這樣對於未知數能確定到什麼程度？能考慮其他已知數以決定未知數嗎？解題者可以怎麼改變已知數和未知數？如果必要的話，兩個都改變，則新的未知數會和已知數更接近嗎？

6.解題者使用了所有的已知數了嗎？使用所有的條件了嗎？解題者是否已經考慮過與這個問題相關的所有必要概念嗎？

(三) 執行計畫

執行計畫並檢查每一個步驟。解題者能清楚的確定每一個步驟都正確嗎？解題者能證明某一步驟是正確的嗎？

(四) 回顧

1.解題者能檢驗答案或檢驗論證過程嗎？

2.解題者能用不同的方法導出這個結果嗎？或能將這個結果或方法應用到別的問題嗎？

二、Lester 的數學解題歷程

Lester (1980)以六階段來描述數學解題，並強調這六個階段的關係是不同但卻相互關聯的。說明如下：

（一）察覺問題(problem awareness)：

解題者對所面臨的情境，能了解困難的存在並覺察到是一個問題， 並且有意願解決問題。如果學生沒有意識到困難或沒意願去解決問題，這整個歷程是無意義的。此時解題者須了解：

1.在問題中相關及非相關的訊息是哪些？

2.了解訊息間的關係嗎？了解所有項目的意思嗎？

（二）理解問題(problem comprehension)：

此階段發生於當學生開始對這個問題產生感覺（making sense out of the problem）時。這個階段包含兩個子階段：

1.轉譯(translation)：解題者將問題所提供的訊息轉換成對自己有意義、可以理解的語句。

2.內化(internalization)：解題者提取相關的訊息並分類，且判斷彼此相關的程度。

很重要的是，在這個階段解題者會形成內在的問題表徵（an internal representation of the problem），此表徵會隨著解題者在一步步尋求解答的過程中，從起初可能的不正確到之後的精確性提高。

（三）目標分析(goal analysis)：

對於某些題目適合建立子目標，有些則不需建立子目標，而此子目標的確認，也包含了問題組成部分的確認，通常有助於問題理解及歷程發展，也

便於應用熟悉的策略與技巧。此階段解題者將訊息歸類，並作成細目，而且認清問題的結構，以便更進一步了解問題的成分，是否符合以下條件：

1.有任何子目標可以幫助達成目標嗎？

2.這些目標有一定的次序嗎？

3.這樣的次序編排正確嗎？

4.有正確認清問題的運算條件嗎？

（四）計畫發展(plan development)：

計畫的發展包括了辨認更多可能性的策略。解題者擬定一個可行計畫、清楚可行的策略，將子目標編列程序和詳細運算。解題者要能了解解題進行的程序和方法，而這個階段常是學生感到較難的部份，因爲學生常無法去組織他們的思考與計畫。因此解題者應注意下列事項：

1.是否有其他的方法可以解這個題目？

2.有更好的方法嗎？

3.是否曾經解過這類的問題？

4.這樣的計畫能達成目標或子目標嗎？

（五）計畫執行(plan implementation)：

解題者執行擬定的計畫。執行錯誤的可能性會提升混淆的情境，有時解題者會因爲簡單的計算錯誤而無法找到正確的模式。因此解題者應注意下列事項：

1.使用的策略正確嗎？

2.計畫的步驟順序正確嗎？還是能使用不同的順序？

（六）程序和解答評估(procedures and solution evaluation)：

此階段不僅要檢查答案是否有意義，而且從目標分析到發現解答的解題歷程作系統性的評估，此皆屬評估範圍。因此解題者應注意下列事項：

1.解答是否符合問題的條件？是否有一般性（generalizable）？

2.解題者所學的能幫助我解其他的問題嗎？

三、Schoenfeld 的數學解題歷程模式

Schoenfeld (1985)強調數學解題的研究方向需要考慮四個變項：資源(resources)、捷思(heuristics)、控制(control)及信念系統(belief system)。此亦數學解題表現應具備的知識及行爲。此四個變項分述如下：

1.資源是指解題者擁有有關解題的相關數學知識，而這些數學知識包含了數學的直覺與非正式知識、已知的事實、數學原理原則及運算程序等知識。

2.捷思是指捷思策略(heuristics strategies)而言，就是用來解不熟悉或非標準問題的策略和技巧，即有效率解題的主要法則。許多的解題研究都非常重視學生在解題歷程所使用的啓思策略，例如簡化問題、畫表格、尋找組型、逆推、猜測等等。

3.控制則是著重在解題者解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標，監控並評估解題結果等方面，即有關前兩項資源與策略的選擇與執行的決定。Schoenfeld 認爲控制的因素與心理學上的後設認知有相當大的關連性。

4.信念系統是指解題者對於自己、環境、主題及數學的觀點，而解題者擁有的數學觀將會影響其解題行爲。

Schoenfeld (1985)曾使用放聲思考的方法訪談三位大學生，將轉譯出的原案分爲一塊一塊的情節（episodes），他發現在資源、捷思、控制及信念系統等四項變項中，控制因素居於較爲關鍵的地位。因爲如何有效的運用資源，如何採用適當的捷思策略，常常是由控制因素所主導。所以特別在解題歷程中，以控制因素的觀點，將解題歷程區分爲：1.閱讀；2.分析；3.探索；4.計畫；5.執行；6.驗證等六個階段。他將解題行爲分爲上述六個情節，從鉅觀的原案分析可以看出解一道數學問題時，花多少數時間在每一個情節上，以及情節之間轉移的情形（表2-2-1）。另並將Schoenfeld之解題基模大綱表示於圖2-2-1。

表 2-2-1　Schoenfeld 之解題階段及相關問題表（譯自 Schoenfeld, 1985, p.279~301）

六 個 階 段	階 段 相 關 問 題
一、閱讀(reading)	R1：注意到問題所有條件嗎？條件是明顯的？或是模糊的？ R2：正確了解目標狀態嗎？目標狀態是明顯的？或是模糊的？ R3：是否評估解題者現有知識與問題之間的關係？
二、分析(analysis)	A1：選擇什麼觀點？此選擇是明確的或是不明確的？ A2：採取的行動是否根據問題條件？ A3：採取的行動是否有朝向目標？ A4：條件和目標有何關聯？ A5：解題者的行動（A1-A4）合理嗎？
三、探索(exploration)	E1：本階段是問題的條件引起的？或目標引起的？ E2：所採取的行動有方向或重點嗎？行動有目的嗎？ E3：有無監控行爲？監控行爲的有無對解答的結果有何影響？ E4：解題者所採取的行動是否合理？
四、計畫-執行 (planning-implementation)	PI1：是否有計畫行爲？ PI2：計畫與解題有關係嗎？是否適當？是否有良好的架構？ PI3：學生是否評估計畫的相關性、適當性及結構性？ PI4：執行時是否依循計畫有系統的進行？ PI5：是否在局部或整體層次評估執行？ PI6：評估的有無對結果的影響如何？
五、驗證(verification)	V1：解題者是否重新檢查解答？ V2：有無考驗解答？若有的話，將如何考驗？ V3：有無對歷程及解答的評估？對結果的信心如何？
六、遷移(transition)	T1：對解題的當前狀態有無評估？若放棄一種解題途徑，是否有想去利用其中有用的部份？ T2：有無評估先前放棄的解題途徑，對解答產生的局部與整體影響如何？所採行動適當而必要嗎？ T3：是否評估採取新解題途徑的任何影響？或直接就跳入新的方法？ T4：採用新途徑後有無評估所有的影響？行動是否適當而必要？

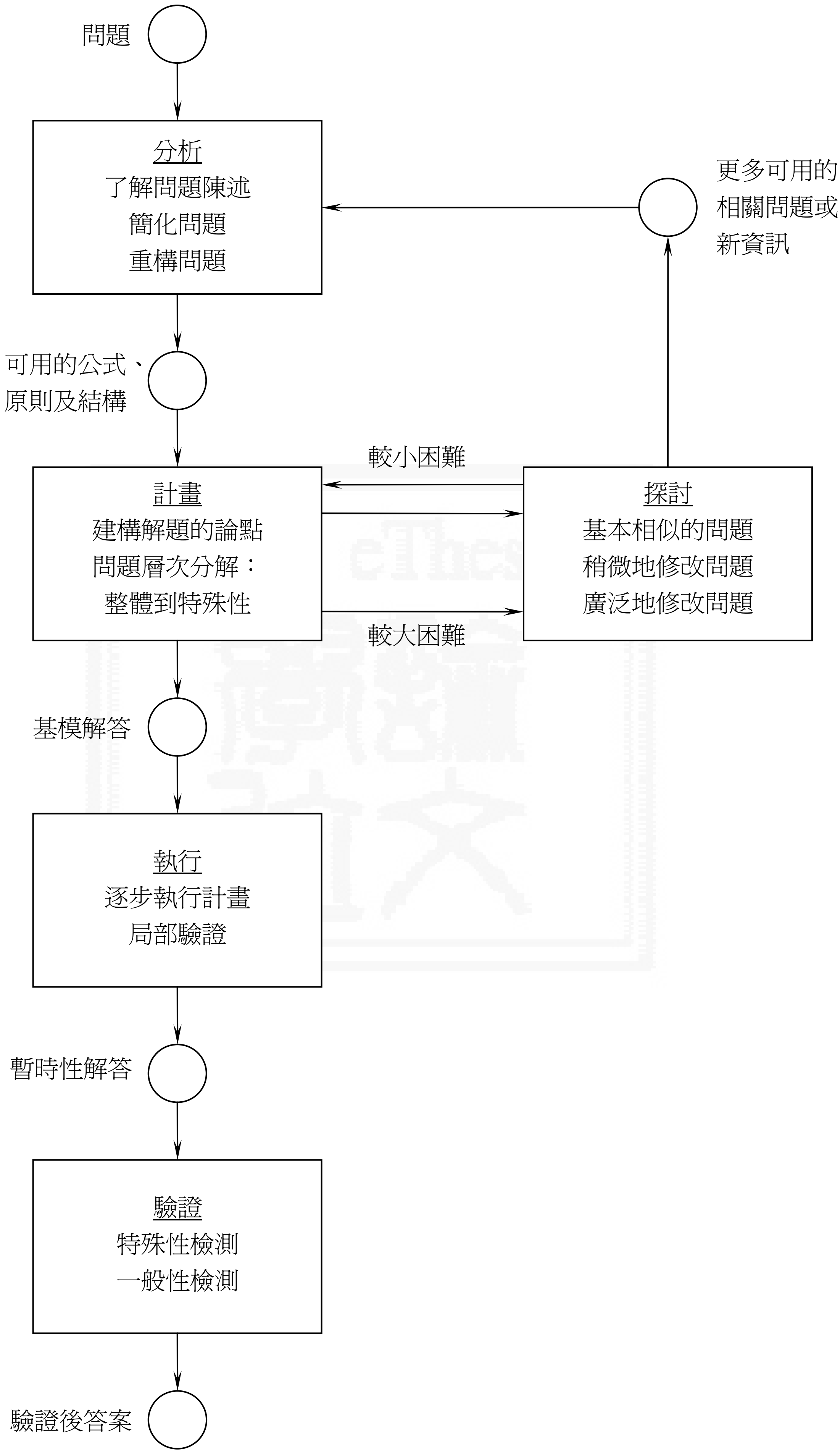


圖 2-2-1 Schoenfeld 之解題基模大綱（譯自 Schoenfeld ,1985, p110）

四、Mayer 的數學解題歷程模式

Mayer (1992)從問題解決認知的觀點，將解題歷程分爲兩個階段，每個階段又包含二個步驟，分述如下：

（一）問題表徵(problem representation)：即將問題的文字或圖像轉換成內在的心智表徵，此階段包含二個步驟如下：

1.問題轉譯(problem translation)：將每一個句子或主要的詞句轉變爲內在心理表徵。解題者在此步驟需要了解題目句子的意義，因此問題轉譯需要有良好的語言知識及語意知識，而將問題從文字表徵轉換成心理表徵對學生來說常是不太容易的。

2.問題整合(problem integration)：問題整合要求解題者將問題中的訊息統整成連貫的表徵，爲了整合問題的訊息，解題者需要具有基模知識(schematic knowledge)，以區分問題的類型。

（二）問題解決：即從問題的心理表徵到最後答案的過程，含二個步驟如下：

1.解答的計畫與監控(solution planning and monitoring)：解題者要能擬定解題計畫，並監控自己的解題行爲過程。此步驟需要具有如何解決問題的策略知識。

2.解題的執行(solution execution)：解題者要能運用數學算則以求得解答。此步驟需要程序性知識，以便正確且有效的應用算則來執行計算工作。

在解題過程中，每個步驟所需的知識並不相同：在問題表徵階段，轉譯過程涉及語言知識和語意知識；整合過程則運用到基模知識。在問題解決階段，解題計畫與監控和策略知識有關；解題的實施則需運用程序知識。

五、Glass 與 Holyoak 的解題模式

Glass 與 Holyoak（1986）曾以一個可循環的通則的流程圖，如圖 2-2-3，來表示解題的歷程：

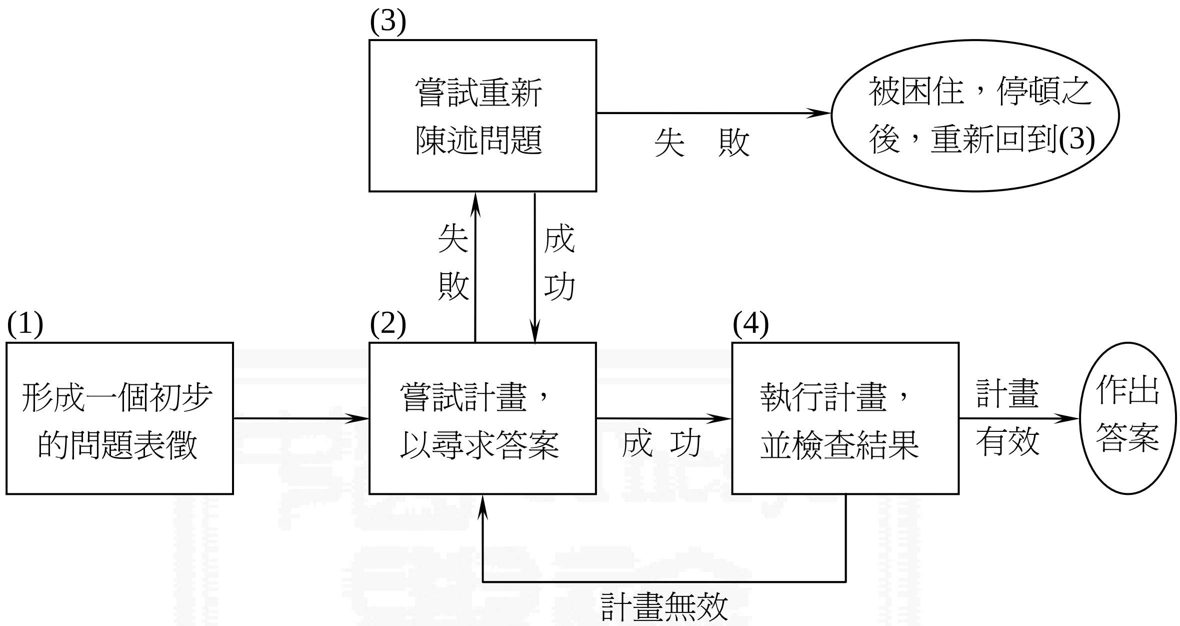


圖 2-2-2　問題解決模式（譯自 Glass 與 Holyoak, 1986, p367）

此流程圖包括四個重要的步驟：

1. 形成問題表徵：理解題意，了解目標，形成適當的問題表徵。由於不同的表徵會形成不同的解題策略，所以此步驟是問題解決的第一道關卡。
2. 嘗試計畫：此步驟乃是依照表徵形成計畫，利用方法---目標（means-ends）的分析方式，一步一步找出答案，運用一些操作以建構能產生解答的步驟 。
3. 重新陳述問題：如果初步的問題表徵無法滿足解題的需要，嘗試以另一種方法來陳述或表徵問題。通常此部分的工作，是移除一些觀念上的阻礙（conceptal block），或是找出與此題目相似的線索，來重新建立問題的表徵，以利解題（唐淑華，1990） 。
4. 執行計畫並檢查結果：此爲問題解決的最後步驟。執行所擬定的解題計畫，

如果失敗，則加以檢討，重新擬定新的解題計畫。

六、Lesh 和 Landau（1983）的解題過程

Lesh 和 Landau（1983）由數學模式的角度，描述解題的過程

1. 將問題簡化，注意問題情境中的重要條件，忽視非相關的資訊。
2. 建立問題情境與數學模式的相對應關係。
3. 使用數學模式中擁有的條件，來推論出新資訊。
4. 將獲得的新資訊，由數學模式回應於原始情境，並檢查此結果是否合理。

綜合上述各學者對解題歷程的論說，發現彼此之間的內容有相似，但階段分類有所不同，以 Schoenfeld 的六階段分類爲主，將各學者對解題歷程的劃分做比較整理如下表（表 2-2-2）。其中以 Schoenfeld 的六階段分類較爲詳細，適合作爲國二學生解題歷程分析的理論依據，因此本研究選擇從 Schoenfeld 的讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證六個階段解題歷程來探討學生在面對文字題及圖文題時其概念的運用的差異及解題歷程的差異。

表 2-2-2　各學者的解題歷程劃分比較表

<table>
<tr><th>學者　解題歷程</th><th colspan="6">解題過程</th></tr>
<tr><td>Polya</td><td colspan="2">瞭解問題</td><td colspan="2">擬定計劃</td><td>執行計畫</td><td>回顧解答</td></tr>
<tr><td>Lester</td><td>察覺問題</td><td>理解問題</td><td>目標分析</td><td>計畫發展</td><td>計畫執行</td><td>程序和解答評估</td></tr>
<tr><td>Schoenfeld</td><td>閱讀</td><td>分析</td><td>探索</td><td>計畫</td><td>執行</td><td>驗證</td></tr>
<tr><td>Mayer</td><td>問題轉譯</td><td>問題整合</td><td colspan="2">解答的計畫與監控</td><td colspan="2">解題的執行</td></tr>
<tr><td>Glass 與 Holyoak</td><td colspan="2">形成問題表徵</td><td colspan="2">嘗試計畫、重新陳述問題</td><td colspan="2">執行計畫並檢查結果</td></tr>
<tr><td>Lesh 與 Landau</td><td>簡化問題</td><td>建立對應關係</td><td colspan="2">推論新資訊</td><td colspan="2">回應回原始情境並檢查結果</td></tr>
</table>

第三節 數學題目的表徵型式

許多學者（Gagn'e, 1985；Mayer, 1987）認爲，解題者對問題所形成的「表徵」是解題成功或失敗的重要關鍵。然而學生因爲無法充分了解題意，或無法形成適當的問題表徵，可能與數學問題的呈現方式有很大的關係。因此，在本節中，研究者將從 5 個部份：表徵的意義、種類、表徵間的轉換、不同題目表徵之間的差異及數學題目表徵的相關研究，來探討表徵對學生解題的影響。

一、表徵的意義

由於每位學者所持的角度不同，因此對於「表徵」（representation）的定義也有所不同的見解。配合本研究目的，從心理學及數學方面來說明表徵的意義及其功能。

在心理學方面，張春興（1989）指出，表徵是事物以不同種類或符號化的形式來代表的歷程，在認知心理學上是指訊息處理過程中，將訊息編碼並轉譯成另一種形式，以便儲存或表達的歷程。

在數學方面，Lesh, Post 與 Behr (1987)以溝通及問題解決的角度，指出「表徵」是指心智過程模式化所使用的符號系統，如圖形、符號、語言文字、具體操作物，也就是學童內心的概念轉爲看得見的外在表現。而美國數學教師協會（NCTM, 2000）主張數學表徵是一種數學概念的呈現方式，代表人們對於數學概念的理解與應用。Kaput（1987a）認爲數學中的表徵主要爲個體腦海中的心智運作歷程及將心智活動的產物外在化。

綜上所述，表徵是指將內心的想法，用他人可以理解的方式表現；亦即用另一種形式將事物或想法重新表現出來，具有溝通的功能。所以，「表徵」除了是人類進行學習的重要媒介以外，更是個體在進行運思時的重要工具；而且當個體能將「表徵」所表現的意義確實掌握之後，「表徵」便更進一步成爲運思的材料，

簡化了人類思考的過程（蔣治邦，1994）。因此表徵是幫助我們思考、解題、溝通、以及詮釋各種事物以及現象的重要工具，其具備有溝通及運思的作用，與數學學習有密不可分的關係。

二、表徵的種類

由上述表徵的意義得知，表徵扮演兩種角色：「運思的材料」與「溝通的媒介」（蔣治邦，1994），而在數學教學上，老師又常將表徵型式當作一種「認知歷程的輔助工具」。所以表徵的分類因切入的角度不同而有所差異，以下分別提出三位學者的看法來說明表徵的三種觀點：

（一）從「運思」的觀點

Bruner（1966）由運思方式的觀點，區分成三種表徵，分別為：

1. 動作的(enactive)表徵：是指接受到刺激後，所引發的外在行動反應，透過行動手段，來掌握概念或事物，例如：學生實際用桌角或牆腳來了解何謂垂直。

2. 圖像的(iconic)表徵：是指用「心像」（image）來掌握概念，換言之，即使具體物已消失，在腦中仍留有心像。運思活動是以心像為材料，進行內在的活動。例如：多邊形圖示法、用平面座標說明相關位置。

3. 符號的(symbolic)表徵：是指用符號來掌握概念，對符號進行運思。符號與心像不同，它本身是一個隨意選擇的記號，它與實物之間並無任何類似之處，不像心像是外在實物的影像，它代表了實物或心像的某一種性質的抽象意義。例如：$\sqrt{84}$、$2x^2$。

Bruner（1966）認為智力的成長（即運思活動）逐漸可以使用符號來認知，亦即漸漸地不再依賴外在的刺激。兒童運思活動從具體操作的過程獲得經驗，接著運用感官對事物所得的心像，去了解周圍的事物與現象，得到圖像及符號表徵，此二種表徵皆是心智活動的產物，可以保留在記憶中，或再重新自行建構出來，而不失外在刺激原本的意義，它可以使人類的運思活動，不再受外在刺激呈

現的時空限制，但是這些較抽象的表徵，是在學習經驗中發展出來的（蔣治邦，1994）。

（二）從「認知歷程」的觀點

Kaput（1987a）從認知歷程的觀點，將數學中的表徵系統分為四類：

1.認知與知覺的表徵(cognitive and perceptual representation)：指個體內在對於知識與訊息的表徵，亦即為個體大腦中將訊息儲存或轉換的型式。

2.解釋性表徵(explanatory representation)：指自然語言或心像與其他數學符號間的聯結，用以描述心理結構的模式。

3.數學內的表徵(representation within mathematics)：指不同數學結構之間的關聯，亦即為以數學的某一結構來呈現另一種結構特性的系統。

4.外在符號表徵(external symbolic representation)：指以外在的符號物體來表徵數學概念的系統，是用來表示抽象的數學概念的物質型式。

Kaput表徵的分類中，前三種屬於心智活動的產物，為「內在表徵」；第四類屬於「外在表徵」。心智活動的產物主要是在個體腦海裡的心智運作。而外在表徵則是將心智活動的產物，用不同的表徵方式表現出來，即指將問題的某些部份外在化，利用不同型式表現出來。個人對於外在表徵的運用，即反映出知識的內在表徵。

（三）從「溝通」的觀點

Lesh等人（1987）以溝通的觀點，認為數學學習及數學解題有五種不同的表徵。不同的問題會影響所需的表徵系統，而直接影響題目的難易程度，更影響學生的數學思考。數學概念可以用下列五種表徵呈現：

1.真實情境(experience-based scripts)：指學童運用實物或是真實情境的東西與知識等，來表示問題中的情境與內容並藉以解決問題。如：學生實際用桌角或牆腳來了解何謂垂直。

2.教具模型(manipulative models)：透過具體物之操作，以探討數學概念，如：用商高定理泡棉拼圖組去理解商高定理面積拼補的概念。

3.圖像(pictures or diagrams)：利用靜態的圖畫模式，如：數線、平面座標等，以增強概念的發展。

4.語言（spoken language）：運用日常生活用的口語陳述，以表達想法或解題過程，如：直角三角形兩邊平方的和會等於斜邊平方。

5.符號(written symbols)：常用之數學符號或數學算式，如同語言，也包括特殊化的句子和片語。如：$\sqrt{84}$ 、$2x^2$等。

上述各學者對表徵的看法在某些觀點上是有所不同的，Bruner與Kaput認為表徵是個體內心的活動，所以當個體形成心像或符號，並不必然需要與他人溝通，而動作、圖像、與符號的表徵代表著運思的抽象程度；然而，Lesh所謂的表徵，以溝通為目的，運用不同表徵之轉換能力作為判斷理解知識的證據。雖然三者的分類觀點不同，但是相同的地方為學習者必需從不同型式的表徵系統中獲得數學概念，更要能將同一數學概念在不同表徵之間自由轉譯，才表示完全理解數學概念。

一般認為，圖像表徵及具體物表徵與被表徵的實物之間相似性比較高，也比較容易掌握（蔣治邦，1994），也因此圖像表徵、符號表徵成為一般評量時最常使用的題目表徵方式。因此本研究將數學題目的表徵分為圖像表徵、符號（文字）表徵兩方面，即圖文題及文字題，來探討學生在商高定理的解題概念運用及歷程。

三、數學表徵的轉換

在數學的學習上，同一個數學知識或概念均可用多種不同的形式加以表徵，數學概念並不受外在表徵形式改變所影響（蔣治邦，1994；Hiebert & Carpenter，1992；Kaput, 1987a，1987b）。這是一種特殊的性質---「多義性」，使得相同的數學概念並不會隨著外在表徵型式的變化而受到影響，例如，「⊥」、「90°」、「垂直」雖是不同的表徵形式，仍代表同一個數學概念。

Davis (1984)提到數學概念的理解包括兩個部分，一個是能夠以一套符號或

系統來表徵數學的概念，一個是能以多重的表方式徵來呈現某一個概念，並且能夠在不同表徵系統間作轉換。Brenner 等人 (1999) 認為表徵系統的轉譯方式分為兩類，一類為在某一個表徵系統做轉譯；另一類則在各個表徵系統之間的轉譯。其實，Davis 和Brenner 等人的說法是一樣的，例如，將∠ABC=90°在符號系統中做轉譯，可轉譯成 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ …等符號表徵，是完全在單獨一個表徵系統作轉譯；如果將∠ABC=90° 符號表徵透過畫圖、語言、具體物來表示，則是在各種表徵系統之間的轉換。而許多學者認為學童是否能自由的將各種表徵系統互相翻譯或轉換，是判斷數學概念理解程度的一項重要指標（吳昭容，1990； Lesh & Landau，1983）。

Lesh等人（1987）認為表徵分類所強調的不在於區別不同表徵系統，而是在於表徵系統間的轉譯(translation)。其彼此間的關係如圖 2-3-1：

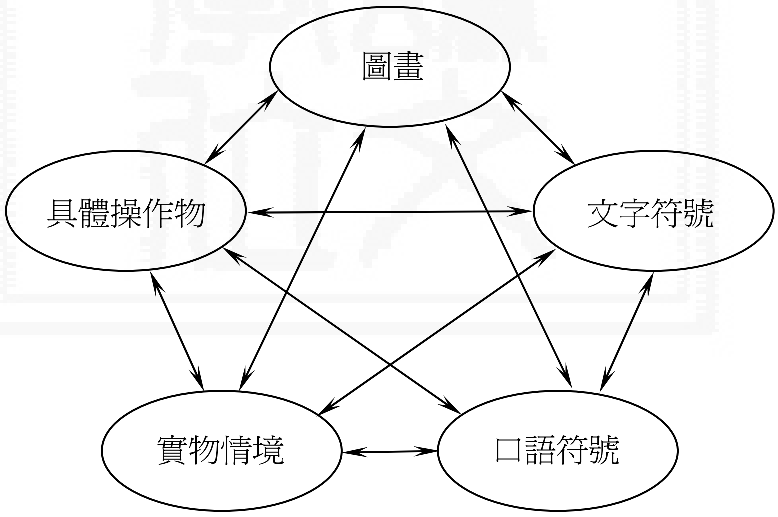


圖2-3-1 表徵關係圖(譯自Lesh，Post 與 Behr, 1987, P34）

而圖2-3-2重現了一個雖然過度簡化、概念化但是有用的解題過程。例如，問題的不同面向可能以不同的表徵系統被重現，而解題過程可能牽涉到在一些系統中來回地建立圖像—可能使用圖片作為真實情境和書寫符號的媒介物。

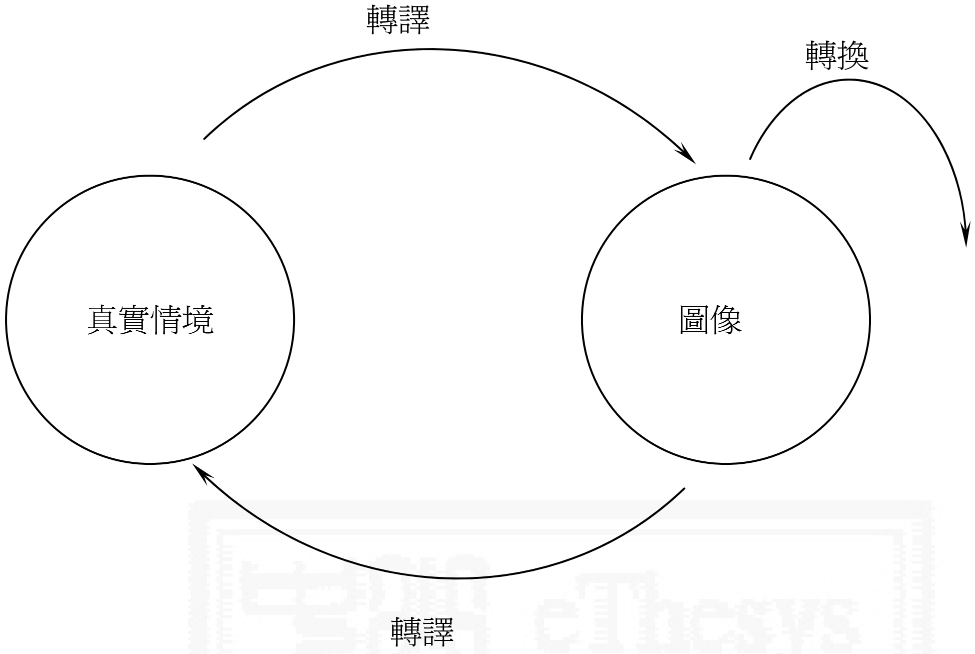


圖2-3-2　解題過程（譯自Lesh, Landau & Hamilton, 1983, p271）

Lesh等人（1987）認為學生能在不同的表徵方式中自由轉譯，表示已經了解其概念意義。而要如何知道學生是否能透過表徵來理解一個概念呢？其認為經由不同形式的數學表徵轉譯過程，能夠得知學生對於概念意義的掌控情形。並認為學生必須具有下列條件才算了解一個概念：

（一）他必須能將此概念放入各種不同的表徵系統之中。

（二）在給定的表徵系統內，他必須能很有彈性地處理這個概念。

（三）他必須能將此概念正確地從一個表徵系統轉換到另一個表徵系統。

而游自達（1995）也認為數學學習應該要注重不同表徵系統之間的連結，並且能夠利用多樣化的表徵方式來代表數學概念，並認為老師在教學時，應注意下列三點以讓學生能連結不同的表徵系統：

（一）讓學童能掌握符號系統，並做有意義的操作；

（二）注意不同表徵系統間的關聯；

（三）利用多重表徵代表數學概念。

另外，也有一些其他有關表徵相關的研究（林碧珍，1980；楊德清、洪素敏，

2003；蔣治邦，1994；Brenner,et al., 1999; Cramer, Post, & del Mas, 2002; Dreyfus & Eisenberg, 1996）指出能夠彈性地運用多重的表徵去呈現數學概念，才代表真正理解概念，這觀點也與Lesh等人有異曲同工之妙。也有一些學者（Brenner et al., 1999; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Fennell & Rowan, 2001）進一步指出，善用多樣化的表徵形式，例如圖形、操作具體物、或是寫出數學方程式… … 等等，將有助於學生組織思考以及分析問題的呈現。

綜而言之，多位學者均肯定不同表徵方式在學生數學學習上的意義。學生若能適當地運用多樣化的表徵，不僅能夠增進數學概念的理解，並且可做爲與他人溝通數學想法的媒介。若是將其應用在真實的問題情境，更能進一步解決生活當中所面臨的問題。因此，在數學學習如果多提供學童運用表徵的機會，讓表徵成爲數學思考能力的工具，對於學童數學概念的發展有很大的助益。因此蔣治邦（1994）認爲，不論呈現何種表徵做爲溝通的刺激，接受訊息者皆能轉譯，即使用自己的方式重新表徵而不失原意，如此的轉譯過程，有助於學生解決問題及數學的學習。

四、不同題目表徵之間的差異

由於表徵是運思的材料，若能透過不同題目表徵型式的輔助，幫助學生理解問題的敘述，改善學生解題時的工作記憶負荷，對其解題表現將有所助益（Juhani，1995）。由於本研究將表徵分爲圖像表徵、符號（文字）表徵兩方面，因此就圖像表徵、符號（文字）表徵的差異做探討：

圖示法是外在表徵中最常被應用的策略（杜佳貞，1999）。有些學者認爲圖示具有統整性與具體性，可以幫助學生形成恰當的表徵，豐富其數學概念，增進解題表現（Bishop, 1989；Webb 與 Sherrill, 1974）。然而Clement（1981）認爲圖示法對於學生在形成有效的問題表徵上是無助益的，甚至會造成學生概念抽象化的困難（引自陳啓明，1990）。以下就「訊息呈現」與「訊息解讀」兩方面來比較：

（一）訊息呈現方面：使用圖畫形式加上簡單的文字說明，在訊息的傳達上較爲精鍊，容易引發學生的解題興趣。相反的，文字型式在訊息的傳達上就比較繁雜，或許因此造成學生在閱讀理解上的困難（張欣怡，1997）。

（二）訊息解讀方面：個體讀取文字訊息時，必須從頭開始閱讀與搜尋相關資訊，然後儲存在記憶中，之後週而復始的搜尋下一個需要的資訊，直到解題所需要資訊都齊全爲止。反之，在圖畫題中，通常找到第一個資訊，解題者就容易在鄰近的地方搜尋到其他的相關資訊了（Larkin & Simon, 1987）。

以下將文字與圖畫表徵的差異整理成下表：

表2-3-1 文字與圖畫表徵的差異

表徵型式	文字	圖畫
差異性	＊需要較多的說明與描述，因此內容比較繁多。 ＊只可使用單一表徵方式（文字）來呈現訊息。 ＊關係是隱示的（implicit）。 ＊資訊間的連結並不緊密，即下一個資訊並不一定是在下一個敘述中 。	＊訊息表達較爲精鍊，因此內容較爲簡單明瞭。 ＊可以利用各種不同的表徵方式，如圖畫和符號，來呈現訊息。 ＊關係是明確的（explicit）。 ＊資訊間的連結較緊密，即下一個資訊即有可能是在鄰近的位置出現。

因此有學者（Moyer et al., 1984）認爲圖像表徵在數學的學習上的優點如下：1.減少與閱讀有關的工作記憶　2.幫助學生回憶類似記憶，建立適當的問題表徵　3.鼓勵學生投入理解題意　4.使曖昧不清的題意更明確，彌補文字資料的不足。

另外，在文字題方面，若問題的陳述內容若與學生的經驗有關，將有助於訊息的提取，減少工作記憶的負荷，幫助學生在文字題的解題表現。然而，若文字

題的問題長度太長，包含了較多的訊息待處理，會增加解題者工作記憶的負擔（Barnett, 1984；林文生，1996），減慢解題的速度或增加解題困難。

其實，每一個表徵的系統皆不相同，因為它們強調或不強調不同方面的概念重點及建構。它們在處理相關概念、資料簡化、及在不同情況下的精簡皆不相同。學例來說，有些圖形值一千字，有些語言則簡潔與更有效率（Lesh, Landau & Hamilton, 1983）。因此，學生在面對圖像表徵、符號（文字）表徵兩種不同的表徵系統時，其解題概念運用及解題歷程的差異，是值得探討的問題。

五、數學題目表徵的相關研究

在進行數學教學時，教師常會利用一些圖表或圖示，做為輔助教學的工具，此即數學解題中的「外在表徵」。而近年來，以外在表徵教學來促進學生數學解題的能力，已是一個研究的焦點。在荷蘭 Freudenthal Institute 的評量工具建立中，也明顯的指出真實性（realistic）的題目可以提高學生解題的興趣，因此建議以真實感的圖畫來評量和編寫教科書（van den Heuvel-Panhuizen, 1996）。在國內學者方面，梁淑坤（1996）在討論數學教科書的評鑑時，也建議數學教科書的編寫除了應考慮數學內容、題目情境佈置之外，更應注重多重表徵系統的呈現。由此可見，數學教育不僅處理語文與數字而已，也必須重視各種外在表徵的重要性。

目前研究外在表徵對解題的影響，大致以圖示法居多。其實驗研究上，多半研究都支持圖示方式可以促進數學的學習（吳昭容，1990；徐文鈺，1992，林美惠，1997；Greeno, 1987；Lewis, 1989；Sellke，Behr & Voelker, 1991），另有些研究發現學生從文字轉換到圖表等外在表徵有相當大的困難（吳昭容，1990；謝毅興，1991；Defour-Janvier，Bednarz & Belanger, 1987）。

以下列出一些學者以題目表徵的角度來研究不同題目表徵對學生解題的影響：

Sowder 與 Threadgill- Sowder（1982）以262名五年級學生為對象，研究學生解決文字題與圖畫題的差異，結果發現學生在圖畫題的解題表現優於文字題，而

且也比較喜歡解圖畫題。

Moyer et al.（1984）以854名三到七年級的學生爲對象，依閱讀能力將學生分成高、低兩組，探討學生在圖畫題、文字題與短語題的解題表現。結果發現：學生在圖畫題的解題表現優於其他兩者，且有利於低閱讀能力學生提升解題能力。

陳啓明（1990）以133名五年級學生爲研究對象，探討不同題目表徵型式（文字題、短語題、圖畫題）及相關因素在應用問題解題表現之影響。結果發現：學生在不同題目表徵型式之應用問題的解題表現上，彼此間都存在著顯著的差異。其中，學生在「圖畫題」上的解題表現顯著優於「短語題」和「文字題」；而學生在「短語題」上的解題表現也顯著優於「文字題」。

