國立中山大學教育研究所碩士在職專班

碩士論文

國中三年級學生一次不等式解題策略及錯誤類型之研究

研究生：陳英貴 撰

指導教授：梁淑坤 博士

中華民國九十六年 六月

致謝

能夠順利完成研究所的學業取得碩士學位，實現自己的夢想，除了內心的喜悅，更充滿無限的感恩，非常感謝很多人的幫忙與支持，得以讓我達成此願望。

走過此撰寫論文之路，首先要感謝恩師梁淑坤老師，營造了一個充滿善意、能彼此分享學習心得及提供研究探討的學習環境，即使在梁老師工作最繁忙的時後，仍不忘記對我的關心、提攜與指引。

感謝楊淑晴教授與溫武男教授於口試期間的悉心審閱，並提供寶貴的意見與修改建議，使本論文得以修正至完整。

感謝有幸與楊榮達與李憶琴同學作為學習伙伴，一起勉勵完成各項功課與論文撰寫，有了你們的支持與協助，才能使本論文順利完成，願彼此珍惜這段難忘的學習過程。

感謝中山大學教育研究所的老師們之身教與言教，給予我更遠的視野與學習的典範，相信此學習期間的收獲，能給予實務工作上很大的幫助與發展。

感謝我的太太瑞美的支持與辛勞，讓我在完成學業過程中有兩個快樂的小天使，總是能帶給我內心喜悅與生活的滿足。

即將畢業了，以後和家人走在中山校園、西子灣海灘，我將很自豪的告訴我的小孩：「這個美麗的學校，就是爸爸畢業的學校。」

謹將本論文獻給栽培我的雙親及所有關心我的人！

英貴 2007.05.30

論文摘要

本研究主要目的是了解國三學生在解一次不等式的解題策略與錯誤類型，並探究造成錯誤類型的原因。

研究對象為高雄市、高雄縣與屏東縣204名國三學生，收集資料以兩個階段進行，第一階段以研究者自編之「一次不等式測驗卷」作紙筆測驗。第二階段根據紙筆測驗結果挑選8位學生進行晤談，分別進行錯誤原因的探討與補救教學的引導。

本研究的結果如下：

（一）學生在一次不等式的解題策略有：(1)轉譯、(2)化簡、(3)運算性質、(4)畫圖表徵、(5)代入法、(6)解集合法、(7)等量公理、(8)解不等式、(9)解方程等式、(10)組合數字、(11)列舉法、(12)猜測答案。

（二）學生在一次不等式的錯誤類型可歸類為：(1)不了解題意、(2)誤用符號、(3)錯誤組合數值、(4)錯誤概念、(5)誤判解答、(6)假設錯誤、(7)誤用未知條件、(8)誤用解題策略、(9)數值運算錯誤、(10)符號運算錯誤、(11)誤用運算規則。

（三）研究發現學生在解不等式單元最容易發生錯誤的地方是對題目的理解轉譯與答案的選取判斷。對不熟悉的類型題學生對寫出對應的不等式會感到困難；研究者也發現學生對於負小數或負分數的大小關係辨識不清，不論應用題或計算題都有不少學生有出現此類的錯誤。

不等式的文字應用題的解題失敗者，對代數語言的表示模式或關鍵詞句最主要原因是沒有正確的轉譯，分別會在「目標的確立」、「數學知識的結合」、「解題方法的使用」、「求解的運算過程」、「解答的判決」感到困難而發生錯誤。

關鍵詞：一次不等式，解題策略，解題錯誤類型

A Study of Problem-Solving Strategies and Errors in Inequalities for Junior High School Students

The aim of this study is to investigate students in learning in inequalities with one unknown, as well as to collect corresponding strategies and errors in problem solving. The subjects of this study were nine-grade students from junior high school. Six classes were selected from three schools with total of 204 students.

This investigator used a paper-and-pencil test in first round data collection. In the second round, some students were interviewed, to further understand students' way of thinking and reasons in errors produced in problem-solving procedures. Hopefully, results can be used as reference for junior high school math teacher to plan future teaching and to prepare teaching materials.

The results of the study are three: students solved linear inequalities by using 12 different strategies; students' errors can be divided into 11 types; and, the reasons for errors are mainly understanding and transforming information from problems and the determination on solutions. The students also found it difficult to understand negative fractions and negative decimals relationships (no matter in word problems or in calculation problems).

In this study, those who fail to solve problems involving inequalities with one unknown are those who cannot translate algebraic expressions or keywords. They produced errors 5 typical cases: determining objectives, integrating mathematics knowledge, using a problem solving method, calculating process, and, determining s solution.

國中三年級學生一次不等式解題策略
及錯誤類型之研究

目錄

第一章緒論

第一節研究動機

沒有學生不希望將數學學好，很多學生會向老師反應：「我很想學好數學，但是數學真的很難。」，老師卻常回答：「只要上課多專心、回家多看書、多作練習題、繼續加油，就會懂了。」，真的這樣嗎？

數學學習過程中，當學生無法順利找到答案而察覺解題困難時，會以重新檢視題目、參考答案、或以同儕討論與請教老師或家長、…等方法獲得解答，當困難沒有解決時便會產生學習遲滯，也有可能以自身的經驗曲解題意只為求得一個答案，產生迷失概念而不自知。Whitney (1985)認為學生不能理解數學在教什麼，而大人又錯誤地判斷是學生努力的不夠，而要求他們反覆練習。

以筆者的教學經驗中，筆者和學習困難的學生討論解題方式時常鼓勵學生：「你以前一定在哪一個環節沒有學好或遺漏了，我們現在從最前面檢查，一起把它找出來」。發覺以此種方式能鼓勵學生將解題過程完整呈現，更好的是很多時候學生在此過程中，就能察覺自己的困難，教學者也能找出學生發生錯誤的原因，此過程中學生和教師同為獲益者，不僅是學生能在克服障礙點；同時，教師能將障礙點的

產生原因作為教學方法調整的依據。因此研究者認為如果教學者能知道學生的想法(正確解題策略)或錯法(錯誤類型與原因)，才能在學生的學習過程或遭遇困境時給予實質性的幫助。

不等式單元是國中數學代數學習中的重要單元，國中代數學習以文字符號表示出發，等量公理為運算基礎，解方程式（等式）應用為解題練習。其重要的概念有：(1) 比較各種相關量的大小關係、(2) 估計各種量的變化範圍、(3) 運算規則推論的方式、(4) 範圍解的概念、(5) 貼近真實世界問題陳述與求解等。但由於不等式單元必須接續在一元一次方程式與二元一次聯立方程式單元之後，而且與高中一元二次不等式的教材有所重疊下，使不等式學習教材編排界定不明確，哪些部分是國中必須學習，而那一些部分是應排到高中時學習，產生不同版本上學習內容的差異。例如：南一版本中將絕對值的不等式求解與兩個不同未知數的不等式合併排入，而康軒版本並無此類內容，此差異可能對學生造成影響。

從認知心理學可知道數學概念的長期記憶是屬於語意記憶，人類的認知與記憶可以利用指標或節點將其以一種圖表模式來呈現，而且這些指標或節點可以呈現出許多概念與概念間的語意關係，而學習就是語意記憶中知識結構的新建與重組工作(鄭麗玉，1994)。學生在數學解題過程中學生不僅要學會數學概念，還要了解運用的時機，並且

要具備運算的技能，甚至與生活實例做連結以便運用於生活中。對學生而言，同時具備概念、原則、技能與應用能力，使得學生對數學學習感到困難。Rojano (1994)認為對國中學生的代數思考的形成是少年數學思考的轉變過程：(1) 是從算數到代數，(2) 是從個別的思考到一般化的思考，(3) 是從非形式化的解題到形式化的解題，(4) 是從畫圖到圖形，(5) 是朝向代數性思考。在此學習的過渡時期，如果在某些環節學習不完整，往往造成數學學習的困難，甚至產生拒絕學習的態度。

Whitney (1985)認為學生不能理解數學在教什麼，而大人又錯誤地判斷是學生努力的不夠，而要求他們反覆練習，必然將這些焦慮不安的孩子推向更大的危機。因此在數學教學過成程中，能正確判斷學生的想法，辨正學生的錯誤概念，並將其解題歷程的錯誤引導到以正確的概念與原則，了解策略使用的時機與運用技能的方法，才能使學生都能調整到朝正確的學習目標前進。

根據調查指出：多數學生在學習代數的概念與技巧是記憶性的，尤其是關於方程式的學習(Kieran，1992)。許多學生把解方程式看成是一種機械性的技能。雖然解方程式從表面上來看是單純的解題技巧，但其解題過程所涉的概念甚多，如文字符號的意義、多項式運算、等量公理等。Collis (1975)依據學生所理解的概念，將學校課程中有

關文字符號的觀念細分為知識、理解、應用、分析、綜合與評鑑六個層次。知識層次著重的是回憶，即記得學過的教材；理解層次著重的是轉換，意即掌握教材內容的意義；應用層次著重的是概括化，能將學過的教材用於新的情境；分析層次著重分解或發現，根據教材組成加以分解以利了解；綜合層次著重的是組合，即組合教材成為一個新的整體；評鑑著重的是判斷，根據目地判斷教材的價值。學生在後來解題的困難來自於對文字符號缺乏有意義的了解，如果學生對這些知識沒有完全理解或徹底掌握，就會產生妨礙學習的迷失概念，並使學生在碰到需要用到這些知識才能解決的問題時，產生了一致的系統性錯誤(systematic error)。當學生出現相同的錯誤類型時，便值得探討錯誤發生的成因，將其對符號的意義與運算的原則釐定清楚。

在國外學者 Ashlock (1976)認為分析學生解題的錯誤類型對教師及學生都是有幫助的。另外，國內學者戴文賓（1998）對由算術領域進入代數領域的國一學生學習現象的研究發現，只要學生得到解題與輔導的機會，都願意且有能力進入代數領域，這能克服學生不肯學習數學的情形。

筆者在教學過程中常發現，學生在學習解不等式計算時除了發現不少學生常被「不大於」、「不超過」、「不少於」語意混淆外，處理負數時，學生也因對「變號」的意義不清楚，使得負數四則運算錯置使

用而不自知，而且學生對「範圍解」的意涵也不易理解，這都說明了學生在此單元的學習有許多地方會有學習的困難，值得我們進一步去探究學生學習的表現與改進教學技巧。

近年來不等式的課程內容變動很大，如：從 82 年教育部版本的對不等式單元的刪減，到九年一貫課程 91 年暫綱版的重新加入到國中三年級下學期學習，至 94 年版公布的九年一貫正綱將不等式單元調整到國中一年級下學期，以致發生三年級與一年級在相近的學習時段學習不等式，而其間教學內容也有很大的差異，如「數線圖解」的重新加入、証明推論過程的省略、選修內容的調整等，說明了教科書編輯者對此單元觀念的意見分歧，現今國內外文獻對不等式也著墨者少，因此本研究透過對學生在一次不等式解題錯誤類型之分析，進行瞭解學生在此單元學習的困難所在，以提供學生學習與教師教學的參考，使教師能針對學生錯誤類型做教學與教材改進的參考，提供完整的學習架構，克服學生的學習障礙。

第二節 研究目的與待答問題

一、 基於以上的研究動機，本研究的研究目的設定為：

（一）探討國中三年級學生在一次不等式的解題表現。

（二）探討國中三年級學生在一次不等式的解題策略。

（三）探討國中三年級學生在一次不等式的錯誤類型。

（四）探討學生在解一次不等式的錯誤類型形成的原因。

二、 本研究的待答問題為：

（一）國中三年級學生在解一次不等式所使用解題策略為何？

（二）國中三年級學生在解一次不等式產生錯誤類型為何？

（三）學生在一次不等式的錯誤類型形成的原因為何？

第三節名詞釋義

一、不等式：

用符號＜、＞、≦或≧將它左邊和右邊的兩個式子連結起來，就形成一個不等式，式子中只有一個未知數且未知數的次數是 1，稱為一元一次不等式。

二、錯誤類型：

在數學解題過程中產生的錯誤步驟，依其出現錯誤的關鍵處作分類，分成幾種類型稱為錯誤類型（Kathlen，1987）。本研究所探討的錯誤類型係指透過進行「一次不等式測驗」與學生訪談結論所歸結之錯誤類型。

三、迷思概念：

指學生在學習科學概念前即擁有的直觀知識（intuitive knowledge），或與正統科學知識不符之概念。由於這些通常都是錯誤的，因此也有人稱之為錯誤概念（余民寧，1999）。

四、解題歷程：

Polya (1945)將解題的歷程分為四個階段：了解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧。解題者在解數學題目時，經過閱讀題目、分析探索問題的運用策略後，以計畫解題的程序並加以執行，直到求出答案並驗證答案的正確性等各步驟的整體運算過程。

五、數線圖解：

指將不等式解的範圍，以數線、粗線、箭頭等方式表示之。

第四節 研究範圍與限制

一、研究範圍：

本研究採方便樣本以高雄市、高雄縣、屏東線的三所國中各選取 2 個班級，共 6 個班級 204 位學生為研究對象，針對國中不等式單元為範圍，探討學生的解題策略與錯誤類型。