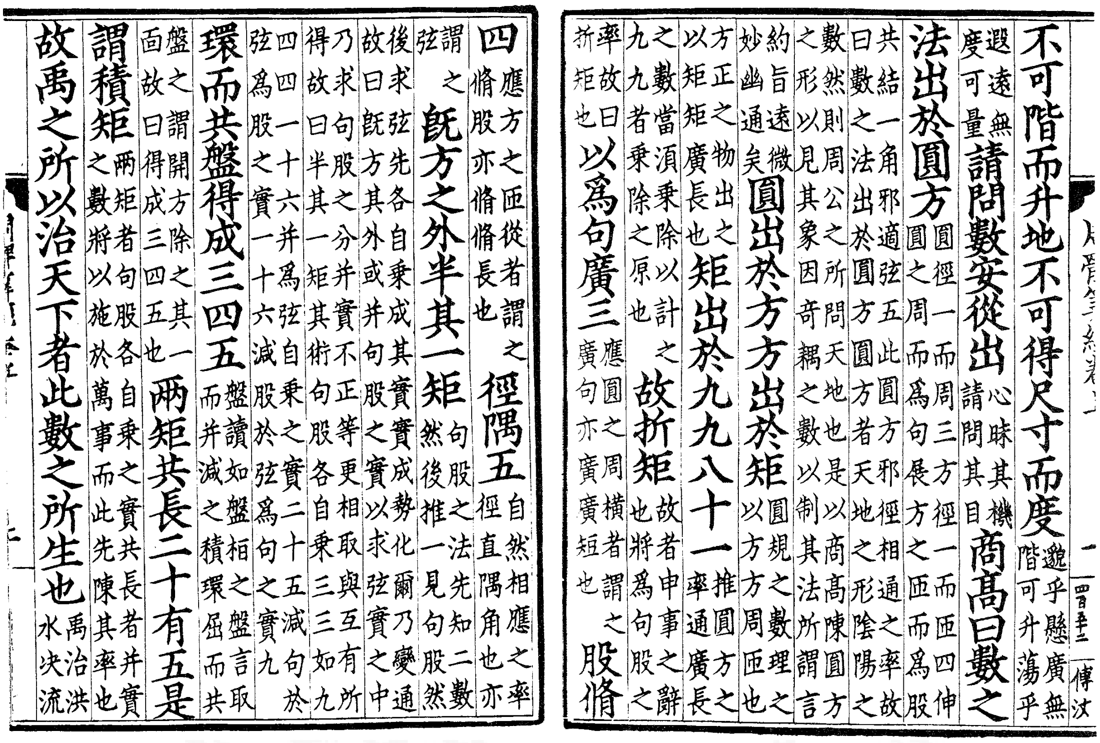
李俊彥（1994）以國中三年級90名學生爲研究對象，探討不同題目表徵型式（圖示題、文字題、情境題）的面積問題及相關因素對國三學生解題表現的影響。結果發現：學生在圖示題的解題表現顯著優於在文字題的解題表現，同時也優於在情境題的解題表現。

綜合上述各相關研究的分析可知，不同的題目表徵型式會影響學生的解題表現，而大部分的研究結果是學生在圖畫題的表現優於文字題。這樣的結果與訊息處理理論所主張的，圖畫題因減少學生解題時的工作記憶負荷，有助於解題的理論基礎大致相同。研究者以爲上述的研究大部分都以小學生爲對象，且並未針對探討國中學生因題目表徵不同之下的解題歷程及概念。因此，不同的題目表徵型式對學生的解題歷程到底有什麼影響？有何差異？他們在解題過程中因爲題目表徵的不同而所運用的數學概念是否會有不同？本研究以國中生爲對象，探討在不同表徵題中學生解題過程中數學概念的運用及解題歷程。

第四節　商高定理概念及歷史

勾股定理亦稱商高定理。有關勾股定理的內涵，我國有十分豐富的歷史紀錄。我國最早的天文算學書周髀算經（約公元前100年） 中，其中一段周公（約公元前1100年）與商高的對話，就有勾股定理的記載：「數之法出於圓方。圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。以爲句（勾）廣三，股脩四，徑隅五。既方之外，半其一矩。環而共盤，得成三、四、五。兩矩共長二十有五，是爲積矩。故禹之所以治天下，此數之所生也。」（原文：圖2-4-1，引自梁宗巨，1995）這段話中，雖然只說明了3、4、5成爲一直角三角形的邊長，並沒有說明一般直角三角形的情形，但是由於大禹治水 ，必須要測量「高、深、廣、遠」，所用的直角三角形知識正是勾股定理。

趙爽（字君卿，三國時代吳人，約3世紀時人）注釋周髀算經的「勾股圓方圖」說，對勾股定理及勾股弦的一些關係式，做了幾何的證明，如圖2-4-2（此圖爲甄鸞 （南北朝北周）重述時所畫）、2-4-3（趙爽注周髀算經之弦圖）。在直角三角形中，長邊爲股，短邊爲勾，斜邊爲弦。 「弦實二十五」指的是弦所圍成的正方形面積爲二十五，「朱實六」指的是此三角形所成的三角形面積六，「中黃實一」爲中間的正方形面積爲一。基本上這些勾股弦的關係，都可以由正方形板 （以勾、股、弦爲邊所構成的正方形）切割拼湊成的圖形觀察出來。



(2) (1)

圖 2-4-1 周髀前幾頁。（據宋嘉定六年（1213）本，引自梁宗巨，1995，p239~240）

圖2-4-2 周髀算經的"弦圖"
(引自梁宗巨，1995，p245）

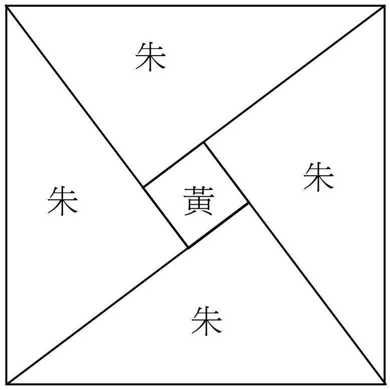


圖2-4-3趙爽注周髀算經之弦圖
(引自南一版國民中學數學教師手冊第三冊，2006，p30）

劉徽的九章算數中的勾股章也描述了24個勾股定理及其相關的應用問題。其中在「勾股術」中有說：「勾股各自乘，并，而開方除之，即弦。」在此，劉徽作注：「句自乘爲朱方，股自乘爲青方，今出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之冪，開方除之，即弦也。」(引自康軒版國民中學數學教師手冊第三冊，2007）因此，勾股定理的證明中有一個很重要的方法，即是出入相補，也牽涉到一個數學技巧就是自乘與開方。

從上述，無論是趙爽或劉徽對勾股定理的解說，中國古書中這種用視覺的方式（圖形）呈現一個定理，讓學生更易於了解的證明方式，與西方所謂的推論（演繹）的證明是不同的，這也是多元文化在數學教育中的展現（Fauvel, and van Maanen, 2000）。另一方面，中國用「形」「數」結合的方式來說明商高定理，而且朱、黃等顏色的上色，雖非必要，但實際上是運用符號的作用，如此更可以

說明圖示法可幫助學生的理解，因此，在數學教育中，表徵確實是教師在幫助學生學習上可運用的一種工具。

在幾何學習中，勾股定理是求兩點間的距離或線段長的重要計算公式，西方通常稱勾股定理爲「畢達哥拉斯定理」（Pythagorean Theorem），簡稱畢氏定理。勾股定理在古今中外，都流傳了許多證明方式，Loomis（1940）曾蒐集了367種證明，寫成一本書—The Pythagorean Proposition。其中有許多切割拼補的證明都是利用平形或垂直於斜邊的切割原理做出來的，也有些是用面積拼補、代數處理、摺疊的方式來證明。

在商高定理的內容方面，人們對勾股定理有不同的理解，其表達方式也有不同（梁宗巨，1995）。「形」的商高定理:指的是「拼補相等」--股上的兩個正方形經切割之後，可拼補成斜邊上的正方形。形的商高定理可進一步看成「面積」的商高定理:兩股上正方形面積之和爲斜邊上正方形的面積（這些正方形分別簡稱爲勾方、股方即弦方） 。此時它是數的關係，並沒有平方的幾何概念。「數」的商高定理:兩股長度平方的和等於斜邊長度的平方，此時它是數的關係，並無面積或幾何形狀的意義。就此，本研究在選取商高定理施測的題目時，盡可能包含「形」、「面積」、「數」的三類型題目，以完整涵蓋商高定理的所有概念。

因爲商高定理包含「形」、「面積」、「數」的三類型題目，因此此單元內容中其所蘊含的概念包含了數與量（「面積」、「數」的商高定理）、幾何（「形」的商高定理）及代數（「面積」、「數」的商高定理），因此如果學生能學好這個單元，除了能承接國一學習的數與量及代數的部分之外，更能爲國二下的幾何學習奠定良好的基礎，因此在國中的課程學習中，占有重要的地位。

在本研究中，有關勾股定理的單元乃是屬於國中數學教材（研究對象就讀的學校選用之南一書局96年版本）第三冊第二章第三節的部分，根據九年一貫課程標準（教育部，民國92年），其教學目標如下：能由面積的關係及計算導出勾股定理，進而理解勾股定理；並能理解勾股定理的應用。勾股定理教材與已習國小、國中數學教材的聯繫及未來教材的發展，可用下圖2-4-4 來表示：

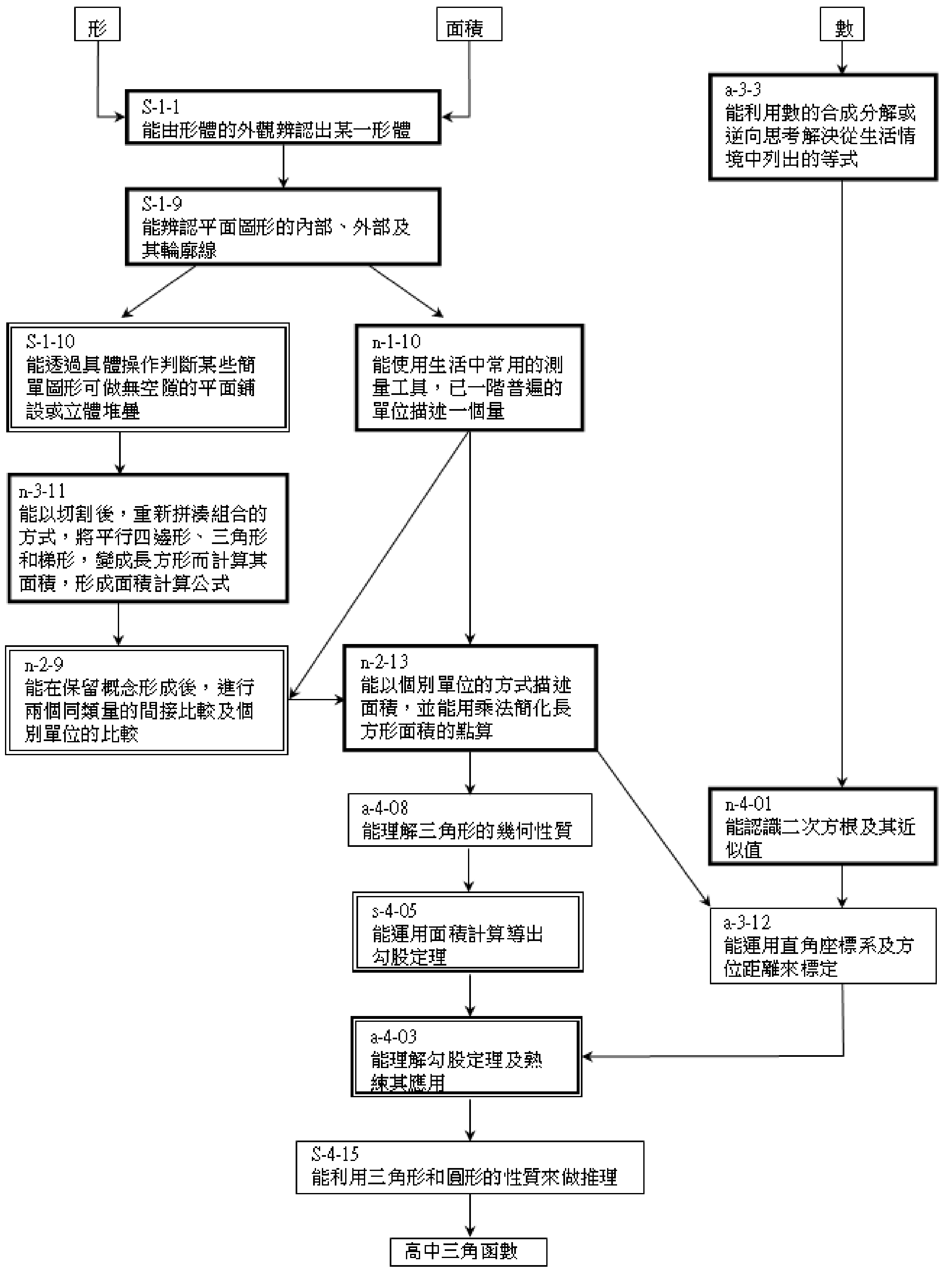


圖2-4-4 勾股定理課程流程

圖例說明：粗實線文字框代表與「商高定理」有關的能力指標

雙實線文字框代表「商高定理」主要概念發展的能力指標

細實線文字框代表與「商高定理」有關應用性能力指標

綜合上述，本研究擬用商高定理單元，題目包含「形」、「面積」、「數」的三類型，分成圖文表徵及文字表徵兩份題目，將學生解題的數學概念，運用九年一貫數學能力指標的呈現，並從Schoenfeld 的讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證六個階段解題歷程，來探討學生在面對文字題及圖文題時其數學概念的運用的差異及解題歷程的差異。

第三章　　研究方法

本章共分成五節：研究設計、研究對象、研究工具、資料蒐集與分析及研究流程，期對本研就的研究方法與設計做完整的說明。

第一節　　研究設計

本研究蒐集放聲思考與事後晤談等質性資料以做分析。其研究設計是以 4 位國二學生爲對象，將商高定理單元的題目分成「形」、「面積」、「數」三類型題目，研究者以兩種表徵方式施測，兩種表徵題目依不同順序間隔三個禮拜進行，均使用放聲思考（thinking aloud）與事後晤談來蒐集學生商高定理解題概念及歷程的資料。其方法是，研究者先收集資料及轉譯爲文字稿（詳見附錄四），再用資料來分析學生在解題歷程中所運用的商高定理概念(用九年一貫數學領域能力指標來呈現)。在解題歷程方面，研究者依據 Schoenfeld （1985）的「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」等數學解題六階段編碼分析，以了解學生在以上兩種表徵下的解題歷程順序與時間。另外，研究者再輔以事後晤談以彌補研究對象有未完整呈現的部份，強化資料的蒐集。因此本研究屬質性研究。在信效度方面，研究者採專家評量一致性來增加原案分析之信度。

質性研究的資料蒐集方面，研究者可仰賴研究對象（subjects）的放聲思考活動紀錄及觀察結果來判斷解題歷程（Goldin，1982）。國內也有許多研究（李靜瑤，1994；莊松潔，1995）採行這種放聲思考法，蒐集解題歷程的內部思考資料。

本研究盡可能呈現原始資料，例如經由研究參與對象的同意，進行全程錄音錄影、研究者現場觀察紀錄以及研究對象的紙筆解題紀錄等。 研究工具的信效度方面，爲了使質的研究更於嚴謹，研究者以三角檢證法來提升研究的信效度。

因此，研究者以不同的資料來源：錄影音逐字稿、研究者現場觀察紀錄、研究對象紙筆紀錄，及不同的分析者：除研究者外，另尋求一位曾修過解題研究的資深國中教師抽取四題進行分析，來與研究者分析的資料相比對，並經指導教授鑑定確認，做為信度檢驗，如此以不同的資料來源及不同分析者作交叉檢查，藉以剔除研究者個人主觀的偏見，以增加研究的信度。

第二節　研究對象

本研究以國二學生為研究對象，以下說明參與對象的選擇，包括預試對象與正式研究對象的選擇，以下分述之。

一、預試對象的選擇

在正式研究之前最後的準備是進行預試（pilot study），預試能夠幫忙調查者將資料蒐集計畫中，不論是所要蒐集資料的內容，以及所遵行的資料蒐集程序都修正得更完美（Fraenkel 和 Wallen，1990）。研究者以任教學校之國三班級學生中，選取數學能力中上、口語表達及配合度都不錯的兩位一男一女學生，做為預試對象。

二、正式研究對象的選擇

本研究採取放聲思考法並要分析學生的解題概念及解題歷程，因此，題目的選取會偏向多步驟且有一點難度。為了使本研究的設計能夠有效實施，並確定研究對象已達到階段能力指標，並能夠描述自身想法，因此研究者在受試者的選擇上考慮了以下兩個原則：第一、選取學習成就高的學生實施。第二、研究對象的參與意願及口語表達能力佳。綜合以上兩點，本研究選取的研究參與對象為在班上數學成績在第 3 名到第 10 名間，參與意願及口語表達能力佳的學生。

4 位研究參與對象分別為：小淨（編號 1）。小諺（編號 2）。小愛（編號 3）。小聰（編號 4）。

第三節　研究工具

本研究的研究工具分為商高定理兩種表徵題的試題、事後晤談大綱及研究者本身。

一、商高定理兩種表徵題的試題

（一）問題來源與專家效度

由於本研究旨在探討學生在面對兩種題目表徵形式的數學問題時，學生解題概念的使用及其解題歷程。研究對象為國二學生，所以研究者以南一版國中數學教材（96 年版）第三冊中商高定理教材為編製試題的依據，並根據梁宗巨（1995）對勾股定理的分類，分成「形」的商高定理、「面積」的商高定理、「量」的商高定理，挑選出 10 題商高定理題目（附錄一）。每個題目均設計成兩種表徵方式成一組的題型，分別為文字表徵及圖文表徵，每組題目的文字敘述相同，只是圖文題除文字外再加上與文意相同的圖形。另外為了符合專家效度，請二位任教於國中 10 年以上的資深數學教師，在 10 題商高定理題目中，依照學生能力及本研究之研究目的，勾選出適合的 6 題題目做為預試題目（附錄二），再根據預試的結果，刪掉第 3 題「樓梯題」，並將第 4 題「八邊形題」做部份修改後，修正為 5 題題目做為正試施測題目（附錄三）。

正式施測時因避免學生有練習效果，依不同順序間隔三個禮拜施測，並在數字上做小幅修改（附錄三-1、附錄三-3；附錄三-2 附錄三-4）。如此仍主要只是表徵的形式不同（稱為 companion　problem），所以可以用來比較解題概念及歷程的異同。並且為了避免試題呈現的順序引起學生填答時的疲倦與學習效果所產生的「次序效應」（order　effect），乃採用「對抗平衡設計」（counter-balanced design）法，來抵消上述干擾因素的影響。也就是正式施測時四位學生中有兩位學生接受試題的呈現順序是文字題、圖文題，而另外兩位則從圖文題、文字題以反向次序作答。

（二）預試

為了修正題目的適切性，因此進行預試。預試對象以研究者任教學校之國三兩名學生為對象，題目選取為「形」、「面積」、「數」的商高定理共 6 題，進行預試，並分析其概念運用與解題歷程，藉以修正題目。最後根據預試的結果，刪掉第 3 題「樓梯題」（因為其解題主要概念—保留概念及商高定理數的公式，與他題有重疊），並將第 4 題「八邊形題」做部份修改後（因為換個問法較能完整了解學生在商高定理的解題歷程），做為本研究的正式題目（附錄三）。

將預試的 6 題題目及 5 題正試施測題目與解題所要達到的能力指標做成雙向細目表如下：

表 3-3-1 預試試卷雙向細目表

	能力指標									
題目類型	S-1-1 能由形體的外觀辨認出某一形體	S-1-9 能辨認平面圖形的內外部輪廓線	S-1-10 能對圖形做無空隙的平面鋪設	n-3-11 能以切割重新拼湊組合的方式計算面積，形成面積計算公式	n-2-9 能在保留概念形成後，進行兩個同類量的間接比較	a-3-3 能逆向思考解決列出的等式	n-4-01 能認識二次方根及其近似值	s-4-05 能運用面積計算導出勾股定理	a-4-03 能理解勾股定理及熟練其應用	a-3-12 能運用直角座標系及方位距離來標定
「形」的商高定理	1 ＊		1	1	1	1		1		
「面積」的商高定理	2	2				2			2	
「數」的商高定理	4 6			4	3 5 6		3 4 6		3 4 5 6	5

＊：數字代表題號

表 3-3-2 正式試卷雙向細目表

	能力指標									
題目類型	S-1-1 能由形體的外觀辨認出某一形體	S-1-9 能辨認平面圖形的內外部輪廓線	S-1-10 能對圖形做無空隙的平面鋪設	n-3-11 能以切割重新拼湊組合的方式計算面積，形成面積計算公式	n-2-9 能在保留概念形成後，進行兩個同類量的間接比較	a-3-3 能逆向思考解決列出的等式	n-4-01 能認識二次方根及其近似值	s-4-05 能運用面積計算導出勾股定理	a-4-03 能理解勾股定理及熟練其應用	a-3-12 能運用直角座標系及方位距離來標定
「形」的商高定理	1 ＊		1	1	1	1		1		
「面積」的商高定理	2	2				2			2	
「數」的商高定理	3 5			3	5	3	3 4 5		3 4 5	4

＊：數字代表題號

二、事後晤談大綱

爲了彌補受試者在解題過程中，可能遺漏一些未能即時將內部思考運作情形說出來的情況；並且爲了了解每個學生面對兩份施測題目時，內心想法的差異，因此在受試者解題完後，依據下列晤談題目對受試者進行半結構性晤談：

1.你在解題過程中，有沒有因爲忘記或來不及而沒有同時將你頭腦想的說出來的情形？如果有，請加以補充說明。（研究者可提示於當初施測時受試者曾經停下來思考的時段）。

2. 平常在解題時有畫圖的習慣嗎？

3. 兩份題目（文字題、圖文題）整體的困難度有沒有不同？

4. 兩份題目（文字題、圖文題）最困難的地方分別在哪裡？

5. 你比較喜歡哪一份題目？爲什麼？

6. 兩份題目（文字題、圖文題）你在解題時的哪個部份有感覺到差異？

三、研究者本身

就質性研究而言，研究者本身即爲工具，所以，研究者本身的立場與角色顯得相當重要。因此在整個放聲思考的過程中，研究者爲了保持中立，研究對象的選取均非研究者教過的學生，以避免偏見。研究者在研究過程中，不斷省思，並盡可能使用不同的方法蒐集不同來源的資料，以減低或避免研究者主觀的偏見，藉以提高研究工具的信度。但是解題過程爲包含許多複雜且快速變化的內在行爲，而且解題者對於解題的某些部分容易立即遺忘，或施測時因緊張忘了將思考的過程說出，所以，研究者會對解題者適時的給予口頭上的提醒或確認，爲了使提示的內容一致，乃參考 SESM 面試提示與發問示例表（引自林明哲，1990）（表 3-3-3）之內容進行。

表 3-3-3　面試提示與發問示例表（引自林明哲，1990）

程序	與 Schoenfeld 階段對照	發問問題示例
甲、閱讀	（讀題）	請大聲的讀出問題
乙、理解	（分析）	問題要求些什麼呢？
丙、解釋	（分析）	這是什麼意思呢？
丁、策略的選擇	（探索）	你要如何解這個問題？爲什麼？
戊、過程	（計畫）	開始做並且告訴我你在做什麼？
己、記憶	（計畫）	回憶記憶中的東西
庚、編碼	（執行）	現在把答案寫出來
辛、聯合	（執行）	這個答案代表什麼意思呢？
壬、驗證	（驗證）	有什麼方法可以確定你的答案是正確的？

第四節　　資料蒐集及分析

本研究之資料蒐集主要是由學生解題過程的逐字稿，即所謂的原案，及事後晤談資料。解題過程的資料蒐集，本研究在徵得研究對象的同意下，以 DV 攝影機記錄學生解題歷程，請學生「將心裡面所想到的每一件事，都用聲音表達出來」的放聲思考法，以 DV 全程錄影紀錄，並保留研究對象在解題過程中的紙筆紀錄。另外，爲了彌補學生在放聲思考解題過程中，有未即時呈現的部份，輔以事後的半結構性晤談來強化資料的搜集。

接著，根據原案及訪談資料進行分析，先依據九年一貫數學領域能力指標去分析學生在解題時使用的商高定理概念，再依據 Schoenfeld （1985）的「讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證」等解題六階段做歷程的編碼與分析，來了解學

生解題的思考歷程順序及時間。

在信度方面，研究者根據逐字稿進行分析，爲了進行專家一致性的信度檢定，抽取 4 位研究對象，各取某一題的文字稿資料檢核信度（小諺的足球場圖文題、小淨的池塘文字題、小聰的八邊形圖文題及小愛的纜車文字題）。其檢核辦法是除了研究者本人之外，另請一位曾修過解題研究的資深國中數學教師分析以上 4 份資料。做法是，第一，在解題概念上，將學生含有計算過程的試卷及研究者寫的概念分析交予此國中老師，讓他做檢核，以檢驗解題概念的信度；第二，在解題歷程上，研究者先向此國中老師說明 Schoenfeld （1985）的數學解題六個階段的定義，再將抽取的四題逐字稿，在研究者已做完的階段分類部分空白，再讓此國中老師填上，檢驗分析解題歷程資料的信度。結果，以上兩部分的檢驗結果與研究者分析大部分一致，除了在解題歷程中小諺及小淨的池塘題之外。在那一部分的分析，兩者判斷的出入點，是在於小諺及小淨嘗試分解面積數字 1681 的階段，研究者認爲是屬於探索階段，但另一老師認爲是執行階段。經與指導教授討論後，認爲應是屬於探索階段。如此以上所述，研究者已用不同的資料來源及不同分析者作交叉檢查，藉以剔除研究者個人主觀的偏見，增加學生解題概念及歷程分析的信度。

另外，在逐字稿撰寫部份，將每一逐字稿的區塊內容給予流水號，流水號第一碼爲「研究對象的編號」，如 1 表示編號 1 的研究對象；第二碼爲「題目表徵」，0 表示文字題，1 表示圖文題；第三碼爲「商高定理試題題號」，如 1 表示第一題；第四碼到第五碼爲「逐字稿區塊編號」，如 01 表示第一個區塊編號。舉例說明，流水號爲 2-0-3-10 則表示該內容爲第 2 號研究對象文字題第三題第十個區塊的逐字稿編號。如此流水號編列以便資料分析與說明之方便性。

第五節　研究流程

一、蒐集文獻資料，確定研究方向（96.04-96.11）

參考研究者自身的教學經驗及興趣，蒐集並閱讀國內、外與本研究相關的文獻，並將資料加以分析、歸納，與指導教授討論之後，確定研究方向，並將文獻作為本研究的理論基礎。

二、編製試題（96.09）

試題編選標準如下：

1. 避免機器式的計算或回憶即可獲得答案的題目。
2. 需要數個步驟的推理才能解答的題目。
3. 解題者可以用一種以上的方式作答，可顯示較多解題行為的題目。

三、挑選放聲思考研究對象（96.09）

預試及正式施測研究對象均取自研究者本身任教學校，高雄市某完全中學國中部學生，預試為國三學生兩名，正式施測研究對象為國二學生 4 名，均選取在班上數學成績在第 3 名到第 10 名間，參與意願及口語表達能力佳的學生。

四、進行放聲思考練習（96.10）

為使解題者於放聲思考解題時能真正將心中的想法口述出來，於放聲思考解題前，先進行放聲思考訓練。接受放聲思考訓練的對象有兩批，分別為參與預試的國三學生，及正式施測對象的國二學生。參與預試的國三學生接受放聲思考訓練約三個小時，題目為目前國三課程「圓」的單元共四題。正式施測對象的國二學生有 4 人，分成兩小組，每次兩人，接受放聲思考訓練約四個小時，題目為「一次函數及其圖形」單元共六題。訓練方式為老師先示範放聲思考解題方式，正式訓練的第三小時開始即配合錄音的進行，使學生熟悉放聲思考解題方式。

五、預試及修訂（96.10）

依據預試的結果，再與資深數學老師、指導教授討論後對試題加以修改、編選，確定正式題目共 5 題。

六、正式施測（96.11~12）

配合學校教學進度，在商高定理單元教授完後進行正式施測。正式放聲思考解題時，爲避免忽略解題者之關鍵反應，故採以錄影音及在旁做記錄工作的方式來記錄放聲思考解題歷程。放聲思考解題實施中，研究者並給予解題者適當的提醒以使解題者作適當的口頭報告。事後並輔以半結構性訪談，以蒐集完整資料。

七、資料分析（96.12-97.2）

本研究之分析過程包含兩部份，分爲原案產生與原案分析，分述如下：

(一) 原案產生：

放聲思考解題後，將每位受試者的解題過程轉述成文字資料，即爲原案，本研究原案抄錄規則如下：

1.流水號第一碼爲「研究對象的編號」；第二碼爲「題目表徵」；第三碼爲「商高定理試題題號」；第四碼到第五碼爲「逐字稿區塊編號」。如此流水號編列以便資料分析與說明之方便性。

2.忠實抄錄每一句每一字

(二) 原案分析：

原案分析之過程包含解題概念分析及解題歷程階段區分、時間和評註，並做歸納整理。最後抽取 4 題，尋求一位資深教師進行分析，來與研究者分析的資料相比對，做爲信度檢驗，以提高資料分析的一致性。

八、撰寫研究報告（96.08-96.11；97.02-06）

就資料分析的結果進行討論並將研究發現加以分析探討，最後撰寫成研究的結果與建議。

表 3-5-1　研究流程進度表

	96/4~7	96/08	96/09	96/10	96/11	96/12	97/01	97/02	97/03	97/04	97/05	97/06
蒐集文獻	●	●	●	●	●							
撰寫研究計畫		●	●									
編製試題			●									
進行放聲思考訓練				●								
預試及修訂				●								
正式施測					●	●						
資料分析						●	●	●				
撰寫研究報告								●	●	●	●	●

第四章　研究結果與分析

本研究以 4 位國二學生爲對象，將商高定理單元的題目分成「形」、「面積」、「數」三類型題目。研究者以兩種表徵方式施測，兩種表徵題目依不同順序間隔三個禮拜進行，均使用放聲思考（thinking aloud）與事後晤談來蒐集學生商高定理解題概念及歷程的資料。其方法是，收集資料後轉譯爲文字稿（詳見附錄四），用資料來分析學生在解題歷程中所運用的商高定理概念（用九年一貫數學領域能力指標來呈現）；在解題歷程方面，依據 Schoenfeld （1985）的「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」等數學解題六階段編碼分析，以了解學生在以上兩種表徵下的解題歷程順序與時間。

本章研究結果與分析分爲三節報告。第一節探討國二 4 位學生在商高定理單元「形」「面積」「數」三類型題目中，面對文字題及圖文題解題時所展現的數學相關概念之運用。第二節探究國二學生在商高定理單元中面對文字題及圖文題時的解題歷程的順序與時間。第三節將兩種表徵題的能力指標概念及 Schoenfeld 階段做交叉分析。

第一節　　四位學生在「形」、「面積」、「數」三類型題目的數學概念展現

本節主要分成四個部分，分別用「形」的商高定理、「面積」的商高定理、「數」的商高定理三部份，去呈現 4 位學生在面對圖文題及文字題所使用的數學相關概念的異同，第四部份，是前三部份的綜合分析。

壹、「形」的商高定理題目

「形」的商高定理指的是「拼補相等」--股上的兩個正方形經切割之後，可拼補成斜邊上的正方形。此種題目是透過面積拼補的概念來了解商高定理，因此在題意的文字敘述上會較多。在本研究中，「形」的題目是指第一題「足球場」

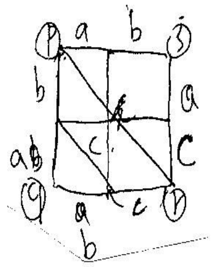
題。第一，其文字題的部分，題目的敘述較長也較難，倘若要把有用的資訊整合在一起，學生必須自己去尋找關鍵有用的解題資訊。學生若習慣把圖形畫出來輔助解題，則需要更多的數學概念整合的能力，才可以將圖形畫出以順利解題；第二，圖文題的部分，因爲有圖的出現，圖常能將大部分的資訊一次列出並較爲明瞭，學生較能從圖中判斷出解題有用的資訊，並且有時只需用到比較簡單的數學概念即可解題。

綜合以上文字題與圖文題在呈現題目資料上的差異，在「形」的商高定理題目，學生面對文字題時，若要畫出正確的圖，必須要使用到比圖文題較多的平面鋪設（S-1-10）、面積拼補（N-3-11）及較深的面積保留（N-2-9）等概念才可以正確解題；而圖文題只需用到辨認形體（S-1-1）及簡單的面積保留比較（N-2-9）等概念即可解題。因爲小淨的文字題及圖文題解題概念的呈現與小愛的圖文題相似，因此研究者依據「形」的商高定理（足球場題）的資料選擇列出三位學生（小諺、小愛及小聰）的解題概念，並將每位學生分成文字題及圖文題兩部分來說明，舉例如下：

一、小諺

解文字題時概念正確但緊張出錯：

小諺面對不熟悉又較冗長的文字敘述時，表現得有點緊張，一直嘗試畫圖卻因缺乏圖形平面鋪設的概念，畫不出來完整的圖形，因此後來他從文字敘述及部分的圖形中去找出有用的資訊來列式。他從文字敘述中找出面積保留（N-2-9）的解題關鍵，並在列式的過程中運用面積拼補（N-3-11）概念，將式子列出（A-3-3），但因爲小諺面對文字題時難以克服心中的緊張，以致在讀題及列式時，一直將「一個」正方形足球場，唸成「二個」正方形足球場，他因爲這個錯誤而一直無法將所列的等式化簡找出關係式，造成解題終究失敗。



$(a+b)(a+b)$

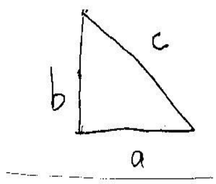
$= a^2+2ab+b^2$

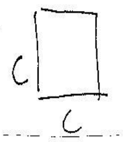
$\cancel{a+b}$ $\quad \dfrac{a\times b}{2}$

$a^2+b^2=c^2$

$a\times b+2c^2+a\cancel{+}b \qquad a^2+b^2.$

$= \cancel{2ab}+2c^2 = a^2+\cancel{2ab}+b^2$





解圖文題時會善用圖形只運用簡單概念：

小諺在研究者第一次施測時是先做文字題，3 個禮拜之後第二次施測時是做圖文題。面對有圖的題目時，小諺顯得有信心多了，他直接從文字及圖形中，找到題目關鍵句「兩個長方形看台面積等於四個直角三角形看台面積」，而且此部分他使用的並不是較深的面積拼補概念，而只是用到簡單的面積計算概念（N-2-13），並且他並不需要用到面積保留的概念去列式，直接從圖形中即可判斷出剩下的面積相等（N-2-9），因此小諺能運用面積的計算導出勾股定理（S-4-05），輕鬆的解題成功。

$$\cancel{b^2+c^2=a^2}$$

$$c \times b = cb$$

$$\cancel{2\times}\ \frac{cb}{2} \times 4 = 2cb$$

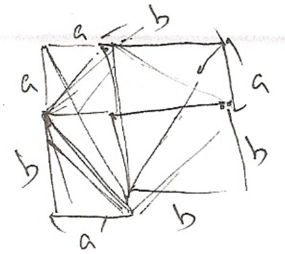
$$b^2+c^2=a^2$$

二、小愛

解文字題時未能用數學語言呈現解題的過程：

小愛在研究者第一次施測時是先做文字題，3 個禮拜之後第二次施測時是做圖文題。小愛面對較冗長的文字題時，只有從圖形平面鋪設（S-1-10）及面積保留（N-2-9）的概念下，畫出大致的雛形，雖然圖大致畫出，但小愛不知道要如何列出數學的式子來說明三邊的關係，也就是她無法從文字敘述中找到關鍵的解題資訊列式，雖然有把最後的關係式寫出，但因完全沒有證明過程，因此可以說是解題失敗。

四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）



$a^2+b^2=c^2$

解圖文題時善用圖形只運用簡單概念：

因爲題目有圖形的輔助，小愛可以很容易了解題意（S-1-1），並判斷出要先從面積保留概念（N-2-9）來列式，並且因爲圖已明顯列出經切割拼湊出的面積組成部分，不需要用到面積拼補概念，即可把面積組成列出（A-3-3），因此小愛能運用面積的計算導出勾股定理（S-4-05），解題成功。

$$a^2+\frac{4}{2}bc=(b+c)^2$$

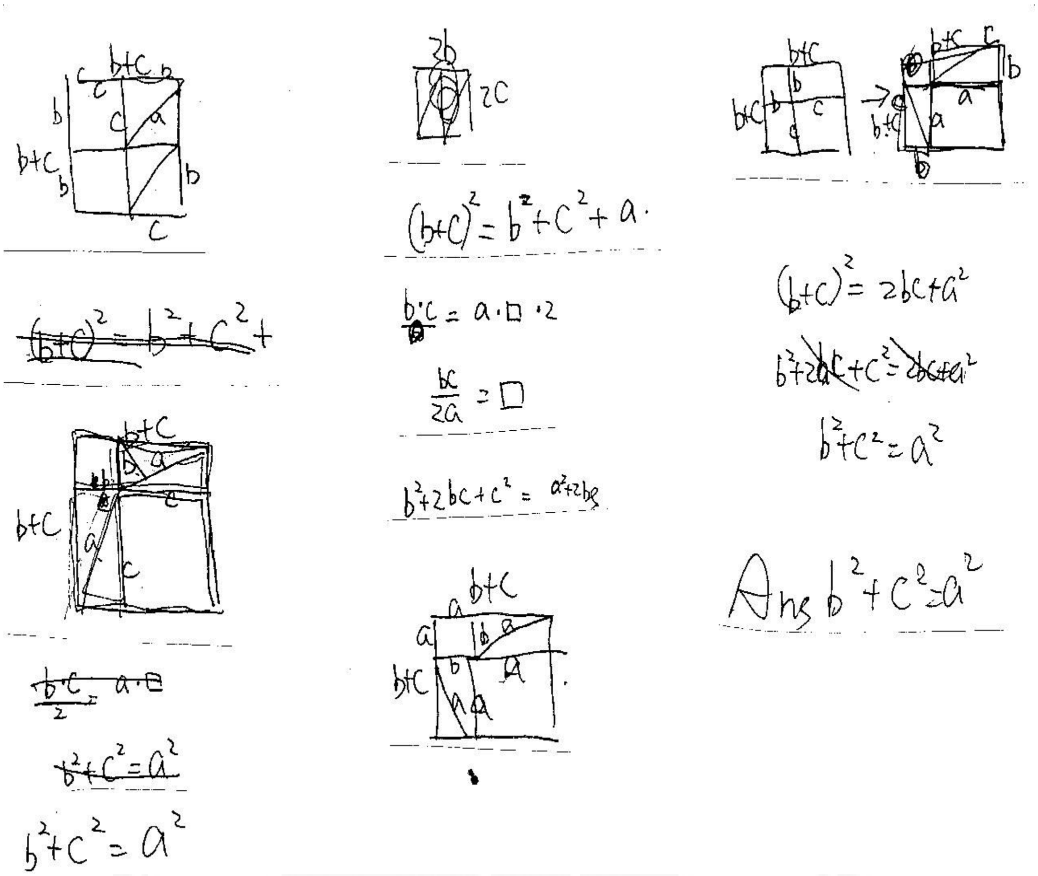
$$a^2+\cancel{2bc}=b^2+\cancel{2bc}+c^2$$

$$a^2=b^2+c^2$$

三、小聰

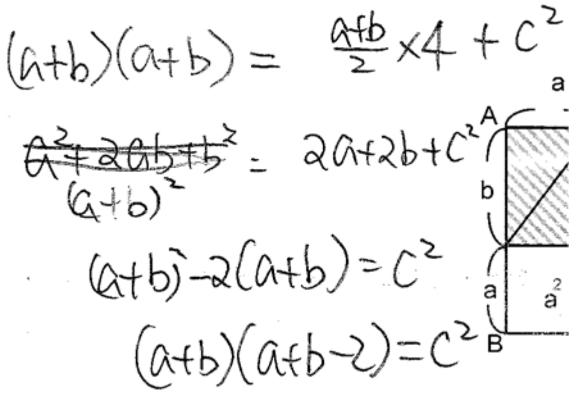
解文字題時畫不出圖形但從文字中找到訊息：

小聰在研究者第一次施測時是先做圖文題，3 個禮拜之後第二次施測時是做文字題。小聰面對不熟悉又較冗長的文字敘述時，表現得有點不知所措，花了很多的時間在畫圖，嘗試許多面積拼補的方式，最後，雖無法完整畫出與題意完全符合的圖，但也因如此不斷的讀題與畫圖，一步步讓自己釐清題意。後來小聰改變做法，不管圖的正確性，直接從文字敘述及已了解的題意中找訊息出來列式的方式，使用面積保留（N-2-9）的概念及面積拼補（N-3-11）概念，成功將式子列出（A-3-3），最後能運用面積的計算導出勾股定理（S-4-05），解題成功。



解圖文題時概念正確但列式出錯：

小聰面對圖文題時，經過一陣子的圖與文了解後，能根據圖所提示的資訊（S-1-1），使用面積保留（N-2-9）的概念列出等式，只是筆誤將面積 a*b 寫成 a+b，後來小聰一直在錯誤的算式上面打轉，試圖整理出關係式，還整理成因式分解的形態。但始終沒有回頭檢查當初的列式，因此最後無法成功解題。



綜合以上，在「形」的商高定理題目，學生面對文字題時，因題目敘述較多，無法很快的掌握題意，且圖較不容易畫出，因此學生顯得較爲慌亂，有兩人解題失敗。在圖文題中，學生較能得心應手，找出解題的關鍵，雖有一人因筆誤解題失敗，但是其解題觀念是正確的。

貳、「面積」的商高定理題目

「面積」的商高定理指的是兩股上正方形面積之和為斜邊上正方形的面積。在本研究中,「面積」的商高定理題目指的是「池塘題」。第一,在文字題部份,文字的敘述並不長,題意也不會難理解,若要將文字敘述轉換成圖來輔助解題並不困難;第二,圖文題的部分,經由圖的顯現,學生更能直接明瞭題意,覺得得心應手,但卻有學生因為沒有經過仔細畫圖,而大意出錯。

然而在學生使用的解題概念中發現,無論是文字題或是圖文題,學生較習慣使用「數」的商高定理的概念,並不是直接使用「面積」商高定理的概念---在三個面積關係中直接轉換。學生會把面積先開方轉換成邊長,再利用邊長平方和的關係求出其他邊長,再轉換成另一個面積,而只有當題目數字太大,面積數字不容易開方成邊長時,學生的思考才會轉個方向,嘗試從面積的概念去著手。而也就是因為學生將數的概念、面積的概念混合併用,因此其中就有學生先用面積概念求出面積後,卻誤以為求出的是邊長,又再平方,導致解題錯誤。另外,學生解題概念中,直角三角形中三邊邊長數的大小概念是有的,但是題目若是換成面積,三個面積的大小的概念似乎沒有這麼明顯清楚,因而會有學生一股上的面積反而比斜邊上的正方形面積還要大的情況。

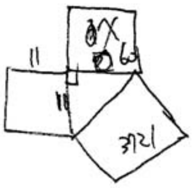
整體來說,學生在「面積」商高定理題目中,文字題及圖文題所使用的概念並沒有太大的差異,只有文字題因先畫圖會多使用到辨認圖形內外概念(S-1-9)。另外,學生若從不同的方向去解題,使用的概念種類與順序會稍有不同。學生若先從數(邊長)的概念去著手解題,會較只使用面積概念的學生多了數的商高的概念(A-4-03),而且在順序上會先使用開方(N-4-01)的概念。

研究者依據「面積」的商高定理(池塘題)的資料列出 4 位學生的解題概念,並將每位學生分成文字題及圖文題兩部分來說明,舉例如下:

一、小聰

解文字題時會正確使用面積概念：

小聰做這個題目時，可以很順手的把題目文字敘述轉換成圖（S-1-9），並使用面積的商高定理概念（S-4-05），將等式列出，求出另一股上的面積。而第二小題小聰也能運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。



$$x+121=3721$$
$$x=3600$$
$$\sqrt{3600}=60$$

$$\frac{\overset{30}{\cancel{60}}\times 11}{\cancel{2}_{1}}=330$$

解圖文題時邊長與面積概念混淆：

小聰面對有附圖的圖文題時，覺得還蠻簡單的，因此在大意下，將邊長與面積概念混爲一談，先將面積均開方成邊長，用邊長平方和的概念列式（A-4-03），卻在平方與根的概念混淆之下，算出錯誤的邊長，後又將已求出的面積誤當做邊長再平方，導致解題失敗，而第二小題小聰雖正確使用面積公式（N-2-13），但因第一小題的邊長算錯因而列式錯誤，解答錯誤。

$x^2+40^2=41^2$

$x = 81$

$81^2=6561$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$$

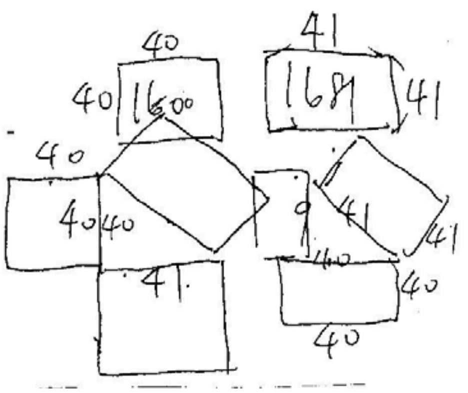
② $\dfrac{81\times40}{2}=1620$

32.40.

二、小諺

解文字題時會正確使用商高定理「面積」概念：

小諺面對文字題時，仍難掩緊張，把圖形內外概念（S-1-9）搞清楚後，花了一點時間把圖畫出來了。但第一次的圖形因小諺在三個股上面積的大小的概念似乎沒有很清楚，結果畫出一股上的面積比斜邊上的正方形面積還要大的圖形，因此計算出的面積數字又大又無法開方，才驚覺圖畫錯。將圖改成正確後，即使用面積的商高定理概念（S-4-05），正確求出答案，而第二小題小諺也能運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。



$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 41 \\ \hline 41 \\ 164 \\ \hline 1681 \end{array}$$

$\sqrt{1600+1681}=\sqrt{3281}$

$\sqrt{1681-1600}=\sqrt{81}$

$=9$

$\dfrac{40\times9}{2}=180$ A: (1) $181m^2$ (2) $180m$

解圖文題時仍習慣使用商高定理「數」的概念：

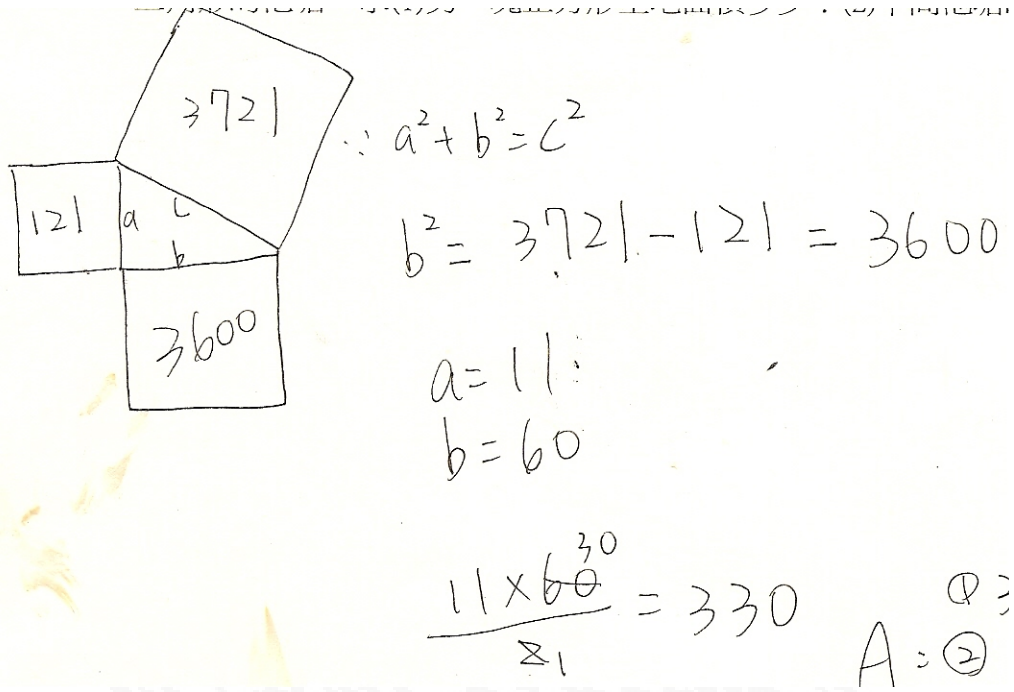
小諺面對圖文題時，知道使用面積的商高定理概念（S-4-05），求出另一股上的面積，但其列式中仍帶有根號，即小諺後來仍先算出邊長才又平方成面積。而第二小題小諺也能運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。

$$c^2=3721$$
$$b^2=121$$
$$\sqrt{3721-121}=\sqrt{3600}$$
$$=\underline{60}$$
$$60\times 60=3600$$
$$b^2=121$$
$$b=\pm 11$$
不合
$$\frac{60\times 11}{2}=\frac{660}{2}=330$$

三、小淨

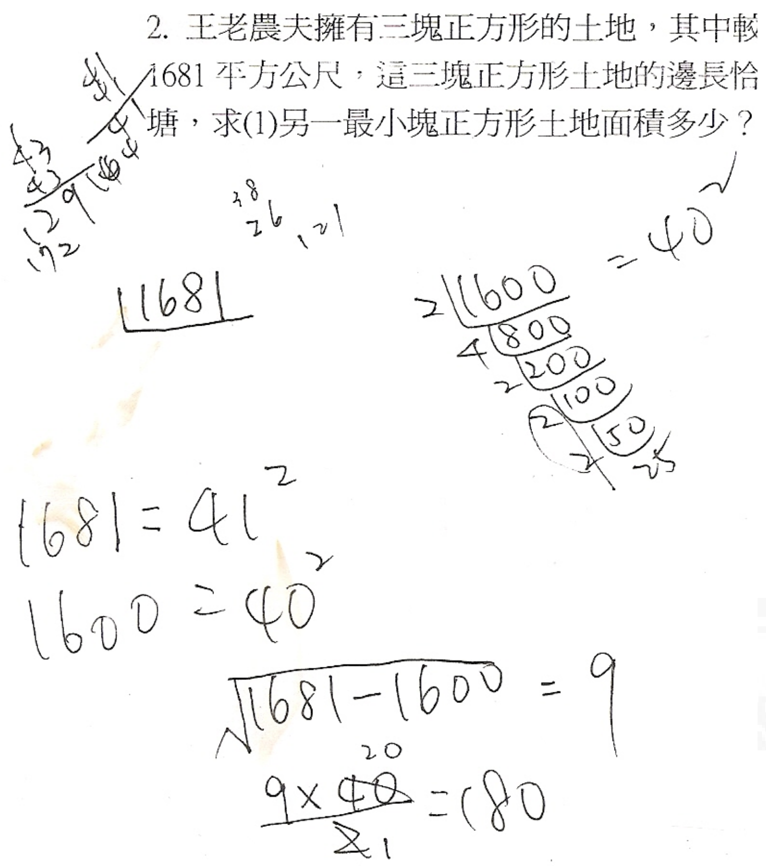
解文字題時會正確使用面積概念：

小淨在研究者第一次施測時是先做圖文題，3 個禮拜之後第二次施測時是做文字題。小淨面對文字題，能夠理解圖形內外的概念（S-1-9），並有條理的將圖畫出，也運用面積的概念將等式列出（S-4-05），求得正確的面積答案。而第二小題她也能運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。



解圖文題時只使用數的概念花許多時間開方求邊長：

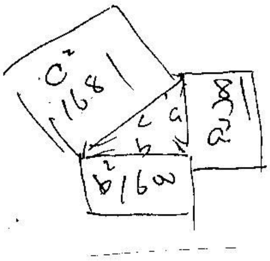
小淨在做這個題目時，起初沒有使用面積的概念，一心要使用數的概念（A-4-03）來解題，因此她花了許多時間，嘗試了一些數字之後，才找到面積數字的平方根，求出邊長（N-4-01），但最後又將邊長平方成題目要求的面積時，突然笑了出來，知道剛才的開方其實是不需要的，領悟出其實自己早可以用面積的概念去做。而第二小題她也能運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。



四、小愛

解文字題時用數的概念做不出來才改成面積概念：

小愛面對文字題，能夠理解圖形內外的概念（S-1-9），並有條理的將圖形畫出，但剛開始她是想運用數的商高定理來做，只是因為數字較大，花了很多時間開方開不出來，後來才換個方向，運用面積的概念將等式列出（S-4-05），求得正確的面積答案。第二小題小愛也能運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。



1681

$\cancel{\sqrt{1681}-\sqrt{1600}}$

=

$c^2 = a^2 + b^2$

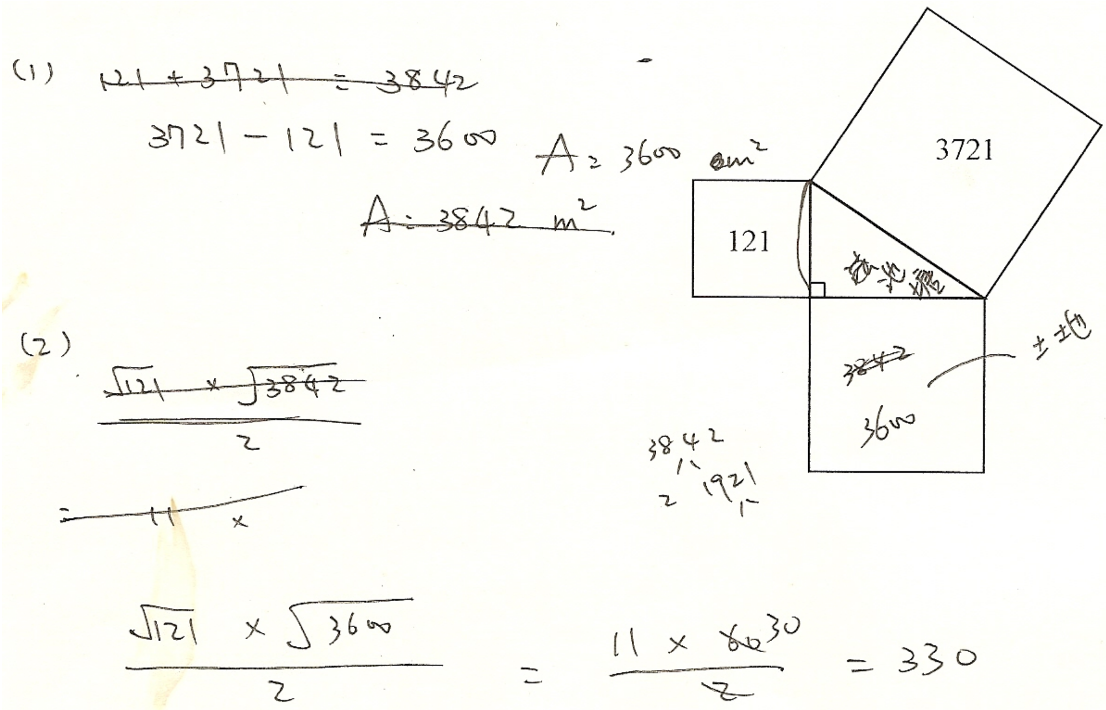
$a^2 = c^2 - b^2 = 1681 - 1600 = 81$ (m^2)

$b = 40,\ a = 9\ \therefore\ 9 \times 40 \times \frac{1}{2} = 180$

Ans: (1) $81\,m^2$ (2) $180\,m^2$

解圖文題時面積大小概念沒有分清楚：

小愛面對覺得較容易的圖文題時，反而大意，她雖想用面積的概念來算（S-4-05），但三個股上正方形面積大小的概念沒有辨認清楚，因此第一次算時，居然將斜邊與一股上的正方形面積相加以求出另一股上的正方形面積，導致一股上的正方形面積反而比斜邊上的正方形面積還要大的情況，而她也未查覺而直接寫答。後來小愛用第一小題的答案算第二小題池塘的面積時，因將第一題錯誤的數字帶進去，產生奇怪的非完全平方數，才發覺自己第一小題算錯，最後小愛才全部更正成正確數字，運用開方（N-4-01）求出兩股長及計算三角形池塘的面積（N-2-13）。



綜合以上示例，「面積」的商高定理題目中，因爲此種題目題意不難理解，文字敘述也不難轉換成圖，學生在面對文字題或圖文題的解題概念，大致上並沒有相差太多。在文字題中，所有學生都解題成功；而在圖文題中，只有一人因把邊長和面積的概念混淆導致解題失敗。

參、「數」的商高定理題目

「數」的商高定理指的是兩股長度平方的和等於斜邊長度的平方，這就是一般學生最熟悉的商高定理公式，此公式並不複雜，因此學生在「數」的商高定理概念上大部分來說是沒有問題的。因此基本上，「數」的商高定理概念對學生來說還算容易，所以，學生運用此公式並不會受到題目表徵的影響，也就是不論是文字題或圖文題，學生對「數」的商高定理概念大部分都是運用得當的。

只是現行國二的考試題目或國三的基本學力測驗在考到有關「數」的商高定理概念時，並不會只單獨考學生單純「數」的商高定理公式，而是會配合其他數學概念一起運用，因此，「數」的商高定理概念的使用只會在解題過程中的一部分，而不是全部。因爲包含「數」的商高定理概念的題目有很多變化，學生使用的解題方法不同也會造成使用概念上的不同。而且，解題的成敗常不一定是學生對「數」的商高定理概念不清楚所造成，而可能是對其他數學概念不清楚所導致。

學生在面對「數」的商高定理題目時，無論是圖文題還是文字題，「數」的商高定理概念的運用是沒有太大的差異。而本研究中，「數」的商高定理題目的選取，解題所需要的概念中，盡量以「數」的商高定理概念爲主，以真正了解題目表徵在「數」的商高定理概念上運用的影響，但是不避免的仍會包含有一些其他的數學概念在內，而這些概念也會隨不同題目而不同，無法綜一而論。因此，本研究「數」的商高定理題目有三題，分別爲「八邊形題」、「直線距離題」及「纜車題」，研究者將其大致歸納成「八邊形題」---簡單圖形題、「纜車題」---真實生活題，及「直線距離題」兩點直線距離題。

一、簡單圖形題：其特徵是能容易的將文字轉換成圖，但圖中並未暗示解題的關鍵方法，必須靠學生自己思考如何解題。數字運算時帶有根號，配合乘法公式展開時必須要小心計算才可以解題成功。而此種題型因圖容易畫出，因此做文字題時，若需畫圖輔助，只需先用到簡單的形狀辨認的概念（S-1-1），也因此解題所用的概念與解題的成敗，與題目表徵較無相關，而是與學生是否能夠找出正

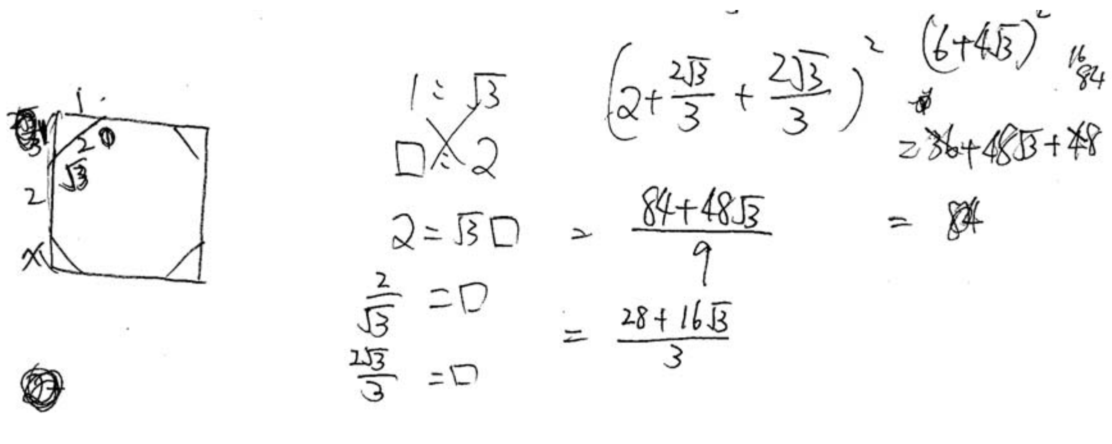
確的解題關鍵概念（N-3-11），與對根號運算（N-4-01）的熟悉度來決定。因爲這題數的商高定理公式剛好是運用在等腰直角三角形，因此有學生是使用三角形特殊邊長性質（A-4-08）概念，也有學生是使用數的商高定理概念（A-4-03），因此解題方法不同也會造成使用概念上的不同。但除了有一人等腰直角三角形邊長比例背錯之外，其餘在數的商高定理公式概念上都沒有問題。

因爲小愛圖文題及文字題解題概念的呈現與小諺的圖文題相似，研究者依據「數」的商高定理---簡單圖形題（八邊形題）的資料選擇列出三位學生（小諺、小淨及小聰）的解題概念，並將每位學生分成文字題及圖文題兩部分來說明，舉例如下：

（一）小聰

解文字題時比例背錯但不知如何驗證：

因爲這題的題意不複雜，小聰很快的能夠將圖畫出（S-1-1），而小聰面對一個斜邊長是 2 的等腰直角三角形，他選擇的是使用三角形特殊邊長性質概念，而不是使用數的商高定理。但 1:1:$\sqrt{2}$ 的比例概念，他居然背成 1:1:$\sqrt{3}$，小聰有稍微懷疑了一下，但也沒有去驗證，因此他運用方根的計算（N-4-01）得出一個數字複雜的邊長，後來計算八邊形面積時，因邊長的數字較複雜，因此小聰很投入的算出正方形面積，卻忘了減去四個直角三角形，以求得八邊形的面積，最後解題失敗。



解圖文題時概念正確但邊長混淆：

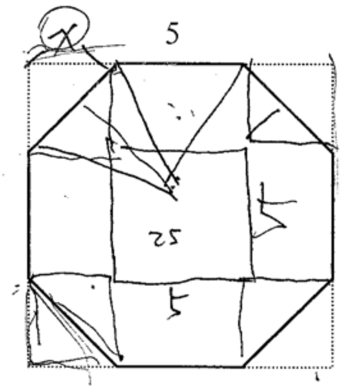
這題雖然有附圖，但圖中並未暗示解題的關鍵方法，因此必須靠學生自己思考。原本小聰想使用內部分割再組合的方式求出八邊形面積，行不通後，才改採用正確的正方形切割方法（N-3-11）。但是因爲小聰把正方形邊長與八邊形邊長混淆，將八邊形邊長以爲是正方形邊長，導致列式錯誤，而且他也因此一直無法用商高定理公式，將所假設的未知數求出，最後解題失敗。

$$(5-2x)^2=25-20x+4x^2$$

$$\frac{x\times x}{2}\times 4=2x^2$$

$$25-20x+4x^2-2x^2$$

$$=2x^2-20x+25$$



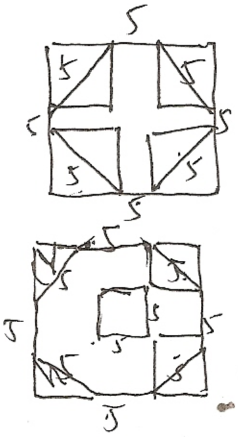
（二）小諺

解文字題時只會內部分割而無外部切割概念：

小諺在做這個題目時，因題意不複雜，很快的能將圖畫出（S-1-1），但他解題時，不是運用圖形外部切割的方式，而是一直想從內部分割再組合的方式求出八邊形面積，但花了許多時間卻找不出可形的方法，因而解題失敗。

5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少？

$5^2=$



解圖文題時概念正確但根號運算錯誤：

小諺這次使用正確的方法解題。他面對一個斜邊長是 2 的等腰直角三角形，小諺選擇的是使用三角形特殊邊長性質（A-4-08）概念，而不是使用數的商高定理。因此使用 1:1:$\sqrt{2}$ 的比例，運用方根的計算（N-4-01）得出一段邊長後，再運用切割的方式（N-3-11）列出所求出面積的等式（A-3-3），但在求八邊形面積計算時，但是因爲邊長的數字帶有根號，經過平方後再配合乘法公式展開時，發生計算錯誤，而解題失敗。

$\frac{\cancel{x=2}}{\cancel{2}}$

$1:1:\sqrt{2}$

$\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$

$\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=1$ $\quad (\underset{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}+2)^2=10+4\sqrt{2}$

$1\times4=4$ $\quad 10+4\sqrt{2}-4$

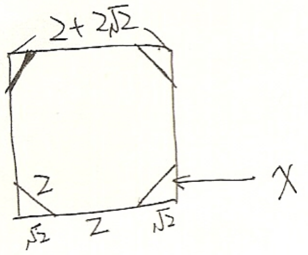
$=6+4\sqrt{2}$

（三）小淨

解文字題時概念運用正確且運算無誤：

小淨面對文字題，可以很快的將正確圖畫出（S-1-1），她先用數的商

高定理公式（A-4-03），先解出其中一段邊長，再用切割的方式（N-3-11）列出所求出面積的等式（A-3-3），之後運用方根的計算（N-4-01）配合乘法公式，成功將答案算出。



$$2x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{2}$$

$$(2+2\sqrt{2})^2 - 1\times 4 = 8\sqrt{2}+8$$
$$4+8\sqrt{2}+8-4$$

解圖文題時概念正確但對無理數運算恐懼：

小淨做這題時，運用數的商高定理公式（A-4-03），先解出其中一段邊長，但因所算出來的數字分母帶有根號，必須有理化，而小淨卻沒有先將其有理化，面對一個帶有根號的分數，小淨開始顯得沒有信心。雖然正確的用切割的方式（N-3-11）列出所求出面積的等式（A-3-3），但等式中卻一直帶著未知數，並未把剛才求得的無理數代進去，最後，小淨終究因對根號心生畏懼，而解題失敗。

$$2x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$\underline{(5+2x)^2 - 2x^2} = \underline{25+20x+2x^2}$$
$$\underline{25+20x+4x^2-2x^2} = 50+20\sqrt{\frac{25}{2}}$$

綜合以上的示例，此種題型的題目圖容易畫出，題意也容易了解，學生在面對文字題或圖文題的解題概念，大致上並沒有相差太多。而事實上做這種題目時，學生雖對數的商高定理還算熟練，但一時間常找不出正確的解題方法，或對無理數運算的不熟練，而導致解題失敗，在文字題方面共有三個同學解題失敗；在圖文題方面也是有三個同學解題失敗。

二、平面上兩點距離題：此種題型是數的商高定理運用在平面座標上所衍出的另一個公式，也是常見的考試題目。基本上，兩點距離概念的題目對學生來說較為簡單，因此，無論是文字題或圖文題，學生均能正確使用這個概念，並且，在解題所需的概念方面也不因題目表徵而有不同。在做法方面，學生可以直接將座標標示出後（A-3-12），套用距離公式（A-4-03）；也可以將兩點連接成斜邊，畫出輔助的直角三角形（N-2-9），用數的商高定理公式來做（A-4-03），因此使用的解題方法不同會造成使用概念上的不同。但當中，有一位同學公式背錯而解題失敗，而這也就是學生做數學常犯的迷思，當對公式不熟悉或是有懷疑時，他並沒有回到公式的原點（商高定理）去求證，而只是努力的去搜尋腦海中所記憶的公式，但其記憶其實有可能是錯的。

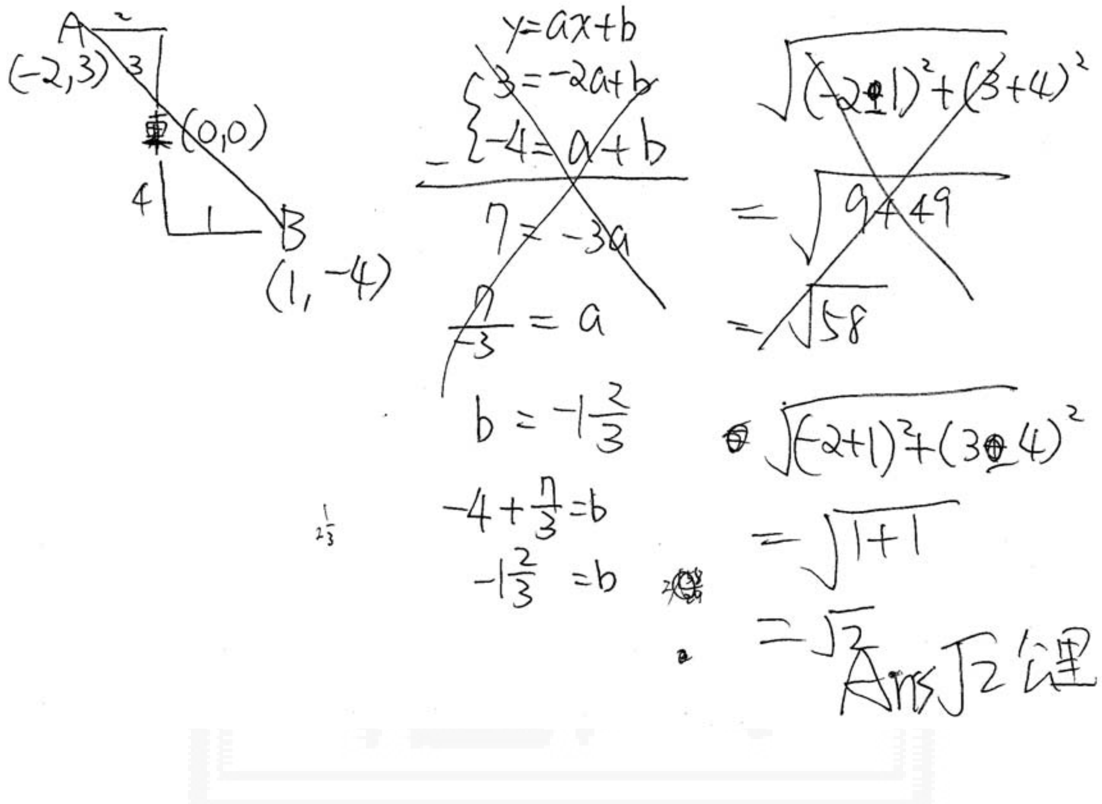
因為小愛及小淨解題概念的呈現與小聰的圖文題相似，研究者依據「數」的商高定理--平面上兩點距離題（直線距離題）的資料選擇列出兩位學生（小諺及小聰）的解題概念，並將每位學生分成文字題及圖文題兩部分來說明，舉例如下：

（一）小聰

解文字題時公式未背熟又不知如何驗證：

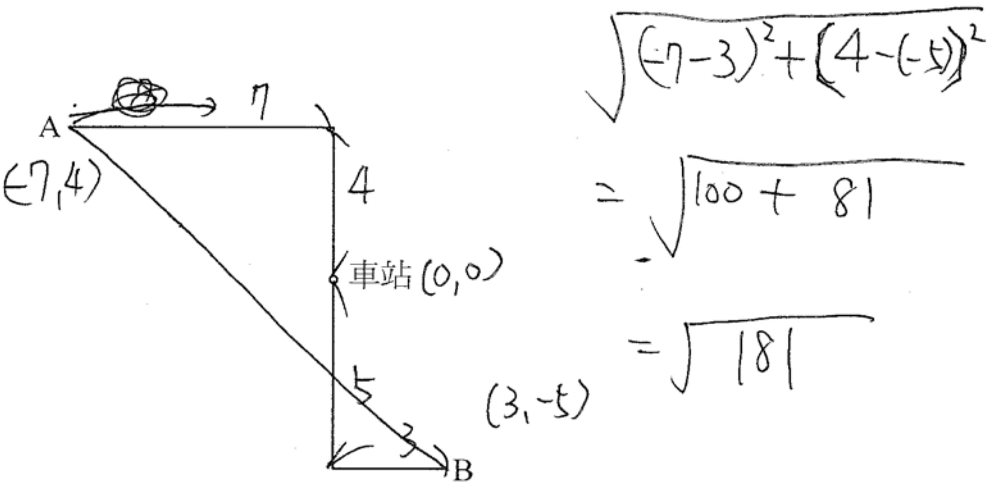
小聰看到這題時，原本花了許多時間用線形函數的觀念去求出直線方程式，但是因求出來方程式的未知數係數均為分數，覺得有點奇怪。後來，才發現應該用座標的方式求出兩點的距離。小聰很快的能把相關位置的座標標示出（A-3-12），之後在套用距離公式時，原本他套用的公式是對的，

已算出正確答案。但一會兒他又對算出的無理數答案沒有信心，覺得可能是公式用錯，認爲公式中兩點的 x 座標與 y 座標均應相加再平方，但因此算出的答案因數字太小，自己也覺得有點奇怪，他自言自語一句：「唉呦，公式到底是什麼啊？」最後小聰仍選擇寫下錯誤的答案，解題失敗。



解圖文題時概念運用正確且運算無誤：

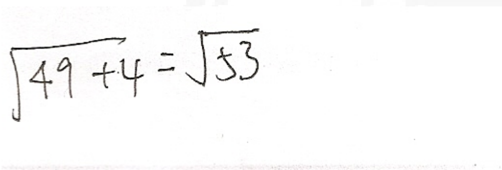
小聰做這題時，能夠把座標標示出（A-3-12），對公式也有清楚的了解，因此他運用正確的距離公式求出（A-4-03）答案，並且就算求出的數字是無理數（N-4-01），他也對答案有信心，因此解題成功。

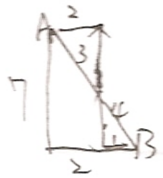


（二）小諺

解文字題時會畫出輔助三角形但邊長列錯：

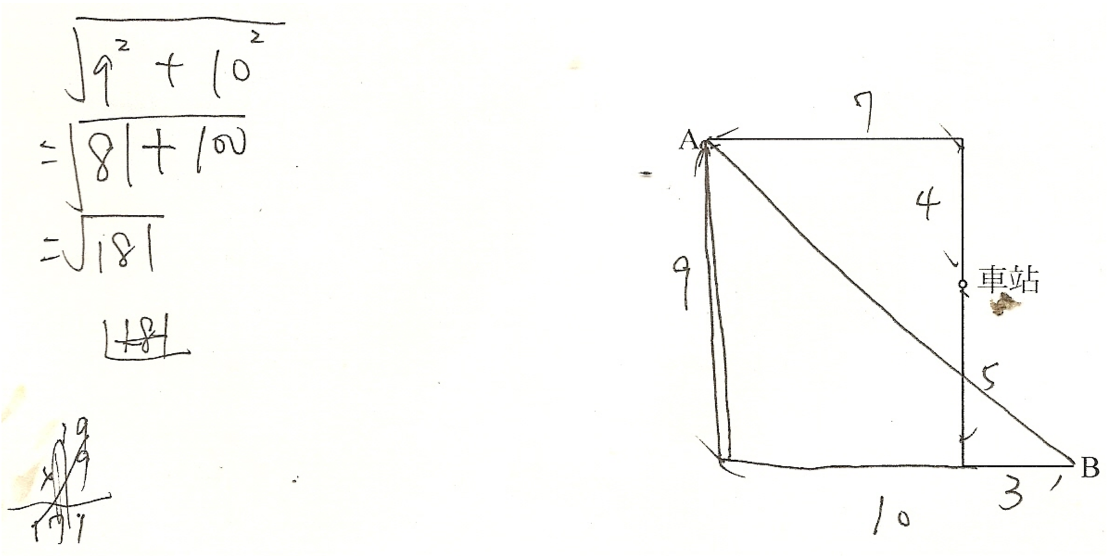
小諺做這個題目時，不是像其他學生一樣標示出座標及運用距離公式。他畫出相關位置後，是將兩點連接成斜邊，畫出輔助的直角三角形（N-2-9），運用數的商高定理公式（A-4-03），用兩股邊長平方和去求出兩點斜邊距離（N-4-01），但是他其中一股的邊長應該是兩個數字相加，但一時粗心只用了一段的數字，因此邊長數字列錯之下，即使公式運用是對的，也導致解題失敗。





解圖文題會畫出輔助三角形且運算無誤：

小諺在做這題時，標示出相關長度後，仍是將兩點連接成斜邊，畫輔助的直角三角形（N-2-9），用數的商高定理公式（A-4-03），用兩股邊長平方和去求出兩點斜邊距離（N-4-01），解題成功。