二、研究限制：

本研究針對一次不等式為研究重心，收集的題目與所得的結論可做為相同地區或類似樣本做參考，其他主題的推論則需更廣泛的與進一步的研究。

第二章 文獻探討

第一節 代數課程的定位

一、課程中代數學習的地位

代數式的問題解決在幫助孩童數學與邏輯思考技巧方面已被證明是一種無價的工具，藉此種問題解決的方式能強化孩童對概念的理解，而且可提供其他的好處，像是從減少數學焦慮到增加分享的水平程度(Femiano, 2003)。Vergnaud (1988)建議代數或先前代數(pre-algebra)應從小學開始。Schliemann、Carraher、Brizuela (2007) 針對 7 到 11 歲孩童的教室觀察發現：孩童使用數學符號不只是記錄他們了解的事物，也是去幫忙進一步去架構他們的想法，讓他們能在別的地方做不曾做過的推論；認為在小學課程應發展代數或先前代數。在課程方面 Kaput (1998)也強調代數編輯要能貫穿 K-12 的課程以提供學校數學一致性的深度與能力來取代以前不連貫又獨立淺薄的高中數學課程。

上述對代數的聲明越來越具說服力以致 NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)在 2000 年學校數學課程標準也贊同代數理解應從幼稚園開始的觀念，並且代數符號應是小學 3 年級課程的一

部分。而我國 94 年九年一貫課程綱要將代數符號學習、理解等量公理正式明文納入小學課程內，亦將「能以兩步驟式問題」、「求未知符號解」也納入國小六年級的延伸課程。由上述可知代數學習提早學習與受到重視的趨勢是目前國際數學共認的趨勢。

Rojano (1994)對國中學生的代數思考的形成認為：青少年數學思考的轉變過程是(1) 從算數到代數，(2)從個別的思考到一般化的思考，(3) 從非形式化解題到形式化解，(4) 從畫圖到圖形，(5) 朝向代數思考。數學邏輯推理的訓練是數學教育的重要目標，對於國中學生而言透過代數的演練來訓練，可謂是最容易達成，因此代數思考的學習是國中數學課程的主軸。學生在學習的過渡期會發生那些不理解或誤解，是教學者必須注意的，教學者可從基礎概念的形成、運算方法的學習、學習的認知與學習結果的呈現，測量出我們想知的結果，以此結果適時調整教學節奏，以確保學生的代數思考的學習方向。

二、文字符號

文字符號的使用是代數學習的基礎。Kuchemann (1981)認為學生對文字符號是否了解是影響學生代數學者非常重要的因素，由於學生對文字符號意義詮釋的差異，而影響學生對問題解決的困難程度。研究發現學生若能完全了解文字符號的意義，則與後續學習（如方程式、多項式、應用問題）的成就有高度正相關。在解應用問題時，多

數的學生的解題層次無法到達第一層次，可見多數學生在了解題意並把相關未知數用文字符號表達出來，這一初始階段已經出現極大困擾（王如敏，2004）。

袁媛（1993）根據皮亞傑的三個不同認知層次，對國一學生進行文字符號概念發展的測驗研究，結果發現：學生對文字符號的理解有很大的差異，不論學生到達哪一個認知層次，對於文字符號當作一般化的數字或變數都會感到相當困難。文字符號為中介的數學抽象概念，學生極不容易接受，若文字符號未能及時成為學生反應問題解決的工具，則無法真正連結文字符號與題意之間的訊息，間接使學生不當使用符號，也影響代數學習時使用的時機（王如敏，2004）。因此教學者在學生從具體的數字計算，到使用抽象的文字符號的過渡期，應發現學生發生困難與產生錯誤認知之處，給與適當引導與練習機會，使學生了解學習從慣用語到數學語言間轉譯的意涵。

三、方程式

Polya (1945)認為：從問題解決與數學的角度來看，方程式在代數領域中，扮演著非常重要的角色。謝夢珊（2000）以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討研究中，將造成不同表徵下解題表現的差異分為：對文字符號的認知差異、代數式的認知差異、等號的認知差異、解題策略的認知差異、解題程序的認知差異與思考方

式的差異，進而把影響解方程式的解題因素分成七類：(1) 運算符號的性質，(2) 運算符號的個數，(3) 運算符號與未知數的位置，(4) 未知數出現的次數，(5) 答案是否為整數，(6) 係數的大小，(7) 題目中是否有括號。並歸納出三個學生能正確使用方程式三個因素分別為：

1. 對方程式的了解：包括能正確使用未知數符號，並了解其在方程式中代表的意義。
2. 正確的運算過程：能夠順利進行文字符號的運算、化簡與合併。
3. 具足夠的先備知識：能了解問題中語意與適當使用運算符號，並能對答案檢驗其合理性。

方程式是將一般日常生活語言的問題描述，以未知數符號、運算符號轉譯為數學語言的簡化形式，結合等量公理的運算法則，達到以形式化的方法使問題獲得解決的目的，而此過程讓學習的學生感到困難，會因其中部分環節學習的不完整，加大在數學學習成就上的差異，這是學生數學學習感到挫折的原因。Simon (1980)在其研究中發現學生缺乏了解代數是如何結合數學的關係式解得一個特殊解的概念，當題目取材至真實情境中時，學生似乎不能就真實世界的狀況來思考，而只把它當作是一種按題目做機械式的轉譯對應到代數步驟而已。

四、不等式

不等號的使用始於數與量的比較大小，數學的許多分支中，有很多必須運用不等式以比較各種相關量的大小關係，與估計各種量的變化範圍。國中課程中不等式的學習，必須架構於方程式學習之後，相較於等式（方程式）的學習，不等式的學習常因其不確定性或具抽象意涵，使學生產生學習困難，藉由日常生活經驗中，時常見到的大小關係比較敘述並結合情境能減低學習的困擾。在研究者的教學經驗發現，國中學生能察覺不等式與方程式的不同，對不等式的意義也能了解，學習困難大多發生在解方程式先備知識的不足與語意上對範圍解的理解。

由於此單元除了在數學概念及目的和解方程式不同，有很多部分與解方程式是重覆的，課程中也用了許多時間去探討解一元一次方程式、二元一次聯立方程式、一元二次方程式等，使國中階段解不等式的單元在教學上沒有得到適當的時間分配，研究文獻亦較缺乏。不等式問題的求解能力須包含文字符號能力及基本運算規則的使用；與文字符號有關的能力有：「文字符號的使用（文字敘述與數學式子的轉換）」、「未知數在式子中的含義」、「式子的化簡」、「一元一次方程式的列式與意義」、「二元一次方程式的列式與意義」、「方程式求解與解的意義」、「文字問題的求解」...等，運算規則包括：「基本運算（交

換律、結合律、分配律)」、等量公理(移項法則)… 等，這些能力與計算原則和解方程式相同，因此讓不等式單元教學與研究的焦點產生模糊。

吳明玲(2003)調查國小二年級學童數感的表現，並透過數感教學活動後，探討學童數感改變的情形發現，五個數感向度中以「數的理解」和「數的大小比較」表現較好，「數與運算的關係」表現最差。

金玉麒(1987)針對 21 班 1011 位台灣南部地區國中學生進行絕對值與不等式概念的錯誤分析及補救教學的研究，發現：國中生對絕對值及不等式之概念並未完全了解，若教師能針對學生易產生錯誤之概念，事先加以說明與開導，事後給與予適當之補救教學，可增進學習之效果。其中特別提到四點，如下：

1. 負數運算規則：「若 a、b、c 為實數，若 a＞b 且 c＜0，則 ac＜bc」，但有許多學生仍寫成「ac>bc」。可見負數在不等式運算規則中的意義，是此階段的學生易產生等量運算的迷失。
2. 數線與坐標平面上：教師可讓學生比較「數線上畫 x＞3」和「座標平面上畫 x＞3」的不同，使學生理解不等式中解的意義。
3. 文字轉譯能力：學生易忽視文字中沒有說明的不等式關

係，例如：對三角形的邊長敘述沒有察覺到兩邊之和小於第三邊的數學概念，或三邊長須為正數的限制。

4. 不建議編列：絕對值之不等式對學生而言很難理解，建議不宜編列(目前教材中已經刪減)。

陳聖雄（2005）對高中學生在一元二次不等式解題上的主要錯誤有下列九種類型：任意開方、變號的處理錯誤、任意平方、將領導係數當成正數來處理、產生虛數比大小的謬誤、過度使用「無解」的概念、不會由二次函數圖形直接看出一元二次不等式的解、無法判斷恆為正數或恆為負數的充要條件、認為不等式的解只包含整數的情形。會造成這些主要錯誤類型的原因可分為下列六類：

1. 學生將先前學習過的知識作錯誤的類推。
2. 學生受到老師教學口訣、教材編排、及不當記憶公式的影響。
3. 先備知識的不足。
4. 無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結。
5. 對不等式的運算邏輯不清楚。
6. 受到直觀的影響。

九章出版社將「中學生解數學題常犯的錯誤分析」中對學生在不等式的迷失分為：

1. 對移項法則的迷失。
2. 對不等式乘、除法的迷失。
3. 對不等式平方的迷失。
4. 對不等式平方開方的迷失。
5. 對不等式分數形式的迷失。
6. 文字題條件考慮的迷失。

吳季鴻（2001）在探討高中學生在一元二次方程式的運算之錯誤類型及造成學生犯錯之原因的研究中認為學生學習一元二次不等式必須具備的預備知識不足，而導致在學習過程左支右絀，有部分原因是「因式分解」錯誤所致，不管是自然組或是社會組學生，對於一元二次不等式，仍存在許多迷失。可將其錯誤類型分為：(1) 因式分解錯誤，(2) 錯誤的運算規則，(3) 同號、異號的處理錯誤。(4) 變號的處理錯誤，(5)恆正、恆負的判斷錯誤，(6)將領導係數當作正數處理，(7) 將「無解」及「無限多個解」概念做過度推廣。並以上述結論將學生在「一元二次不等式運算」錯誤的原因歸納為：(1)誤用資料，(2)誤譯語文，(3) 不合邏輯的推論，(4) 扭曲的定理或定義，(5)技術上的錯誤。

從上述的研究可知由於國小、國中、高中各階段學習目標的不同，國小重視數與量的認知，國中強調文字符號代數意義的理解，高中則希望學生能利用已學的數學概念和計算原則做推理,所得的結論各有其特點,因此在本研究中將針對學生解代數文字符號能力與不等式中的數學概念,探究學生的思考過程所使用的解題策略,與出現錯誤的類型，希望能透過研究分析，能對各階段能力的連結，作為國中階段代數課程教學的改進建議。

第二節 數學解題的相關研究

一、解題歷程

Polya (1945) 的著作『如何解題』(How to Solve It)一書中提到解題的歷程可分為四個階段：

1. 了解問題：根據題目的提示，了解已知條件與問題目標以及未知條件。
2. 擬定計畫:找出未知數與已知數之間的關係，建立獲得答案的想法,如果找不到題目目標就建立先找到間接目標再找到題目目標的策略。

3. 執行計畫：實行所擬定的計畫，並檢驗每一步驟；

4. 回顧：檢驗核對答案的合理性與正確性。

Schoenfeld (1985) 將 Polya 的解題之歷程再細分為六個階段：閱讀、分析、探索、執行、驗證與移轉六個步驟。Schoenfeld 以認知的觀點從專家與生手的解題差異，發現到專家由於長時間解題經驗的累積，會發展出一些有用而又一致的解題策略。好的解題者能在解數學題目時，經過閱讀題目、分析探索問題的運用策略後，以計畫解題的程序並加以執行，直到求出答案並驗證答案的正確性。

除了以上 Polya 等的見解，在解題理念方面 Lester (1980) 描述數學解題需經過問題的知覺、問題的理解、目標的分析、計劃的發展、計畫的執行、程序和解答的評估等六個階段。數學教育的重點應擺在問題解決的思考過歷程，思考過程的分析與解題策略運用非常重要，可以肯定的是解題策略的擁有與適當時機的運用，對解題的成功與否有相當程度的關聯。學習代數的學生在認知上的要求有兩方面，一是使用符號表徵，再來是修改他們以前對某些符號的表示(Wagner & Parker, 1999)。學生根據文字問題的狀況的相關性以符號去轉化，把文字表達的條件改用數學符號表示，是從普通語言到數學公式語言的一種翻譯，因此學生必須徹底瞭解給與條件與熟悉數學表答形式(Polya, 1945)。

二、解題研究

Kilpatrick (1985) 指出想要成功解出一道複雜的數學題目，解題者須具備三種能力：擁有豐富且系統化的數學知識、能表徵並轉換問題的處理能力以及有控制系統能導引及挑選出有用的知識與過程。要成功解題，解題者須能瞭解及分析題意，從數學基模知識中辨別決定應該使用的解決方法，採用適當的策略，並能意識到目前自己解題的進度，檢視及修正錯誤，預測策略的可行性以作適當調整。

Mayer (1985) 提到解題方面時，強調數學學習不只是在求得正確答案解，更應該重視問題解決的歷程，否則，學生只會解決問題，但對數學的理解只是局部的，無法獲得完整的數學能力。數學教師也應從學生解題的過程進行研究，探討有發生的錯誤的過程，才能正確分析學生解題產生錯誤的原因。