綜合以上示例，學生對此種題型的題目都覺得還蠻熟悉且簡單的，學生在面對文字題或圖文題的解題概念，大致上是一致的。在文字題中，有一位同學因邊長數字寫錯而解題失敗；在圖文題中，有一位同學因距離公式背錯而解題失敗。

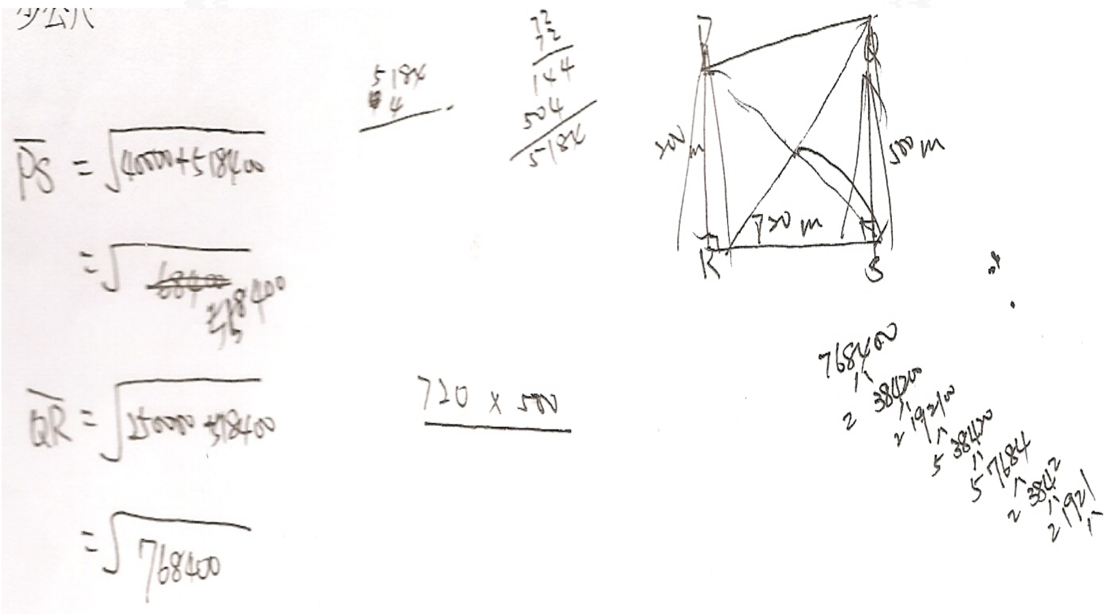
三、真實生活題：此種題型的題目，要將圖畫出也不會太難，只是，若圖形的相對位置沒有畫的很明確或是很清楚，比較難找到解題關鍵的直角三角形，因此若有正確圖形---無論是圖文題或是文字題但畫圖正確，的確能幫助解題。因此就這種題型而言，圖文題確實能夠讓學生較快找到解題的關鍵。另外，為與現實雷同，數字較大，因而在使用數的商高定理公式時，雖然大部分同學在公式運用是對的，但遇到商高數組要放大縮小時（S-3-3），就較容易出錯。基本上，這個題目圖文題及文字題的解題概念並差異不大，只是文字題中若需畫出圖以輔助解題，則須先畫出圖中的相對位置（S-1-06）。另外，若使用的解題方法不同仍會造成使用概念上的不同，有學生是使用幾何複合形體間的關係（S-4-03）配合畫輔助線的概念，找出關鍵的直角三角形，再用數的商高定理公式（A-4-03）求出答案；而有學生則是直接使用商高定理公式（A-4-03）中直線距離座標的概念（A-3-12）解題即可。

研究者依據「數」的商高定理（纜車題）的資料列出 4 位學生的解題概念，並將每位學生分成文字題及圖文題兩部分來說明，舉例如下：

（一）小愛

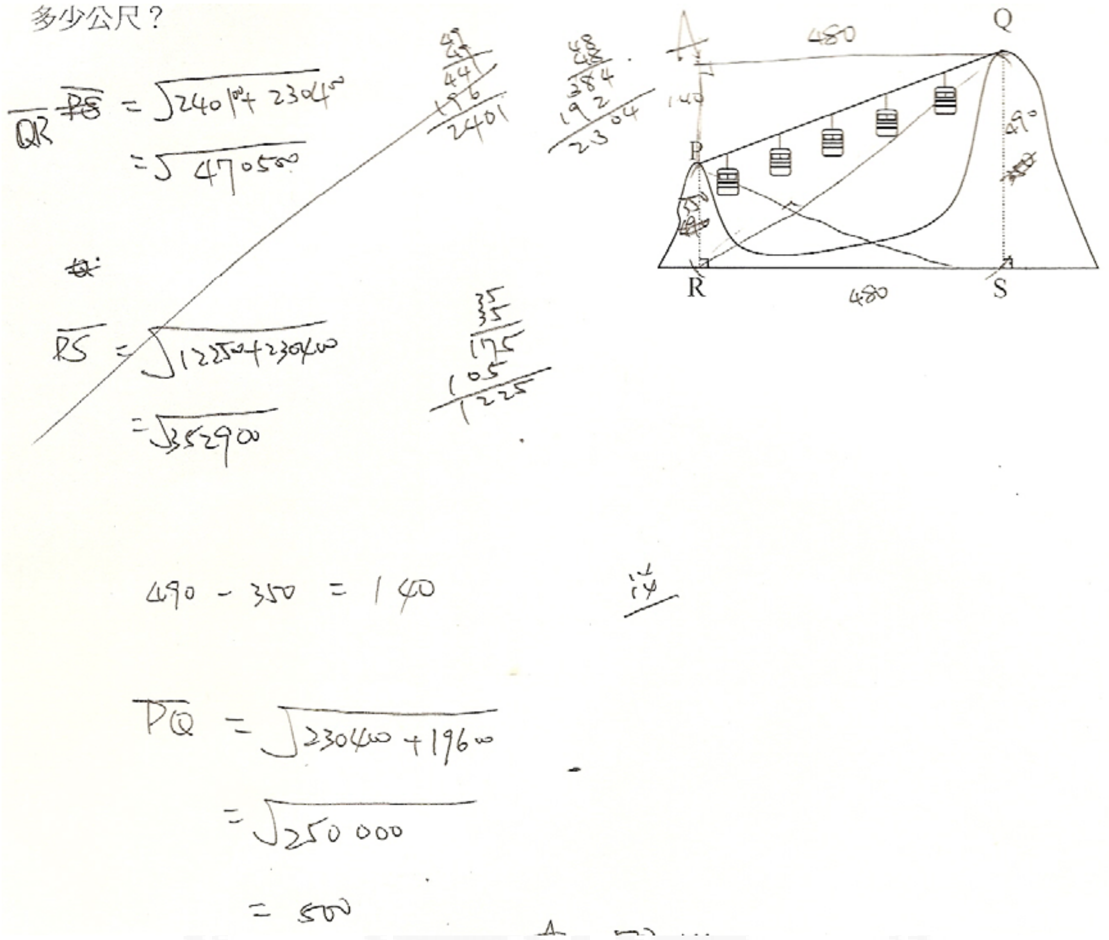
解文字題時從圖中不能看出複合形體構成要素：

小愛在面對文字題時，能夠將圖畫出（S-1-06），但因差了 300 公尺的兩山山頂，高低相對位置畫得不是很明顯，因此沒有觀察出上方隱存的直角三角形，而是用其他點連接成斜邊，企圖算出兩對角線的長度，但小愛終就因算出的數字太大，而且所求出的對答案也沒有幫助，宣告解題失敗。



解圖文題時從題目圖形中找出解題關鍵：

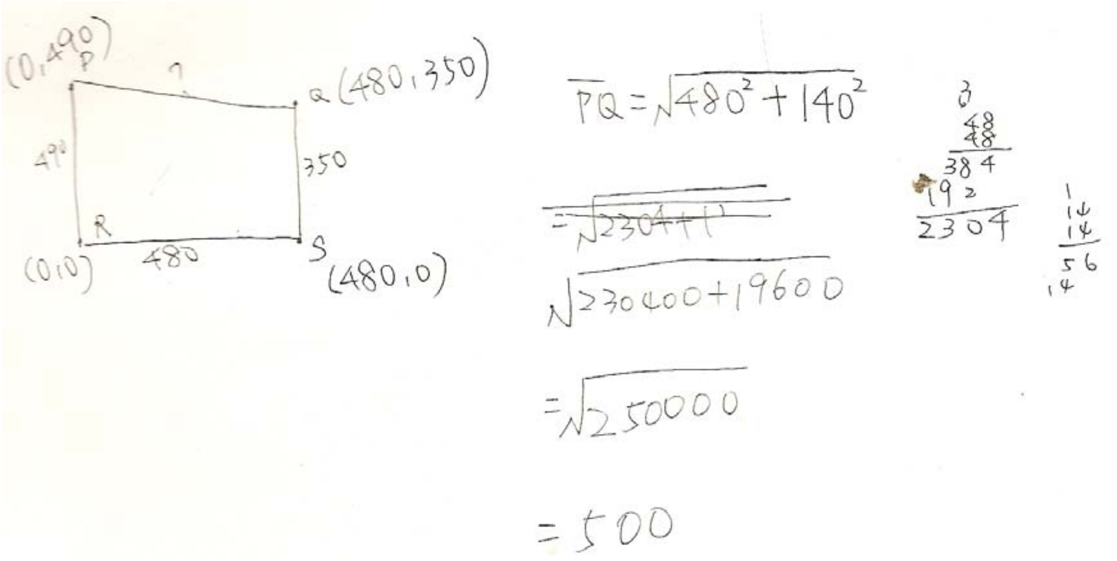
小愛在做圖文題時，一時找不出正確的方法，企圖連接其他頂點，算出兩對角線的長度，後來算出長度後，覺得對答案也沒有幫助。因此小愛換個方向去想，在觀察圖形一陣子之後，她終於找出圖形左上方隱存的直角三角形（S-4-03），在畫出輔助線並標示長度後，運用數的商高定理公式（A-4-03），求出正確答案（N-4-01）。



（二）小淨纜車題

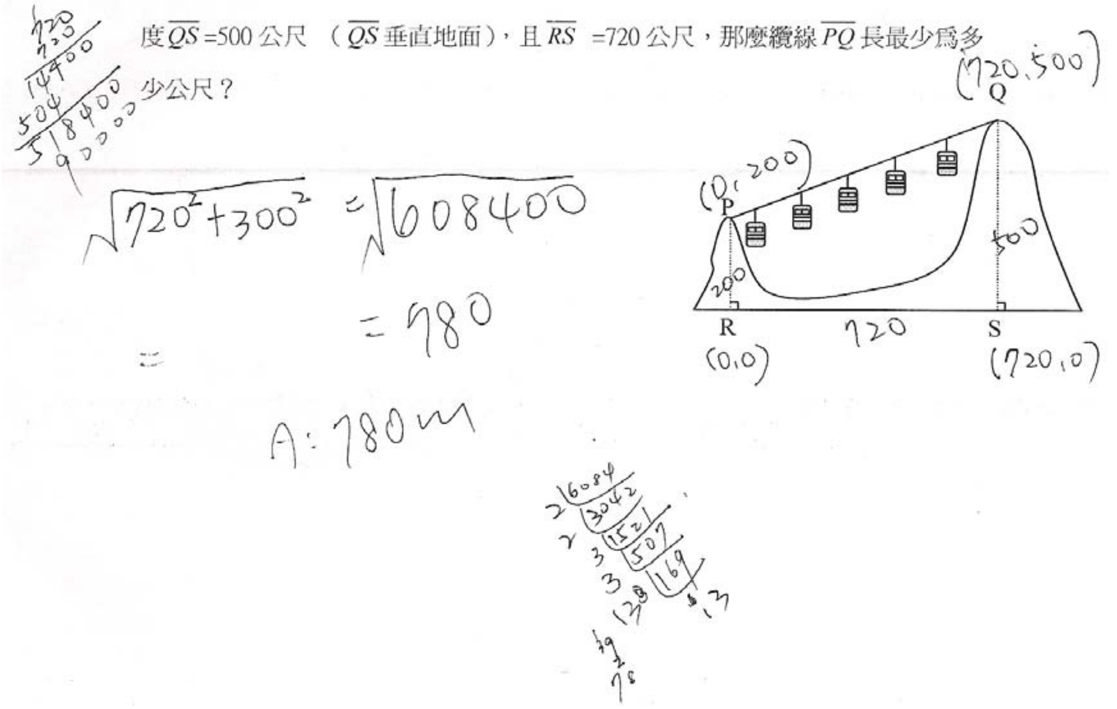
解文字題時與眾不同的使用兩點距離的方法：

小淨在做文字題，也是能很快的畫出圖形（S-1-06），當她從自己畫的圖形中尚未找出解題方法時，回頭看了題目文字敘述，發現要求「線段長」的解題關鍵字句，因此小淨採取座標的方法（A-3-12）求直線距離，用數的商高定理公式（A-4-03），用根號運算（N-4-01）求出答案。



解圖文題時與眾不同的使用兩點距離的方法：

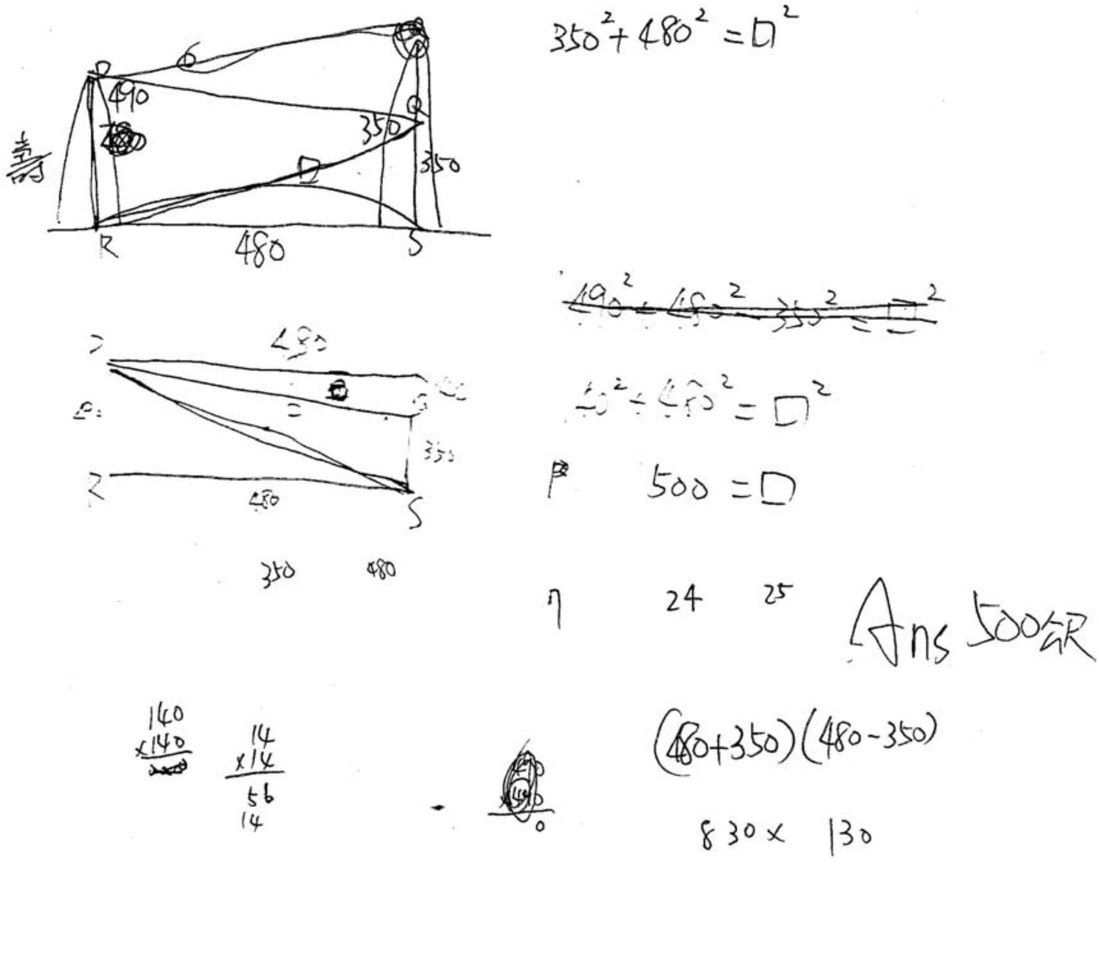
小淨在做這題時，思索了一陣子仍未找出解題方法，後來仔細再看了一遍題目文字敘述，發現要求「線段長」的關鍵字句，因此她採取座標的方法（A-3-12）求直線距離，用數的商高定理公式（A-4-03），用根號運算（N-4-01）求出答案。



（三）小聰的纜車題

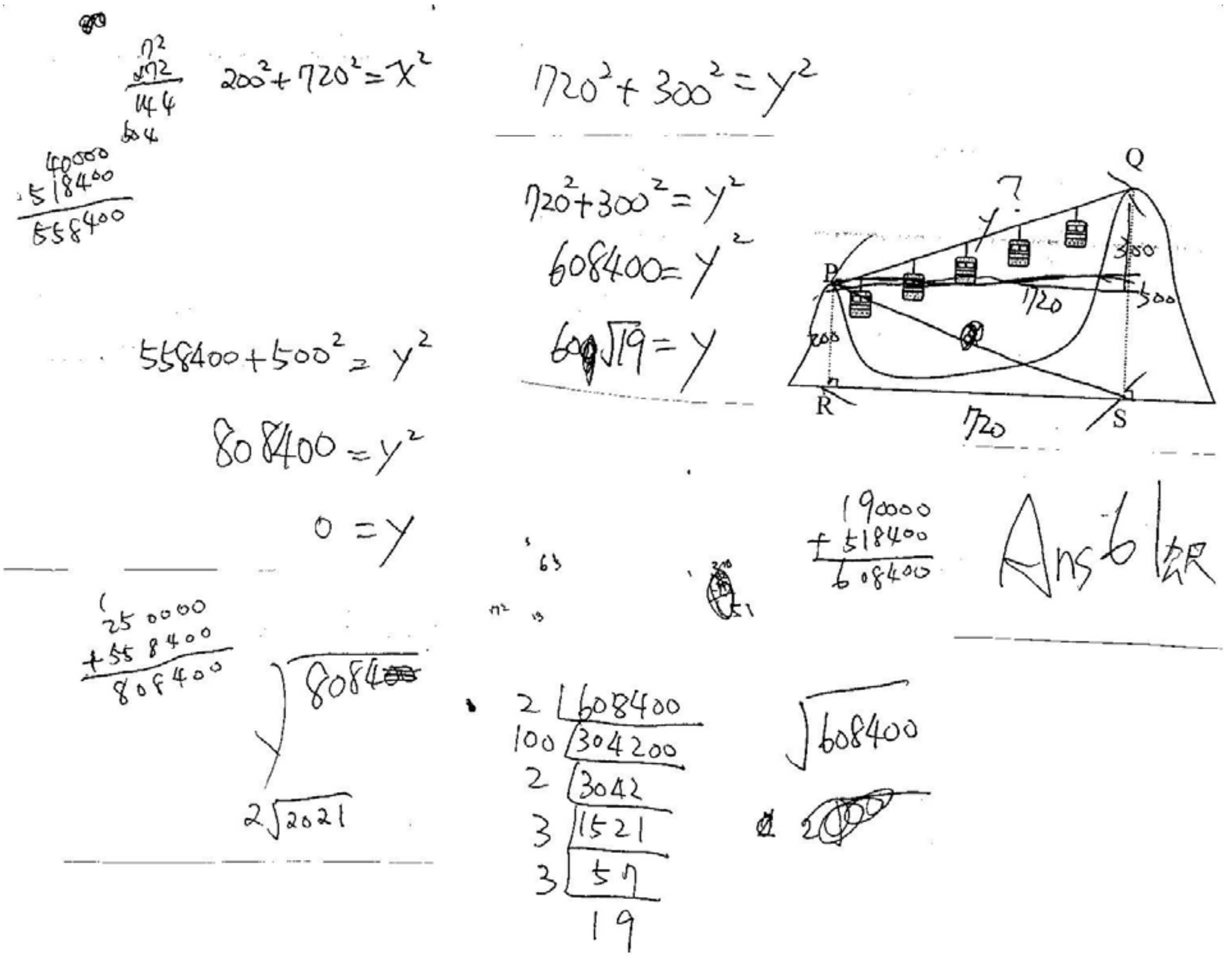
解文字題時善用數字放大縮小概念：

小聰在面對文字題時，很快的能將圖畫出（S-1-06），但因差了 300 公尺的兩山山頂，高低相對位置畫得不是很明顯，因此沒有觀察出上方隱存的直角三角形，而是用其他點連接成斜邊，企圖算出其中一條對角線的長度，但列出式子後發現數字不好求而且也不是題目要求的答案，因此在觀察了自己畫的圖一陣子之後，終於找出圖形右上方隱存的直角三角形（S-4-03），在畫出輔助線並標示長度後，運用數的商高定理公式（A-4-03），並且熟練的運用商高數組放大縮小的概念（S-3-3），用根號運算（N-4-01）求出正確答案。



解圖文題時能分解複合圖形但開方錯誤：

小聰在做這題時，使用錯誤的三角形，想算出兩次的斜邊長，來求得答案，但因求出的數字太大又分解不出來，因此他換個方向去想，在觀察圖形一陣子之後，終於找出圖形右上方隱存的直角三角形（S-4-03），畫出輔助線並標示長度後，運用數的商高定理公式（A-4-03）求出答案，最後卻因數字較大，開根號時分解錯誤，最後解題失敗。

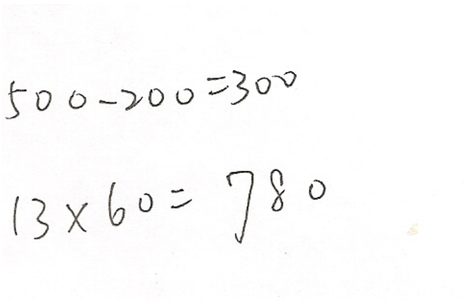


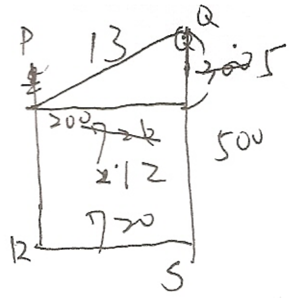
（四）小諺纜車題

解文字題時能善用數字放大縮小概念：

小諺面對這題顯得有信心多了，他能輕易的把圖形畫出（S-1-06），並能夠看出右上方那個隱存的直角三角形（S-4-03），在畫出輔助線並標示長度後，小諺運用數的商高定理公式（A-4-03），並且熟練的運用

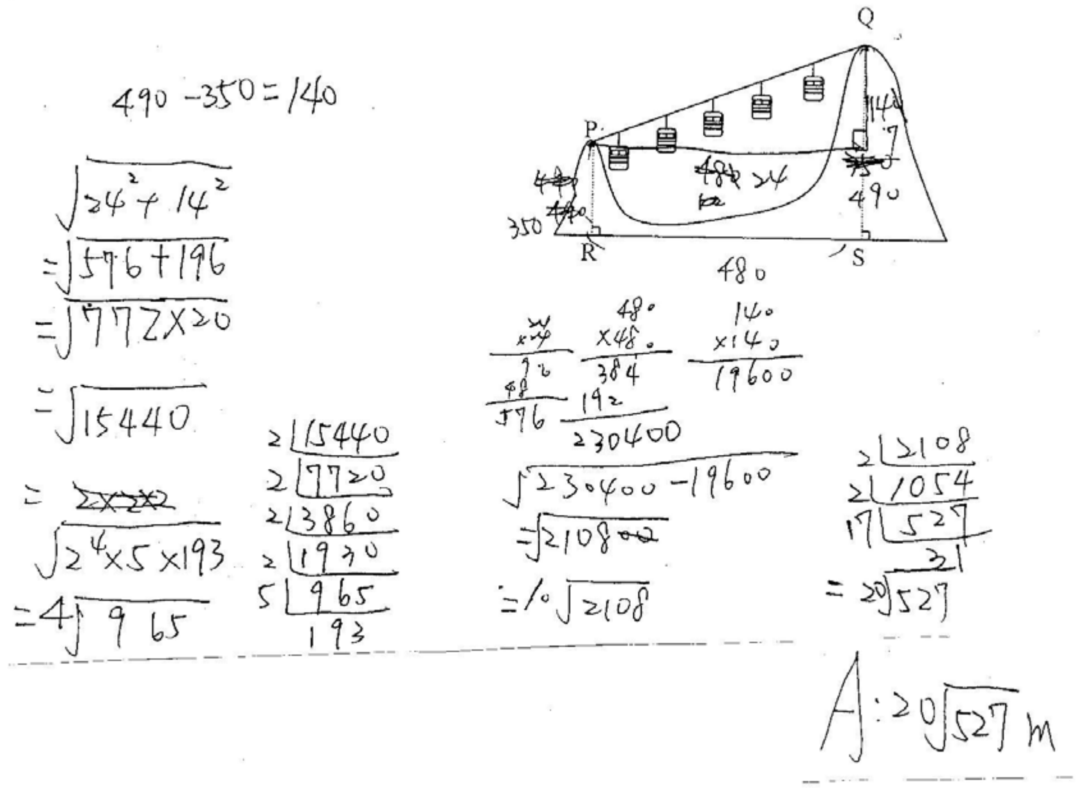
商高數組放大縮小的概念（S-3-02），用根號運算（N-4-01）求出正確答案。





解圖文題時出現一連串錯誤:

小諺在做這題時，也是能夠看出右上方那個隱存的直角三角形（S-4-03），在畫出輔助線並標示長度後，想運用數的商高定理公式求出答案。但因數字較大，運用商高數組縮小的概念時，約分完後，有一邊長居然用只約了一半的數字代進公式裡算，又在算完後，不清楚當初約分的那個縮小倍率要放在根號裡面還是外面，才能將其放大還原，後來錯誤的選擇在根號裡面放大還原，因此算出一個奇怪的數字之後，覺得不太對勁。後來小諺放棄運用縮小的概念，改用原始的大數字去算，但又因數字較大，用數的商高定理公式時，居然公式中間的加號寫成減號，終致算出錯誤的數字（N-4-01），因而解題失敗。



綜合以上示例，此種題型題意不難瞭解，但圖的相對位置畫得好不好，卻是學生是否能看出解題方法的關鍵。大致上來說，學生在面對文字題或圖文題的解題概念，並沒有相差太多。在文字題方面，有一位同學因未能找出正確的解題方法而失敗；在圖文題方面，有兩位學生因數字較大，在計算過程中發生錯誤。

綜合第一節三大部份整體來說，四位學生在「形」、「面積」、「數」三類型題目的數學概念展現上，在「形」的商高定理題目中學生展現的解題概念種類的確有因題目表徵不同而有所不同；而「面積」、「數」的商高定理題目中學生展現的解題概念，除了文字題因要畫圖輔助解題，需比圖文題多出畫圖幾何的概念外，其餘的解題概念因題目表徵不同而造成的差異較少，反而是因個人差異，即學生使用的解題方法不同而造成使用概念種類及順序上會有不同。

肆、綜合分析

將此章節的前三大部份「形」、「面積」、「數」三類型題目做整理分析，整理成下表：

表 4-1-1　四位學生在兩種表徵題目解題使用數學概念種類及次數一覽表

學生 / 解題概念	小諺		小愛		小淨		小聰	
	文字題	圖文題	文字題	圖文題	文字題	圖文題	文字題	圖文題
A-3-3 列出等式	★	★	★	★★	★★	★★	★	
A-3-12 運用直角坐標			★	★	★★	★★	★	★
A-4-03 理解勾股定理及應用	★★	★	★	★★	★★★	★★★★	★★★	★
A-4-08 三角形幾何性質		★	★	★				
N-2-9 有保留概念並比較	★★	★★	★	★	★		★	★
N-2-13 面積計算	★	★★	★	★	★	★★	★	★
N-3-11 能切割拼湊計算面積	★	★	★	★	★★	★★	★	★
N-4-01 認識二次方根	★★★	★★★★	★★★	★★★★	★★★★	★★★	★★★	★
S-1-1 由外觀辨認型體	★		★	★	★		★	★
S-1-9 辨認型體內外部	★		★		★		★	
S-1-06 了解相對位置	★		★		★		★	
S-1-10 對圖形做平面鋪設			★		★			
S-3-03 放大縮小概念	★						★	
S-4-03 複合型體構成要素	★	★		★			★	★
S-4-05 用面積導出勾股定理	★	★★	★	★★	★	★	★★	
概念種類合計	12	9	13	11	12	7	13	8
概念使用次數合計	16	15	15	17	20	16	18	8
答對題數	2	3	2	5	5	4	3	1

1. **學生解題使用的概念種類及次數越多，答對題數越多，反之越少：**

(1) **使用的概念種類及次數越多，答對題數越多：**4 位學生在文字題解題概念的使用中，概念使用次數上小淨使用的最多，概念使用種類上 4 人不相上下，小淨只少用他人一種而已，而小淨在文字題的答對題數是四人之中最多的。相對的，在圖文題解題概念的使用中，無論是概念種類或概念使用次數，小愛所用的最多，而小愛在文字題的答對題數也是最多的。因此，在本研究中可以得知，在解題過程中，無論是文字題或圖文題，使用的數學概念種類及次數最多的，其答對題數也會最多。

(2) **使用的數學概念種類及次數越少，答對題數越少：**4 位學生文字題解題概念的使用中，無論是概念種類或概念使用次數，小諺及小愛使用的是最少的，而小諺及小愛在文字題的答對題數也是最少的。相對的，在圖文題解題概念的使用中，小聰的概念使用次數最少，概念種類也相對較少，而小聰在文字題的答對題數也是 4 人之中最少的。因此，在本研究中可以得知，在解題過程中，無論是文字題或圖文題，使用的數學概念種類及次數較少的，其答對題數也會最少。

(3) **數學概念種類可用使用概念次數來彌補：**上述的兩點有一個例外是，使用的概念種類最少的，答對題數不一定最是少的，例如像小淨。小淨的文字題中，做八邊形題時，小淨不像其他學生使用等腰三角形特殊邊長比例，而只是純粹用商高定理公式求出邊長，仍可正確解題，另一題纜車題，她因為是用坐標的概念解題，並未使用商高數組放大縮小概念，只能用原大數字的邊長去運算，也仍可正確解題。而在小淨的圖文題中，她在第五題纜車題是用簡單的一個座標概念即把答案正確解出，不像其他學生用到複合圖形等其他較多概念，因此小淨無論在文字題或圖文題，使用概念種類相對均較少，但用其他正確的概念仍可解題成功，因此使用其它正確概念多次可彌補較少的概念種類，因此她答對題數並不

是最少的。

2. **文字題使用的解題概念種類會比圖文題多**：學生在解文字題時，所使用的數學概念種類有 15 種；學生在解圖文題時，所使用的數學概念種類只有 11 種。而差異的這 4 種概念（S-1-9、S-1-06、S-3-03、S-1-10），大多是因為解文字題時有時需要將圖形畫出，而必須使用到的幾何概念。
3. **學生在商高定理單元中最熟練的 4 種概念及要加強的 2 種概念**：從上表可以發現，這四位學生在 A-4-03（理解勾股定理）、N-2-13（以個別單位描述面積）、N-4-01（認識二次方根）、N-3-11（能以切割拼湊的方式計算面積）這四個概念上，使用的情形最佳。但在 S-3-03（放大縮小概念）、S-1-10（對圖形做無空隙鋪設）的使用情況仍需再加強。
4. **在商高定理解題中最常使用到的 7 個概念**：在整體商高定理包含「形」、「面積」、「數」的題目中，解題所需的 15 種概念中（表 4-1-1），以下 7 個是最常使用到的： A-3-3（思考列出等式）、A-4-03（理解勾股定理）、N-4-01（認識二次方根）、S-4-05（運用面積導出勾股定理）、N-3-11（能以切割拼湊的方式計算面積）、N-2-13（以個別單位描述面積），N-2-9（保留概念的形成並間接比較）。若缺乏這 7 個概念，則解題會容易失敗。此研究發現可供教學及課程設計做參考。

第二節　國二學生在商高定理單元中面對文字題及圖文題時的解題歷程

本節主要分成五個部分，前四個部份分別為小諺、小愛、小淨、小聰 4 位國二學生在商高定理單元中面對文字題及圖文題時的解題歷程差異，以 Schoenfeld（1985）的時間序列圖（time-line graph）來呈現。最後一部份再將一些數據整理

做綜合分析。

在報告解題歷程的呈現，研究者發覺以 4 位學生在面對不同題目表徵時，會有不同的反應及做答方式，包括害羞緊張的小諺、不喜歡文字的小愛、優秀且有驗證習慣的小淨及靠印象解題的小聰。

以上 4 位學生在圖文題及文字題的解題歷程及其差異，分四個部份報告，在每個部份中，以題目爲主幹，分 5 題呈現；再將每個題目分成 2 個部份，分別爲文字題及圖文題來探討，最後再將一些數據整理做綜合分析。

壹、 害羞緊張的小諺

小諺是個害羞的男生，在面對文字題時又更難掩緊張的情緒，因此他在讀題時沒有辦法思考題意，要第二次讀題後，才可以思考及分析。在面對文字題時，小諺較難從文字敘述中瞭解題意，常停留在讀題分析探索階段。大體來說，小諺在文字題所花的解題時間比圖文題多，文字題做錯的三題中，其中有兩題是因爲不瞭解題意而無法進行下去。

一、足球場文字題---在讀題、分析、探索徘徊

在讀題階段花許多時間的小諺，顯然對文字陌生及懼怕。在讀題的過程中，可能因爲緊張，題目中的「一個邊長爲 c 的正方形大足球場」他一直唸成 「兩個邊長爲 c⋯.」(2-0-1-01)。而其讀題的過程中顯然也沒有辦法同時了解題意，只是照著文字去唸，因此他讀題完後，仍需要再重新讀題並分析一次(2-0-1-02)，後來重新靜下心來探索（2-0-1-03）過後，他能夠找出面積相等的解題關鍵，而解題觀念雖然正確，但因之前讀題錯誤，導致列式錯誤(2-0-1-05)，無法將關係式解出，因而之後又花了許多時間在讀題、分析及探索(2-0-1-06)，試圖再畫圖並找出算式中的錯誤，但仍徒勞無功，以致解題失敗。

足球場圖文題---穩紮穩打中順利進行解題

小諺在面對圖文題時顯得有信心多了，但他在讀題時仍無法一邊同時了解題

意，仍須再花時間一邊讀題並看圖分析（2-1-1-02），有圖參考時，小諺很容易在圖中找到解題的方法，他先探索著發現其他零碎的面積（2-1-1-03），與另一塊的看台面積相等後，他開始計畫用面積相等的方法（2-1-1-04）列出等式後，解題才成功。

圖 4-2-1-(1) 小諺足球場文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖						
讀題							
分析							
探索							╳失敗
計劃							
執行							
驗證							
時間(秒)	90	280	115	105	96	234	920

圖 4-2-1-(2) 小諺足球場圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						○成功
驗證						
時間(秒)	72	93	67	45	20	297

從上述 2 個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小諺在圖文題中，每個解題階段所花的時間均較文字題少，解題總時間約爲文字題的 32%，解題階段也比較順利，原因是他從輔助的圖中能較快速的理解題意，並能掌握解題的關鍵概念，不會像做文字題時反覆在分析及探索的階段。而且小諺面對圖文題因較有信心，也不會發生在文字題中因爲沒有信心又緊張，產生讀題錯誤的狀況。不過他不管在哪種題目表徵之下，都沒有經過驗證的階段。

二、池塘文字題---從執行中發現錯誤

小諺在做池塘題時，在讀題及分析這 2 個階段嘗試把池塘及土地的圖形畫

出。可是，文字敘述中「較大的兩塊面積」，他並沒有意識到是斜邊及其中一股上的正方形面積，而剛開始是畫成兩股上的正方形面積（2-0-2-02）。後來在分解最大面積數字 1681 平方公尺的階段，發現不好分解，但他並沒有如其他受試者般，在探索分解數字 1681 這個階段花很多的時間，而是用鄰近的數 40 去判斷（2-0-2-04），研究者認爲這是一種正確的探索方法。不過後來，他第一次執行求出最小正方形土地面積是個無理數時，發現當初的圖畫錯了（2-0-2-07）。經第二次探索後，他重新畫圖並計畫（2-0-2-08），將其中一塊已知的面積改成在斜邊，最後算出正確答案。

池塘圖文題---不需探索的順利解題

小諺在做圖文題仍顯得有信心，他在讀題時就能順便看圖以理解題意，並接著能用面積的商高定理的概念分析三個圖形面積的關係（2-1-2-02），接著能正確計畫出求得答案的算式（2-1-2-03），最後解題成功。

圖 4-2-2-(1) 小諺池塘文字題解題歷程

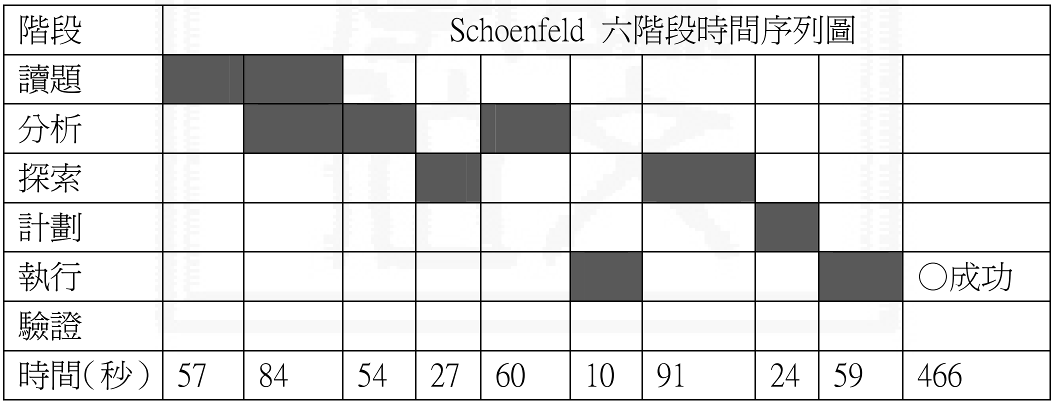
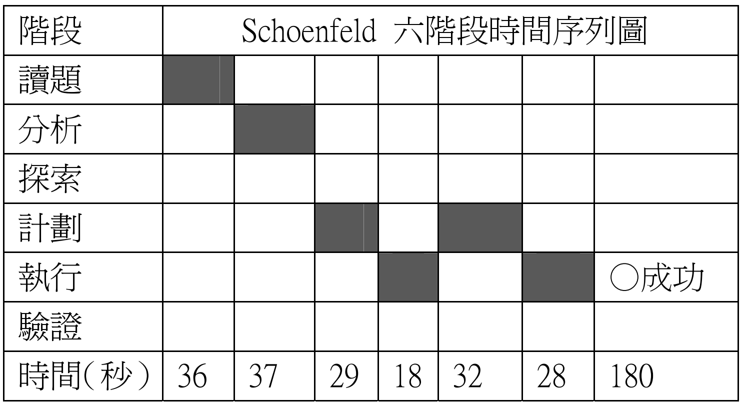


圖 4-2-2-(2) 小諺池塘圖文題解題歷程



從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小諺在圖文題中，解題

所花的時間少很多，約是文字解題時間的 38%。主要是他在面對文字題時，花了較多的時間在讀題、畫出原始的圖，及後來的更正等階段，因此讀題、分析、探索階段花的時間較圖文題多。而且因對文字題較沒信心，在怕算錯的心態之下，在文字題中執行計算的階段花較長的時間。而因爲圖文題能夠很快掌握題意，因此在圖文題沒有經歷探索階段，即可直接計畫列式。不過他不管在哪種題目表徵之下，也都沒有經過驗證的階段。

三、八邊形文字題---在讀題、分析、探索徘徊

這題的圖不難畫出，因此小諺在讀題及分析階段（2-0-3-02），即可把圖畫出來，但是這個題目就算圖有畫出來卻也沒有顯現出解題方法。之後小諺一直分析探索，想找出正確的解題方法，但卻未假設未知數來算出邊長，也無法利用正確的面積切割概念算出面積，因此一直在探索（2-0-3-03、2-0-3-07）、分析（2-0-3-04、2-0-3-08）及讀題（2-0-3-05）的階段中反覆，雖一直在圖形中想嘗試算出答案，但終究無法算出任何數字而解題失敗。

八邊形圖文題---錯誤探索但迷途知返

小諺在做這題時，讀題完後能夠很快的假設出未知數，試圖用等腰直角三角形的邊長比例去求出未知數（2-1-3-02），但發現算出的可能是無理數後（2-1-3-03），即停下腳步，回頭又把題目讀了一遍，重新探索，假設另一個邊長爲未知數（2-1-3-05），但發現不對。思考後，又重新回到原來的假設，並計畫算出未知數（2-1-3-06），終於求得解題關鍵的邊長。後來用面積切割的觀念（2-1-3-08），計畫出求的答案的正確算式，但是因爲無理數用乘法公式展開時，計算錯誤（2-1-3-09），因此解題失敗。

圖 4-2-3-(1) 小諺八邊形文字題解題歷程

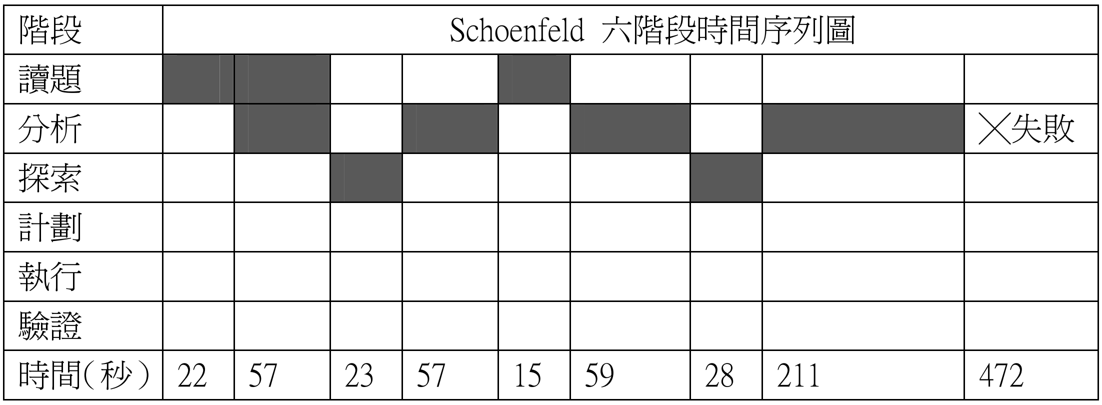
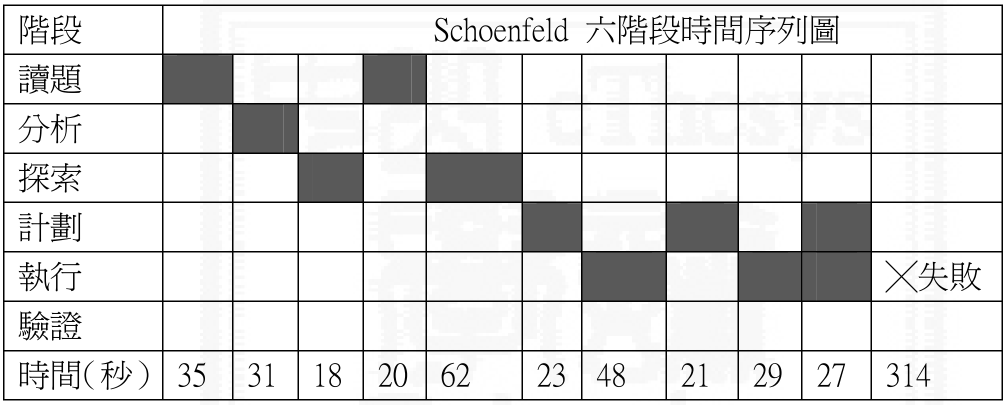


圖 4-2-3-(2) 小諺八邊形圖文題解題歷程



從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小諺在文字題中，解題所花的總時間雖然較少，但主要是他並沒有解題成功，而只是在反覆分析探索的過程，最後終於放棄，因此時間花的較圖文題少。在文字題中，小諺因找不出正確的解題方法，因此一直沒有進入計畫執行階段，一直在分析探索的過程中反反覆覆。而在圖文題中，雖然前面花了一些時間在分析探索，但終能整理出正確的思緒，在不斷的計畫、執行中，一步步向正確答案邁進，只是最後因根號運算錯誤，解題失敗，可是他的解題概念及列式是正確的。

四、直線距離文字題---跳躍式的階段進行

這題雖然是文字題，但因是小諺熟悉的簡單直線距離題，因此他在一邊讀題時，即能一邊畫出圖（2-0-4-01），之後直接計畫將圖補成直角三角形，使用數的商高定理來求答案，只是在分析數字的過程中，忘記將其中一段的邊長計算在內

（2-0-4-03），因此用錯誤的數字去執行計算，雖然最後有再分析及驗證一遍（2-0-4-05），但僅是對答案的無理數數字進行驗證，而沒有回頭驗證原始的邊長數字，因而解題失敗。

直線距離圖文題---不需探索順利解題

小諺做這題時，讀題完後，很熟練的分析起題目，將 A，B 兩鎮連接畫一條線，形成一個直角三角形（2-1-4-02），接著計畫寫出直角三角形的兩股長長度，列出公式求出斜邊（2-1-4-05），因爲最後算出的答案是無理數，因此還驗證了一下，最後解題成功。

圖 4-2-4-(1) 小諺直線距離文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題	■					
分析	■		■		■	
探索						
計劃		■				
執行				■		
驗證					■	╳失敗
時間(秒)	39	10	18	25	37	129

圖 4-2-4-(2) 小諺直線距離圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖				
讀題	■				
分析		■			
探索					
計劃			■		
執行				■	
驗證				■	○成功
時間(秒)	28	28	26	108	190

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小諺在圖文題中，解題的總時間較長，但大致差別是在最後執行及驗證的階段，因爲圖文題這題的數字較大，所以執行時嘗試分解及驗證的時間較多，因此時間的差異並非是題目表徵差異所造成。而這題無論是文字題及圖文題，因爲題目較簡單，小諺都略過探索的階段，在分析完都直接進入計畫的階段。反而是，小諺在經歷前幾題較難的文

字題後，面對較簡單的這題，反而太大意而粗心錯，因此懊悔不已。

五、纜車文字題---思索完未經計畫大步向前

小諺經過剛才那題簡單的距離題之後，對解題稍有信心了，也減緩他的不安，因此他雖然仍花許多時間讀題，但能很有條理的將題目的條件一一畫出（2-0-5-02），並在畫完圖形後，經探索發現需要畫輔助線（2-0-5-03），因此解題關鍵的直角三角形被找出來後，最後能正確的運用商高定理公式將答案算出（2-0-5-05），解題成功。

纜車圖文題---在計畫、執行中徘徊

小諺在讀題完後，能夠很輕易的依照題意分析畫出輔助線，形成一個解題關鍵的直角三角形，但他在利用此直角三角形要求出斜邊長時，因兩股長數字較大，因此他運用比例將數字縮小，但他在圖中寫出正確的縮小數字，回到算式時，卻寫出一個未縮小的數字（2-1-5-02），因此最後根據這個錯誤的數字當然執行出錯誤的答案（2-1-5-04），但此數字太奇怪，因此小諺重新用原始未縮小的數字計算，但卻因數字太大，商高定理的公式反而寫錯（2-1-5-05），加號誤寫成減號，最後終究解題失敗。

圖 4-2-5-(1) 小諺纜車文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						○成功
驗證						
時間（秒）	50	51	19	17	60	197

圖 4-2-5-(2) 小諺纜車圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖						
讀題							
分析							
探索							
計劃							
執行							
驗證							╳失敗
時間(秒)	58	70	63	200	55	199	645

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小諺面對文字題時，因經過剛才那題簡單的距離題之後，對解題稍有信心了，因此能很有條理的畫圖，並且分析、探索完後，即直接執行算出正確答案，其兩次的分析均是在分析圖上的數字。而在圖文題，因誤寫出錯誤的縮小邊長，又不當的運用縮小還原的方法，因此，雖然對題目的分析正確，也未經過探索階段就知道解題的方法，但花許多時間一直在計畫及執行中反覆，表現出對大數字的運算沒有信心，因此花了比文字題將近三倍的時間，仍解題錯誤。

貳、 不喜歡文字的小愛

小愛是個開朗的學生，但從小就對國語文沒有興趣，因此是屬於對文字題不擅長的學生。她在文字題所花的解題時間也是比圖文題多，在做文字題時，也常停留在讀題分析探索階段，文字題做錯的三題中，其中有兩題是因為無法清楚瞭解題意而解題失敗，而圖文題方面則是全部正確。

一、足球場文字題---未能用數學語言呈現解題歷程

小愛在做這題時，讀題完後，花了許多時間在分析題意，並探索嘗試將文字敘述轉換成圖（3-0-1-03），但只有畫出雛形，無法呈現完整的圖。另外她並不知道在這個題目中，要如何列出算式以呈現出題目要求的說明過程。最後她採取題目中「兩股為 a、b，斜邊為 c 的直角三角形看台」的敘述（3-0-1-04），直接將數的商高定理公式列式，因此在解題時間序列中，看起來是順利的，但因只呈現結

果（3-0-1-05），並沒有將證明的過程說明清楚，因此算是解題失敗。

足球場圖文題---不需探索順利解題

對比文字題的解題，小愛面對圖文題，態度顯得較輕鬆，在讀題階段她可以輕易的將文字敘述與圖互相對照，以更快的了解題意（3-1-1-02），因此她只花了一點時間在分析題目，並沒有經過探索階段。之後小愛從圖的輔助之下，找出面積保留的解題關鍵（3-1-1-03），在計畫列式互相抵銷之後，成功的呈現出三邊長的關係式，順利解題成功。

圖 4-2-6-(1) 小愛足球場文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖				
讀題					
分析					
探索					
計劃					
執行					╳失敗
驗證					
時間(秒)	70	142	7	14	233

圖 4-2-6-(2) 小愛足球場圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖				
讀題					
分析					
探索					
計劃					
執行					○成功
驗證					
時間(秒)	55	15	18	32	120

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小愛在面對文字題時，需要花很多的時間在讀題、分析及探索上，因爲她必須自己理解題意，並嘗試把圖畫出來。而圖文題的計畫、執行階段時間雖較文字題長，那是因爲小愛做文字題時並沒有列式成功，即沒有察覺到題目要求要把證明過程寫出，而圖文題才有真正列式說明證明的過程，因此計畫、執行階段時間較長。而且圖文題因爲有圖的輔助，因此沒有探索的階段。

二、池塘文字題---計畫錯誤但迷途知返

小愛面對文字題，因題意不難理解，因此有條理分析完題意並將圖畫出（3-0-2-02），但剛開始她是計畫運用數的商高定理來做（3-0-2-03），但因為數字較大，花了 3 分多鐘還開方開不出來（3-0-2-04），後來才換個方向，重新分析，計畫運用面積的概念將等式列出（3-0-2-06），求得正確的面積答案。而第二小題較簡單，也能順利的分析、計畫並執行成功。

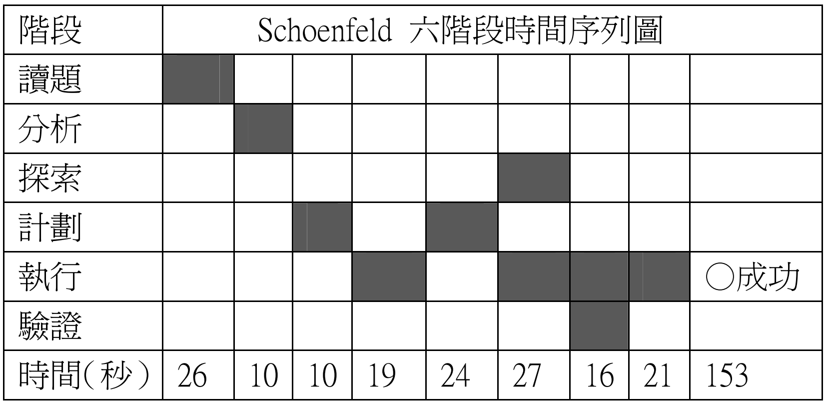
池塘圖文題---在執行中發現錯誤

小愛在做這題時，因為有圖的輔助，因此讀題及分析的時間較少，也能用正確的方式計畫「三邊長剛好圍成一塊直角三角形，所以兩塊小的土地面積和等於最大塊土地面積」（3-1-2-03），但雖然她自己這樣說出口，但在執行時卻用大塊面積加小塊面積求得錯誤答案（3-1-2-04）。而接著要算第二小題時要用到第一小題的數字開方，但因第一小題求出的錯誤數字無法開方，雖用正確的方式計畫（3-1-2-05），但運算出的第二小題面積數字很奇怪，這時才發現第一小題的面積大小誤用（3-1-2-06），才重新驗證並執行（3-1-2-07）出最後正確的答案。

圖 4-2-7-(1) 小愛池塘文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖										
讀題											
分析											
探索											
計劃											
執行											○成功
驗證											
時間(秒)	26	46	13	201	7	5	6	18	9	3	334

圖 4-2-7-(2) 小愛池塘圖文題解題歷程



從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，在小愛的文字題解題時間序列圖中，除了讀題部分，其餘都在分析、計畫與執行中循環，第一個循環（286 秒）是用數的商高定理公式做不出答案，第二個循環（18 秒）是用正確的面積商高定理做出正確的答案，第三個循環（30 秒）是用三角形面積公式求出第二小題的答案。而圖文題在分析完後，有兩次的計畫、執行的循環，第一次執行大小面積沒有弄清楚，再重新計畫後，第二次才更正回來。而文字題及圖文題都有執行加探索的階段，是因爲兩次都是在執行計算當中發現自己原先的錯誤，探索後找出正確的方法。文字題的解題總時間約是圖文題的 2 倍，主要的差別是在文字題的分析、執行加探索階段的差異所造成。

三、八邊形文字題---順利進行但執行錯誤

此題因爲圖容易畫出，因此分析及探索的部分主要是在想如何著手解題（3-0-3-02），後來小愛決定計畫先由等腰直角三角形邊長比例去著手（3-0-3-03），執行計算時，因爲都是根號及乘法公式的運算（3-0-3-04），運算上較爲繁雜，花了較多的時間在執行，但等腰直角三角形的面積應兩股相乘她卻只運算了一邊，最後雖有使用正確的面積切割方法計畫出正確的算式（3-0-3-05），但因剛才執行運算時等腰直角三角形的面積算錯，因此最後答案也是錯誤的。

八邊形圖文題---不需探索順利進行

小愛做這題還蠻順利的，讀題完後，就分析題目直接假設未知數，她仍計畫由等腰三角形邊長比例去著手（3-1-3-03），求出正確的邊長後，最後運用面積切割的概念，計畫整體最後的算式（3-1-3-05），因爲這題的數字沒有這麼繁雜，因此最後執行運算正確，解題成功。

圖 4-2-8-(1) 小愛八邊形文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖						
讀題							
分析							
探索							
計劃							
執行							╳失敗
驗證							
時間(秒)	17	37	12	71	12	8	157

圖 4-2-8-(2) 小愛八邊形圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖						
讀題							
分析							
探索							
計劃							
執行							○成功
驗證							
時間(秒)	14	14	9	16	26	29	108

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，解題的總時間文字題比圖文題多一些，主要的差別是在文字題的分析加探索、執行階段的差異所造成。分析加探索階段是因文字題要畫圖，因此花了一些時間在了解題意及畫圖，而文字題的執行階段時間較長，是因文字題這題的其中一個未知數，求出的是分數且帶有根號，因此花了較多時間在運算上。圖文題這題沒有經過探索階段，因爲小愛在分析完題目就可直接計畫列式執行。另外，小愛就算面對數字較繁雜的題目，仍沒有驗證的習慣。

四、直線距離文字題---未經探索順利進行

這題並不難，小愛在讀題加分析的階段即將題目敘述轉換成座標，但是她並沒有真正畫圖出來，只是一邊讀題一邊在腦海裡轉換，將最後轉換成的座標寫出來後（3-0-4-02），就直接計畫用距離公式（3-0-4-03），求出正確答案。

直線距離圖文題---不需探索簡短順利

小愛做這題時，讀題完後，也是直接分析並將文意敘述轉換成座標，標示在圖上（3-1-4-02），另外，很熟練的一邊計畫一邊執行，用距離公式算出正確的答案（3-1-4-03）。

圖 4-2-9-(1) 小愛直線距離文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖				
讀題					
分析					
探索					
計劃					
執行					○成功
驗證					
時間(秒)					
時間(秒)	17	53	16	12	98

圖 4-2-9-(2) 小愛直線距離圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖			
讀題				
分析				
探索				
計劃				
執行				○成功
驗證				
時間(秒)	15	36	33	84

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，因爲這題題目不難，因此解題所花的時間均沒有很多。而且無論是文字題或圖文題，都沒有經過探索階段，都是直接分析完後就可計畫執行。而文字題的讀題加分析階段花了較多時間，是因爲她並沒有真正畫圖出來，只是一邊讀題一邊在腦海裡轉換，才將最後

轉換成的座標寫出來，因此花了一些時間；而圖文題是直接將座標標示在圖上，花的時間較少。

五、纜車文字題---分析錯誤執迷不悟

小愛在面對文字題時，在分析階段能依照題意將圖畫出（3-0-5-02），但因差了 300 公尺的兩山山頂，高低相對位置畫得不是很明顯，因此沒有觀察出上方隱存的直角三角形，因此在探索時，用其他頂點連接成斜邊，企圖算出兩對角線的長度（3-0-5-04），想找出答案。但是因數字較大，花了很多時間在執行計算及分解上（3-0-5-05），而且因爲用的不是正確的解題方法，所求出的數字對答案也沒有幫助，最後宣告放棄。

纜車圖文題---錯誤探索但迷途知返

小愛在做圖文題時，雖有圖輔助，在分析階段將題目的數字標示於圖上後，一時仍找不出正確解題的方法。在探索時，企圖連接其他頂點（3-1-5-03），計畫算出兩對角線的長度（3-1-5-04），想找出答案。後來算出長度後，數字有點奇怪，又發現算出的對角線交叉應該不是直角，經過再次探索，換個方向去想。在觀察圖形一陣子之後（3-1-5-05），終於找出正確的解題方法，畫出輔助線，計畫運用圖形左上方隱存的直角三角形（3-1-5-06）來算，最後運用商高定理公式，求出正確答案（3-1-5-07）。

圖 4-2-10-(1) 小愛纜車文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						╳失敗
驗證						
時間(秒)	28	85	14	18	325	470

圖 4-2-10-(2) 小愛纜車圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
讀題	■							
分析		■						
探索			■		■			
計劃			■			■		
執行				■			■	
驗證								○成功
時間(秒)	37	32	56	116	58	30	30	359

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，小愛在文字題雖每個解題歷程都有，但是因為她未能分析、探索出一個正確的解題方法，而是用錯誤的方法去執行，因此最後發現解出來的數字與答案沒有關係，而宣告放棄。而小愛在圖文題，歷經兩次探索、計畫及執行的循環階段。第一次是用錯誤的方法算出沒有用的數字，第二次才用正確的方法算出正確答案。無論是文字題或圖文題，用錯誤的方法在計算執行時，都會在執行上花很多時間。

参、優秀且有驗證習慣的的小淨

第三個學生小淨頭腦很清楚，文字題或圖文題大體上來說都難不倒她，解題歷程都還蠻順利，她只有一題圖文題因對根號運算沒有信心而解題失敗。

一、足球場文字題---穩紮穩打中順利進行解題

小淨面對文字題也頗有信心，第一次讀題完後，後來再讀題一次並仔細分析時，她可以判斷有用及無用資訊，屏除原始足球場面積分割的無用資訊。因此她探索著把圖畫出來時，只用了正確及有用的資訊（1-0-1-03），並且成功的把圖形畫出來。後來用面積保留的概念計畫列式，最後解題成功。

足球場圖文題---跳躍式的階段進行

小淨在讀題完後，一邊看圖，很快的可以了解題意，並從圖中找出面積保留的關鍵解題概念，因此她馬上計畫說「我要用面積去求它們的關係」（1-1-1-02），

之後仔細的分析圖：「大正方形的面積等於這四個直角三角形面積，再加上中間的正方形」（1-1-1-03）。在用正確的觀念分析完後，小淨即把等式列出，很快的求得三邊長的正確關係。只是，因爲求出的是三邊長平方的關係，與題目要求的三邊長關係文字敘述上不相同，因此她不確定是否就是答案，遲疑驗證了三秒鐘才寫答。這也是數學課程改革後，學生較不熟悉證明題寫法所發生的狀況。

圖 4-2-11-(1) 小淨足球場文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						〇成功
驗證						
時間（秒）	59	63	68	22	20	232

圖 4-2-11-(2) 小淨足球場圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						
驗證						〇成功
時間（秒）	57	10	29	25	3	124

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題解題花的總時間只有文字題的 53%。小淨在做圖文題時，因有圖的輔助，因此在讀完題後，即可直接計畫正確解題的方法，而沒有經過探索的過程。而雖然文字題花了較多的時間在讀題、分析及探索階段，但小淨她按部就班，穩定的一步驟一步驟做下來，也終究能解題成功。

二、池塘文字題---不需探索順利進行

小淨面對題意並不難的文字題，能有條理的分析題意，將圖畫出（1-0-2-02），

並直接計畫運用面積的商高定理概念將等式列出，「所以 b 平方就會等於 3721 減掉 121」（1-0-2-03），而求得正確的面積答案。第二小題也能有條理的再次計畫三角形面積的算法（1-0-2-05），執行計算出正確的答案並驗算。

圖文題---略過分析大步向前嚐到苦頭

小淨在做這個題目時，起初就先計畫使用數的概念來解題--「我要先求這兩個正方形的邊長」（1-1-2-02），因此她花了許多時間將大面積數字開方成邊長（1-1-2-03）。後來當數字無法開方出來時，她嘗試用鄰近的數 40、43 去探索答案（1-1-2-04），終於求得所要的兩股長度。而後來又將邊長平方成題目要求的面積時，小淨突然笑了出來，知道自己剛才的費心開方其實是不需要的（1-1-2-06），領悟出其實應該早可以用面積的概念去做。而第二小題她也能直接用公式執行出正確的三角形池塘面積並加以驗證（1-1-2-08）。

圖 4-2-12-(1) 小淨池塘文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
讀題								
分析								
探索								
計劃								
執行								
驗證								○成功
時間(秒)	37	35	28	11	21	12	32	176

圖 4-2-12-(2) 小淨池塘圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖								
讀題									
分析									
探索									
計劃									
執行									
驗證									○成功
時間(秒)	25	10	64	33	26	20	45	28	251

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題解題花的總時間比文字題多，主要原因是因為小淨在做圖文題時，先使用數的商高定理概念來解

題，因此她花了許多時間在執行及探索，將大面積數字開方成邊長，但她後來有發現其實不須這麼麻煩，可以直接從面積去做。而小淨在做文字題時，即能夠很有條理的直接用面積的概念來解題，因此並沒有經歷探索的階段，而兩小題皆能直接分析完後計畫執行成功。

三、八邊形文字題---不需探索順利進行

小淨面對文字題，在分析時可以將正確的圖畫出並初步找出解題方法「正方形減去四個相同的等腰直角三角形」（1-0-3-02），她計畫用商高定理公式，先解出其中一段關鍵性的邊長（1-0-3-03），這題的數字並沒有太複雜，因此她能解出正確的未知數（1-0-3-04）。之後，再用切割的方式「八邊形的面積還要減掉四個三角形」計畫列出所求出面積的等式（1-0-3-05），並運用方根的計算及乘法公式，成功將答案算出，並加以驗算。

八邊形圖文題---讀題、分析、探索、執行不斷循環

小淨讀題完，看著圖分析一陣子之後，假設某一邊長爲未知數，想先解出此關鍵性的邊長，但因所算出來的數字分母爲無理數，必須有理化，而小淨因覺得此數字怪怪的，認爲可能是錯的，因此沒有先將其有理化（1-1-3-02）。面對一個帶有根號的分數，小淨開始顯得沒有信心，又再回去讀題一次（1-1-3-03），後來用正確的用切割的方式「5+2x 平方，剪掉四個直角三角形的面積」（1-1-3-04），分析出解題的方法，也列出正確的算式，只是因爲之前解出的邊長一直沒有有理化，不敢代進算式去算，只得又陷入分析及探索階段，並再次讀題，可能因對根號心生畏懼，覺得自己有解錯，一再的分析、探索想找出其他解題方法，終而無法算出任何數字，解題失敗。

圖 4-2-13-(1) 小淨八邊形文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
讀題	■							
分析		■						
探索								
計劃			■		■			
執行				■		■		
驗證							■	○成功
時間(秒)	26	60	17	38	32	32	67	272

圖 4-2-13-(2) 小淨八邊形圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖											
讀題	■			■				■				
分析		■			■		■				■	
探索			■				■		■		■	╳失敗
計劃												
執行			■			■				■		
驗證												
時間（秒）	18	42	40	27	30	48	70	24	40	85	68	492

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題解題花的總時間比文字題多，但此與題目表徵應無關係。主要原因是因為小淨在做圖文題時，沒有先將其解出的邊長未知數有理化，面對一個帶有根號的分數，小淨變得沒有信心，雖然她第一次執行的數字算對，只是沒有有理化，但她認為可能是自己算錯，才會出現奇怪的數字。因此第二次執行，將八邊形面積算式列出來，之後就不斷的在分析及探索的階段中循環，終致未算出最後答案而解題失敗。而小淨在面對文字題時，可能因數字較圖文題簡單，根號運算沒有太複雜，因此她很有條理的在分析完後，經歷兩次的計畫、執行階段，分別把關鍵的邊長及最後的八邊形面積正確的求出，經驗算後解題成功。

四、直線距離文字題---不需探索順利進行

這題比較簡單，因此小淨在分析時，並未畫出圖，而是將座標直接寫出

（1-0-4-02），之後找出解題關鍵字「直線距離」（1-0-4-03），因此用距離公式直接執行算出答案，只不過答案又是無理數，因此她又讀題一次，怕自己哪邊有看錯，再經數字驗算過後，解題成功。

直線距離圖文題---不需探索順利進行

小淨在做這題時，分析完後即將座標標示在圖上（1-1-4-02），「直線距離，直線距離」，她重複著唸著關鍵的字句，之後熟練的計畫用直線距離公式（1-1-4-03），算出正確答案。面對無理數的答案，小淨又花了一些時間驗證，終於解題成功。

圖 4-2-14-(1) 小淨直線距離文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖						
讀題							
分析							
探索							
計劃							
執行							
驗證							○成功
時間(秒)	24	30	15	38	6	24	137

圖 4-2-14-(2) 小淨直線距離圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						
驗證						○成功
時間(秒)	22	27	27	25	37	138

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題解題花的總時間與文字題相差不大。而且因題目較為簡單，解題階段的順序差不多，均沒有經歷探索階段。而另外也可得知，小淨在面對有根號數字計算的題目時，都會做驗證的動作。

五、纜車文字題---成功又簡短的解題歷程

小淨在做文字題時，讀題完後，一邊分析一邊將圖畫出，只是當她從自己畫的圖中尚未找出解題方法時，她回頭再看了題目文字敘述，發現要求「線段長」的關鍵字句（1-0-5-02），因此她計畫用座標的方法用直線距離公式求答案，一邊分析出各頂點的座標，一邊將距離公式列出求出答案（1-0-5-03），最後終於解題成功。

纜車圖文題---跳躍式的階段進行

小淨做這題時，因有圖的輔助，因此能夠很快了解題意。在分析時，直接在題目中找出解題的關鍵字句「直線距離」（1-1-5-02），因此決定計畫用「座標來解題」（1-1-5-03）。之後將座標標示在圖上，分析並確認做法無誤後（1-1-5-04），最後執行出正確答案，只是因數字有點大，計算上花了一些時間。

圖 4-2-15-(1) 小淨纜車文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖				
讀題					
分析					
探索					
計劃					
執行					○成功
驗證					
時間(秒)	42	90	59	97	288

圖 4-2-15-(2) 小淨纜車圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					
讀題						
分析						
探索						
計劃						
執行						○成功
驗證						
時間(秒)	50	16	10	39	156	271

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題解題花的總時間

與文字題相差不大。但其中在做文字題時，因一時找不出適當的解題方法，因此花了較多的時間在讀題、分析及探索上，但等找出正確的方法後，就能順利的計畫並解題成功；而圖文題因爲有圖的輔助，因此在分析上所花的時間較少。但因爲這題數字較大，而且小淨是採取用座標的方式來解題，無法用縮小比例去運算，因此無論是文字題或圖文題，在執行計算的時間都相對較多，但因最後答案是整數，因此小淨最後均沒有做驗證的動作。

肆、靠印象解題的小聰

第四個學生小聰，只要將自己正在進行的步驟唸出來的話，就會較無法思考，因此，就算研究者在旁時時提醒小聰將自己的思考說出來，他也常是無聲在思考分析、探索。小聰他第一次是做圖文題，但可能是因有點緊張，加上對商高定理有點遺忘，因此錯了四題；但第二次做文字題時因爲已有放聲思考的經驗，心情較爲沉穩，因此只做錯兩題。

一、足球場文字題---讀題、分析反覆來回

小聰是先做圖文題，因此他可能對之前所做過的文字題題意還稍有點印象。因此他在讀題階段，唸到一半就開始畫圖，圖畫了一半才又回去讀下半段的題目，待整個題目讀題完後，他花了許多時間仍無法分析將完整的圖畫出（4-0-1-04）。因此他又回去讀題目，並一邊探索著重新畫一個圖，試圖求出三邊的關係。後來小聰說：「啊，我知道了」，發現可以直接從直角三角形三邊的關係看出答案（4-0-1-06），但馬上又查覺這樣沒有證明過程可以寫，因此他又回去讀題目，並花了相當長的時間無論從圖形，或嘗試從一些計算式中，分析探索著如何接近答案（4-0-1-08）。後來，小聰又畫了第三個圖，將原來的體育場面積配置及變更後的配置分兩個圖形分開畫（4-0-1-09），以求更清楚它們的關係，也因此雖然仍不是正確的圖形，但因他分開畫之後，更清楚兩個面積的關係，因此終於用面積保留及拼補的概念（4-0-1-10），將式子列出並化簡，解題成功。

足球場圖文題---探索、執行反覆來回

小聰在做這題時，讀題完後，看圖分析了一陣子，大概了解粗略的題意後，「我回去看一下題目」，又再回去讀題（4-1-1-03），以將剛才看的圖，再與文字做連結。後來終於將整個題目的意思弄清楚後，即計畫用面積保留的概念列式---「這個正方形的面積，等於四塊嘛，再加上 c 的正方，兩個會相等」（4-1-1-04），只是，當他在列式時，可能是之前讀題分析花了一些時間，心意有點煩亂，居然在執行時，把三角形面積中的底乘以高，誤寫成底加上高（4-1-1-04），因此雖然解題觀念正確，但因列式錯誤，因此無法從等式中化解出三邊長的關係（4-1-1-05），錯誤的式子只好用因式分解的方法化簡成一個整理過的式子（4-1-1-06），但對答案是沒有幫助的，最後終致放棄解題失敗（4-1-1-07）。

圖 4-2-16-(1) 小聰足球場文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖											
讀題												
分析												
探索												
計劃												
執行												○成功
驗證												
時間(秒)	15	33	67	128	322	64	55	321	155	30	17	1207

圖 4-2-16-(2) 小聰足球場圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
讀題								
分析								
探索								╳失敗
計劃								
執行								
驗證								
時間(秒)	70	29	96	70	20	27	25	337

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，文字題解題花的總時間約是圖文題的 3.6 倍。主要是文字題因沒有圖，小聰需要花很多的時間在讀題及分析上面，才能明瞭題意並將圖畫出。因此在前段時間，小聰大概都在讀題及分

析的階段打轉。後來在經過兩次的探索後，畫出兩個面積的關係圖，終於找出解題的關鍵而成功。反觀圖文題，不用花很多的時間去讀題分析，只需好好將文字敘述與圖形配合在一起即可，小聰也能找到解題的方法，只是因第一次對這種類型的題目較陌生，列式時出錯，造成解題失敗，而小聰在圖文題也有兩次探索的往返，只是這兩次的探索並非未找到解題方法而思索，而是因其用正確方法但列式錯誤後，在找尋哪裡發生錯誤。

二、池塘文字題---不需探索順利進行

這題小聰讀題完後，即可以正確的將圖形畫出，而且在面積的大小配置上也正確（4-0-2-02）。在稍微想了一下之後，就直接計畫用面積的商高定理公式將式子列出（4-0-2-03），正確解出第一小題。後來也熟練的計畫第二小題並執行出正確的面積答案。

池塘圖文題---略過分析、探索大步向前

小聰面對有圖形的圖文題時，相較於第一題下，覺得很簡單，一邊讀題即可一邊分析，大面積數字也因爲曾經背過，不需分解計算即可背出開方後的數字。因此在大意下，執行時將邊長與面積概念混爲一談，先將面積均開方成邊長（4-1-2-02），用邊長平方和的概念列式（4-1-2-03），卻在平方與根的概念混淆之下，算出其實是面積，但他卻以爲是邊長，因此後來將已求出的面積誤當做邊長，又再平方（4-1-2-04），導致解題失敗。而第二小題雖然計畫的面積公式正確，但因第一小題的邊長算錯因而列式錯誤（4-1-2-05），第二小題仍解題失敗。

圖 4-2-17-(1) 小聰池塘文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
讀題								
分析								
探索								
計劃								
執行								
驗證								○成功
時間(秒)	33	39	26	22	18	6	8	152

圖 4-2-17-(2) 小聰池塘圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖						
讀題	■						
分析	■						
探索							
計劃			■		■		
執行		■		■		■	╳失敗
驗證							
時間(秒)	33	25	19	44	20	18	159

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看,兩種題型花的總時間差不多。但是圖文題因爲有圖的輔助,因此小聰在讀完題後,即可直接在計畫及執行中循環,不需經過分析及探索階段,只是他邊長與面積的概念弄混,因此解題失敗。而這題文字題對小聰來說雖不難,但仍須經過分析的階段,才能正確將圖畫出,而經過兩次的計畫執行,將兩小題正確解出後,最後解題成功。

三、八邊形文字題---順利解題但執行錯誤

小聰讀題完後,不難將圖畫出。在探索思考了一陣子後,決定計畫用等腰直角三角形的邊長比例去求出邊長,但小聰居然背出錯誤的 1:1:$\sqrt{3}$(4-0-3-04),他雖然有遲疑了一下,但也沒有驗證,就用錯誤的比例去執行。後來他用正確的面積切割方法來算面積,只是之前算出的邊長數字是帶有根號的分數(4-0-3-05),列出的算式看起來有點複雜,因此他開始有點沒信心,因此又回去看圖並探索還有沒有其他的解題方法(4-0-3-06)。最後,它選擇原來正確面積切割的方法去算,只是之前因爲用錯誤的比例,因此邊長錯誤,計算複雜之下,最後執行竟只算了大正方形面積,忘了減掉四個三角形角落,最後解題失敗。

八邊形圖文題---讀題、分析、探索的反覆來回

小聰在讀題完後,再一次的看圖及文字分析,因這題雖然有附圖,但圖中並未暗示解題的關鍵方法,必須靠學生自己思考。後來他探索著將八邊形分割,想使用分割的方式求出八邊形面積(4-1-3-03),但因無法求出任何數字,後來就思

考換個方法，用正確的正方形面積切割的概念去解題。重新讀題一次後（4-1-3-05），開始假設未知數列式，但是因爲他把正方形邊長與八邊形邊長混淆，導致列式產生錯誤（4-1-3-06），也因此一直探索分析，仍無法用商高定理公式將未知數求出（4-1-3-08），最後他雖然花了許多時間在讀題及分析（4-1-3-09），但一直未能看出自己將邊長混淆的錯誤，最後只好放棄，因此解題失敗。

圖 4-2-18-(1) 小聰八邊形文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
讀題	■							
分析		■				■		
探索			■			■		
計劃				■				
執行					■		■	╳失敗
驗證								
時間(秒)	15	18	31	27	24	88	76	280

圖 4-2-18-(2) 小聰八邊形圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖									
讀題	■				■				■	
分析		■		■					■	╳失敗
探索			■	■				■		
計劃						■				
執行							■			
驗證										
時間(秒)	20	133	51	188	104	79	16	139	189	919