在國內的解題研究中，楊金城（2004）對國一學生解數學文字題的研究分別以閱讀題目、問題分析、擬定計劃、執行計劃四個階段探究學生解題表現發現：低分組的學生因數學知識不足、較不會去注意關鍵字句、解題計劃不明顯、使用不當策略等現象。楊金城認為要成功解題解題者應包含：

1. 是否能瞭解及分析題意。

2. 是否能掌握解題的關鍵與發揮數學基模知識來辨別及決

定題目題型該使用的解法和方向。

3. 是否能評估正確解題策略，清楚解題的步驟，。

4. 是否能覺知自己目前的解題狀況。

5. 是否能察覺解題歷程的錯誤與矛盾之處，及檢視目前使用的原理與性質是否正確。

6. 是否能預測此解題策略的可行性及評估未來的解方向與方法。

7. 否能評估自己對此題的解題能力。

莊松潔（2005）分別對國小一年級、國小五年級、國中一年級學生對未知數概念及解題的晤談研究發現：國小個案能在具體情境以數的基本運算性質化簡未知數的式子，而國小五年級和國中一年級都能檢驗答案的合理性，建議國小數學教材若能及早加入讓學童學習以代數式描述算數文字問題情境之單元，將有助於他們在國中正式學習代數時，提升對文字符號概念的認知，以上這一些概念和能力都是不等式學習的基礎。

另外，陳建廷（2006）針對國一學生解題歷程的研究發現：學生在一元一次方程式單元的學習，常會有一些系統性錯誤概念或是學習困難，若教學者能針對此錯誤概念或是學習障礙之處，進行補救教學或是個別釐清，將有助日後的教學成效。

讓學生具備問題解決的能力，是國中數學課程教學的重要目的，更是教育部強調學校教育的目標，代數思考的訓練正是讓學生從許多各別問題的思考，透過了解問題(知道解題目標)，擬定計畫(選擇問題解決的策略)，執行計畫(以運算技巧完成計算)、回顧（將正確的運算結果回答問題）成為形式化的問題解決機制，將數學問題的解決能力移轉到日常生活問題的解決能力，本研究針對解題策略的研究正是透過對學生解題的歷程進行瞭解學生在形式化思考的模式。

第三節 錯誤類型的相關研究

一、錯誤概念的形成

錯誤概念指學生在學習科學概念之前即擁有的直觀知識（intuitive knowledge），或與正統科學知識不符之概念。由於這些通常都是錯誤的，因此也有人稱之為錯誤概念（余民寧 民 88）。由建構論的觀點，教師將一個訊息傳遞給學生，但每個學生都在建構此訊息對自己的意義，經過組合、忽略或轉換教師所傳的訊息後，造成學生所接收到的訊息並不一樣(Von Glaserfeld，1987)。學生解題時會依據其經驗與先備知識，當對詞句與訊息的理解與原來所傳訊息不同時，不僅會影響答案，也會影響思考過程，形成錯誤概念。

Schwarzenberger (1984)認為錯誤有助於數學的發展並提出兩個論點：

1. 錯誤有助於瞭解數學：錯誤會幫助教師讓學生瞭解數學的來龍去脈，而正確的論證卻經常不會。
2. 錯誤可做為診斷的工具：錯誤能讓教學者了解學生的想法，錯誤並非是漫無目的的發生，每個錯誤的發生各都有其發生的理由。

二、錯誤概念的原因

數學的學習的過成程是不會一帆風順，而對錯誤的察覺是修正學習的機會，當教學者了解學生的錯誤，推測出錯誤原因便能領導學生修正錯誤走到正確的方向。出錯是學習者必經的階段，唯有走出錯誤的瓶頸，學生才能踏上正確的途徑。小孩的行為都是學習而來，教育研究的責任之一，就是找出小孩錯誤行為背後的原因（黃敏晃，1998）。

Sutton & West (1982) 認為一旦錯誤概念形成後，即使經過教導與糾正，仍很難改變，而產生錯誤概念的原因有以下七點：(1)與生俱來的；(2)從日常生活而來；(3)隱喻而來的；(4)類比產生的；(5)來自同儕文化的； (6) 來自正式與非正式的教學；(7)字義的聯想、混淆、衝突或缺乏知識。因此教學者應在教學準備時就能對學生常見的

錯誤概念有所了解，在第一次教學時就能給與提示及解釋，以減少發生錯誤的機會，或發現學生產生錯誤概念時立即給與補救教學加以修正，以免影響往後的學習過程。

三、錯誤概念的類型

在數學計算式中產生的錯誤步驟，依其產生錯誤的關鍵處，分成幾種類型稱為錯誤類型（Kathlen，1987）。錯誤有兩種：一是由於不小心做錯而產生，稱為疏忽(slips)；另一種是由於學習了錯誤觀念或程序而產生，稱為系統性錯誤(systematic error)。系統性錯誤被認為是某種錯誤知識，或是缺乏某些必須之知識而引起，因此較受到研究者的重視。因此研究者認為對學生為何會形成錯誤，對錯誤的原因進一步研究，進而給予修正的機會應是教學者應具備的重要技能，在此之前，要去發現學生錯誤並將錯誤類型歸類，分析學生的解題歷程有助於從學生的想法找到產生迷失概念的原因。

Brown 與 Vanlehn (1982) 解釋學生解題產生錯誤的原因，乃是由於學生在使用不完全的解題算則時遭遇僵局，於是尋求自己比較能接受的法則來解決困難，這個過程稱為修補(repair)，若修補成功，則修補辦法就會保留而成為法則，若是失敗，則解答過程變會出現錯誤。從上述「修補」的的想法，當教師發現學生的錯誤時可以適時給予指正讓學生經過認同而調整與改變，亦可利用機會作適當的引導，讓學

生自己發現錯誤達到修正的目的。

Movshovitz-Hadar , Zaslavsky, Inbar (1987) 重視運算過程的分類，將以色列的大學聯考資料作分析後，將錯誤原因分為六類：

1. 誤用資料（Misused Data ）：指計算時所擁的資料與原有的資料不符，可由學生所寫出的內容找到一些題目所提供之資料與錯誤訊息。
2. 誤釋語意(Misinterpreted Language)：指轉譯到數學語言時產生的錯誤，其中可能是圖形、符號或方程式的表達錯誤。
3. 不合邏輯的推論(Logically Invalid Inference)：指推理方面的錯誤。
4. 扭曲定理或定義(Distorted Theorem or Definition)：指將定義或定理的原則扭曲。
5. 未驗證解答(Unverified Solution) ：指答案未經檢查、驗算或證明。
6. 技術上的錯誤(Technical Error) ：指計算上的錯誤。

學者林清山、張景媛（1994）提出學生在代數應用問題的錯誤概念包括如下：

1. 題意轉譯的錯誤概念：包含學生對於關鍵詞句詞義無法充分了解；學生對於問題中哪些是無用的條件辨識不清。

2. 問題整合的錯誤概念：包含缺乏基本的數學概念；無法察覺到所計算出來的答案是否合理；學生不會做假設；學生套用固定的模式而不隨問題的變化而加以改變。
3. 解題計畫與監控的錯誤概念：未能了解已知條件與未知條件之間的關係，以致假設與式子不符；無法針對不同的問題採用不同的解題策略；學生以為一個題目只有一個方法:學生會受前後題的影響而採用不當的解題策略。
4. 解題執行的錯誤概念：在解方程式時會產生移項錯誤；移項錯誤多半是因為缺乏等號兩邊等值的觀念；學生在使用消去法時容易產生正負號混淆的情形。

蔡育霖（2005）對國一學生解一元一次方程式發生的錯誤主分類為：國小學習經驗與新經驗互相干擾、先備知識不足、運算規則不清楚、不了解題意或作出錯誤判斷、粗心大意，另外，雖然課本以等量公理說明運算規則，但學生普遍習慣以移項法則來解一元一次方程式。

對於學生常「算」錯數學題目，教師、學生或家長，常將其歸類於「粗心大意」的籠統說法，沒有進一步去深究其發生的原因，只是要求作「更多的練習」，研究者從上述研究中發現，數學學生在解題過程會出現錯誤有很多因素是因為部分知識的不完整，如語意、符號

使用、訊息結構、運算規則的部份知識不足，使其解題產生錯誤，在教學層面上：如果教師能在教學準備時就能對學生常出現的錯誤有所瞭解，則能在教學過程作適當提示，了解何時要對預備知識的復習，利用時機以實例闡述題意，教導學生透過關鍵詞句的理解來組織訊息，對運算規則中「通則」與「特例」進行解釋與說明，以及符號使用的意義，從教師教學過程來避免學生的出錯。

國內的對學生學習困難的相關研究，也呈現和前述相符合的結果，周宏樵（2004）對學生在解一元一次代數文字題時的學習困難有下列四點：(1) 未能了解題意並把相關未知數用文字符號表達出來，(2) 文字符號概念知識不完備，(3) 未能依照題意列出符合題意的一元一次方程式，(4) 未能正確解出一元一次方程式。學生在解題的歷程中，對於所需要的四種知識即語言知識、基模知識、策略知識、程序性知識都有很多不同的。研究者認在學習層面上來看：當教師能瞭解學生學習的困難所在，可對學生出線的錯誤以較淺顯的語具作分類，例如將學生錯誤分為語文上、觀念上、方法上、運算上的錯誤，讓學生也能理解錯誤的不同性質，將原本的「粗心大意」的模焦點轉為明確方向，引導學生從學習過程出現錯誤的時機進行錯誤的修補工作，研究者相信當學生能自己發現並修正錯誤時，正是建立學生建立「信心」與找到數學學習「樂趣」的時刻。

第四節　一元一次方程式教材分析

一、一次不等式在國中代數課程的定位

近年來由於課程的改革使數學教學內容的編排更具彈性，課程編排者根據教育部頒訂之課程綱要，編排數學學習架構，不等式單元是其中變動最大者。根據九十一年版教育部國民中小學九年一貫課程暫行綱要將數學領域課程目標定為：(1) 掌握數、量、形的概念與關係，(2) 培養日常所需的數學素養，(3) 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。(4) 發展以數學做為明確表達、理性溝通工具的能力。5. 培養數學的批判分析能力。(6) 培養欣賞數學的能力。課程將中不等式學習安排於九年級下學期，其相關的能力指標為：

A-3-2 能將生活中的問題表徵為含有 x、y、...的等式或不等式，透過生活經驗檢驗、判斷其解，並能解釋式子及解與原問題情境的關係。

A-4-3 能檢驗、判斷不等式的解並描述其意義。

A-4-5 能利用一次式解決生活情境中的問題。

九十二年正式頒訂國民中小學九年一貫課程綱要，進一步對課程目標以學習階段區分，將數學領域國中課程目標定為：(1) 能理解坐標的表示，並熟練代數的運算及數的四則運算。(2) 能理解三角形及

圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理。(3) 能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法。課程安排於七年級下學期，其中不等式學習相關的能力指標為：

A-3-04 能用含未知數的等式或不等式，表示具體情境中的問題，並解釋算式與原問題情境的關係。

A-3-09 能檢驗、判斷一元一次不等式的解並描述其意義。

A-3-14 能利用一次式解決具體情境中的問題。

國中數學課程內容可分為五大主題：(1) 數與量，(2) 圖形與空間，(3) 統計與機率、(4) 代數、(5) 連結。雖然以文字符號設方程式解決問題的能力是代數項目的主要學習目標，但是在幾何、統計與機率的項目中，以文字符號求未知數的問題與實例也佔有非常大的部分，因此以文字符號求解未知數的能力，可說是國中數學課程訓練的最重要目標。

在代數部分在第一冊的前兩章討論數的四則運算、公因數與公倍數，第三章開始進入符號的使用介紹一元一次方程式，自此面對以文字符號解決問題的學習歷程，透過解一元一次方程式、二元一次聯立方程式、直角坐標與二元一次方程式、線形函數及其圖形、一元二次方程式…等，以完整的等式體系學習以符號求解未知數的問題解決能力，解不等式的位置應放在那一個學習階段，由本文第二章第一節的

探討，解不等式所須具能力和解方程式能力重疊性高，在民國 82 年國中數學課程標準與民國 91 年九年一貫暫行綱要數學領域課程標準所編之課本，將不等式編在等式體系學習之後，置於一元二次不等式之後，主要是考慮到學生須具備二元不等式的思維，以接續高中線性規劃的教學；在以九年一貫正綱數學領域課程標準於民國 94 年正式發行的數學課本則將其編在解一元一次方程式之後，主要是考慮讓學生了解等式與不等式的區別，能更貼合實際生活的問題解決，兩種考量皆屬合理，但也各有其優缺點（如下表）。

表 1-1

	82 年版與 91 年版	94 年版
階段	一年級	三年級
優點	學生具備熟練的解方程式技能。 能和高中課程連結。	能立即做等式與不等式的比較。 貼合實際世界的情況。
缺點	學生覺的內容太簡單使注意度降低。	缺乏二元不等式思維的經驗。

根據實證研究：國中一年級男女生對於「文字符號可當作一般化的數字」及「文字符號可當作變數」之概念理解均深感困難，顯示國一學生對文字符號概念的理解，多未到達這兩個層次，尚無法解決這