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題與文字題解題所造成的時間差異，應該不是題目表徵的關係。因爲這題圖文題雖有附圖，但圖中並未暗示解題的關鍵方法；而做文字題時，小聰也有將正確的圖畫出，而且小聰做這兩題時，均有使用正確的解題方法解題，因此此時間的差異應是小聰本人個人的因素。他在圖文題時，第一次的分析探索是嘗試錯誤的方法，第二次的分析探索才找出正確的解題方法，但他把正方形邊長與八邊形邊長混淆，也因此一直無法用商高定理公式將未知數求出，因此花了多數的時間在讀題、分析及探索的階段，最後算不出來而解題失敗。但在文字題時，他是因爲邊長比例背錯導致算

出錯誤的答案，但解題過程還算蠻順利的，並沒有花特別多時間在哪個階段，而最後的探索分析階段，只是因對數字有點奇怪，想去嘗試看看是否有其他的解題方法。

四、直線距離文字題---計畫、執行反覆循環

小聰讀題完，很快的將相關位置正確畫出（4-0-4-02），並將座標標上去。但他找出兩個點座標後，是計畫用一次函數的方法來執行解題（4-0-4-03），假設一次函數的標準式，將兩點座標代入（4-0-4-04），但求出的標準式係數均爲分數，因此覺得有點奇怪。後來再經讀題分析後，發現「直線距離」這幾個解題的關鍵字（4-0-4-05），因此改用商高定理直線距離公式，算出正確答案（4-0-4-07）。但因爲算出的是無理數，小聰又開始遲疑了，經驗算之後，覺得自己公式可能用錯，兩點座標應該是相加而不是相減，因此又重新執行了一遍，但算出的仍是個無理數，只是數字較小，此時，小聰無助的說「那個公式到底是什麼啊?」，最後他選擇使用錯誤的公式算出的答案，解題失敗。

直線距離圖文題---不需探索簡短順利

小聰面對這題時覺得很簡單，一邊讀題就一邊分析，並把數字標示在圖上，沒有經過探索階段，之後即找到解題方法，計畫用座標的方式來做（4-1-4-02），使用正確的距離公式將答案正確執行成功（4-1-4-03）。

圖 4-2-19-(1) 小聰直線距離文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖											
讀題	■				■							
分析		■			■							
探索											■	
計劃			■			■			■			
執行				■			■			■		
驗證								■			■	╳失敗
時間(秒)	21	32	37	90	45	34	19	18	23	11	12	342

圖 4-2-19-(2) 小聰直線距離圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖			
讀題	■			
分析	■			
探索				
計劃		■		
執行			■	○成功
驗證				
時間(秒)	63	32	45	140

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，圖文題與文字題解題所造成的時間與歷程的差異，也應該不是題目表徵的關係，因爲小聰在做文字題時，也能順利的將圖畫出，所以時間的差異應是小聰個人的因素。從文字題的解題歷程圖看出，小聰做這題時，經歷過三次的計畫、執行階段。第一次是用一次函數的方法試圖把直線方程式求出，但發現不是題目要求的；第二次改採正確的距離公式，但因對算出的數字沒有信心；第三次改成錯誤的距離公式，算出錯誤的答案。而小聰在做圖文題時，顯然當時能馬上抓住題目的意思並也熟練距離公式，並沒有背錯，最後能夠順利的將正確答案算出。而無論是圖文題或文字題，小聰只有在文字題時因忘了正確的距離公式，而去思索正確的公式應該是什麼，除此之外都沒有經歷探索階段。

五、纜車文字題---錯誤嘗試但迷途知返

小聰做這題時，也能夠依照題意分析將大致的圖畫出（4-0-5-02）。之後，他畫了兩條輔助線，計畫用兩次的斜邊長將答案求出，後來發現數字不好算，可能不是正確的方法，因此又回去讀題一次，「再畫一次圖」（4-0-5-05），第二次只做一條輔助線，並將算式簡化（4-0-5-06），但是初步執行出來的數字有點奇怪，因此小聰也覺得不對，又再一次的探索新的方法。最後終於畫出正確的輔助線，找到關鍵的直角三角形（4-0-5-09），並計畫運用商高數組放大縮小的概念，正確的把答案算出，解題成功。

纜車圖文題---計畫、執行反覆來回

小聰在做這題時，經分析後，他計畫算出兩次的斜邊長，來求得答案（4-1-5-02），但其實他使用的是錯誤的三角形，第二個三角形其實不是直角三角形（4-1-5-06），但他仍嘗試算出此兩條對角線的數字，最後因數字太大又分解不出來（4-1-5-07），小聰開始覺得奇怪，因此換個方向去想，再一次分析圖之後，終於找出圖右上方隱存的直角三角形，在畫出輔助線並標示長度後（4-1-5-08），計畫運用數的商高定理公式想求出答案（4-1-5-09），但因他未利用商高數組放大縮小的概念，而是用原始數字去算，最後因數字較大，開根號時分解錯誤（4-1-5-10），最後解題失敗。

圖 4-2-20-(1) 小聰纜車文字題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖										
讀題	■			■							
分析		■	■		■						
探索			■					■			
計劃						■			■		
執行							■			■	○成功
驗證											
時間(秒)	39	68	112	45	40	25	70	79	22	69	569

圖 4-2-20-(2) 小聰纜車圖文題解題歷程

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖											
讀題	■											
分析		■						■				
探索					■							
計劃			■			■			■			
執行				■			■			■		
驗證											■	╳失敗
時間(秒)	35	42	26	30	57	14	200	23	39	113	15	594

從上述兩個文字題及圖文題的解題歷程及時間來看，總體解題時間差不多，解題歷程也有些類似。大致上無論是圖文題或文字題，小聰都先嘗試求出兩次的斜邊長的方法，來求得答案，因此都經歷了兩次錯誤的分析、計畫、執行階段，而且都在執行階段時因算出的數字較奇怪，而重新找尋新的解題方法。最後，小

聽也都有找出正確的解題方法，只是，在圖文題時，小聰因開根號分解時分解錯誤，因此解題失敗，而文字題則有運用商高數組放大縮小概念，數字較小而計算正確。

伍、綜合分析

綜合四位學生在文字題及圖文題的解題歷程，做以下四點結論：

下表爲根據 Schoenfeld 六階段時間序列圖的各階段時間分配做統計。

一、文字題及圖文題在解題六階段的時間分佈

表 4-2-1 四位學生文字題及圖文題在解題六階段的時間分佈

階段 / 表徵	讀題	分析	探索	計畫	執行	驗證	總計
文字題	1427	2302	1219	580	1393	176	7097
圖文題	1075	1079	845	729	1796	330	5854

單位（秒）

1. 學生在做文字題時，在「讀題」所花的時間，是做圖文題所花時間的 1.3 倍。
2. 學生在做文字題時，在「分析」所花的時間，是做圖文題所花時間的 2.1 倍。
3. 學生在做文字題時，在「探索」所花的時間，是做圖文題所花時間的 1.4 倍。
4. 學生在做文字題時，在讀題、分析、探索三個階段所花的時間，是做圖文題時在此三個階段所花時間的 1.6 倍。
5. 學生在做文字題時，在讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證六個階段所花的總時間，是做圖文題時在六個階段所花時間的 1.25 倍。
6. 學生在做文字題時，在讀題、分析、探索三個階段所花的時間，佔文字題解題總時間的 70%。
7. 學生在做圖文題時，在讀題、分析、探索三個階段所花的時間，佔圖文題解題總時間的 50%。

8. 學生在做圖文題時，在「計畫」所花的時間，雖然較文字題多，但其大部分的原因是有些學生在文字題題目中，因沒有清楚了解題意，在分析及探索階段徘徊，而無法進入到計畫階段。
9. 學生在做圖文題時，在「執行」所花的時間，雖然較文字題多，是因爲圖文題及文字題的數字是不同的，因此其執行的時間有時需視數字的難易而定。
10. 學生在做圖文題時，在「驗證」所花的時間，較文字題多，其原因是因爲題目中有正確的圖形可以方便一邊看圖一邊驗證，而在文字題中，有時因沒有正確圖形可以幫助檢視，而略過驗證階段。

二、文字題及圖文題在解題六階段的使用情形

下表爲 4 位學生在 5 題題目中，在文字題及圖文題的解題過程，經歷每一個解題階段的題數。

表 4-2-2　4 位學生文字題及圖文題在解題六階段的使用情形

階段 表徵	讀題階段	分析階段	探索階段	計畫階段	執階段行	驗證階段
文字題	20	20	14	18	19	7
圖文題	20	20	11	19	20	7

單位（題）

1. 學生無論在做文字題或圖文題，均有經歷讀題及分析階段，但其最明顯的差別是在探索階段，文字題共有 14 題有經歷探索階段，而圖文題只有 11 題有經歷探索階段。顯然圖文題因有圖輔助，在解題過程中因較了解題意，有形成較適當的問題表徵，而不需要經歷探索階段就進行解題。
2. 學生在做圖文題時，有經歷計畫與執行階段的題數，均較文字題多一題，是因有些學生在文字題題目中，沒有清楚了解題意，而無法進入到計畫階段。

三、文字題及圖文題在解題六階段往返次數分佈

解題階段往返(次)指學生的解題過程，依照 Schoenfeld 解題六階段劃分，在某一題的解題過程中，學生重覆（第二次）某一解題階段的次數。如某一解題階段出現第二次爲往返次數 1，出現第三次爲往返次數 2，學生在 5 題題目中的各解題階段往返的累積即爲解題階段往返次數。

表 4-2-3 四位學生文字題及圖文題在解題六階段往返次數分佈

階段／表徵	讀題	分析	探索	計畫	執行	驗證	總計
文字題	14	21	6	9	11	2	63
圖文題	8	9	10	10	20	1	58

單位（次）

1. 總體來說，學生在做文字題時較圖文題容易在解題階段往返。
2. 學生在做文字題時，共有 14 次再次回到讀題階段、共有 21 次再回到分析階段；圖文共有只有 8 次回到讀題階段、共只有 9 次再回到分析階段。顯然學生在做文字題時，因較不理解題意，常需往返讀題及分析階段。
3. 有些圖文因較容易了解題意，會在探索及執行階段中往返，以期求得正確答案；但有些文字題因學生沒有往返探索，而使用錯誤的解題方法而解題失敗，或甚至沒有到執行階段而解題失敗。

四、解題成功失敗統計表

下表爲根據 4 位學生在 5 題題目的作答對錯情況予以統計。

表 4-2-4　4 位學生解題成功失敗統計表

學生 / 表徵	題號	小諺	小愛	小淨	小聰	答對率
文字題	1	╳	╳	○	○	60%
	2	○	○	○	○	
	3	╳	╳	○	╳	
	4	╳	○	○	╳	
	5	○	╳	○	○	
圖文題	1	○	○	○	╳	65%
	2	○	○	○	╳	
	3	╳	○	╳	╳	
	4	○	○	○	○	
	5	╳	○	○	╳	

1. 從上表可知，文字題 20 題中有 8 題答錯，圖文題 20 題中有 7 題答錯，圖文題的答對率比文字題稍高一些。但是，在圖文題答錯的 7 題中，其中有 2 題解題方法及列式正確，是屬純粹的計算錯誤。在文字題答錯的 6 題中，有 3 題的解題失敗主要是受到題目表徵的影響。
2. 學生在解題時，文字題錯而圖文題對的共有 6 題。圖文題錯而文字題對的共有 4 題。

第三節　兩種表徵題的能力指標概念及 Schoenfeld 階段交叉分析

本節分成兩大部份，第一個部份是以 4 位學生爲主，第二個部份是以三種題目類型爲主，均是探討兩種表徵題的能力指標概念、Schoenfeld 階段與答對題數的關係。

一、四位學生解題使用概念及階段往返與答對題數的關係

本節第一個部份，是分 4 位學生來看，將第一節的學生解題概念與第二節的解題歷程階段做交叉分析，有以下的發現（表 4-3-1）。解題使用概念(次)指學生在解題過程中有使用到的數學概念，使用某一概念一次即爲次數 1，學生的多種數學概念在 5 題題目中所呈現的即爲累積使用概念的次數（詳見表 4-1-1）。解題階段往返(次)指學生的解題過程，依照 Schoenfeld 解題六階段劃分，在某一題的解題過程中，學生重覆（第二次）某一解題階段，如某一解題階段出現第二次爲往返次數 1，出現第三次爲往返次數 2，學生在 5 題題目中的各解題階段往返的累積即爲解題階段往返次數。

表 4-3-1 四位學生解題使用概念及階段往返與答對題數的關係表

學生 / 解題相關	小諺		小愛		小淨		小聰	
	文字	圖文	文字	圖文	文字	圖文	文字	圖文
解題使用概念(次)	16	15	15	17	20	16	18	8
解題階段往返(次)	19	14	9	9	9	15	26	20
答對題數(題)	2	3	2	5	5	4	3	1

從上表可知，在解題過程中，數學概念使用的最多，且在解題六階段中往返次數最少的，其解題過程較爲順利，其答對題數會是最多的。說明如下：

1. **答對題數最多的，其概念使用次數最多、往返次數最少：**在做圖文題時，小愛的概念使用的最多、解題階段往返的次數最少，其答對題數也是最多的；在做文字題時，小淨的概念使用最多、往返的次數最少，其答對題數是最多的。
2. **答對題數最少的，其概念使用次數最少、往返次數最多：**相對的，在做圖文題時，小聰的概念使用的最少、解題階段往返的次數最多，而其答對題數也

是最少的；在做文字題時，小諺及小愛兩人的數學概念使用是最少的，往返的次數小諺較多，而此兩人答對題數也是最少的。

3. 上述的發現中，有一個例外是小諺及小愛在文字題的解題階段往返(次)上。小愛雖然答對題數最少，其數學概念使用最少，但解題階段往返的次數也是最少的。小愛往返次數少的原因是因爲她用錯誤的方法解題失敗，也不會一直往返解題階段看自己到底哪裡出錯，而直接放棄，因此階段往返的次數不如他人多。另一位學生小諺，雖然答對題數也是最少，其數學概念使用的少，但解題階段往返的次數卻也不如小聰多，主要是階段往返的次數最多的小聰，因爲他第一次做圖文題的表現不佳，因此做第二次的文字題時很努力的在各階段往返，以驅策自己一定要正確解題。綜合上述，學生在解題階段往返(次)上，也需參雜學生的解題意願強弱在內。

4. 研究者將學生解題概念及解題歷程階段，與答對題數做交叉分析，發現無論在圖文題或文字題，有以下的規則。除了上述小諺及小愛在文字題的解題階段往返(次)之外。

表 4-3-2 四位學生解題使用概念及階段往返與答對題數的規則表

<table>
<tr><th rowspan="2">學生
解題相關</th><th colspan="3">文字題</th><th colspan="2">圖文題</th></tr>
<tr><th>小淨</th><th colspan="2">小諺及小愛</th><th>小愛</th><th>小聰</th></tr>
<tr><td>答對題數(題)</td><td>最多</td><td colspan="2">最少</td><td>最多</td><td>最少</td></tr>
<tr><td>解題使用概念(次)</td><td>最多</td><td colspan="2">最少</td><td>最多</td><td>最少</td></tr>
<tr><td>解題階段往返(次)</td><td>最少</td><td>較多</td><td>最少</td><td>最少</td><td>最多</td></tr>
</table>

二、在「形」、「面積」、「數」三類型題目下解題使用概念及階段往返與答對題數的關係

本節第二個部份，是分三種類型題目來看，將第一節的學生解題概念與第二節的解題歷程階段做交叉分析，有以下的發現（表 4-3-2）。

表 4-3-3 三類型題目下解題使用概念及階段往返與答對題數的關係表

題型 解題相關	「形」的題目		「面積」的題目		「數」的題目	
	文字	圖文	文字	圖文	文字	圖文
解題使用概念(次)	14	13	16	11	39	32
解題階段往返(次)	14	7	15	12	34	39
答對題數(題)	2	3	4	3	6	7

1. **從解題階段往返次數來看，「形」與「面積」兩類型題目，文字題的往返次數均較圖文題多。文字題與圖文題的往返次數差異在「形」的題目最大，而「數」的題目次之，最後是「面積」的題目。**三類型題目分述如下：

(1) **在「形」的題目中，題目表徵差異對學生在階段往返次數的影響最大：**這個結果顯示，對學生來說，在「形」的題目中，文字題較圖文題困難，需要往返各階段才能順利解題，因此，文字題階段往返次數較圖文題多。

(2) **在「數」及「面積」的題目中，題目表徵差異對學生在階段往返次數的影響較小：**在「數」及「面積」的題目中，文字題與圖文題的往返次數差異較小，顯示在這兩類型題目，學生較可以從文字敘述中瞭解題意，而且從文字敘述中畫圖也不困難，因此不需一直往返各階段，題目表徵的差異對學生來說影響較小。在「數」的題目中，圖文題的往返次數較文字題多，是因爲學生在圖文題確定的圖中，會一直往返以期求得正確答案。

2. **從解題使用概念來看，無論是「形」、「面積」、「數」三類型題目，文字題的使用概念均較圖文題多**。依照三類型題目分述如下：

(1)**「形」的題目中，題目表徵差異對學生在使用解題概念次數的影響最小：**從上表可知，在「形」的題目中，學生在解文字題時較圖文題在解題概念次數上，共只多 1 次，但是，學生在兩種表徵題使用概念數量上雖然差不多，其概念的種類是有差別的。學生在解文字題時需要較多樣的幾何概念才可

畫出圖形；而學生在解已畫好圖的圖文題時，只需要少樣的幾何概念以能從圖形中看出端倪。並且，就算文字題與圖文題均有使用到同一個數學幾何概念，但在文字題中學生需對此概念有較深入的瞭解才能畫圖解題，而圖文題只需知道此概念並可在圖中找出即可。另外資料顯示，概念的次數差異不大，是因文字題答對人數較圖文題少，解題失敗學生沒有正確使用數學概念，而導致文字題在使用概念的數量上受到影響。

(2)**「面積」、「數」的題目中，題目表徵差異對學生在使用解題概念次數的影響較大：**從「面積」、「數」兩類型題目來看，因文字題都需要額外的幾何概念才可將圖形畫出，因此所需要的解概念均較圖文多，但這些幾何概念與真正解題所需用到的概念是沒有關係的。

3. **從答對題數來看，圖的輔助對學生解題是有幫助的：**「形」的題目及「數」的題目都是圖文題答對數較多，顯然有圖的輔助對學生解題是有幫助的。「面積」的題目雖然文字題較圖文題多答對一題，差異是在小聰，但小聰池塘圖文題的解題失敗，是因其商高定理中「面積」與「數」的概念混淆而導致解錯誤，不是因爲題目表徵的關係。

綜合以上 3 點，研究者分三類型題目，將題目表徵對學生解題概念及解題階段往返，與答對題數的影響，做以下的整理。

表 4-3-4 三類型題目下題目表徵對解題使用概念及階段往返與答對題數的影響

解題相關 \ 題型	「形」的題目	「面積」的題目	「數」的題目
解題使用概念(次)	題目表徵影響小	題目表徵影響大	題目表徵影響大
解題階段往返(次)	題目表徵影響大	題目表徵影響小	題目表徵影響小
答對題數(題)	題目表徵有影響	題目表徵無影響	題目表徵有影響

第五章　結論與建議

本章目的在將本研究做一整體性的描述，並歸納研究結果做出結論，以提供教學與未來研究之參考。本章共分成兩節，第一節爲根據研究目的所做的結論，第二節爲建議。

研究者將本研究的研究結果分成題目種類與題目表徵對解題概念及解題時間序列的影響，分兩個表格來呈現：

表 5-1-1 在三類型的題目中，不同表徵題對解題概念及解題歷程階段往返的差異與影響

解題相關／題型	解題概念種類	概念使用次數	Schoenfeld 解題階段往返
「形」的商高定理題目	**異**（文字題使用的概念種類較深）	**同**	**差異大**（文字題在解題階段往返次數多）
「面積」的商高定理題目	**同**（除文字題需畫圖的概念外，其餘解題概念相同）	**異**（文字題多 1 個畫圖幾何概念）	**差異小**
「數」的商高定理題目	**同**（除文字題需畫圖的概念外，其餘解題概念相同）	**異**（文字題多 1 個畫圖幾何概念）	**差異小**

表 5-1-2 不同表徵題對解題概念及解題歷程階段往返及時間的差異與影響

解題相關／不同表徵	解題概念種類	概念使用次數	解題階段往返	解題總時間	答對題數
文字題	多	多	多	多	少
圖文題	少	少	少	少	多

第一節 結論

本研究的主要待答問題有二：探究國二學生在在面對文字題及圖文題時，商高定理單元中「形」、「面積」、「數」三類型題目的數學概念展現爲何？及根據 Schoenfeld（1985）數學解題六階段，此四位學生在面對文字題及圖文題時的解題歷程爲何？因此，以下分成數學概念展現及解題歷程兩部分來說明結論。

一、學生在商高定理單元中數學概念的展現

1. **「形」的商高定理題目概念展現會因題目表徵不同而有所不同**：這種題目偏向幾何題。學生面對文字題時，需要較多幾何的概念才能順利把圖畫出來以利解題，若不透過圖形，就必須花許多時間在文字上面做推敲，利用對文意的理解來解題；而在面對圖文題時，學生能直接透過圖形理解圖形組合及拼補之間的關係，因此，在「形」的商高定理題目中學生展現的解題概念種類的確有因題目表徵不同而有所不同，學生做圖文題只需使用比文字題較少及較淺的數學概念即可正確解題。
2. **除畫圖的概念外，「面積」商高定理題目概念展現不會因題目表徵不同而有所不同**：這種題目偏向代數題。學生面對文字題時，只需要少數的幾何概念就能畫圖，其餘的解題概念在文字題及圖文題上是沒有很大差別，但無論是文字題或是圖文題，學生均較習慣使用「數」的商高定理的概念。
3. **除畫圖的概念外，「數」的商高定理題目概念展現不會因題目表徵不同而有所不同**：這種題目也是偏向代數題。學生也只需要少數的幾何概念就能畫圖，其餘的解題概念在文字題及圖文題上沒有很大差別，但因爲這種題目出題範圍廣泛，解題的正確與否需視其他概念的運用而定，而且不同的學生用不同的方法來解題，也就會造成使用概念種類及順序的差異。

4. **使用的數學概念種類及次數越多，答對題數越多；反之亦然：**小淨及小愛分別在文字題及圖文題的答對題數最多，而她們有一個共同點就是解題時所用的解題概念種類及次數最多。反之，小諺、小愛及小聰在文字題及圖文題的答對題數最少，而他們有一個共同點就是解題時所使用的解題概念種類及次數最少。
5. **數學概念種類可用使用概念次數來彌補：**上述第 4 點的發現有一個例外是，使用的概念種類最少的，答對題數不一定最是少的，例如像小淨。她無論在文字題或圖文題，使用概念種類相對均較少，但用其他正確的概念仍可解題成功，因此多使用其它正確概念的次數也可來彌補較少的概念種類，因此她答對題數並不是最少的。
6. **文字題使用的解題概念種類會比圖文題多：**學生在解文字題時，所使用的數學概念種類有 15 種；學生在解圖文題時，所使用的數學概念種類只有 11 種。差異的 4 種概念均是屬幾何概念。
7. 在整體商高定理包含「形」、「面積」、「數」的題目中，解題所需的概念中有 7 個是最常使用到：包括 A-3-3 、A-4-03、N-4-01、S-4-05、N-3-11、N-2-13 及 N-2-9。在本章第二節會呈現以此 7 個概念構成的建議教學順序圖。

二、學生在面對文字題及圖文題時的解題歷程

1. **學生在整個解題所花的總時間，文字題是圖文題的 1.25 倍：**依據 Schoenfeld （1985）時間序列圖分析發現，從解題總時間來看，學生在文字題所花解題總時間時間是圖文題的 1.25 倍。
2. **學生在前三個解題階段所花的時間，文字題是圖文題的 1.6 倍：**依據 Schoenfeld （1985）時間序列圖前三個階段來看，學生在讀題、分析、探索前三個階段所花的時間，文字題是圖文題的 1.6 倍。學生在做文字題時，在前三個階段所花的時間，佔其解題總時間的

70%，但在做圖文題時，此三個階段只佔解題總時間的 50%。此結果呼應了 Lewis & Mayer（1987）所指出的，數學文字題就數學能力來說比一般計算題更需要高深的綜合能力，是一種涉及語言轉譯與數學理論的題型，學生對此問題感到最困難的地方，就是如何將語文轉譯成算式。因此，學生面對文字題時，需要花更多的時間解題。

3. **學生面對文字題時，較多會經歷探索階段，且常在解題階段往返：** 從 Schoenfeld （1985）解題六階段發現，學生在做文字題或圖文題時，最明顯的差別是在探索階段，整體來說，文字題比圖文題多 3 題有經歷探索階段。另外，學生在做文字題時較圖文題容易在解題階段往返，尤其是在往返讀題及分析階段。

4. **圖文題的答對率比文字題高：** 從答對題數來看，圖文題的答對率比文字題稍高一些，此結果呼應了 Paivio 提出的「雙代碼理論」（dual-code theory）（Paivio，1991），若同時利用兩種代碼表徵訊息，其解碼、組織、強化、擷取等表現會優於只有單一代碼。另外也可以證明中國上古用「形」「數」結合的方式來說明商高定理，如此圖示法的確可幫助學生的理解。而且此結果與一些研究支持圖示方式可以促進數學的學習（吳昭容，1990；徐文鈺，1992，林美惠，1997；Greeno，1987；Lewis，1989；Sellke，Behr & Voelker，1991）的結論相同。但是，圖文題的答對率比文字題只有多 5%，根據皮亞傑的認知發展論，國二學生已進入形式運思期，可以處理假設情境並加以推理，尤其能從所得到的訊息產生抽象的關係，因此，研究者覺得國二學生在解文字題時，因爲具備抽象思考的能力，因而在文字題中語言轉譯上雖仍有困難但會較小，因此，從題目表徵來看，圖文題的解題表現的確會比文字題好，但差異並不是非常大。

三、從學生的解題數學概念及解題六階段歷程交叉來看：

1.**無論是文字題或圖文題，學生答對題數最多的，其概念使用次數最多、解題階段往返次數最少；反之，答對題數最少的，其概念使用次數最少、往返次數最多：**小淨及小愛分別在文字題或圖文題答對題數最多，而她們有一個共同點就是解題時解題概念使用的次數最多，但在解題階段往返次數最少。反之亦然。但學生在解題階段往返(次)上，也需參雜學生的解題意願強弱在內。

2.**在「形」的題目中，題目表徵差異會讓學生解題概念種類不同，而且表徵差異會讓學生在往返解題各階段的次數差異大；「面積」及「數」的題目則反之：**對學生來說，在「形」的題目中，學生在解文字題時需要較多樣及較深的幾何概念才可畫圖，也需要多往返各階段才能順利解題，因此，文字題階段往返次數較圖文題多。而「面積」及「數」的題目上，學生解文字題時只需要多 1 個幾何概念即可畫圖，且文字題及圖文題往返解題各階段的次數差異也較小。

所以，上述本研究的研究結果，無論是「形」、「面積」及「數」的題目，從解題概念的次數或種類，或從解題階段往返次數，或從解題時間來看，文字題相對的比圖文題難，也就是學生在解圖文題時都比文字題要容易。因此可以得知，使用圖的表徵確實可以讓學生更能理解文字題，讓解題過程更爲順利。

第二節　　建議

經由本研究對國二學生在兩種題目表徵下，商高定理單元數學概念的展現及解題歷程的分析與討論，研究者擬提出下列幾點建議，以做為國二學生在商高定理單元數學科教學與課程設計，及未來研究之參考。

壹、　對教學方面的建議

一、教師在面對「形」、「面積」、「數」三種類型題目教學時，分別有以下建議：

(1)在教學中要多活用教具：對在商高定理單元中，強調公式形成過程的「形」的題目，雖然在新課程（民國 82 年版）設計下越來越受到重視，但因其題目敘述及圖形的拼補上，對有些學生來說是較難理解的，因此大部分的學生仍會覺得在三種類型題目中是比較困難的。建議教師在教學中要多活用教具，也就是從 Bruner（1966）由運思方式中，讓學生由商高定理輔助教具的動作表徵，轉化圖文題的圖像表徵，再進而強化為學生在文字題的符號表徵，如此學生從不同型式的表徵系統中獲得數學概念，並能將同一數學概念在不同表徵之間自由轉譯，才能加強對「形」的題目的概念與理解。

(2)加強學生對「面積」題目的概念：從本研究中發現，學生在做「面積」的題目時，仍大部分會從「數」的概念去著手，雖然解題最後是正確的，但顯然對「面積」的商高定理概念較生疏，因此建議在教學中要加強學生對「面積」的題目的概念與練習。

(3) 加強學生對先備知識(根號)的運算能力：學生在做「數」的題目時，根號運算在執行階段中是重要的一環，而有幾位學生

就是因根號運算的錯誤而導致解題失敗。依照課程編排，根號的運算和畐高定理雖然放在同一章，但因月考進度的因素，畐高定理單元常會與根號的運算分開成兩次月考的進度，因此建議在此單元教學中仍要加強學生對根號的運算能力，亦即，學生的先備知識及舊經驗的連結必須更加清楚。

(4) **發展需運用許多數學概念的問題情境：**從本研究發現學生在解題過程中，使用數學概念種類較多的其答對題數較多。因此建議教師在教學時，要發展需要運用許多數學概念的問題情境，以讓學生能學習多種數學概念。此研究結果也呼應了 Leung（1991）主張教師在教學時最好在同一個問題中將許多所學過的數學概念連結在一起，而不是只運用某單一一個概念，這樣學生才會將數學視爲一個整合的整體。

(5)**教學或設計試卷要涵蓋不同的題目表徵：**因爲「形」、「面積」、「數」三種類型題目，其解題使用概念及往返次數會因題目表徵不同而有所不同，因此，教師在教學或設計試卷，在發展其中某一類型題目時（尤其是「形」的題目），需適時涵蓋不同的題目表徵，以能在使用概念上，教導學生運用不同的概念種類；及在解題往返次數上，讓學生在考試時做適當的時間分配。

二、教師在面對文字題及圖文題兩種類型題目教學時，有以下建議：

(1) **漸進引導學生接觸幾何：**依照現行各版本教科書，畐高定理單元是安排在國二上學期期中，而此時是學生上國中後第一次接觸到含有幾何及證明概念的課程，因此建議在教學中需要用到幾何及證明概念時，教師要慢慢的引導，讓學生了解如何寫出證明過程及熟悉幾何類型題目的解題方法，也爲國二下學期真正進入幾何單元時奠定良好的基礎。並且在國三學完幾何

三角形及圓的單元時，要再回頭複習商高定理單元中牽涉到幾何的部分，以期學生能夠完整學習到所有概念。

(2) **加強學生對文字題轉譯及畫圖的能力**：從本研究中發現，學生在文字題及圖文題的解題中，無論從答對率或從所花的時間，或從階段往返次數來看，學生對於文字題的解題，仍是較需要加強的，因此建議在教學中要加強學生對於文字轉譯及組織基模並畫圖的能力，另外，也要加強學生若萬一圖形畫不出來時，要如何從文字中尋找關鍵字句的能力。

(3) **設計試卷要兼顧不同學生的需求**：從本研究的解題概念來看，學生在解題時，圖文題因有圖輔助，解題所使用的概念會較文字題少，往返解題階段的次數也較少，對數學低成就的學生來說，做圖文題會比較容易正確解題。相反的，若要訓練數學中高成就的學生，從文字題著手，能訓練學生分析及探索的能力，並運用較多的數學概念去解題。因此建議在教學中設計試卷時，圖文題及文字題都各要佔有一定的比例，以兼顧不同學生的需求。期以此能回應 James J. Kaput（1985）所主張表徵應用在數學解題和學習上的議題---如何讓數學佈題者去操作表徵及如何讓數學教育研究者以關鍵焦點的方式，去處理表徵系統和符號系統。

三、在教學中需加強學生的多元思考、探索及驗證能力：

(1) **教導學生尋找解題的關鍵條件**：從本研究發現學生在解題過程中，解題階段往返次數較少的其答對題數較多。因此建議教師在教學時，要教導學生如何尋找解題的關鍵條件，分辨有用及無用資訊，以減少解題階段往返次數，也能讓學生在有限時間內成功解題。

(2) **加強學生多元解題能力**：在本研究中，有些學生在解題

時會一直鑽牛角尖的的使用一種錯誤的解題方法解題而導致失敗，因此建議在教學中加強學生的多元解題能力，訓練學生另類解題方式的思考能力，平時就要能嘗試不同的形式或方向去思考問題，如小淨的纜車題，用座標概念來解題也不失爲一個另類的方法。

(3) **教導學生有效解決問題和衝突：**從本研究可發現，當學生對某一數學公式不是很確定時，缺乏自己去做探索，以驗證公式正確性的習慣。譬如小聰的第三題八邊形題及第四題直線距離題，等腰直角三角形的斜邊邊長比例是$\sqrt{2}$還是$\sqrt{3}$，或當直線距離公式根號內到底是加還是減，小聰在猶豫時，他只會不斷的去尋找長期記憶中存在的線索，而不會從商高定理的概念去探索真正的答案，而造成解題失敗，因此建議在教學中部要讓學生死背公式，而且要教導學生在當一時忘記公式時，要從什麼方向去探索以得到正確的資訊，如此以達到九年一貫十大基本能力之一的「有效解決問題和衝突」。

(4) **加強學生驗證習慣及後設認知：**從本研究可得知，學生在做數學題目時，大部分是沒有驗算習慣的，但解題驗證是解題成功與否重要的一環，因此建議在教學中除了程序性的解題過程之外，也應注重驗證階段的教學，包括評估解題過程的合理性、是否和其他概念產生矛盾，以及驗證最後的答案等，以培養學生的後設認知及自我反省的習慣。

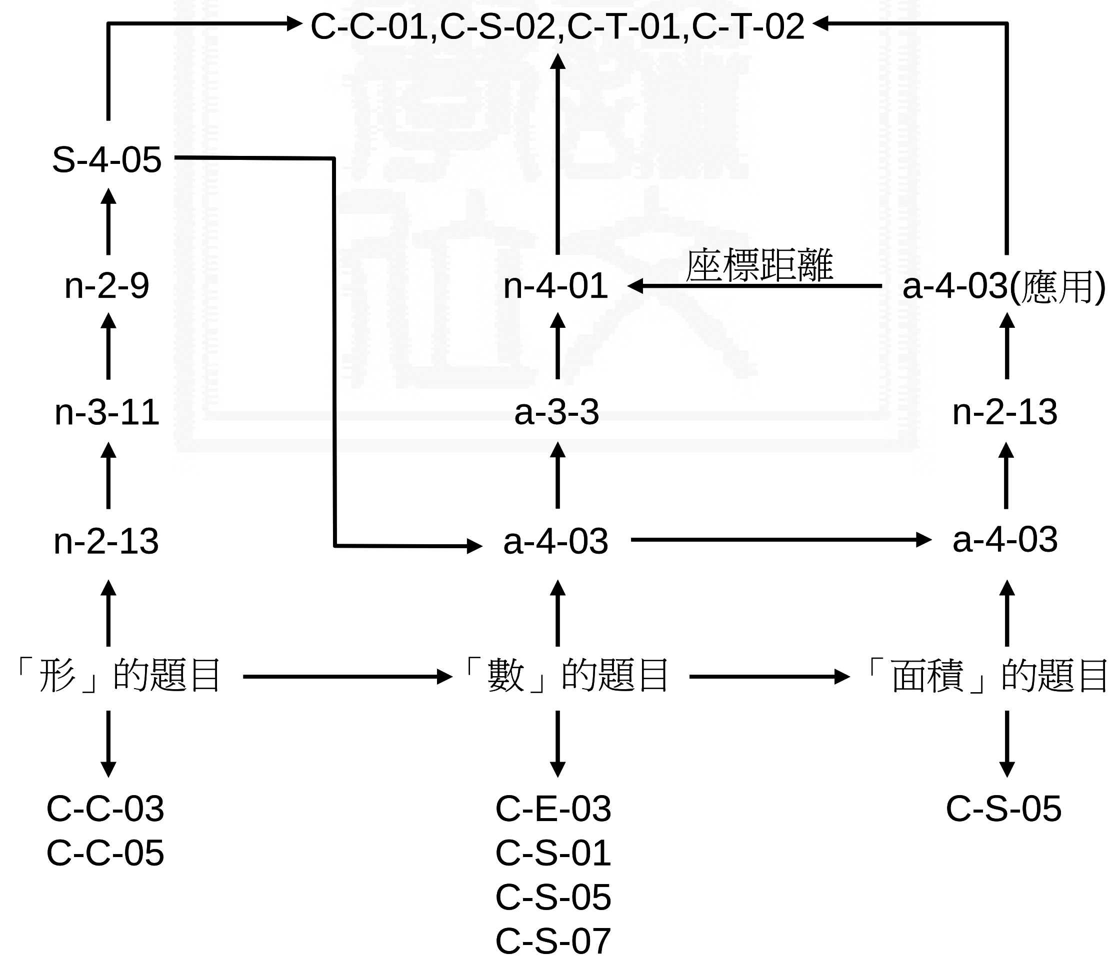
貳、 對課程設計的建議

一、目前國中的課程安排，國一的課程內容均是數與量及代數的部分，國二上學期也只有商高定理這個單元是有包含幾何概念，其餘的仍是代數的課程，因此，商高定理這個單元安排

在國二上學期大概只是因爲跟根號的學習有關，但商高定理中無論是哪種題型，幾乎都會伴隨圖出現，因此建議將此單元安排在二下幾何課程，讓學生對幾何有較深入了解之後再教。而且，讓學生將一邊看文字一邊能把圖畫出來的習慣及能力培養好之後，再進入商高定理單元，對學生在「形」的題型的學習可能會有幫助。

二、研究者參考本研究的結果之後，將此商高定理解題最常使用到的 7 個概念（參考表 4-1-1），配合形、面積、數三類型題目，用流程圖畫出建議的教學順序，並將文字說明於後：

圖 5-2-1　商高定理建議教學順序流程圖



在商高定理的教學順序中，研究者建議之教學順序為「形」、「數」、「面積」。

建議先教「形」的題目，教師們可以複習簡單面積的算法（N-2-13 以個別單位描述面積）、並活用教具教導學生面積拼湊（N-3-11 能以切割拼湊的方式計算面積）及面積保留（N-2-9 保留概念的形成並間接比較）的概念，再藉由題目導出商高定理（S-4-05 運用面積導出勾股定理），並讓學生理解數學證明的過程及寫法（C-C-05 用數學語言呈現解題的過程）。

接下來，教師們可再教「數」的題目，從上述的「面積導出勾股定理」引導成「數」的勾股定理（A-4-03 理解勾股定理），並訓練學生從題目中找出有用的資訊列出等式（A-3-3 思考列出等式），學生在做運算時，熟練方根的運算（N-4-01 認識二次方根），也從方根運算及商高定理公式中，在直角坐標系學習到兩點直線距離算法。另外，教師們可以從「數」的商高定理多變化的題目類型下，去訓練學生隨時監控自己的行為，看所有的解題過程是否適當並作調整（C-E-03 經闡釋及審視情境，能重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整），如小諺的池塘文字題，小諺做到一半時，能從數字中發現原來自己剛開始圖畫錯，趕緊修正。另外，讓學生能簡化問題並設立解題小目標（C-S-01 能分解複雜的問題為一系列的子題），如小淨的八邊形文字題，她可以一步驟一步驟的先求出直角三角形邊長，再由大正方形切割列式求出面積。同時，也訓練學生嘗試多元解題的方法（C-S-05了解一數學問題可有不同的解法，並能嘗試不同的解法），若當第一種作法行不通時，能換個角度，嘗試第二種、甚至第三種面向去思考，如小淨的纜車題，找不出可行方法時，改用坐標距離的方法。並讓學生形成應用問題的解題策略（C-S-07 能發展應用問題的解題策略）。

學生有了以上「形」及「數」的勾股定理的基礎後，配合之前「面積拼補」的觀點，教師們再從面積的角度去解釋並應用商高定理（N-2-13 以個別單位描述面積，A-4-03 理解勾股定理與應用），並藉由題目的演練，可以訓練學生看題目角度的多樣化（C-S-05 了解一數學問題可有不同的解法，並能嘗試不同的解法），讓學生從數的邊長平方概念轉換成面積的概念。

最後，教師們將整個商高定理單元「形」、「數」、「面積」題目教完後，建議學生整體也能達到以下這些目標：1、C-C-01 了解數學語言（符號、用語、圖表、非形式化演繹等）的內涵。2、C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。3、C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。4、C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。

參、對未來研究的建議

本研究因限於時間、人力的限制，只針對高雄市某國中二年級四位數學能力高成就的學生進行商高定理單元解題概念及歷程的探討，因此對未來研究的建議有二。第一，因本研究分成兩份施測題目，雖有採對抗平衡設計，但先做圖文題的學生或許會因對圖仍存有印象，而影響到後續的文字題，此有待更多的研究來努力與克服。第二，因研究對象是四位數學能力高成就的學生，推論上尚有限制，因此為了確實瞭解題目表徵形式對學生解題的影響效果，建議往後研究對象可擴大人數，如納入數學能力中低成就的學生做為研究對象，將高低成就學生在文字題及圖文題做解題概念及歷程的比較探討，甚至可以擴展到學習障礙的學生；或擴大到其他年級，以學習較完整幾何概念的國三學生做為研究對象，比較其解題概念及歷程。

參考文獻

一、中文部分

吳昭容（1990）：圖示對國小學童解數學應用問題之影響。國立台灣師範大學心理學研究所碩士論文。

杜佳真 (1999)。數學文字題的表徵教學策略。科學教育研究與發展季刊，15，59-67。

李俊彥（2004）： 不同題目表徵型式的面積問題對國三學生解題表現之探討。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。

李靜瑤（1994）：高雄市國二學生數學解題歷程之分析研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。

林文生 (1996)。一位國小數學教師佈題情境及其對學生解題交互影響之分析研究。國立台北師範學院碩士論文。

林明哲（1990）：國中學生數學解題行爲之分析研究。國立彰化師範大學科學教育研究所論文。

林美惠（1997）：題目表徵型式與國小二年級學生加減法解題之相關研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文。

林碧貞（1990）。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。新竹師院學報，4，295-347。

倪玫娟（2004）：一位國小教師實施乘法教學的行動研究。國立新竹師範學院數理教育碩士論文。

莊松潔（1995）：不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究。國立中山大學教育研究所碩士論文。

唐淑華（1989）：「語文理解課程」對增進國一學生數學理解能力與解答應用問題能力之實驗研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。

徐文鈺 (1996)。不同擬題教學策略對兒童分數概念、解題能力與擬題能力之影響。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文。

梁宗巨（1995）：《數學歷史典故》。台北：九章出版社。

梁淑坤（1996）：從佈題探談數學科教科書的評鑑。教師之友，第 37 卷，第 4 期，23-28 頁。

《國民中學數學教師手冊第三冊》（2007）。台南：南一書局，25-44。

《國民中學數學課本第三冊》（2006）。台南：南一書局。

《國民中學數學教師手冊第三冊》（2007）。台北：康軒文教事業股份有限公司，41-48。

陳立倫（2000）：兒童解答數學文字題的認知歷程。國立中正大學心理研究所碩士論文。

陳啓明（1990)。不同題目表徵型式及相關因素對國小五年級學生解題表現之影響。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文。

陳美芳（1995）：「學生因素」與「題目因素」對國小高年級兒童乘除法應用問題解題影響的研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文。

教育部（2003）：國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。

黃敏晃（1991）：淺談數學解題。教與學，23，2-15。

黃瑞琴（1994）：《質的教育研究方法》。台北：心理出版社。

張欣怡 (1997)。地球科學不同課文表徵教材對學習表現之研究。國立台灣師範大學科學教育研究所碩士論文 。

張春興（1989）：《張氏心理學辭典》。台北：東華書局。

游自達(1995)。數學學習與理解之內涵-從心理學觀點分析。初等教育研究集刊，3，31-45。

楊德清、洪素敏（2003）。創意教學～「三角形」的教學活動，科學教育研究與發展季刊，32，41-54。

蔣治邦（1994）：由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。國民小學數學科新課程概說（低年級），60-76。台北：台灣省國民教師研習會。

劉秋木(1996)：《國小數學科教學研究》。台北：五南。

謝淡宜（1998）：小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程之比較。

台南師院學報，31，225-268。
謝毅興 (1991)。兒童解數學應用問題的策略。國立台灣大學心理學研究所碩士論文。

二、英文部分

Barnett, J. (1984). The study of syntax variables. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds.), Task variables in mathematics problem solving, 23-68. Philadelphia, Pennsylvania : The Franklin Institute Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education . Focus on Learning Problems in Mathematics , 11 (1), 7-15.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-National Comparison of Representational Competence. Journal for Research in Mathematics Education , 30 (5), 541-547.

Brownell, W. A. (1942). Problem solving. In N. B. Henry (Ed.), The psychology of learning (41st Yearbook of the National Society for the Study of Education, part 2) (pp. 415-443). Chicago: University of Chicago Press.

Bruner ,J . S .(1966).Toward a theory of instruction. Cambridge, MA: Harward University.

Cramer K. A., Post T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 33 (2), 111-144.

Cummin, D.D.（1991）.Childrens interpretions of arithmetic word problem.Congition and Instruction, 8, 261-289.

Davis, R. B.（1984）.Learning mathematics.The Cognitive Science approach to mathematics education. Norwood, New Jersy: Ablex Publishing corporation.

Dreyfus, T., & Eisenberg , T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), The nature of mathematical thinking , 253-284. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Dufour-Janvier , B. , Bednarz , N. , & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations concerning the problem of representations. In C. Janvier (Ed.) , Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 109-122. Hillsdale, NJ:

Lawrence Erlbaum Associates.

Loomis, E.S., (1940): The Pythagorean Proposition .Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Fennell, F. & Rowan, T. (2001). Representation : An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. Teaching Children Mathematics, January, 288-292.

Fauvel, John and Jan van Maanen eds.（2000）：“The Pythagorean theorem in different cultures”. History in mathematics education (Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers), pp. 258-262.

Fraenkel & Norman E. Wallen(1990):How to Design and Evaluate Research in Education.The McGraw-Hill Companies, Inc.500-534.

Gagn’e, E. D（1985）.The cognitive psychology of school learning. NJ: Erlbaum.

Glass, A. L., & Holyoak, K. J. (1986). Cognition. NY: Random House.

Goldin G.A.（1982).Department of Mathematical Sciences Northern Illinois University.In F.K. Lester, & J.Garofalo, Mathematical Problem Solving Issues in Research（pp.87-101）. Philadelphia, Pa.: Franklin Institute Press.

Greeno, J. G. (1987). Instructional representations based on research about understanding. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp.61-88). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In Grouws, D. A. (ED.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 65-97. New York: Macmillan.

Juhani, L. (1995). Working memory and school achievement in Ninth Form. Education Psychology, 15 (3), 271-281.

Kaput, J. J. (1985). Representation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modeling . Teaching And Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, 381-397. EA Silver - 1985 - books.google.com.

Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 19-26. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987b). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 159-196. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, J.(1985).A restropective account of the past 25 years of research and Learning mathematical problem solving.In E.Silver(ED.) Teaching and learning Mathematical problem solving:Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ:Lawrece Erlbaum Associates.

Kintsch, W., & Greeno, J.G.(1985).Understanding and solving word arithmetic word problems. Psychological Review, 92, 109-129.

Krutetskii,V.A.(1976).The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago:University of Chicago Press.

Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. Education Psychology, 12 , 65-99.

Lave,J. （1992）.Word problem:A microcosm of theories of learning.In P.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts & Processes (pp. 263-343). NY: Academic Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving.In C.Janvier(Ed).Problems of representation in the teaching and learning of mathematics,33-40.Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lester, F. K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindquist

（Ed.）, Selected issues in mathematics education,（pp. 29-45）. Berkeley Calif.: McCutchan.

Leung, S. S. (1991). Building connections to the Pythagorean Theorem:An example of teachers treatment of textbook problem. Mathematics Education: Making connections, 41-47.

Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problem. Journal of Educational Psychology, 81, 521-531.

Lewis, A. B., &Mayr, R. E.（1987）.Students miscomprehension of relational statement arithmetic word problems. Journal of education psychology, 79, 361-371.

Marshall, S. P (1987). Schema knowledge structure for representing and understanding arithmetic story problems. First year report, San Diego State University, California, Department of Psychology.

Marshall, S. P., Pribe, C. A., & Smith, J. D. (1987).Schema knowledge structure for representing and understanding arithmetic story problems.(Tech. Rep. Contract No. N00014-85-K-0661). Arilington, VA: Office of Naval Research.

Mayer R.E. (1985) Implication of Cognitive Phychology for Instruction in Mathematical problem solving. In E.A.Sliver (Ed), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (1992). Thinking, problem solving, cognition. New York: W.H. Freeman and Company Press.

Mayer, R. E. (1987). Educational Psychology：A cognitive approach. Boston: Little, Brown, and Company.

Moyer, J. C., Sowder, L., Threadgill-Sowder, J., & Moyer, M. B. (1984). Story problem formats: draw versus verbal versus telegraphic. Journal for Research in Mathematics Education, 15 (5), 342-351.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). Position paper on basic mathematical skills. Arithmetic Teacher, 25, 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980).Problem solving be the focus of school mathematics in the 1980s. An agenda for action.Palo Alto,Calif. : Dale Seymour Publications.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989).Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Retrieved November 20, 2003 form http://standards.nctm.org/document/prepost/cover.htm.

Paivio, A.（1991）.Dual coding theory and education.Education Media,24(4),333-339.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Sellke, D. H., Behr, M. J., & Voelker, A. M. (1991). Using data tables to represent and solve multiplicative story problems. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 30-38.

Sowder, J. T., & Sowder, L. (1982). Drawn versus verbal formats for mathematical story problems. Journal for Research in Mathematics Education, 13(5), 324-331.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and realistic mathematics education. Utrecht, The Netherlands: CD-B Press, Freudenthal Institute.

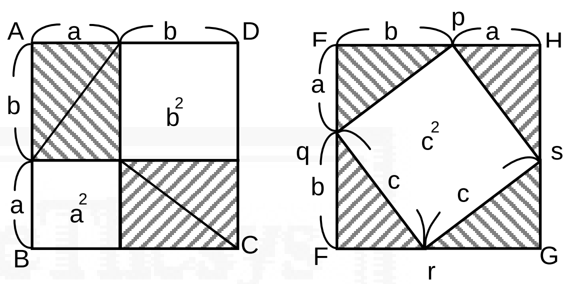
Vasquez, V. M. (1982). Algebra word problems:Exploring high school students conception Through their solution strategis. (Doctoral dissertation, The University of Microfilms)

Webb, L. F., & Sherrill, J. M. (1974). The effects of differing presentations of mathematical word problems upon the achievement of preserve elementary teachers. School Science and Mathematics, 74, 559-565.

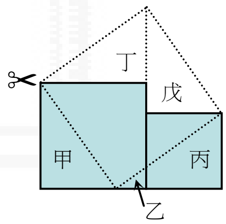
附錄一-1　專家勾選題（圖文題）

「形」的商高定理：

1. 原本有一邊長為 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別為 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改為國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長為 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分為兩股為 a、b，斜邊為 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長為 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）



2.媽媽想將兩個邊長為 6 公分、4 公分的小正方形抹布，裁縫成一個大正方形抹布。聰明的媽媽將上述兩個小正方形抹布並排（其中兩底邊對齊成一直線，另一邊重合），接著在 6 公分正方形的底邊找到一點 P，並從 P 點往左右各畫出兩條成 90 度的等長裁縫線，此兩裁縫線各連接到兩小正方形的頂點，此兩裁縫線形成大正方形抹布的兩邊。媽媽沿兩裁縫線剪下，將剪下的外圍多餘的布，正好能逢補成大正方形抹布。求(1) 媽媽做出的大正方形抹布邊長為多少公分？(2) P 點將 6 公分正方形邊長分割成_____：______。



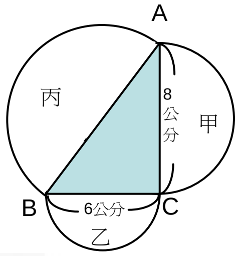
「面積」的商高定理：

3. 有一個直角三角形 ABC，∠C=90°，$\overline{AC}$ =8 公分、 $\overline{BC}$ =6 公分。如今以 △ABC 的三邊爲直徑，分別畫出三個半圓。

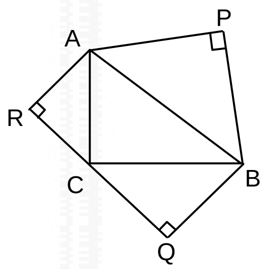
(1)求 $\overline{AB}$ 長。

(2)分別求出以 $\overline{AC}$ 爲直徑的半圓甲之面積、以 $\overline{BC}$ 爲直徑的半圓乙之面積、以 $\overline{AB}$ 爲直徑的半圓丙之面積。

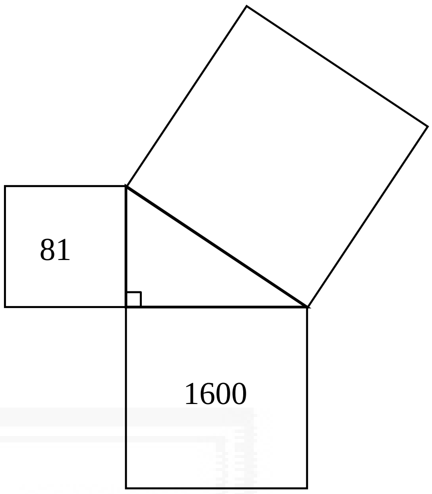
(3)求甲、乙、丙的關係。



4. 有一個 △ABC，∠ACB=90°。現在分別以△ABC 的三個邊做爲斜邊，各畫出一個等腰直角三角形，其分別爲△ ABP、△ BCQ、△ ACR。若△ABP 面積=50 平方公分，△ ACR 面積=18 平方公分，則(1) △ BCQ 的面積爲多少？ (2)四邊形 ARQB 的面積爲多少？



5. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較小的兩塊的面積爲 81 平方公尺及 1600 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊大塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？

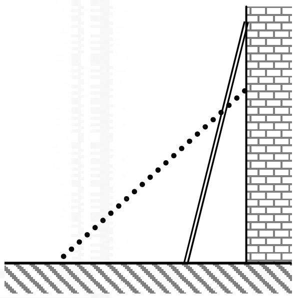


「數」的商高定理：

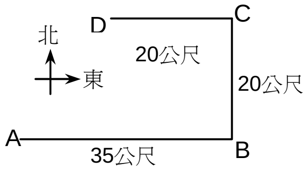
6.小軒拿著 2.5 公尺長的梯子靠在一垂直的牆上。

(1) 已知牆角與梯腳距離爲 0.7 公尺，則牆角與梯頂距離多少公尺？

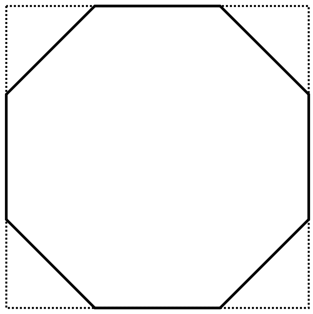
(2) 若梯頂往下滑 0.9 公尺，則梯腳滑移多少公尺？



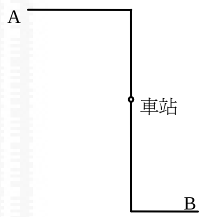
7.小哲在平坦無障礙物的草原上，從 A 點出發向東走 35 公尺到達 B 點，再向北　走 20 公尺到達 C 點，然後再往西走 20 公尺到達 D 點。求 A 點到 D 點的直線距離是多少公尺？



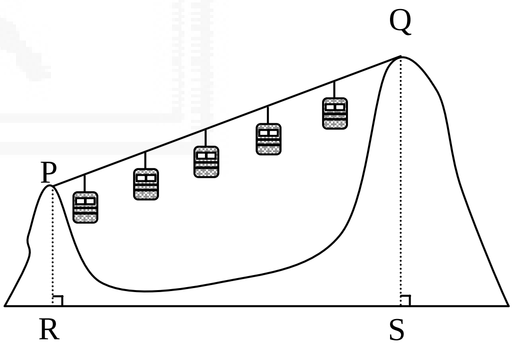
8.有一個邊長為 30 公分的正方形，將其四個直角截掉，截去部份為四個全等的等腰直角三角形，剩下中間一個八邊形。若此八邊形的面積為 772 平方公分，則截去的等腰直角三角形中，斜邊長為多少公分？



9.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離為多少公里？



10.為了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別為 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=200 公尺（ $\overline{PR}$ 垂直地面），半屏山的高度 $\overline{QS}$ =500 公尺 （ $\overline{QS}$ 垂直地面），且 $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少為多少公尺？



附錄一-2　專家勾選題（文字題）

文字題

「形」的商高定理：

1. 原本有一邊長為 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別為 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改為國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長為 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分為兩股為 a、b，斜邊為 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長為 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）

2. 媽媽想將兩個邊長為 6 公分、4 公分的小正方形抹布，裁縫成一個大正方形抹布。聰明的媽媽將上述兩個小正方形抹布並排（其中兩底邊對齊成一直線，另一邊重合），接著在 6 公分正方形的底邊找到一點 P，並從 P 點往左右各畫出兩條成 90 度的等長裁縫線，此兩裁縫線各連接到兩小正方形的頂點，此兩裁縫線形成大正方形抹布的兩邊。媽媽沿兩裁縫線剪下，將剪下的外圍多餘的布，正好能逢補成大正方形抹布。求(1) 媽媽做出的大正方形抹布邊長為多少公分？(2) P 點將 6 公分正方形邊長分割成_____：______。

「面積」的商高定理：

3. 有一個直角三角形 ABC，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AC}=8$ 公分、$\overline{BC}=6$ 公分。如今以 △ABC 的三邊為直徑，分別畫出三個半圓。

(1)求 $\overline{AB}$ 長。

(2)分別求出以 $\overline{AC}$ 為直徑的半圓甲之面積、以 $\overline{BC}$ 為直徑的半圓乙之面積、以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓丙之面積。

(3)求甲、乙、丙的關係。

4. 有一個 △ABC，$\angle ACB=90^\circ$。現在分別以△ABC 的三個邊做為斜邊，各畫出一個等腰直角三角形，其分別為△ ABP、△ BCQ、△ ACR。若△ABP 面積=50 平方公分，△ ACR 面積=18 平方公分，則(1) △ BCQ 的面積為多少？　(2)四邊形 ARQB 的面積為多少？

5. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較小的兩塊的面積為 81 平方公尺及 1600 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊大塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？

「數」的商高定理：

6.小軒拿著 2.5 公尺長的梯子靠在一垂直的牆上。

(3) 已知牆角與梯腳距離為 0.7 公尺，則牆角與梯頂距離多少公尺？

(4) 若梯頂往下滑 0.9 公尺，則梯腳滑移多少公尺？

7.小哲在平坦無障礙物的草原上，從 A 點出發向東走 35 公尺到達 B 點，再向北　走 20 公尺到達 C 點，然後再往西走 20 公尺到達 D 點。求 A 點到 D 點的直線距離是多少公尺？

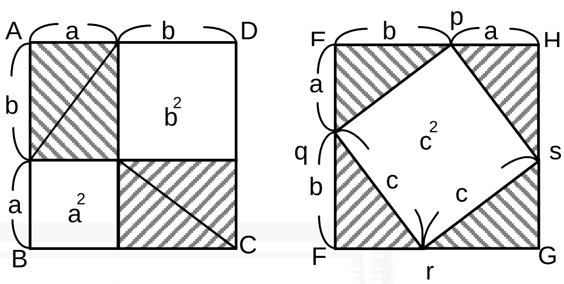
8.有一個邊長為 30 公分的正方形，將其四個直角截掉，截去部份為四個全等的等腰直角三角形，剩下中間一個八邊形。若此八邊形的面積為 772 平方公分，則截去的等腰直角三角形中，斜邊長為多少公分？

9.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離為多少公里？

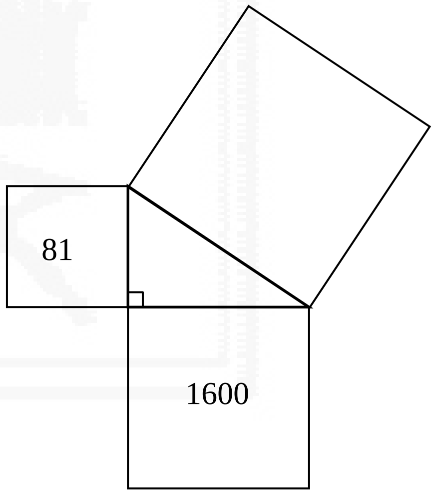
10.為了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別為 P、Q，壽山的高度 PR=200 公尺（PR 垂直地面），半屏山的高度 QS=500 公尺 （QS 垂直地面），且 RS=720 公尺，那麼纜線 PQ 長最少為多少公尺？

附錄二-1　預試題目圖文題

1. 原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）



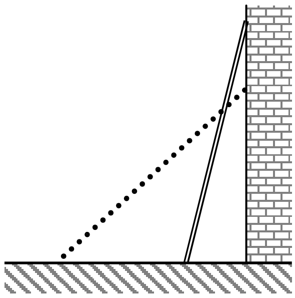
2. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較小的兩塊的面積爲 81 平方公尺及 1600 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊大塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？



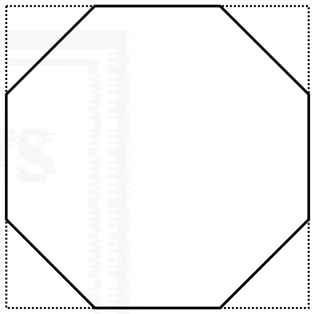
3.小軒拿著 2.5 公尺長的梯子靠在一垂直的牆上。

(5) 已知牆角與梯腳距離為 0.7 公尺，則牆角與梯頂距離多少公尺？

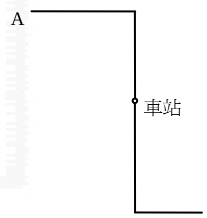
(6) 若梯頂往下滑 0.9 公尺，則梯腳滑移多少公尺？



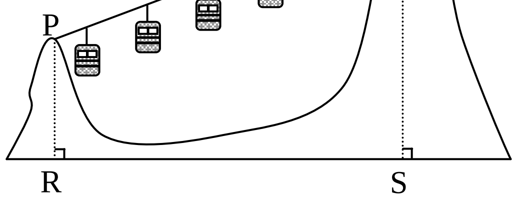
4.有一個邊長為 30 公分的正方形，將其四個直角截掉，截去部份為四個全等的等腰直角三角形，剩下中間一個八邊形。若此八邊形的面積為 772 平方公分，則截去的等腰直角三角形中，斜邊長為多少公分？



5.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離為多少公里？



6.為了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別為 P、Q，壽山的高度$\overline{PR}$=200 公尺（ $\overline{PR}$ 垂直地面)，半屏山的高度$\overline{QS}$ =500 公尺 （ $\overline{QS}$ 垂直地面)，且 $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少為多少公尺？



附錄二-2　預試題目文字題：

1. 原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）

2. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較小的兩塊的面積爲 81 平方公尺及 1600 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊大塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？

3.小軒拿著 2.5 公尺長的梯子靠在一垂直的牆上。

(1)已知牆角與梯腳距離爲 0.7 公尺，則牆角與梯頂距離多少公尺？

(2)若梯頂往下滑 0.9 公尺，則梯腳滑移多少公尺？

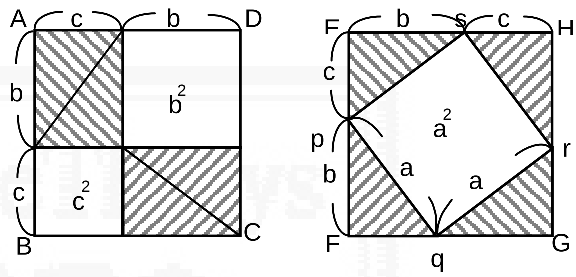
4.有一個邊長爲 30 公分的正方形，將其四個直角截掉，截去部份爲四個全等的等腰直角三角形，剩下中間一個八邊形。若此八邊形的面積爲 772 平方公分，則截去的等腰直角三角形中，斜邊長爲多少公分？

5.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里？

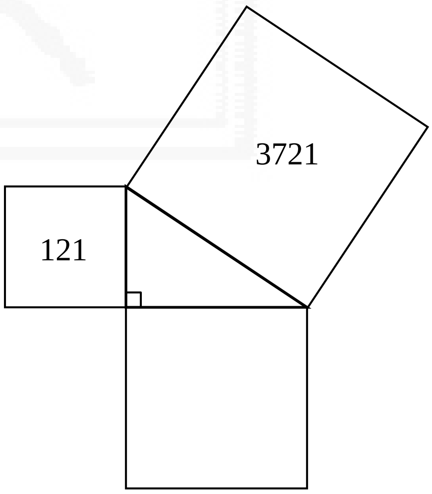
6.爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 PR=200 公尺（PR 垂直地面），半屏山的高度 QS=500 公尺 （QS 垂直地面），且 RS=720 公尺，那麼纜線 PQ 長最少爲多少公尺？

附錄三-1：正式題目 1（圖文題）

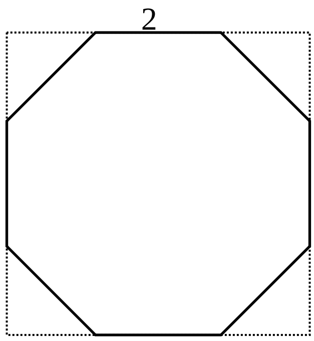
1. 原本有一邊長為 b+c 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別為 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改為國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長為 b+c 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分為兩股為 b、c，斜邊為 a 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長為 a 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出說明過程）



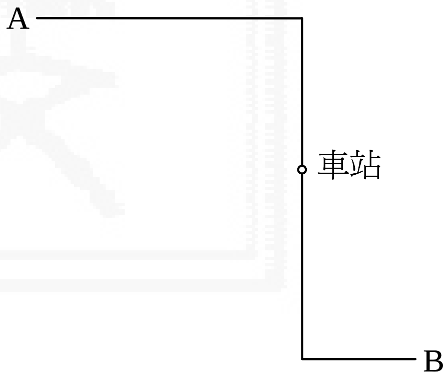
2. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中最小及最大的兩塊的面積分別為 121 平方公尺及 3721 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？



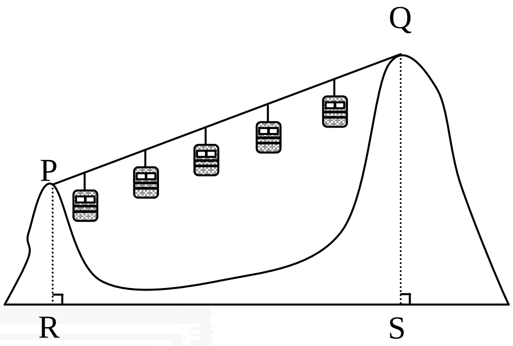
3. 如右圖，原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 2 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少？



4.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 4 公里，再向西走 7 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 5 公里，再向東走 3 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里？



5.爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=350 公尺（$\overline{PR}$ 垂直地面），半屏山的高度 $\overline{QS}$ =490 公尺（$\overline{QS}$ 垂直地面），且 $\overline{RS}$ =480 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲多少公尺？



附錄三-2 正式題目 1（文字題）

1. 原本有一邊長為 b+c 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別為 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改為國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長為 b+c 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分為兩股為 b、c，斜邊為 a 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長為 a 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出說明過程）

2. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中最小及最大的兩塊的面積分別為 121 平方公尺及 3721 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？

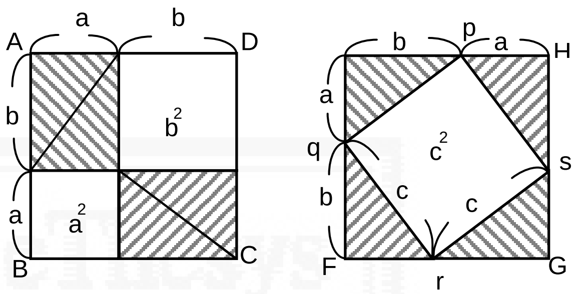
3.原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成為一個邊長為 2 的正八邊形，則此八邊形的面積為多少？

4.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 4 公里，再向西走 7 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 5 公里，再向東走 3 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里？

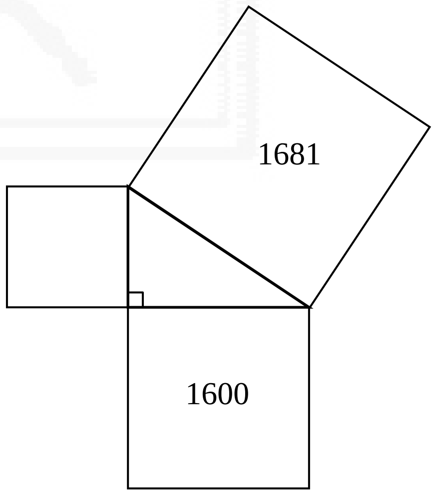
5.爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=490 公尺（ $\overline{PR}$ 垂直地面），半屏山的高度 $\overline{QS}$ =350 公尺 （ $\overline{QS}$ 垂直地面），且 $\overline{RS}$ =480 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲多少公尺？

附錄三-3：正式題目 2（圖文題）

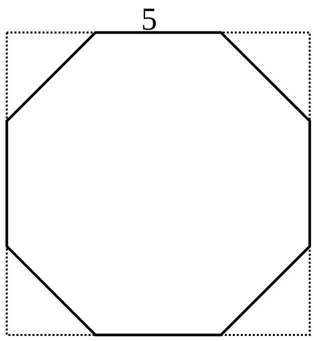
1. 原本有一邊長為 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別為 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改為國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長為 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分為兩股為 a、b，斜邊為 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長為 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）



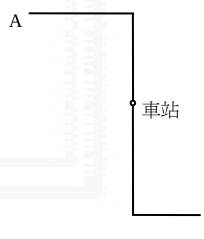
2. 王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較大的兩塊的面積為 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一最小塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？



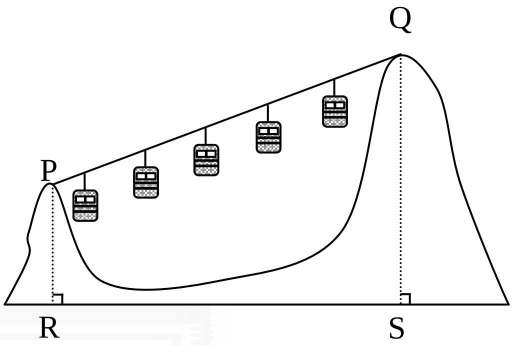
3. 如右圖，原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少？



4.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里？



5.爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$ =200 公尺（ $\overline{PR}$ 垂直地面)，半屏山的高度 $\overline{QS}$ =500 公尺 （ $\overline{QS}$ 垂直地面)，且 $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲多少公尺？



附錄三-4 正式題目 2（文字題）

1.原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係（寫出證明過程）

2.王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較大的兩塊的面積爲 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一最小塊正方形土地面積多少？(2)中間池塘的面積多少？

3.原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少？

4.已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里？

5.爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$ =200 公尺（ $\overline{PR}$ 垂直地面），半屏山的高度 $\overline{QS}$ =500 公尺 （ $\overline{QS}$ 垂直地面），且 $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲多少公尺

附錄四：逐字稿

小淨文字題 1

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
1-0-1-01	原本有一邊長為 b+c 的正方形體育場，分成四塊區域：兩個邊長分別為 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。將原本邊長為 b+c 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分為兩股為 b、c，斜邊為 a 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長為 a 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係	讀題 59
1-0-1-02	正方形體育場，分成四塊，正方形體育場，邊長 b+c，兩個邊長為 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形，正方形…	讀題+分析 63
1-0-1-03	整個場地的面積是 b+c 的平方，…兩股為 b、c，兩股為 b、c，斜邊為 a，…這個是 a，旁邊是 b，c	探索 68
1-0-1-04	所以，b+c 的平方會等於 b 乘以 c 除以 2 再乘以 4 再加 a 平方，	計畫 22
1-0-1-05	化簡，所以，b 平方加 2bc 加 c 平方會等於 2bc 加 a 平方，2bc 消掉，b 平方加 c 平方會等於 a 平方。	執行 20

小淨文字題 2

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
1-0-2-01	王老農夫有三塊正方形的土地，最小及最大的兩塊的面積分別為 121 平方公尺及 3721 平方公尺，三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求另一塊正方形土地面積	讀題 37 秒
1-0-2-02	直角三角形的池塘，這塊，正方形土地就是最大正方形土地，是 3721 平方公尺，這塊，就是最小塊，是 121 平方公尺，那，現在就是要，求這塊，	分析 35 秒
1-0-2-03	那，三角形邊長關係是，a 平方加 b 平方等於 c 平方，所以 b 平方就會等於 3721 減掉 121	計畫 28 秒
1-0-2-04	會等於 3600。所以這塊是 3600 平方公尺。	執行 11 秒
1-0-2-05	中間池塘的面積…121 是 11 的平方，所以 a 等於 11，3600 是 60 的平方，所以 b 等於 60，三角形面積等於底乘以高除以 2，	計畫 21 秒
1-0-2-06	…會等於 330。	執行 12 秒
1-0-2-07	現在我要檢查一下	驗證 32 秒

小淨文字題 3

流水號	原　　　　　　　　　　　案	備註
1-0-3-01	原本有一個正方形，將四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，成爲一個邊長爲 2 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少	讀題 26
1-0-3-02	正方形，減去四個相同的等腰直角三角形，減去後，…正八邊形邊長是 2，正方形…那，就是等腰直角三角形，	分析 60 秒
1-0-3-03	我要求這段長，假設是 x，那 2x 平方會等於 2，	計畫 17 秒
1-0-3-04	x 就等於…1，x 平方…4，$\sqrt{2}$，	執行 38 秒
1-0-3-05	這邊等於$\sqrt{2}$，這段也是$\sqrt{2}$，那，大正方形的邊長等於 2+2$\sqrt{2}$，面積等於 2+2$\sqrt{2}$ 的平方，八邊形的面積還要減掉四個三角形，	計畫 32 秒
1-0-3-06	1*4，等於…4，8$\sqrt{2}$+8	執行 32 秒
1-0-3-07	現在我要檢查一下	驗證 67 秒

小淨文字題 4

流水號	原　　　　　　　　　　　案	備註
1-0-4-01	甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里	讀題 24 秒
1-0-4-02	假設車站的座標是(0,0)，那 A 點的座標是(-2,3),B 點的座標是(1,-4)	分析 30 秒
1-0-4-03	然後,直線距離,是,兩個,嗯…	計畫 15 秒
1-0-4-04	-2 跟 1 的差再加上…平方…根號…根號 58	執行 38 秒
1-0-4-05	……..【無聲讀題】【驗證】6 秒	無聲讀題+驗證 6 秒
1-0-4-06	現在我檢查一下	驗證 24 秒

小淨文字題 5

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
1-0-5-01	爲了發展觀光，建造空中纜車，兩山山頂最高點分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=490 公尺，半屏山的高度 $\overline{QS}$=350 公尺，則 $\overline{RS}$ =480 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲多少公尺？	讀題 42 秒
1-0-5-02	壽山的高度，490 公尺，....這段長 480 公尺，$\overline{QS}$ ，350 公尺，$\overline{PQ}$ …，$\overline{PQ}$ 的直線距離…，	讀題+分析+探索 90 秒
1-0-5-03	兩點的直線距離，假設 R 點的座標是(0,0)，那 P 點座標(0,490)，S 點座標(480,0)，Q 點座標(480,350)，兩點直線距離，PQ 等於…480 的平方再加上 140 平方，根號	分析+計畫 59 秒
1-0-5-04	480 的平方是 2304，140 平方是 196…，5。	執行 97 秒

小淨圖文題 1

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
1-1-1-01	原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來….將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周….。	讀題 57 秒
1-1-1-02	…我要用…用面積去求它們的關係….	計劃 10 秒
1-1-1-03	大正方形的面積是 a+b 平方，那…嗯…等於…這四個直角三角形面積是 a 乘以 b 除以 2 再乘以 4，再加上中間的正方形 c^2。	分析 29 秒
1-1-1-04	嗯，就是和的平方公式，$a^2+2ab+b^2$ 會等於 $2ab+c^2$，同時減掉 2ab，所以 a^2+b^2 會等於 c^2。	執行 25 秒
1-1-1-05	…….	驗證 3 秒

小淨圖文題 2

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
1-1-2-01	王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較大的兩塊的面積爲 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求另一最小塊正方形土地面積多少，中間池塘的面積多少	讀題（25）
1-1-2-02	我要先求這兩個正方形的邊長	計畫 10
1-1-2-03	1681 開根號…（嘗試 38、26、121）。 先算 1600 好了…. 40^2。	執行+探索 64
1-1-2-04	（嘗試 43*43，再 41*41）	無聲探索 33 秒
1-1-2-05	算出來 1681 會等於…41^2，1600 會等於 40^2。所以這邊	執行+驗算