兩類概念的問題（陳慧珍，90)。七年級認知理解各層次人數分佈與八、九年級有顯著的差異；八年級與九年級之間未達統計顯著差異，學生的文字符號運算概念的表現隨年齡增加顯著的增強，.... 文字符號運算概念認知層次的高低對於代數運算的成就有顯著的影響，學生的代數運算成就不受接觸代數的時間多寡影響，成就表現取決於文字符號概念的認知成熟度（許正諭，94)。

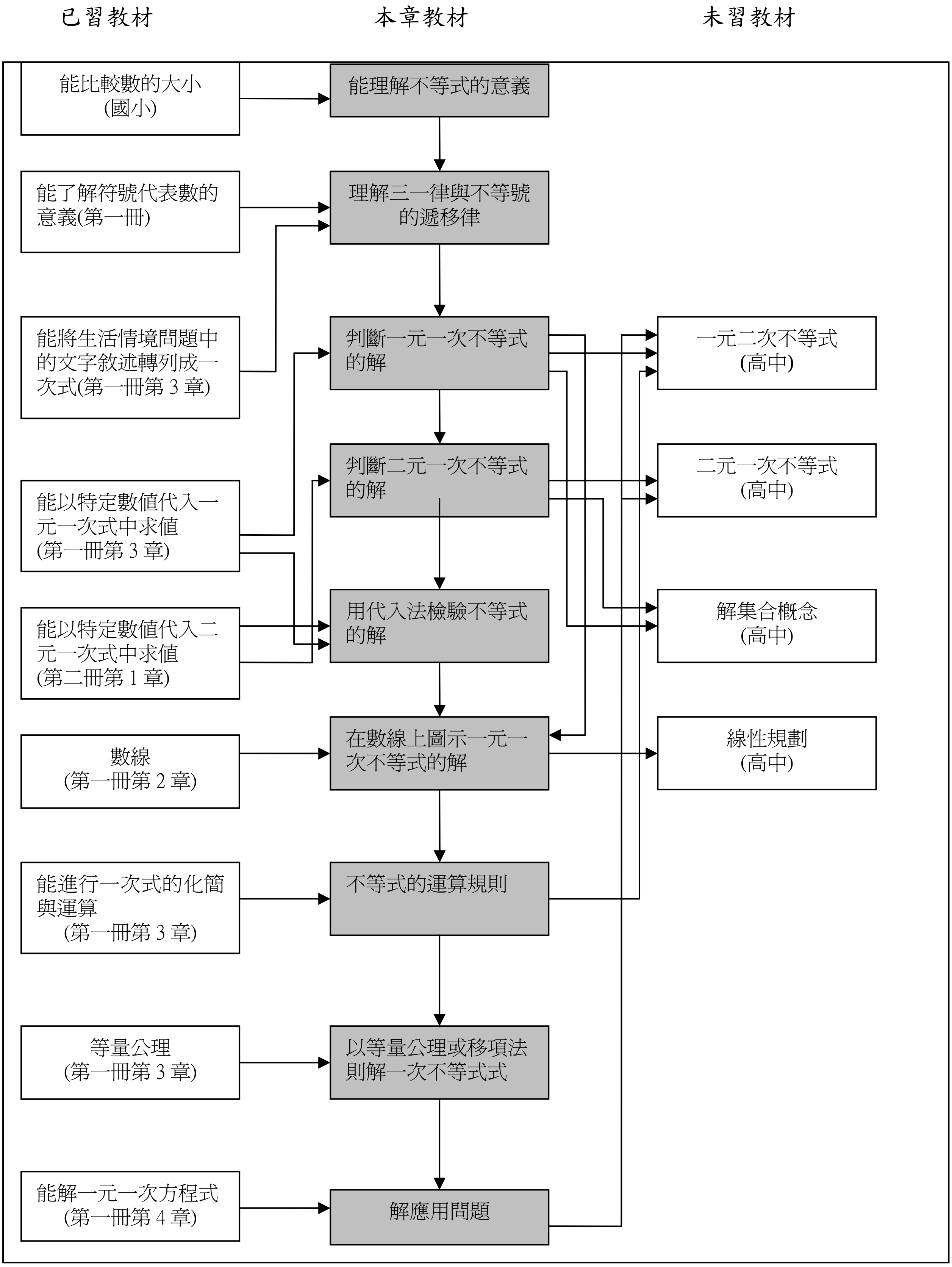
以研究者的教學經驗，可感受到學生字符號概念的認知成熟度與學習時間的正相關，國一的學生在解決一元一次題目時，學習成就高者也會常用數值代入的方式來獲得答案，而國三學生中許多學習成就低者，即使沒有完成運算，也都會以設未知數的方法嘗試求解，寧願放棄作答也少有代入數值求解者，因此，研究者認為，能具備熟練的解方程式技能，再學習不等式的求解，學生會有能力注意到不等式的其他學習目標。

根據皮亞傑認知發展理論，時間是重要的學習因素之一，如果時間充足，學生能重組所學使學習能夠進一步深入探求學習的內容，或者得到新的能力，不等式的學習內容中與解方程式有很大的重疊，透過類似內容再次學習與時間的考驗，可以使學生能夠對文字符號的意義的理解更加深入，使學生的代數知識得以重組與轉換，因此不等式課程編排在九年級下學期（以康軒版、南一版為例）較合理，可使學

生代數的解題能力更加完整。

由上述的課程改變知道不等式在課程實施上的不同，以九十五學年度為例，一年級與三年級的學生在同時段學習解不等式，而依其對代數能力的成熟度學習範圍有所調整，一年級尚未學習二元一次方程式，學習範例中不含兩個未知數的不等式，情境說明也較受限制，故本研究以三年及級學生為研究對象。

二、教材地位分析與其它單元間之關係(以康軒版為例)



第三章　研究方法

本研究目的在探索國三學生在不等式解題上運算錯誤之情形，分析學生的錯誤類型，從學生對不等式單元學習表現，探究造成學生錯誤的原因，與能引導學生到正確目標的教學方式，以提供教師教學策略與學生學習方法上改進的參考與補救教學之依據，以提升學習的成效。

本研究以「紙筆測驗」及「晤談」兩種方法進行分析。第一階段針對學習不等式單元的國中三年級學生進行測試，將其測驗表現作分析處理，分別從學習成就、解題策略與錯誤類型分析學生在不等式單元的學習錯誤概念與修正策略。第二階段從學生成就表現選取代表個案進行訪談，分別由其學習認知、錯誤概念進行學習的調整。第三階段綜合整理測驗與晤談資料，建構不等式單元學習流程圖與勘誤表，提供為教學教材的參考。本章將本研究之研究設計、研究樣本、研究工具及資料分析說明之。

第一節　研究設計

本研究為確實瞭解學生在學習不等式的解題策略與發生錯誤類型的原因，以「紙筆測驗」及「晤談」兩種方法進行資料蒐集：

（一）藉由「紙筆測驗」調查學生在解不等式運算所使用的解題策略與出現的錯誤。測驗卷內容針對學習內容之概念認知、運算技能、問題解決為題目內容設計難易不同層次的題目，目的在由學生的表現中能觀察到學生的理解能力、解題策略與解題歷程。對學生的紙筆測驗解題結果，分為正確解題與錯誤解題兩類，再將正確解題者的解題策略與錯誤解題者的解題情形做分類。

（二）藉由「面談」瞭解學生在解題時之想法及運算錯誤的原因與背景。以非結構式的面談引導學生回想當時解題時對試題的認知與想法，瞭解學生對題目的理解與解題使用之策略，並給予教學引導觀察學生反應；面談時採用錄音方式再由研究者將錄音內容轉成文字稿。

（三）整理學生的紙筆測驗、晤談結果，分析學生在不等式單元解題的想法與錯誤原因。

第二節　研究對象

本研究針對正學習不等式單元之國三學生，分別以高雄市 A 國中(都會區)、高雄縣 B 國中(一般城鎮)、屏東縣 C 國中(偏遠學校)為方便樣本各選取 2 個常態班級，共 6 個班級 204 位三年級學生進行紙筆測驗調查，希望藉由樣本涵蓋高、高、屏三個縣市，且三所國中地理環境的不同，使本研究的樣本能具代表性，提升施測的信度與效度。紙筆測驗於學生學習此單元後進行施測，並進行初步分類統計後選取適當個別樣本進行面談，藉以評鑑學生在此單元的學習認知結果。

三所國中使用的教材為：高雄市 A 國中與高雄縣 B 國中使用南一版、屏東縣 C 國中使用的版本為康軒版。兩個版本的章節內容比較(如下表 3-1)，南一版本安排於三年級下學期第一章，康軒版本安排於三年級下學期第二章，兩版本學習時間相近內容也大致相同。

表 3-1：各版本教材內容之比較

	高雄市 A 國中	高雄縣 B 國中	屏東縣 C 國中
使用版本	南一版		康軒版
教材地位	第六冊第一章		第六冊第二章
章節內容	1-1 不等量的表示法與性質 1-2 解一元一次不等式		2-1 一次不等式的意義 2-2 解一次不等式

在正式施測之前，研究者選取已學過此單元使用 91 年版課本的高中一年級學生 6 位與使用 94 年版課本的國二學生 54 位都學過解不

等式單元者，計 60 位學生進行預試以作為試題修正之依據。並請指導教授及具豐富經驗之 3 位數學教師審查試卷並徵求其意見作為調整修改的依據。

第三節 研究工具

一、 自編之「一次不等式單元測驗卷」

依研究需要編製「不等式運算測驗」試卷，以調查學生學習不等式之學習情形，並探討錯誤類型。編製之測驗卷參考文獻資料、國中數學課程標準、學生使用教科書與教師手冊編列，並與現職國中教師討論學生常犯錯誤類型，分析學生在不等式學習前後應具備之能力，建立不等式的學習架構並經過預試後修改，以得到正式施測試卷。

二、預試與修改

預試以學過不等式單元的高中一年級 6 位學生與國二學過（94 學年度）不等式單元的 2 個班級學生為對象，結果與修改如下：

表 3-2：預試題目雙向細目表

	教學目標	題目類型			合計題數
		概念認知	運算技能	問題解決	
教學內容	認識一次不等式	(1)	(3)	(8)、(9)	4
	一次不等式的解	(5)	(10)	(19)	3
	不等式的運算法則	(2)(4)(6)	(12)(13)	(7)(14)	7
	不等式解和數線的關係		(11)		1
	解一次不等式之文字題	(16)	(15)	(17)(18)(20)	5
	合計	6	6	8	20

表 3-3：預試結果

題號	答題人數	答對人數	答對率(%)	刪選與修改處理
(1)	60	58	97	刪除
(2)	60	28	47	保留
(3)	60	30	50	增加一個子題目
(4)	60	60	100	刪除
(5)	60	46	78	刪除
(6)	60	50	83	刪除
(7)	60	20	33	保留
(8)	60	54	90	保留
(9)	60	26	43	與第 10 題整併
(10)	60	26	43	與第 9 題整併
(11)	60	18	33	刪除
(12)	60	14	23	刪除
(13)	60	6	10	刪除
(14)	60	12	20	刪除
(15)	60	28	50	保留
(16)	60	10	16	保留
(17)	60	4	6	刪除
(18)	60	8	13	增實例說明引導
(19)	60	6	10	刪除
(20)	60	14	23	保留

由預試結果與訪問學生對題目的反應，刪除太難與過易的題目，或對題目敘述做修改，並檢視對應能力指標，將測驗卷之編製依不等式單元學習內容與對應能力指標分別以「層次性題目」、「運算規則」及「情境問題」方式做調整，以確實了解概念認知情形、運算技能使用、問題解決能力等對應資料，以決定正式測驗題(表 3-4，3-5)。

表 3-4：不等式單元學習主題、學習目標與題號對應表：

學習主題	學習目標	題號
認識一次不等式	認識不等符號「＜」、「＞」、「≦」、「≧」與不等號的遞移性質。	2
	將日常生活實例寫成一元一次不等式或二元一次不等式。	7
一次不等式的解	判斷一元一次不等式的解。 解一元一次不等式。 檢驗不等式答案之合理性。 瞭解不等式解和數線的關係。 圖解一元一次不等式。	4 6
不等式的運算法則	理解等量公理在不等式運算的意義 不等式的加、減、乘、除的運算法則 理解等量公理與移項法則在解不等式的意義	1 5
解一次不等式之文字題	以不等式解決的情境問題	3 8 9 10

表 3-5：正式卷雙向細目表

	教學目標	題目類型			合計題數
		概念認知	運算技能	問題解決	
教學內容	列一次不等式(列式）	(2)		(7)	2
	求一次不等式的解(求解)		(4)	(6)	2
	不等式的運算法則（算則）	(1)	(5)		2
	解一次不等式之文字題（文字題）	(3)	(8)	(9)(10)	4
	合計	3	3	4	10

二、 非結構式的面談

本研究以非結構式的面談以了解學生在作答時的想法，面談時先準備作答資料，讓學生作類似題型，引導學生回想當時解題時對試題的認知與想法，給與教學引導觀察學生反應。研究者應先統計學生整體作答情形，根據統計結果在不同階層選取適合之學生進行面談，過程中以錄音方式記錄結果。