	長等於 40，這邊長等於 41。	26 秒
1-1-2-06	那，這邊的邊長，就是…就是【笑，知道剛才不須如此費心開根號】1681 減掉 1600，	分析 20 秒
1-1-2-07	會等於 81 的根號等於 9，這個面積就是 9 平方 81。	執行 45 秒
1-1-2-08	三角形面積就是 9*40 再除以 2 等於 180 平方公分咦，是公尺。現在我驗算一下。	執行+驗證 28 秒

小淨圖文題 3

流水號	原案	備註
1-1-3-01	如右圖，原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少。 八邊形….邊長爲 5，嗯… 等腰、直角三角形，	讀題 18 秒 分析 42 秒
1-1-3-02	嗯，…假設這裡是 x，X^2..乘以 2 會等於 25，那 x 會等於..等於…根號【發現是無理數】	探索+執行 40 秒
1-1-3-03	【回頭看圖形】讀圖題	讀題 27 秒
1-1-3-04	這個是…5+2x 平方，剪掉，四個直角三角形的面積是 x^2..2 x^2，	分析 30 秒
1-1-3-05	等於..和的平方公式，25 加 20x 再加 4 x^2 減 2 x^2 會等於 25 加 20x 加 2 x^2…嗯，2 x^2=25 帶進來	執行 48 秒
1-1-3-06	那…【回頭看圖形】	分析+探索 70 秒
1-1-3-07	【研究者提示】你在思考哪個算式？【回答】不知道，我看不懂	
1-1-3-08	這是正方形…這四個相同的等腰直角三角形，成爲邊長爲 5 的正八邊形，八邊形的面積， 等於 50+…..	讀題 24 秒
1-1-3-09	$50+2\times\sqrt{\frac{25}{2}}$	探索 40 秒

1-1-3-10 1-1-3-11	………. 【研究者提示】你是在看哪個算式，或題目，或圖形？ 【回答】我不會算	執行 85 秒 分析+探索 68 秒

小淨圖文題 4

流水號	原　　　　　　　案	備註
1-1-4-01	已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 4 公里，再向西走 7 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 5 公里，再向東走 3 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里	讀題 22 秒
1-1-4-02	假設車站的位置是(0,0)，那，甲先到達 A 鎮，所以 A 鎮的座標是，(-7,4)，B 鎮的座標是(3,-5)，	分析 27 秒
1-1-4-03	直線距離，直線距離是…7 跟 3 的差，10 的平方再加上 9 的平方，根號，	計畫 27 秒
1-1-4-04	181，181…	執行 25 秒
1-1-4-05	我檢查一下	驗證 37 秒

小淨圖文題 5

流水號	原　　　　　　　案	備註
1-1-5-01	若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=200，那半屏山的高度$\overline{QS}$=500 公尺 ，$\overline{RS}$ =720，$\overline{PQ}$ 長最少爲多.少.公.尺…	讀題 50 秒
1-1-5-02	假設…嗯,這就是求 PQ 的直線距離	分析 16 秒
1-1-5-03	那,用…座標來解題	計畫 10 秒
1-1-5-04	R 點是(0,0)，那 P 點就是(0,200)，S 就是(720,0)，Q 點是(720,500) ，那, PQ 的直線距離就是…PQ 的直線距離..	分析 39 秒
1-1-5-05	是 720 的平方再加上 300 的平方，根號 …等於	執行 156 秒

小診文字題 1

流水號	原　　　　　　　　案	備註
2-0-1-01	原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應、世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形、看台，及中央兩個邊長爲 c 的正方形大足球場。這四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係…	讀題 90 秒
2-0-1-02	先再讀一下題目，邊長 a+b 的正方形體育場，先畫出 a+b 的體育場，共分成四塊區域，兩個邊長分別爲 a+，a、b 的正方形小足球場，兩邊 a、b 小足球場，及兩邊長 a、b 的看台，a、b 的看台，兩邊長 a、b 的看台，兩邊長 a、b 的看台，正方形小足球場，兩邊長 a、b 的長方形看台，四個區塊，兩個邊長分別爲 a、b，a、b，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台，長 a、寬 b，長方形看台，如今因應、世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的直角三角形看台，及中央兩個邊長爲 c 的正方形、大足球場，長 a、c…四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係，及中央兩個邊長爲 c 的正方形、大足球場，c 的大足球場，求 a、b、c 的關係。	讀題+分析 280 秒
2-0-1-03	那,先把大正方形體育場的面積先算出來。等於 a 平方加 2ab 加 b 平方。那…再,那,先算出，體育場的那個直角三角形看台。a+b,a*b 除以 2，這個,等於三角形看台，那算出，算出 c，a，嗯，先算出 c 的…a 平方加 b 平方等於 c 的平方	探索 115 秒
2-0-1-04	長 a、c，邊長爲 c 的大足球場，那 a….	分析 105 秒
2-0-1-05	a*b 加上兩個大型足球場，再加上剩下的空地 a,b，等於 2ab 加上 2c 平方就等於這個大足球場的面積，兩邊都有 2ab 消掉，那 a 平方加 b 平方….	計畫+執行 96 秒
2-0-1-06	再重新看一下題目，原本邊長爲 a+b 正方形的體育	

	場，四邊各取 p、q、r、s，將體育場重新劃分為兩股為 a、b，斜邊為 c 的四個看台，一個邊長為 c 的正方形大足球場，圍在大足球場的四周….嗯…兩個長 a、寬 b 的長方形看台，看台，直角三角形看台，及中央一個邊長為 c，兩個邊長為 c 的正…..。	讀題+分析+探索 234 秒

小諺文字題 2

流水號	原　　　　　　　　　　　　　案	備註
2-0-2-01	王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較大的兩塊的面積為 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求另外一塊最小塊正方形土地面積多少？中間池塘的面積多少？	讀題 57 秒
2-0-2-02	其中較大的一塊的面積為 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，那先…1681 公尺…恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘	讀題+分析 84 秒
2-0-2-03	那要先求另一塊小的正方形，那，1600 可以等於 40 乘以 40，那 1681…先質因數分解…	分析 54 秒
2-0-2-04	另一塊 40*40…所以，另一塊大的邊長為 41	探索 27 秒
2-0-2-05	直角三角形…那先畫直角三角形大概是…40…另一塊…這邊底是 41…先算出它的高,斜邊…	分析 60 秒
2-0-2-06	等於 3281… .	執行 10 秒
2-0-2-07	3281…40、41…錯了，這 41 是斜邊長	探索 91 秒
2-0-2-08	那這塊是第二個…40，那 41…把邊長，面積求出來	計劃 24 秒
2-0-2-09	減 1600 等於 9，所以這個正方形邊長是 9，所以最小塊正方形面積，最小面積等於 81。池塘中間的面積，那就用 40*9…所以算出池塘面積等於…1800，180。	執行 59 秒

小診文字題 3

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
2-0-3-01	原有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰三角形後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少	讀題 22 秒
2-0-3-02	原有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰，畫圖，四個直角減去四個相同的等腰三角形，之後即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，此八邊形的面積。	讀題+分析 57 秒
2-0-3-03	那，知道,知道這個正八邊形，我先把，這個填滿，然後，這邊 5 的部份…	探索 23 秒
2-0-3-04	這個等腰三角形，等於 5 的平方…. 5 的平方等於…	分析 57 秒
2-0-3-05	即成爲一個邊長爲 5 的正方形…正八邊形	讀題 15 秒
2-0-3-06	直角…25…5 的平方等於…直角三角形…成爲一個邊長爲 5 的正方形…	分析 59 秒
2-0-3-07	把這個補…，這邊成爲 5…	探索 28 秒
2-0-3-08	四個相同的…邊長爲 5 的正方形…..	分析 211 秒

小診文字題 4

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
2-0-4-01	已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；兩鎮的直線距離多少公里	讀題+分析 39 秒
2-0-4-02	這邊…用畢氏定理…	計劃 10 秒
2-0-4-03	然後，先把這個 AB 畫成一個大三角形	分析 18 秒
2-0-4-04	77，49 加上 4…	執行 25 秒
2-0-4-05	直線距離…距離….	分析+驗證 37 秒

小診文字題 5

流水號	原	案	備註
2-0-5-01	爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂（最高點）分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=200 公尺（ $\overline{PR}$ 垂直地面），半屏山的高度 $\overline{QS}$ =500 公尺 （ $\overline{QS}$ 垂直），且 $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 最少爲多少公尺		讀題 50 秒
2-0-5-02	那, 分別爲 P、Q ..P、Q，那壽山的高度 200 公尺，半屏山的高度 $\overline{QS}$ 爲 500 公尺，		分析 51 秒
2-05-03	那…且 $\overline{RS}$ ..爲 780 公尺，那纜線 $\overline{PQ}$ 最少要多少公尺這個是 500，300，這條線畫出來		探索 19 秒
2-0-5-04	200，減掉 200 等於 300，得到…720		分析 17 秒
2-0-5-05	那,…除以 10，除以 3，30…除以 60，這段 13，因爲剛才除以 60，所以現在要乘以 60…780。		執行 60 秒

小諺圖文題 1

流水號	原　　　　　　　　　　　　　案	備註
2-1-1-01	原本有一邊長爲 bc 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 bc 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲 b、c，斜邊爲 a 的四個直角三角形看台，及中央三個邊長爲 a 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係	讀題 72 秒
2-1-1-02	那現在，一邊看題目，然後一邊看圖，原本有一邊長爲 bc 的正方形體育場，共分成四塊，兩邊長分別爲 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 bc 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲邊長爲 b、c，斜邊爲 a 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 a 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係	讀題+分析 93
2-1-1-03	原本那個，原本兩股爲 b 跟 c，求 a 的關係，那 b 平方加 c 平方等於 a 平方，a 平方，那 c，b，原本小足球場 cb 的面積等於，cb，兩個 cb，那這四塊看台的面積等於 2cb，	探索 67
2-1-1-04	一塊看台，那四塊看台，那四塊看台的面積等於 2cb，原本，原本…那剩下的 b 平方跟 c 平方，	計畫 45
2-1-1-05	剩下的 b 平方跟 c 平方…。	執行 20

小諺圖文題 2

流水號	原　　　　　　　　　　　　　案	備註
2-1-2-01	王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中最小及最大的兩塊的面積分別爲 121 平方公尺及 3721 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求另一塊正方形土地面積多少？兩間池塘的面積爲多少？	讀題 36

2-1-2-02	那另一塊土地面積，設這個爲 a，a 平方等於 3721，這爲 b 平方，這爲 c 平方，b 平方等於 212，c 平方等於 3721，b 平方等於 121，c 平方，那設這個爲 a 平方，	分析 37
2-1-2-03	c 平方減 b 平方，等於 3721-121 等於 3600，a 平方等於 3600，那求得 a=60，	計畫 29
2-1-2-04	那這塊面積等於 60 乘面積以 60，那這塊，那個面積等於 3600。	執行 18
2-1-2-05	那兩間池塘的面積，b 平方等於 121，那 $b=\pm 11$，邊長沒有負的，負不合，所以這塊邊長等於 11，a 的面積剛才算出來 60，這邊是 11，	計畫 32
2-1-2-06	所以面積是 60 乘以 11 等於 660，求得池塘的面積，還要除以 2，才會求得池塘的面積等於 330	執行 28

小諺圖文題 3

流水號	原案	備註
2-1-3-01	如右圖，原本一個正方形，將其四個直角分別減，分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 2 的正八邊形，求八邊形的面積	讀題 35
2-1-3-02	那設原本爲 x，設三角形邊長爲 x，等腰三角形邊長爲 x，那這塊也是 x，那這個 $1:1:\sqrt{2}$，所以這個是 $\sqrt{2}x$，	分析 31
2-1-3-03	….，邊長爲…	探索 18
2-1-3-04	原本一個正方形，將其四個直角分別減，分別減去四個相同的等腰直角角形後，即成爲一個邊長爲 2 的正八邊形，求八邊形的面積	讀題 20
2-1-3-05	設原本邊長爲 x，那這兩塊面積就等於 x 減 2 除以 2，這兩塊面積就等於 x 減 2 除以 2，…，	探索 62
2-1-3-06	原本邊長是 2，所以這段也是 2，設等腰三角形邊長爲 x，那 $1:1:\sqrt{2}$，那 $\sqrt{2}$ 乘以 $\sqrt{2}$ 等於 2，同乘以 $\sqrt{2}$，	計畫 23
2-1-3-07	那這段 $\sqrt{2}$….，那求得 x 等於 $\sqrt{2}$，那就算出等腰三角形的面積，等腰三角形面積等於 1，	執行 48
2-1-3-08	那邊長等於 $2\sqrt{2}$，兩個 $\sqrt{2}$ 加上 2，求得它的原本邊長，整個正方形的邊長，那平方等於它整個大正方形的面積	計畫 21
2-1-3-09	8，10，求得它整個正方形的面積，那剛才算出這個等腰三角形面積等於，所以，四個等腰三角形，4，	執行 29
2-1-3-10	原本，正方形的面積減掉它四個等腰三角形面積，就算出，算出這個八邊形的面積…。	計畫+執行 27

小診圖文題 4

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
2-1-4-01	已知甲、乙兩人均由車站出發，甲先向北走 4 公里，甲先向北走 4 公尺，再向西走 7 公尺，到達 A 鎮；乙先向南走 5 公尺，再向東走 3 公尺，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離為多少	讀題 28
2-1-4-02	那，直接把 A，B 兩鎮畫一條線，那，把它畫成一個直角三角形，那 4 加，這段等於 9，4+5=9，	分析 28
2-1-4-05	所以 AB 距離等於 9 的平方加上 10 的平方開根號，	計畫 26
2-1-4-06	等於 81 加上 100，　根號 181….，現在看 181 可不可以開根號…. 那，181，…那算出 AB 距離等於 181	執行+驗證 108

小診圖文題 5

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
2-1-5-01	為了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂分別為 P、Q，壽山的高度=350 公尺，$\overline{PR}$ 垂直地面，半屏山的高度 490 公尺　，$\overline{QS}$ 垂直地面，且 $\overline{RS}$ =480 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少為多少公尺？	讀題 58
2-1-5-02	先畫一個等腰三角形，那這段等於 480，490 減 350，那求得這段等於 140….，除以 10，先化簡，那化簡之後這個等於 24，RS 等於 24，這個等於 7，	分析 70
2-1-5-03	這個，a 平方加 b 平方開根號等於 c 平方，所以 RS 要平方，那 24 的平方等於 576，14 的平方等於 196，開根號，	計畫+執行 63
2-1-5-04	等於 772，原本有化簡 20，同乘以 20，同乘以 20，求得 c 平方，PQ 等於 1544，根號 15440，那可以開出來，等於，2 的四次方開出來，…	執行+驗證 200
2-1-5-05	我重新算一下，480 平方等於 2304，140 平方等於 196，那 230400-19600…，	計畫+執行 55
2-1-5-06	210800 根號，527，那等於，可以提出 2，...求得…，527 還可以再分，17，527 又不行了，那求得 PQ 等於 $20\sqrt{527}$。	執行+驗證 199

小愛文字題 1

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
3-0-1-01	原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域，兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係	讀題 47 秒
3-0-1-02	【無聲讀題】23 秒	無聲讀題 23 秒
3-0-1-03	邊長分別爲 a、b，…四邊取 p、q、r、s 共四點，兩股爲 a、b，斜邊爲 c，共四點…，中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場，四個看台圍在大足球場的四周…，	分析+探索 142 秒
3-0-1-04	所以，因爲 ABC 是直角三角形，	計劃 7 秒
3-0-1-05	所以，它們的關係就是 a 平方加 b 平方會等於 c 平方。	執行 14 秒

小愛文字題 2

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
3-0-2-01	王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中較大的兩塊的面積爲 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求另一最小塊正方形土地面積多少？	讀題 26 秒
3-0-2-02	兩塊面，兩塊較大的面積分別爲 1600 平方公尺…恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，1600 公尺，直角三角形的池塘，1681，這是正方形，這裡是斜邊，這裡是 1600 平方公尺，最小的土地在這裡，	分析 46 秒
3-0-2-03	1681，根號 1681，減掉，減掉根號 1600…，	計劃 13 秒
3-0-2-04	……..【分解 1681】	執行+探索 201 秒
3-0-2-05	設這個邊長是 c，b，a，所以，c 平方會等於 a 平方加	分析 7 秒

	b 平方，	
3-0-2-06	a 平方會等於 c 平方減 b 平方，	計劃 5 秒
3-0-2-07	等於 81	執行 6 秒
3-0-2-08	中間池塘的面積，因爲，b=40，a=81，a 就=9，	分析 18 秒
3-0-2-09	所以面積就等於 9 乘以 40 乘以 1/2	計劃 9 秒
3-0-2-10	等於 180，小土地面積是 81 平方公尺，中間池塘面積是 180 平方公尺。	執行 5 秒

小愛文字題 3

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
3-0-3-01	原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少	讀題 17 秒
3-0-3-02	成爲一個邊長爲 5 的正八邊形…	分析+探索 37 秒
3-0-3-03	等腰直角三角形的邊長比是 $1:1:\sqrt{2}$，所以…，	計劃 12 秒
3-0-3-04	邊長就等於，等於 $5\sqrt{2}/2$，所以正方形的面積，面積就等於 $5+5\sqrt{2}$ 平方，等於 $75+50\sqrt{2}$，四個等腰直角三角形等於…$10\sqrt{2}$，	執行 71 秒
3-0-3-05	所以八邊形的面積就等於…正方形面積減去四個等腰直角三角形面積，	計劃 12 秒
3-0-3-06	$75+40\sqrt{2}$	執行 8 秒

小愛文字題 4

流水號	原　　　　　　　　案	備註
3-0-4-01	已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里	讀題 17 秒
3-0-4-02	甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，假設某車站…某車站爲原點，則，A 鎮，座標就是，向西走 2 公里，向北走 3 公里，(-2，3)，B 鎮，的座標就是，向東走 1 公里，向南走 4，	讀題+分析 53 秒
3-0-4-03	則 A、B 兩鎮的直線距離，根號， -2-1=-3，-3 的平方等於 9，加上，3-(-4)=7，7 的平方 49	計劃 16 秒
3-0-4-04	根號，58	執行 12 秒

小愛文字題 5

流水號	原　　　　　　　　案	備註
3-0-5-01	爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂最高點分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=200 公尺，半屏山的高度 $\overline{QS}$ =200 公尺，則 $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲多少公尺	讀題 28 秒
3-0-5-02	$\overline{PQ}$ ，壽山的高度 200 公尺，半屏山的高度，$\overline{QS}$ =500 公尺，則 $\overline{RS}$ ，$\overline{RS}$ =720 公尺，$\overline{PR}$-200，$\overline{QS}$ ，$\overline{RS}$ =720 公尺，$\overline{QS}$ 垂直地面，	分析 85 秒
3-0-5-03	【無聲探索】14 秒	探索 14 秒
3-0-5-04	所以 PS 的長度就是 40000….，QR…	計劃 18 秒
3-0-5-05	所以，PS…，【在分解】 這題我放棄。	執行 325 秒

小愛圖文題 1

流水號	原　　　　　　　　　　　　案	備註
3-1-1-01	原本有一邊長爲 b+c 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 b、c 的正方形小足球場，及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 b+c 的正方形體育場，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 b、c，斜邊爲 a 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 a 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係	讀題 55
3-1-1-02	兩個邊長分別爲 b、c 的正方形小足球場，就是這個，然後，p、q、r、s 四點，	分析 15
3-1-1-03	從這個圖可以知道，a 平方加 4bc，加上 2bc 會等於(b+c)的平方，	計畫 18
3-1-1-04	所以，a 平方加 2bc 就會等於 b 平方加 2bc 加 c 平方，2bc 相同的所以可以消掉，結果得到 a 平方等於 b 平方加 c 平方。	執行 32

小愛圖文題 2

流水號	原　　　　　　　　　　　　案	備註
3-1-2-01	王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中最小及最大的兩塊的面積分別爲 121 平方公尺及 3721 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍成一塊形狀是直角三角形的池塘，求(1)另一塊正方形土地面積多少？中間池塘的面積多少？	讀題 26
3-1-2-02	也就這塊是土地，這邊是池塘，…	分析 10
3-1-2-03	因爲剛好，三邊長剛好圍成一塊直角三角形，所以兩塊小的土地面積和等於最大塊土地面積，	計畫 10
3-1-2-04	另外一塊的土地面積就是 3842，	執行 19
3-1-2-05	中間池塘的面積，就等於兩股長的乘積除以 2，這裡的是$\sqrt{121}$，乘以這邊 3842，$\sqrt{3842}$，再除以 2，	計畫 24
3-1-2-06	等於 11 乘以 3842….	執行+探索 27
3-1-2-07	，嗯，再重新求這段，因爲這邊是錯的，這邊是最大的一塊 3721 減掉最小的 121，等於 3600，所以這個答案是 3600。	驗證+執行 16

3-1-2-08	那這邊就是，$\sqrt{121}$ 乘以$\sqrt{3600}$，就等於 11 乘以 60 再除以 2，等於 330。	執行 21

小愛圖文題 3

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
3-1-3-01	如右圖，原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 2 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少？	讀題 14
3-1-3-02	一個邊長爲 2 的正八邊形，假設等腰直角三角形的腰長爲 x，因爲等腰直角三角形三邊長比是 $1:1:\sqrt{2}$，	分析 14
3-1-3-03	所以邊長就是$\sqrt{2}x$，$\sqrt{2}x$ 等於 2，	計畫 9
3-1-3-04	x 就等於 $2/\sqrt{2}$，等於 $2\sqrt{2}/2$ 等於$\sqrt{2}$	執行 16
3-1-3-05	所以，這裡是$\sqrt{2}$，這裡也是$\sqrt{2}$，正方形的邊長就是 $2+2\sqrt{2}$，面積就是平方，減掉$\sqrt{2}$ 的平方乘以 2，	計畫 26
3-1-3-06	就等於 4 加上 $8\sqrt{2}$ 加 8 減 4，等於 8 加上 $8\sqrt{2}$，所以，八邊形的面積就是 $8+8\sqrt{2}$。	執行 29

小愛圖文題 4

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
3-1-4-01	已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 4 公里，再向西走 7 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 5 公里，再向東走 3 公里，到達 B 鎮；則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里	讀題 15
3-1-4-02	車站在這邊，假設車站的座標是(0,0)，也就是原點，則甲先向北走 4 公里，再向西走 7 公里，到達 A 鎮，A 鎮的座標就是，向西是負的，-7，向北是正的，+4，乙先向南走 5 公里，再向東走 3 公里，到達 B 鎮，也就是 B 鎮的座標是向東走是+3，向南走是-5，(3,-5)，	讀題+分析 36
3-1-4-03	則 A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里，代公式進去算的話就是-7，3-(-7)的平方，10 的平方 100，加上 4-(-5)的平方，81，再開根號，等於 $\sqrt{181}$。	計畫+執行 33

小愛圖文題 5

流水號	原　　　　　　案	備註
3-1-5-01	為了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂最高點分別為 P、Q，壽山的高度$\overline{PR}$=350 公尺，半屏山的高度$\overline{QS}$=480 公尺，且$\overline{RS}$ =480 公尺，那麼纜線$\overline{PQ}$長最少為多少公尺	讀題 37
3-1-5-02	壽山的高度$\overline{PR}$=350 公尺，半屏山的高度$\overline{QS}$=490 公尺，490，350，$\overline{RS}$ =480 公尺，則纜線$\overline{PQ}$長最少為多少公尺，	分析 32
3-1-5-03	從中間畫分成直角三角形，…	探索 56
3-1-5-04	則 QR 等於根號 490 的平方，加上 2304，就等於 4705，那 PS 的長度就等於，1225 加上 480，122500 加上 230400，等於 9，2，352900。	執行 116
3-1-5-05	因為是交叉，所以是直角，…。	探索 58
3-1-5-06	如果將 PR 延長，使延長線跟 Q 點成垂直，那，假設就是 A 點，AQ 的距離是 480，PR 的距離是 490-350=140 公尺，	計畫 30
3-1-5-07	則$\overline{PQ}$ 的距離就等於根號 230400 加上 19600，250000，所以就等於，500。	執行 30

小聰文字題 1

流水號	原　　案	備註
4-0-1-01	原本有一邊長為 bc 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別為 b、c 的正方形的小足球場，	讀題 15
4-0-1-02	就先畫一個這樣子，b+c，為邊長，然後再畫成四塊，它說，分成四塊嘛，兩個邊長分別為 b 跟 c，這樣子，然後，它說及兩個長 b、寬 c 的長方形看台。	分析 33
4-0-1-03	如今………b、c 的正方形的小足球場…..因兩個長 b、寬 c，然後，…	讀題 67
4-0-1-04	這個是 a，然後，所以這樣就是，每一個都是這樣子，就 b+c 的平方會等於大正方形的面積，然後再求小塊的面積，……，	分析 128
4-0-1-05	我重畫一次圖好了，嗯這個，b+c，b+c，兩個邊長分別為 b 跟 c，……，所以這裡是 b，這裡是 c，然後，兩個長 b、寬 c，對，就是這樣子，兩股是 b 跟 c，然後，這裡是 a，這裡是 a，所以 b+c 平會等於 b 平加 c 平加上……，a 就等於 b 平加 c 平等於這樣子，然後，……，看怎麼把 a 求出來，………	探索+讀題 322
4-0-1-06	啊，我知道了，就是，這裡是這樣子，公式呢，這裡是 b，b 平加 c 平就會等於斜邊 a 平，….	分析 64
4-0-1-07	我再回去看一下題目，…	讀題 55
4-0-1-08	.這兩個…….	分析+探索 321
4-0-1-09	好，我再重畫一次題目，這裡是 b+c，這裡是 b+c，它說這裡是 b，b，這裡是 c，c，現在改成這裡有，這樣子，b，改成這樣子，然後這樣子，這裡也是，這裡也是，然後它說改成邊長為 a 的，所以這裡變成 a，這裡也是 a，這裡也是 a，這裡也是，所以就等於，…，它原本的圖，應該是這樣子，b+c，b+c，b…c，再來把它改成這樣子，變成邊長 b，c，兩個邊長為 b、c…，	分析 155
4-0-1-10	好，是這樣子，b+c 的平方會等於 2，這裡是 b，這裡是 c，所以是 b*c，然後有兩個，2bc，然後，這裡又有一個，加上 a 平，	計畫 30
4-0-1-11	然後，b 平加 2bc 加 c 平會等於 2bc 加 a 平，然後 b 平加 c 平會等於 a 平。	執行 17

小聰文字題 2

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
4-0-2-01	王老農夫有三塊正方形的土地，其中最小及最大的兩塊的面積分別爲 121 平方公尺及 3721 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長剛好是一塊形狀是直角三角形的池塘，求另一塊正方形土地面積多少？中間池塘的面積多少？	讀題 33
4-0-2-02	它說，有三塊正方形的土地，中間是三角形，然後，最小爲 121，所以這個是最小的，邊長是 11，那這個的面積是 3721，那麼要求另外一塊，中等的，	分析 39
4-0-2-03	那就是，…那就是，帶公式嘛，嗯假設這個是框框，那就是，框框平加上，不用，設這個面積爲 x 好了，	計畫 26
4-0-2-04	x+121=3721，那麼 x 會等於 3600，所以這塊是 3600。	執行 22
4-0-2-05	它說中間池塘的面積多少，3600 開根號是多少，60，那這裡是 11，那 60 乘以 11，再除以 2，	計畫 18
4-0-2-06	就會等於它的面積，它的面積 30，330。	執行 6
4-0-2-07	…【無聲驗算】8	驗算 8

小聰文字題 3

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
4-0-3-01	原本有一個正方形，將其四個直角分別減去，四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 2 的正八邊形，則這個的面積爲多少？	讀題 15
4-0-3-02	這是一個正方形，然後，它的四個角，分別爲這樣子，這樣子，這樣子，然後減掉以後，變成邊長爲 2 的，這樣面積爲多少	分析 18
4-0-3-03	如果這裡是 2 的話，那這裡是 2，那這裡是 1，1，…	探索 31
4-0-3-04	1:1:√3，這是它的，這是等腰直角三角形的，然後這樣子的話，1:√3，這裡是框框，這裡是 2，	計畫 27
4-0-3-05	2 會等於√3 框框，框框等於 2 除以√3，等於，2√3/3。那這個等於 2√3/3	執行 24
4-0-3-06	這樣子，2+2√3/3+2√3/3 平方就會等於它的面積，…. 重算好了，2 加上，…不要，	分析+探索 88
4-0-3-07	邊長比是 1:1:√3，這樣子，…84……。	執行　76

小聰文字題 4

流水號	原　　　　案	備註
4-0-4-01	已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 3 公里，再向西走 2 公里，到達 A 鎮；乙先向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮； A、B 兩鎮的直線距離爲多少公里	讀題 21 秒
4-0-4-02	然後我們就先畫圖，車站在這裡，然後甲先向北走 3 公里，3 公里，然後西走 2 公里，然後到達 A 鎮。乙向南走 4 公里，再向東走 1 公里，到達 B 鎮。	分析 32 秒
4-0-4-03	如果這個車站如果是，假設是(0,0)的話，這樣子那 A 就是，A 就是爲(2,-3)，那 B 的座標就是(1,-4)。那這兩個來算，這樣子 y=ax+b，再來是套進去，	計畫 37 秒
4-0-4-04	-2a+b=3，-4=a+b，然後兩個去解聯立，兩個相減。-3a=7，a=-7/3，…b=-4.. -4 加上 7/3，那個 b 就等於…-$\frac{-12}{3}$，	執行 90 秒
4-0-4-05	這樣子，直線距離…，這個不用，這個算錯了…【無聲讀題】	讀題+分析 45 秒
4-0-4-06	所以就直接用，就直接算…嗯，用那個，-2…-1 括號平方，這樣子，然後 3+4，	計畫 34 秒
4-0-4-07	就會等於，9 加 49 等於 58…就等於根號 58。	執行 19 秒
4-0-4-08	【無聲驗證】	驗證 18 秒
4-0-4-09	我應該是用錯公式了，嗯，那個公式應該是-2+1 平方加上，加上 3-4 平方，	計畫 23 秒
4-0-4-10	1 加上 1 等於根號 2。	執行 11 秒
4-0-4-11	那個算式，那個公式到底是什麼啊? 好了算了，根號 2。	驗證+探索 12 秒

小聰文字題 5

流水號	原　　　　　　　　　案	備註
4-0-5-01	爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂爲 P、Q，….壽山的高度 $\overline{PR}$=480 公尺，半屏山的高度 $\overline{QS}$=350 公尺，且 $\overline{RS}$=480 公尺，……。	讀題 39
4-0-5-02	那麼我們先畫圖，首先假設…這個是壽山，這裡爲，這個是最高點 p，那麼，這裡是 R，那這段是 480，另外一個，這個是最高點 Q，S，350。那麼，到這裡是 480，咦，這裡是 490，這裡是 480，然後它說纜線長最少爲多少。	分析 68
4-0-5-03	……350，480，那麼就先用 350 的平方加 480 的平方…，會等於這個的平方…..	分析+探索 112
4-0-5-04	壽山的高度 $\overline{PR}$=490 公尺，半屏山的高度 $\overline{QS}$=350 公尺….【無聲讀題】， 45	讀題 45
4-0-5-05	再畫一次圖，…	分析 40
4-0-5-06	那麼就是，這個是框框，490 的平方加上 480 的平方就會等於這個的平方，然後再去減掉 350 的平方，等於框框的平方，	計畫 25
4-0-5-07	再把它算出來…….。	執行 70
4-0-5-08	好像不是這樣子算，……	探索 79
4-0-5-09	嗯，就這樣子好了，140，140，這裡是 480，那這裡是框框，那這裡是，140 平加上 480 平會等於框框平，	計畫 22
4-0-5-10	我要算出框框來……那這裡框框會等於 500　500 公尺.	執行 69

小聰圖文題 1

流水號	原　　　　　　　　　　　案	備註
4-1-1-01	原本有一邊長爲 a+b 的正方形體育場，共分成四塊區域：兩個邊長分別爲 a、b 的正方形小足球場，及兩個長 a、寬 b 的長方形看台。如今因應世運到來，將球場改爲國際大規模。建築師巴布做了一些改變，將原本邊長爲 a+b 的正方形體育場，各，四邊各取 p、q、r、s 共四點，將體育場重新劃分爲兩股爲 a、b，斜邊爲 c 的四個直角三角形看台，及中央一個邊長爲 c 的正方形大足球場。四個看台圍在大足球場的四周。求 a、b、c 的關係	讀題 70 秒
4-1-1-02	a,b,c, 大足球場…。【看圖分析】	分析 29 秒
4-1-1-03	我回去看一下題目 【研：你在看什麼部分要說出來】, 講出來會沒辦法思考 【研：那你是在看圖還是看文字】, 我在看題目，看文字，因爲我不知道它在講什麼，好多。	讀題+分析+探索 96 秒
4-1-1-04	那就是，嗯，(a+b)乘以(a+b)等於這個正方形的面積嘛…，然後會等於(a+b)/2，然後因爲有四塊嘛，所以再乘以 4，然後再加上 c 的正方，c 平，兩個會相等，然後把它解出來。	計畫+執行 70 秒
4-1-1-05	這裡面解不出來。	探索 20 秒
4-1-1-06	這裡把它化成(a+b)平方…減掉 a 加 b 乘以 2 ，等於 c 平，(a+b)提出來，就等於 2，c 平	執行 27 秒
4-1-1-07	……這題不會。	分析+探索 25 秒

小聰圖文題 2

流水號	原　　　　　　　　案	備註
4-1-2-01	王老農夫擁有三塊正方形的土地，其中最大的兩塊的面積爲 1600 平方公尺及 1681 平方公尺，這三塊正方形土地的邊長恰好圍，成一塊形狀是直角三角形的池塘，求另一塊，另一最小塊正方形土地面積多少，中間池塘的面積多少	讀題 33 秒
4-1-2-02	我先算第一小題，然後，1600 等於，1600 等於 40 乘以 40，1681 等於 41 乘以 41，	執行 25
4-1-2-03	再去算這個，這個爲 x，邊長把它設爲 x，這樣就等於 x 平加 40 平等於 41 平	計畫 19
4-1-2-04	X 就會等於它們兩個相減，等於 81，所以 81 的平方等於多少…6561，這樣第一題就算完了。	執行 44
4-1-2-05	第二題中間池塘的面積多少，這樣這裡就是 x，x 就等於 81 嘛，然後 81 乘以，81 乘以 40 再除以 2	計畫 20
4-1-2-06	等於 1620，那第一題 6561，第二題 1620	執行 18

小聰圖文題 3

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
4-1-3-01	如右圖，原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少	讀題 20
4-1-3-02	這樣子的話，…，【看圖、文分析】	分析 133
4-1-3-03	我想要算出這段高，把這一小塊的面積算出來…，	探索 51
4-1-3-04	我又想別的方法了….，嗯，把正方形求出來，減掉這四個小三角形…，我在想怎麼把這個小三角形求出來，…	探索+分析 188
4-1-3-05	我再重讀一次題目，原本有一個正方形，將其四個直角分別減去四個相同的等腰直角三角形後，即成爲一個邊長爲 5 的正八邊形，則此八邊形的面積爲多少嗯…我在看這個圖形	讀題 104
4-1-3-06	這個，我先設這個爲 x 好了，然後 5-2x 的平方會等於這個正方形的體積，25-20x 加上 4x 平，那這個正方形算出來了，再減掉四個小三角形，等於，三角形，x 乘以 x 除以 2，四個，然後會等於 2x 平，然後 25-20x 加上 4x 平再減掉 2x 平就等於八邊形，的面積，	計畫 79
4-1-3-07	就會等於….，2x 平減 20x 加上 25….，	執行 16
4-1-3-08	我在想怎麼把 x 求出來。	探索+分析 139
4-1-3-09	我再重算看一遍…我在看圖……，放棄。	讀題+分析 189

小聰圖文題 4

流水號	原　　　　　　　　　　案	備註
4-1-4-01	已知甲、乙兩人均由某車站出發，甲先向北走 4 公里，然後再向西走 7 公里，到達 A 鎮；向西…，那麼，這段是 7，所以這裡是 7，這裡是 4，她說然後到達 A 鎮。乙先向南走 5 公里，5，再向東走 3 公里，到達 B 鎮；直線距離爲多少？	讀題+分析 63
4-1-4-02	那如果設車站爲（0,0），那它就是（-7,4），那這個是（3,-5），	計畫 32
4-1-4-03	-7 減掉 3 平加上 4 減掉-5 平，就會等於 100 加上，81 開根號，就會等於開根號 181。	執行 45

小聰圖文題 5

流水號	原　　　　　　　　案	備註
4-1-5-01	爲了發展觀光，政府打算在壽山及半屏山兩個山頭建造空中纜車，若兩山山頂分別爲 P、Q，壽山的高度 $\overline{PR}$=200 公尺，然後半屏山的高度 $\overline{QS}$ =500 公尺　， $\overline{RS}$ =720 公尺，那麼纜線 $\overline{PQ}$ 長最少爲少公尺	讀題 35 秒
4-1-5-02	$\overline{RS}$ =720，然後 $\overline{QS}$ =500 公尺，$\overline{PR}$=200 公尺，我要算這段，這樣子的話…要算出這段，要算出這條纜線…就這樣子，所以我就先算這個	分析+探索 42 秒
4-1-5-03	這個如果先設爲 x 的話，200 平加 720 平=x 平… .	計畫 26 秒
4-1-5-04	等於 558400….。	執行 30 秒
4-1-5-05	怎麼把 x 算快一點…	探索 57 秒
4-1-5-06	558400+500 平=y 平	計畫 14 秒
4-1-5-07	808400，那麼 y 就會等於…。8084 開根號…。	執行 200 秒
4-1-5-08	我重算，我先把它切對半，這樣這裡就是 720，這裡就是 300，然後算出 y。	分析 23 秒
4-1-5-09	720 平加上 300 平會等於 y 平，這樣子…，	計畫 39 秒
4-1-5-10	這裡是 720，這裡是 300，再用加的，會等於 y 平…等於 608400…，然後就會等於，600 開根號，60 根號 19	執行 113 秒
4-1-5-11	answer 最少爲…，答案是最少 61 公尺。	分析+驗證 15 秒