第四節實施流程

一、 蒐集資料：

參考國內外有關不等式文獻，並分析學習內容，參考國中學力基本測驗題型建立題型架構，與指導教授討論文字的修飾之後，共選取二十題做為預試之試題。

二、編製工具

依研究需要自編「一次不等式單元預試測驗卷」，內容針對學習內容之概念認知、運算技能、問題解決為題目內容設計難易不同層次的題目，目的在學生的表現中能觀察到學生理解能力、解題策略與解題歷程，題型分別為選擇 5 題非選擇 15 題，測驗時間為 40 分鐘。

三、進行預試

預試分別以學過不等式單元的高中一年級 6 位學生與國二學過（94 學年度）不等式單元的 2 個班級學生為對象，目的為瞭解研究工具是否能確實調查出學生在不等式運算錯誤之情形。

四、試題修改

將預試結果刪除太難、太容易或學生不懂題意等較不適合的問題，再與學校數學教師、指導教授討論後修改試題，決定正式施測的 10 題測驗題，包括 1 題選擇題、1 題文字符號表示填充題與 8 題計算

題，題目選擇根據不等式單元教學目標分類依「甲類−列式」2 題、「乙類−規則」2 題、「丙類−求解」2 題、「丁類−文字題」4 題，總計四類共 10 題，每類題目以根據測驗目標選取不同難易題目以觀察學生的表現情形。

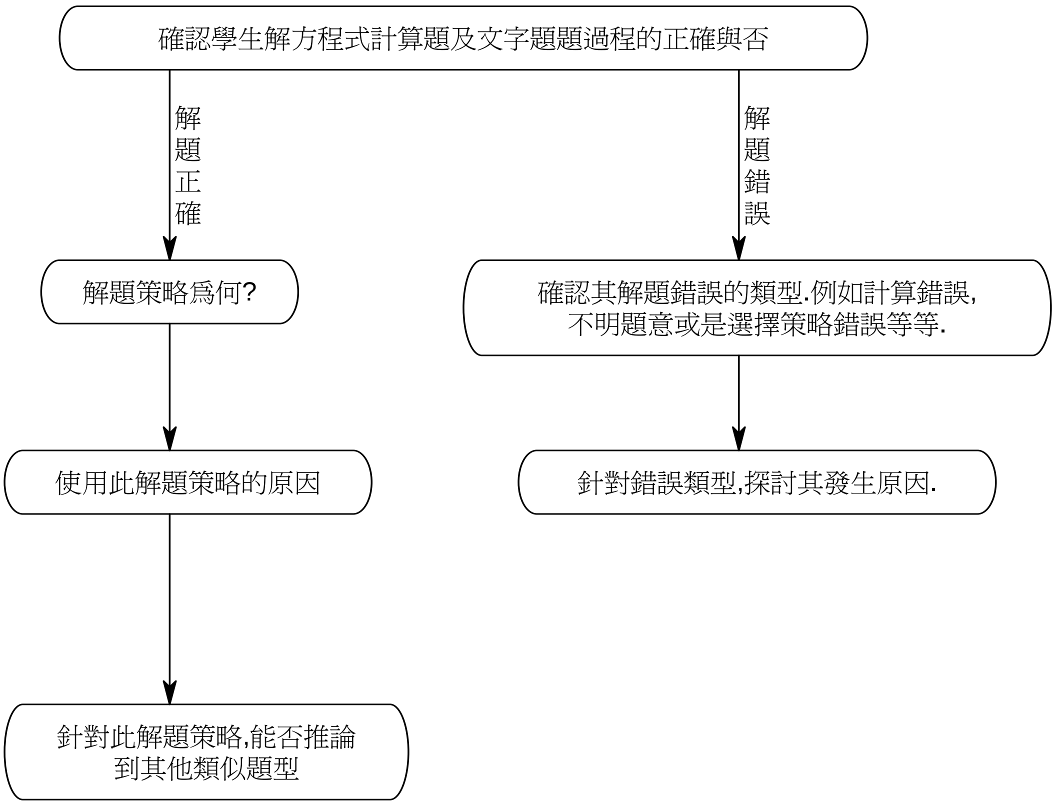
六、正式施測

正式施測樣本為高雄市、高雄縣、屏東縣各選一所國中的 2 個班級，共 6 個班級 204 人，本研究正式施測時間為 96 年 3 到 4 月，以團體方式施測，施測時間為 40 分鐘，施測前由研究者說明施測目的與作答注意事項。為了要了解學生解題策略及錯誤情形，本測驗除第 1 題為選擇題，第二題為符號列式填充題外，其餘 3−10 題採計算題方式，並要求學生必須寫出解題過程，不可空白。

七、晤談階段

依學生作答內容與呈現的錯誤類型選取具代表性者及配合度較高的學生，實施晤談。以非結構式的面談引導學生回想當時解題時對試題的認知與想法，瞭解學生對題目的理解與解題之策略，並給與教學引導觀察學生反應；面談時採用錄音方式，再由研究者將錄音內容轉成文字稿。

晤談流程圖

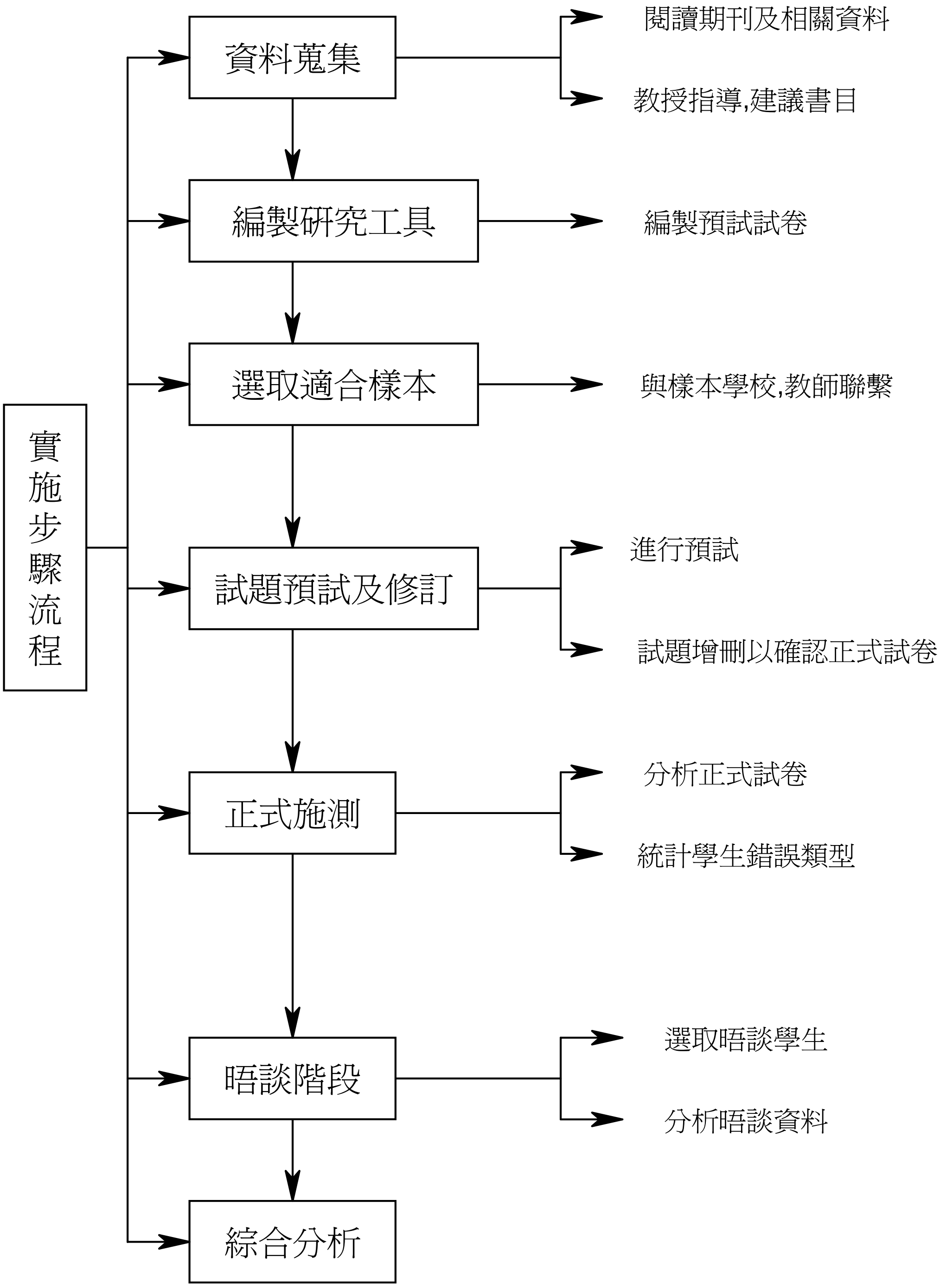


八、資料分析

（一）將蒐集之作答資料作結果歸納統計，分別作學生解題策略與錯誤類型的分類，並探討錯誤原因。

（二）面談結束後，將所有面談資料收集並予以分析，依學生陳述資料探討學生學習情形，用來了解學生可能犯錯之想法與原因。

圖：本研究流程圖



實施步驟流程
資料蒐集
閱讀期刊及相關資料
教授指導,建議書目
編製研究工具
編製預試試卷
選取適合樣本
與樣本學校,教師聯繫
試題預試及修訂
進行預試
試題增刪以確認正式試卷
正式施測
分析正式試卷
統計學生錯誤類型
晤談階段
選取晤談學生
分析晤談資料
綜合分析

第四章結果與討論

本研究從 204 位學生在一次不等式測驗試卷的基本概念及應用問題的解題表現加以分析，探討學生發生錯誤原因，本章根據研究待答問題將結果分為四個部份說明。第一節以學生在不等式單元測驗結果的正確率探討學生在不等式測驗的表現情形；第二節依學生解題的結果分析學生的解題策略；第三節將學生錯誤類型作歸類、整理出學生在本研究中出現的錯誤類型。第四節根據第三節的歸類探討其發生錯誤的原因與學生的困難。

第一節　一次不等式之解題正確百分比

本節根據研究者自編之「一次不等式單元之測驗卷」對剛學習完不等式單元之學生施測，將第一階段筆試結果分別就四類題型中每一小題的答對人數、答錯人數及正確解題百分率做統計呈現學生的作答情形。

一、學生在各試題之表現情形統計

本研究將一次不等式試題區分為四類如下：甲類-以文字符號列式[列式]、乙類-不等式運算法則[算則]、丙類-不等式求解[求解]、丁類-文字問題求解[文字題]，所有學生在一次不等式測驗中每一題之答題情形，包含答題人數、答對人數、正確率如下表(見表 4-1-1)。

表 4-1-1　學生作答正確率統計表

主題分類	題號	答題人數	正確人數	各類平均確率
甲-[列式]	2	204	96	0.54
	7	204	125	
乙-[算則]	1	204	122	0.59
	5	204	116	
丙-[求解]	4	204	146	0.63
	6	204	111	
丁-[文字題]	3-1	204	101	0.40
	3-2	204	52	
	8	204	82	
	9	204	99	
	10	204	72	
總平均				0.54

由上表學生在不等式測驗卷的平均正確率為50，四類型平均正確率54，顯示半數的學生在文字符號計算與不等式解題是有困難的，四個類型的表現以丙類的不等式求解（63%）最佳，其次為乙類的不等式運算法則（59%），再來是甲類的以文字符號列式(54%)，最差為丁類的文字問題求解（40%）；其中學生在乙類的不等式運算法則（59%）、丙類的不等式求解（63%）、文字符號列式(54%)明顯優於丁類的文字問題求解（40%），此差距顯示了學生能了解運算規則並操作符號的運算，但對不等式數學實質意義並未真正理解與熟練，對文字理解的符號表示也有所缺乏，符合前述國內研究袁媛（1993）、王如敏（2004）等的研究結果：學生對文字符號的理解有很大的差異，無法真正連結文字符號與題意之間的訊息。尤其當出現了學生不常見的題型或文字敘述時（如題3-2、題10），由於上述能力的缺乏，正確率呈現明顯的下降。

二、各國中學生作答的情形

以下表格以學校為不同樣本群體，統計不同學校的學生在各題目的正確、錯誤與空白未作答作答情形(表4-1-2)。

表4-1-2 三所國中學生各題表現統計表

類	題	A國中			B國中			C國中		
		正確	錯誤	未答	正確	錯誤	未答	正確	錯誤	未答
甲	2	0.45	0.33	0.22	0.54	0.23	0.23	0.44	0.45	0.11
	7	0.63	0.24	0.13	0.58	0.33	0.09	0.47	0.48	0.05
乙	1	0.65	0.35	0.00	0.58	0.42	0.00	0.53	0.47	0.00
	5	0.55	0.37	0.08	0.73	0.22	0.05	0.40	0.55	0.05
丙	4	0.78	0.16	0.06	0.70	0.25	0.05	0.68	0.29	0.02
	6	0.63	0.27	0.10	0.61	0.29	0.10	0.37	0.57	0.06
丁	3-1	0.51	0.31	0.18	0.56	0.33	0.11	0.40	0.37	0.23
	3-2	0.35	0.35	0.30	0.23	0.38	0.39	0.17	0.48	0.35
	8	0.46	0.21	0.22	0.52	0.33	0.15	0.21	0.66	0.13
	9	0.56	0.21	0.23	0.59	0.22	0.19	0.28	0.40	0.32
	10	0.42	0.32	0.26	0.30	0.31	0.39	0.32	0.27	0.41
平均		0.55	0.29	0.16	0.54	0.30	0.16	0.39	0.45	0.16

三個不同的樣本群中，A 國中正確率 56%與 B 國中正確率 54%相近，而 C 國中正確率 39%較前兩者為低，雖然各樣本群間表現的比較不是本研究所探討的重點，影響此差距的因素很多，但從各群學生中解題行為共通性的比較中可發現，除了教師教學方式與城鄉差距的因素外，可從接下來的學生表現的比較探討發現，學校使用教科書版本的不同應是影響學生表現的重要因素。

三、學生解題表現討論

研究者所編之測驗卷題目包括四類主題：甲類-文字符號列式；乙類-不等式運算法則；丙類-不等式求解；丁類-文字問題求解。以下分別對學生在各類題型的表現作說明。

甲類-文字符號列式：甲類問題分別列於第 2 題與第 7 題，第 2 題的正確率為 0.54 與 7 題的正確率為 0.59 高於各類問題的平均表現，可見半數學生已具以文字符號表示的能力；第 2 題的題目敘述中內含男生平均數、女生平均數、總平均數三個項目，而要求以一個指定未知數(X)對三者間的關係以不等式作表示，對於分組平均量與總平均量關係概念不清楚的學生會造成文字符號轉譯上的困擾。在這一組題目中，由國中基本學力測驗題改編的第 7 題，學生必須對圖形中放入 3 個玻璃珠但水位仍不足和放入 5 個玻璃珠造成滿溢，對數值上的認知與不等符號作連結。研究者對各小題的細分統計時，發現有

161位(79%)的學生能觀察到前第1小題與第2小題中圖形與文字的不等符號關係，能對不等量作適當的符號表示，但在第3小題對兩個不等關係做合併求其交集關係時，有多位學生由於對交集意義不了解或相關問題處理經驗的缺乏，會有停止繼續作答或自創表示式的情形，可見學生對不等式的範圍解概念沒有真正的理解。

乙類-不等式運算法則：乙類問題分別列於第1題與第5題，對於運算法則的熟悉學生都有較好的表現，正確率分別為0.60與0.57。其中第1題中學生的答案有87%的選項集中於第C與第D選項，顯示學生對A、B選項中不等式兩邊同時加、減某數不會造成不等符號方向的改變的概念很有信心，但對等式兩邊同時乘以或同時除以某數時會感到困惑，除了對意義的理解不足，也有過於依賴記憶口訣的情形，研究者在晤談的過程中，發現學生在比較兩數關係時會受限於正數與正數的比較、很少會考慮到負數與負數、正數與負數的比較關係，研究者認為學生在做兩數的比較時，除了對特定數系的迷失，沒有理解「數」在數線上的意義會是產生此類錯誤的重要原因；學生在第5題有0.95的高作答率，顯示學生對不等式運算有信心，但僅有57%能完全正確，除了在運算技巧、負號對不等符號的處理外，選答的錯誤也佔有很大的比例，同樣也顯示了學生沒有理解數在數線上的意義的問題，此錯誤分析與原因留待第三節時討論。

丙類-不等式求解：此類觀察學生解不等式運算技巧的題目分別列於第 4 題與第 6 題；不等式的求解是學校不等式教學的重點，學生在此也有較好的表現，第 4 題的正確率為 0.72 為本問卷的最高表現。丙類的第 4 題為教科書中的基礎題型，除了將指定數代入不等式以判斷解的方法，有更多的人選擇以兩不等式求交集以判斷解的方法，但有發現到不同學校解題策略的使用比例有很大的差距，其中在第 6 題時尤為明顯，使用南一版本的 A 國中與 B 國中正確率為 0.63 與 0.61，明顯高於使用康軒版的 C 國中正確率 0.37，此部分會在第二節探討解題策略時，分析此現象可能的成因。

丁類-文字問題求解：數學的文字題型通常是學生感到困難之處，本單元也不例外，文字問題求解運算是應用題的主要能力，從程序上學生必須看懂問題、瞭解解題的目標、提出正確的假設、列出適當的式子、以正確的運算求得解答、做出正確的判斷、寫出正確的答案，此問題解決的完整過程乃是前三類問題解決能力的總和，完整達成解題對學生而言並不容易。此類問題為第 3 題、第 8 題、第 9 題與第 10 題，學生答對的比率偏低，此四題的平均答對率僅 0.40，同時也有 0.27 的高空白率，顯示學生對文字題的理解轉譯列式表示到運算求解的過程感到困難，以第 3 題而言，從兩個不同難度的布題下學生表現的結果發現：在第 1 個子題以 60 場為母數以求六成以上勝率

時還有 0.50 的正確率，但第 2 子題中以 30 場加上連續皆贏場數為母數的六成以上勝率求連續贏的場數時，卻僅 0.25 的低正確率，原因在於第 2 子題的問題敘述方式學生感到不習慣與沒有理解母數為不確定數的概念。綜合學生在幾題文字題的表現，可發現學生對熟悉的題型有較高的作答率與正確率，也能依題意設未知數與列式，對不常見的敘述語法或高層次的思考問題(第 3 題第 2 個子題與第 10 題)則感到不知如何回答問題。

在國內吳季鴻（2001）、楊金城（2004）與國外 Simon (1980) 等的研究結果：學生因為具備的預備知識不足、沒有注意關鍵字句，使學生缺乏了解代數是如何結合數學的關係式，當題目取材至真實情境中時，學生似乎不能就真實世界的狀況來思考。測驗結果發現：當題目是機械性的運算操作時學生有較好的表現，但是對轉譯文字對應到代數符號時常面臨困境，學生能否瞭解及分析題意、是否能掌握解題的關鍵與發揮數學基模知識來辨別及決定不同題目該使用的解法和方向，是教學者需要發更多的時間來引導學生的地方。

整體而言，在每題一均至少安排一個文字符號運算概念的布題下，學生的整體表現並不高，全部共 11 題(第 3 題有兩個子題)的答對總平均為 0.54，此平均數並不代表學生在此單元沒有學習完整，因為問卷的目標在測量學生在那些方面會感到困難，以便能在學生的

表現中找到學生解題困難的地方，進而利用面談的方面去確定學生的學習成果與思考方式，接下來的單元分別對學生正確解題的資料分析學生在不等式的解題策略，對學生錯誤解題的資料分析學生解題錯誤的成因。

第二節 一次不等式之解題策略研究

一、解題策略

根據國內學者對代數文字題歷程之分析研究結果(謝明昆，2002)：國二學生在解題時所使用的策略並不多，最常用的是列方程式，其它包括猜測、畫圖表徵、質因數分解、餘集概念、組合數字，學生會誤以為列方程式是只用於文字題的解題基模，所以並不常用非方程式手法解文字題。李靜瑤（1993）也是對國中二年級的解題策略研究，發現國二學生之解題策略並不多，其中成功解題者較常利用方程式解題，失敗之解題者則常為獲得答案而拼湊數字、或不當的套用公式，原因可能是教師在教學中與學生解題時常想盡快能獲得答案，因此希望能用同樣方法來解題，而造成策略使用之僵化。

參考上述研究，研究者概歸納此階段學生在解方程式與不等式單元問題時大致會使用的 11 個解題策略包括：

（一）學生在甲類[列式]的解題策略有 2 種：

(S1)轉譯，依題意直接轉譯為文字符號表示式

(S2)化簡，去括號的化簡與運算

（二）學生在乙類[算則]與丙類[求解]的解題策略為：

(S3)運算性質、運算與四則運算化簡與展開

(S4)畫圖表徵，以作圖方式判斷正確解

(S5)代入法，以數值代入判斷符合者

(S6)解集合法，求解兩個以上不等式的解集合

(S7)等量公理，以等量公理化簡不等式

（三）學生在丁類[文字題]的解題策略為：

(S1)轉譯，依題意直接轉譯為文字符號表示式

(S2)化簡，去括號的化簡與運算

(S3)運算性質、運算與四則運算化簡與展開

(S4)畫圖表徵，以作圖方式判斷正確解

(S5)代入法，以數值代入判斷符合者

(S6)解集合法，求解兩個以上不等式的解集合

(S7)等量公理，以等量公理化簡不等式

(S8)解不等式，依題意列不等式並求解

(S9)解方程等式，依題意列方程式並求解

(S10)組合數字，以題目中的數字依題意加以重組以求解

(S11)列舉法，列舉可能情形直到出現符合解

(S12)猜測答案，猜測或加以以驗算得解者

將本研究中學生在不等式單元所呈現的 12 個解題策略依解題歷程整理如下表：

主題分類	甲-[列式]	乙-[算則]	丙-[求解]	丁-[文字題]
解題策略	(S1)轉譯 (S2)化簡	(S3)運算性質 (S4)畫圖表徵 (S5)代入法 (S6)解集合法 (S7)等量公理	(S3)運算性質 (S4)畫圖表徵 (S5)代入法 (S6)解集合法 (S7)等量公理	(S1)轉譯 (S2)化簡 (S3)運算性質 (S4)畫圖表徵 (S5)代入法 (S6)解集合法 (S7)等量公理 (S8)解不等式 (S9)解方程式 (S10)組合數字 (S11)列舉法 (S12)猜測答案

本節將對各類型題目作說明，並對學生正確解題的結果進行分析，探討學生在不等式問題所呈現出的解題策略，除了第 1 題(乙類)為選擇題，無法看出學生用來解題的方式或策略，在此節不予討論外，將其餘各題分別依四類（甲類－列式；乙類－算則；丙類－求解；丁類－文字問題）的解題策略分別加以歸納分析，探討學生解題的思考型態：

甲類－列式

表 4-2-1：甲類解題策略統計

類型	題目	解題策略	解題人數	佔正確總人數
甲	2	轉譯	83	86%
		化簡	13	14%
	7	轉譯	92	74%
		化簡	33	26%

【題目2】某國中三年一班共有學生40人，其中有25位是男生，某次數學段考，全班平均分數不低於72分。假設男生平均分數爲X分，女生的平均分數比男生的平均分數多4分，則：
依據題意可列出X的一次不等式爲 ________________ 。

【說明】：此題中學生須具備平均數的數學知識，以男生總分為25X加上女生總分（40-25）×(X+4)後除以總人數，再根據題意以不等符號連結寫出表示式。對於此題學生多能了解題目要求以一個未知數將三者的關係列一個不等式表示，所呈現出的解題策略如下：

策略(S1)-轉譯：解題者依題意將以文字符號當作「數」並根據題意中平均數的概念以運算符號的除法($[25X+15(X+4)]\div 40\geq 72$)、或乘法($[25X+15(X+4)]\geq 72\times 40$)或分數($\frac{25X+15\times(X+4)}{40}\geq 72$)表示之。

策略(S2)-化簡：依題意將以文字符號當作「數」進行運算做作化簡處理或計算(例如：40X+60≧2880、X≧70.5)，由於題目並未要求以最簡式表示，所以學生呈現出的型態各異，只要有進行進一步的運算皆歸於此類策略。

【題目7】推測一個玻璃珠的體積：

假設一個玻璃珠的體積爲x，分別依下列步驟列不等式推測一顆玻璃珠的體積。

步驟一，將240ml的水裝進一個容量爲300ml的杯子中。

步驟二，將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿。

可列不等式爲：______________。

步驟三，同樣的玻璃珠再加入兩個放入水中，結果水滿溢出。

可列不等式爲：_______________。

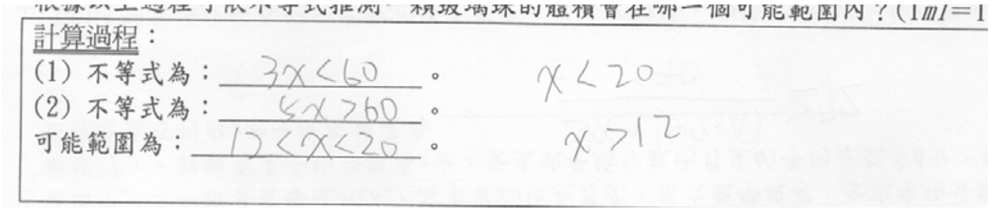
根據以上過程可依不等式推測一顆玻璃珠的體積會在哪一個可能範圍內？(1ml＝1cm^3)

【說明】：學生在此題中須根據圖形中玻璃珠數量變化與水位的關係，察覺到參考數值與水杯容量的不等關係列出不等式，再利用解不等式得到合理的範圍解。

策略(S1)-轉譯:依圖形中水杯未滿與水杯滿溢的情形，以文字提示將兩個不等式表示出來，進行化簡與合併後得出可能範為例如：

3X+240＜300	X＜20
5X+240＞300	X＞12
可能範圍為：12＜X＜20	

策略(S2)-化簡:依圖形與文字提示找出關鍵字的含意，圖形一中以 3X＜60 表示 3 顆玻璃珠少於 60cm^3，圖形二中以 5X＞60 表示 5 顆玻璃珠必大於 60cm^3，將兩個不等式中玻璃珠所代表的體基的量表示出來，進行合併後得出可能範為解；也有學生知道問題的目標且認為只寫出如 240+3x＜300 的表示式會被扣分，而先加以運算直接將運算的結果以 X＜20 或 X＞12 表示。


計算過程：
(1) 不等式為：3x<60 。
(2) 不等式為：5x>60 。
可能範圍為：12<x<20 。
x<20
x>12

此類問題在測試學生是否能從文字的提示依題意要求將文字轉譯為符號表示，學生在題 2 中分別根據對平均數的了解或以除法、或以乘法、或以分數合理表示全班平均與男、女分組平均的比較量的關係，題目僅要求以符號表示即可，學生表現中發現多位學生會對表示式不放心而進行化簡處理。在問題 7 和題 2 的不同點在於，回答問題 7 時學生必須觀察圖形對「水沒有滿」與「水滿溢出」的關鍵詞句的理解轉換為不等符號的使用，將一個玻璃珠的範圍值以不等符號表示，對於缺乏此類解題經驗者在嘗試說明時有呈現出像是 5X＜60＜3X 者，而此類表示雖能與題意相符，但不符題目中「一顆玻璃珠」的要求，因此研究者認為此情形不為正確的解題。

乙類－算則（另一題為選擇題，本節略）

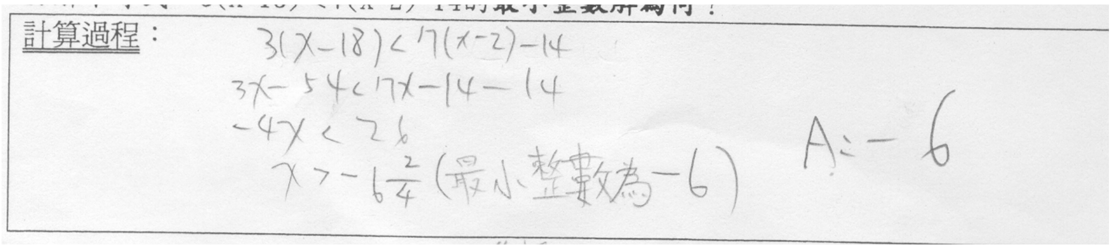
表 4-2-2：乙類解題策略統計

類型	題目	解題策略	解題人數	佔正確總人數
乙	5	運算性質將未知數文字置於左邊	76	66%
		運算性質將未知數文字置於右邊	36	31%
		運算後以畫圖表徵判斷	3	3%

【題目5】解不等式：3(X-18)＜7(X-2)-14的最小整數解為何。

【說明】：此類題目在測驗學生對運算規則的理解與熟悉，學生在使用移項法則或等量公理求解的過程，是否能正確以分配律化簡、正確處理負號，與能否正確判斷符合不等式的合理解。

策略(S3)-運算性質：依據運算規則進行展開與移項運算，以未知數在不等符號左邊或右邊為解題起點，算得一個最簡表示式，由最後的表示式決定最小整數解。


計算過程：
$3(X-18)<7(X-2)-14$
$3X-54<7X-14-14$
$-4X<26$
$X>-6\frac{2}{4}$（最小整數為－6） A:－6

策略(S4)-畫圖表徵：學生對分數與負數常會判斷錯誤，對於不確定的數值，解題者以數線作圖的方式協助判斷正確的解。

在本研究中，乙類要求的不等式運算法則，是以等量公理為推理基礎的移項法則，與解方程式最大不同之處有二：第一個是在「運算過程」中以在兩邊同時乘以一個不等於 0 的負數時，會使不等符號的

方向改變；第二個是對運算過程的結果須加以「對所求解的判斷」。從題 5 的 0.95(表 4-1-2)的高作答率及 0.57 答對率(表 4-1-1)，學生僅呈現 2 種解不等式的解題策略，一個是大部分學生都具備的移項法則，另一個是對解不確定時以數線作圖的輔助，顯示學生對不等式運算題型很習慣，發生錯誤的之處也以運算過程與解的判斷為主，研究者可分為兩個方面作說明。

在「運算過程」方面，可將學生在題 5 的運算過程分為未知數在不等符號的左邊與不等符號的右邊，解此題時若將未知數置於不等式左側較符合一般學生的計算習慣，但是，學生必須面對不等式兩邊同乘負數時使不等符號方向須做改變；將未知數置於右側的方式，雖較少學生使用卻能避開不等式乘以負數令方向改變的問題。在本研究中，能以未知數左側處理的學生有 151 正確率為 0.67，以未知數在右側處理的學生有 43，正確率為 0.36，由本研究數字可知學生通常將未知數置於不等符號左方的解題方式能有較高的成功解題機會。

在「對所求解的判斷」方面，不等式的運算過程能正確運算者有 163 位，能作正確運算者佔 0.8，能進一步正確判斷解者有 113 位，，也就是說有 24 位學生是正確運算後的選答錯誤，資料也顯示有 16 位學生在正確計算過程後並未對解進一步推斷，可知有部分雖能熟練計算但不了解題目要求。

丙類-不等式求解

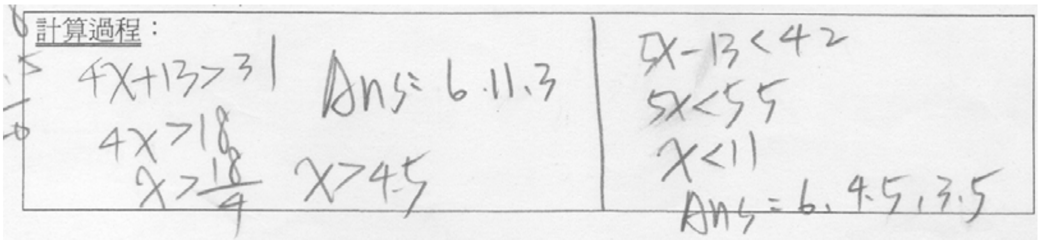
表 4-2-3：丙類解題策略統計

類型	題目	解題策略	解題人數	佔正確總人數
丙	4	運算性質	9	6%
		代入法	68	47%
		解集合法	69	47%
	6	解集合法	104	94%
		等量公理	7	6%

【題目 4】以下數字 3.5、4.5、6、11.3 中哪些數同時爲不等式 4x＋13＞31 及 5x－11＜42 的解？

【說明】:學生須判斷 4 個數中能同時符合兩個不等式條件的共同解。

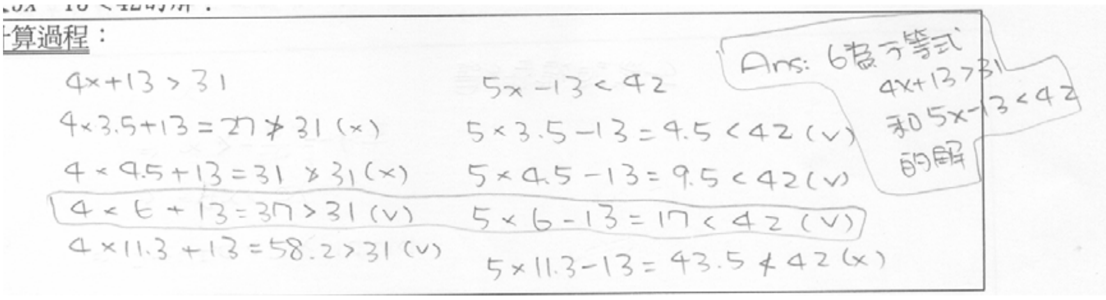
策略(S3)-運算性質：解題者先對第一個不等式進行移項運算，得到範圍解x＞4.5並依此結果判斷符合者為6與11.3；接著對第二個不等式也進行移項運算，得到另一個範圍解x＜10.6並判斷符合者為3.5、4.5與6，僅6同時符合兩個不等式為此題的解。



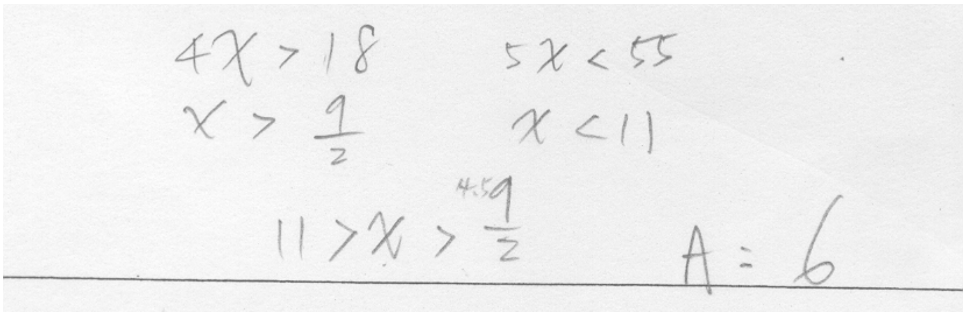
策略(S5)-代入法：將各數值分別代入兩個不等式，以驗算方式找出符合兩不等式要求的解,學生把每個數都代入第一個不等式作計算判斷符合解，將符合者繼續代入第二個不等式，以淘汰或選取的方式得到最後解答，也有學生將每個數代入每個不等式再加以判斷者。

4×3.5+13＞31	4×4.5+13＞31	4×6+13＞31	4×11.3+13＞31
27＞31	18+13＞31	37＞31	58.2＞31
不符合	不符合	符合	符合
		5×6-11＜42	5×11.3-11＜42
		19＜42	45.5＜42
		符合	不合

答：-6



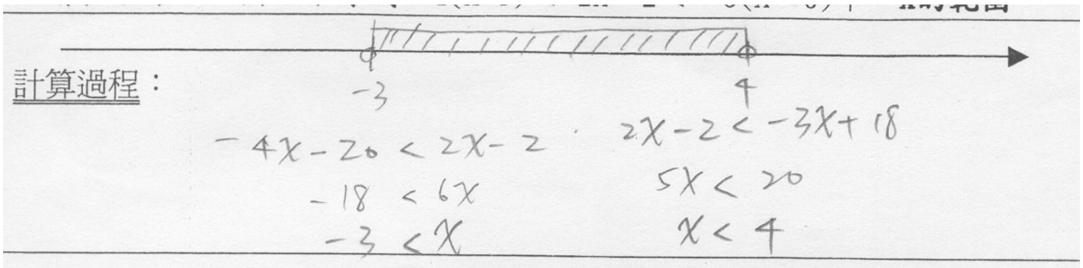
策略(S6)-解集合法：解題者分別對兩個不等式進行運算，找出兩不等式的最簡表示式分別為x＞4.5與x＜10.6，將兩個表示式合併為範圍解4.5＜x＜10.6，以此判斷得到結論：僅6符合範圍內的解。



【題目6】請在數線上，圖示不等式$-4(x+5)<2x-2<-3(x-6)$中，x的範圍。

【說明】：題目沒有預備的指示說明，學生須察覺此式和一般不等式不同，將已知不等式條件視為$-4(x+5)<2x-2$、$2x-2<-3(x-6)$的兩個一次不等式，進行各別的運算得到兩個不同方向的範圍解，以數線表示得到一個解集合的範圍解。

策略(S6)-解集合法： 將已知條件分割為$-4(x+5)\leqq 2x-2$與$2x-2<-3(x-6)$兩個不等式進行移項運算，得到兩不等式$-3<x$與 $x<4$的最簡表示，將兩表示式合併為$-3<x<4$，並將此結果以數線表示。



策略(S7)-等量公理：以等量公理對原不等式進行化簡把項目或數值減少，解題者以分配律去括號得$-4x+20<2x-2<-3x+18$，以每項加2得到$-4x+22<2x<-3x+20$，找出$-4x-18<2x$與$2x<-3x+20$兩不等式進行運算的得最簡表示，將兩表示式合併為範圍解得到範圍解為$-3<x<4$。

丙類的題目要求認識解與不等式的關係，學生在題目4問及X的求解時所採用的解題策略以代入式與解不等式的方法為主，對題意理解且知道能以檢驗的方法判斷解的學生，會以代入法重複將指定值分

別代入兩個不等式，以找出皆能符合要求者；對能理解題意且知道兩不等式有其共同範圍解的學生，還可採用解兩個不等式求共同範圍解的方法以達簡化計算的目地，可是對運算技巧的訓練也會影響採用的方法。

在本研究中有 98 位學生採用解不等式的解題策略(S6)，其正確率為 0.74，另外有 92 位學生採用的是代入法的策略(S5)，其正確率為 0.75，可見以上的兩種策略的正確率相當接近，A 國中與 B 國中的學生採用解不等式策略 S6 的比律率高於 C 國中的學生。在題目 6 問及不等式的求解時，在缺乏代入特定值以求解的條件下，學生可將原題目分割成兩個不等式求範圍解，或將原題以等量公理化簡後，同樣分為兩個不等式求範圍解，有 163 位學生採用了正確的解題策略，答對者有 134 位，正確率 0.82，而不了解的同學往往是強行湊一個答案或將題目重新抄一遍，可見在解題技巧需求較高的題目，學生若能夠使用對應的解題技巧，則具很高的成功解題的機會。

題目 6 因為在不等符號間有 3 處皆有 x 項，以等量公理做化簡時不易化簡為標準式，所以許多學生到中途時發現無法繼續作答而放棄，僅有少部分學生能以等量公理的方法（一段式）化簡成功，大部分同學以兩段式的方法成功解題。研究者又發現在題目 6 的答對者 111 學生中，A 國中有 49 位，B 國中有 39 而 C 國中僅有 23 位，研究

者探究其原因發現在南一版本中此類型為課本中的例題，而康軒版的課本與習作中皆未出現過此類型題目，在研究者晤談時有 C 國中的學生表示沒看過此類題目，所以不知到題目要求作什麼而無法作答，在解釋題目後，晤談的學生都能順利求得解答，可見對題目的熟悉與解題經驗會直接學生的作答。

丁類-文字問題求解

表 4-2-4：丁類解題策略統計

類型	題目	解題策略	解題人數	佔正確總人數
丁	3-1	解不等式	74	73%
		解方程式	8	8%
		組合數字	16	16%
		解不等式	3	3%
	3-2	解不等式	42	81%
		解方程式	4	7%
		組合數字	3	6%
		列舉	3	6%
	8	解不等式	77	94%
		組合數字	5	6%
	9	解不等式	66	67%
		列舉法	24	24%
		猜測答案	9	9%
	10	解不等式	57	80%
		列舉	14	19%
		猜測答案	1	1%

【題目3- 1】某職業棒球隊在例行賽前30場比賽中，只贏了12場，卻輸了18場(即稱勝率為四成， $\frac{12}{30}=0.4$)，試問此球隊在例行賽的60場比賽中，若想使勝率達六成以上，至少還須贏幾場？

【**說明**】：解題者依勝率的定義與不等式作連結，此題以定值60為分母，求符合的最小整數解為24。

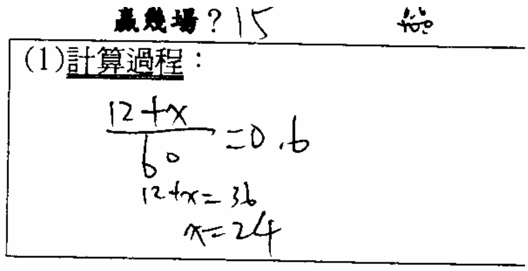
策略(S8)-解不等式：學生依題意以符號X代表全部贏的場次，將60場視為母數以用不等式$\frac{X}{60}$≧0.6表示，進行運算得X≧36，決定符合之最小解為36-12=24，解答為24場。

策略(S8)-解不等式：與上題相同仍以60場為母數，依題意以符號X代表**還須**贏的場次，列出不等式$\frac{12+X}{60}$≧0.6，經運算得12＋X≧36，X=24為最小整數解。

策略(S9)-解方程式：以依題意以符號代表數，根據題意中的比較量關係以方程式$\frac{X}{60}$=0.6表示，進行解方程式得到參考量X=36

，依題意決定符合之最小解36-12=24。

策略(S10)-組合數字：學生沒有使用文字符號，根據題意0.6的勝率，以60×0.6=36，以贏了36場作參考量，得到36-12=24，決定出符合之最小解。


贏幾場？15

(1)計算過程：

$\frac{12+x}{60}=0.6$

$12+x=36$

$x=24$

策略(S10)-組合數字：將題目中的數據依題意組合成比例式(或比值)

$\frac{6}{10}=\frac{36}{60}$，解比例式得到參考量並決定符合之最小解為36-12=24。

策略(S10)- 組合數字：以題目的已知量為計算式60×0.6=36，計算贏的場次得到一個參考量36，以36-12=24決定最小解24。

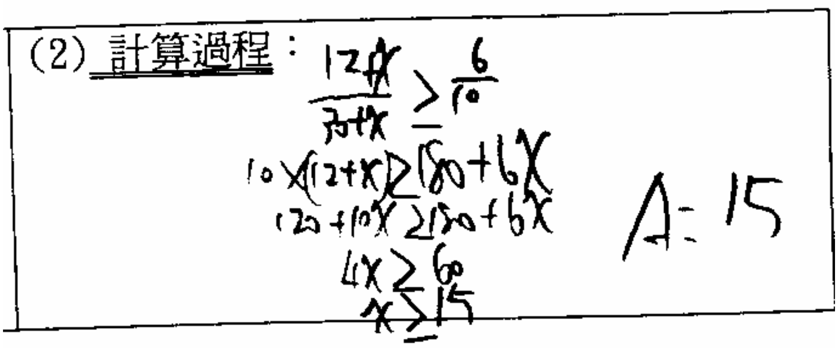
策略(S12)-猜測答案：猜測某一數值，以驗算判斷符合題意的解。

【題3-2】接上題，如果接下來的比賽每都贏，則可以提早達到勝率六成以上，則必須要連續贏幾場？

【說明】：依勝率的定義與不等式作連結，此題以未定數X代表接下來每場皆贏的場數，以(30+X)為分母，求符合的最小整數解。

策略(S8)-解不等式：學生依題意以符號代表還須贏的場次列出用不等式，進行運算並決定符合之最小解。

$\frac{12+X}{30+X} \geqq 0.6$	$\frac{12+X}{30+X} \geqq \frac{6}{10}$
12＋X≧18+0.6 X	120+10x≧180+6x
0.4X≧6	4X≧60
X≧15　　答：15場	X≧15　　答：15場



策略(S9)-解方程式：以依題意以符號代表還須贏的場次用不等式

$\frac{12+X}{30+X}$＝0.6表示，以等號兩邊同乘以（30+X），得12＋X=18+0.6X，經移項運算得X＝15，決定符合之最小解為15場。

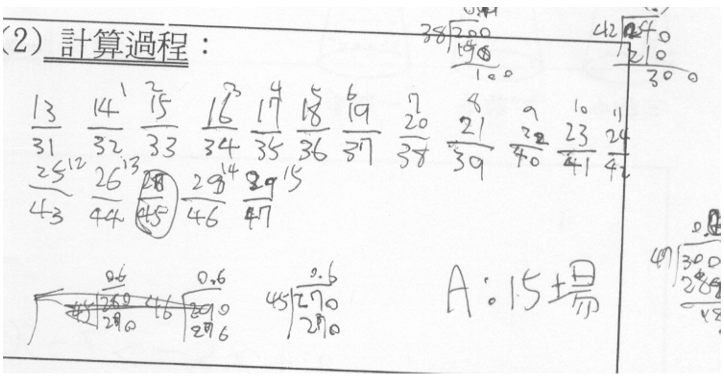
策略(S10)-組合數字：依題意組合數據為一個比例式（或比值）表示，依比例式（或比值）得到一個參考量，決定符合之最小解。

$$\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}\times 7=\frac{21}{35}\text{；}\frac{3}{5}\times 8=\frac{24}{40}\text{；}\frac{3}{5}\times 9=\frac{27}{45}\text{；}$$

27-12=15　　　答：15場

策略(S11)-列舉：以依題意以條列式找到符合之最小解



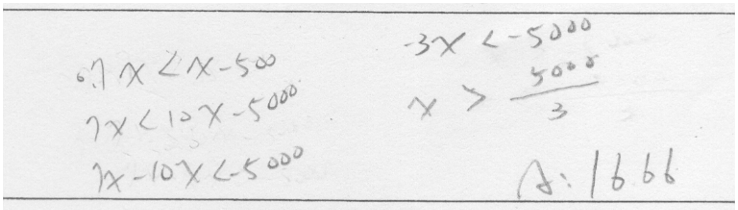
【題目 8】小文到體育用品社購買球鞋時，老闆介紹：「這雙鞋子按原價以七折特價賣你，這樣你最少可省了 500 元。」，請問此雙鞋子原價最低爲多少元？

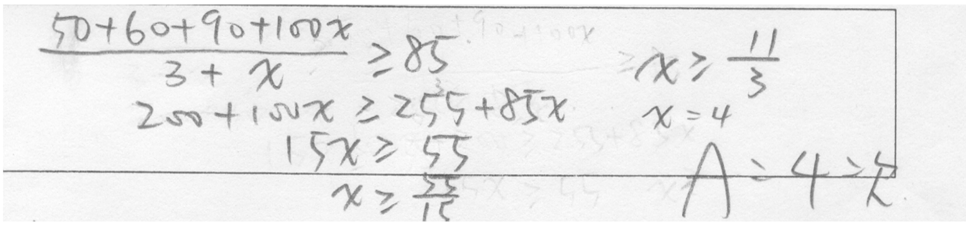
【說明】：以購物折扣為題，學生須理解「打折後最少省了 500 元」的意義，列不等式以求符合的最小整數解。

策略(S8)－解不等式：學生以原價為X設未知數，特價的價格為0.7X，依題意原價減特價，最少省了500元，因各人對文字的認知有以下

幾種列式。

0.3X≧500	X−$\frac{7}{10}$X≧500	0.7X+500≦X
X≧$\frac{5000}{3}$	$\frac{3}{10}$X≧500	−0.3X≦−500
X≧$1666\frac{2}{3}$	X≧500×$\frac{10}{3}$	X≧500×$\frac{10}{3}$
答：1667元	X≧1666.66	X≧1666.66
	答：1667元	答：1667元





策略(S10)－組合數字：不設未知數，直接計算式 500÷0.3=1666.6，再決定最小解為 1667 元

【題目9】平常考滿分爲100分，小傑在班上的前三次的平常考成績分別爲50、60、90分，但是小明的目標是平均85分以上，問小傑至少需要再考幾次小考才有可能達成目標？

【說明】：學生須具備平均數的概念，假定最少還要考X次，以(3+X)為總次數，接下來每次都必須考100分以提升平均分數，設定不等式以求符合之最小整數。

策略(S8)－解不等式：設未知數以符號代表須再考次數，且每次的最高分100分，以不等式表示以求解。

$$\frac{50+60+90+100X}{3+X} \geq 85$$

200+100X≧255+85

15X≧55

X≧ $\frac{11}{3}$

答：4次

策略(S11)-列舉法：學生依題意將可能總分情形一一列舉驗算決定答案。

200÷3=66.6　300÷4=75　400÷5=80　500÷6=83.1　600÷7=85.7

7-3=4　　　　　　　　　　　　　答:4次

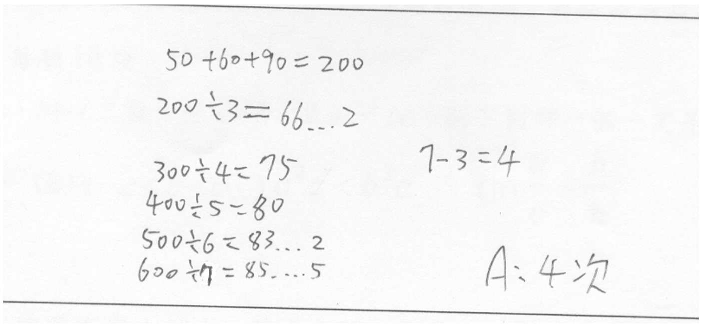
或依題意將平均數乘次數的總分情形一一列舉驗算直到找到答案。

50＋60＋90＝200

85×4=340；85×5=425；85×6=410；85×7=595

7－3=4

答:4次



策略(S12)-猜測答案：猜測某一數值，以驗算判斷符合題意的解。

【題目10】某旅行團想參觀天文館，天文館的入場券每張40元，規定50人以上可享八折的優待，100人以上可享七五折優待，如果此旅行團人數在50到100人之間，請問此團體_____人以上時，買100張入場券反而便宜。【舉例：50人需50×40×0.8=1600元，100人需100×40×0.75=3000元，95人需95×40×0.8=3040元】

【說明】：學生須理解在特殊條件下購買100張可能比較少的實際張數還便宜，以此概念設未知數，以列不等式並求解，此題敘述對學生較陌生，故輔以實例說明，加強真實感與對不等式的理解。

策略(S8)－解不等式：設未知數以符號代表團體人數列出不等式以求解。

100×40×0.7＜X×40×0.8
2800＜32X
87.5＜X
答：團體人數88人時

或以設未知數以符號代表團體比50多出的人數列出不等式以求解。

$(50+X)\times 40\times 0.8 > 100\times 40\times 0.7$

$(50+X)\times 32 > 2800$

$1600+32X > 2800$

$32X > 1200$

$X > 37.5$

答：團體人數88人時

策略(S11)－列舉：將可能情況條列出直到符合解的出現。

$2400\times 0.8=1840$

$2800\times 0.8=2400$

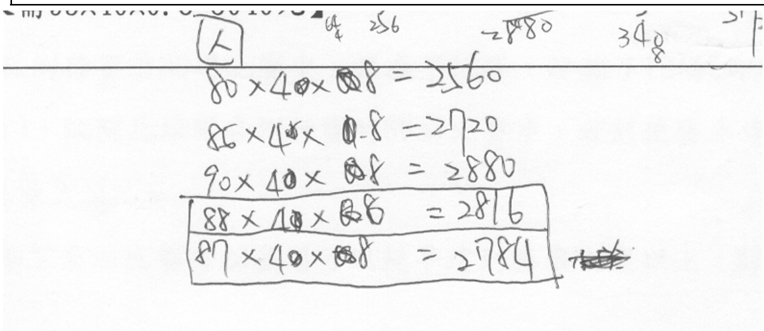
$3200\times 0.8=2580$

$3000\times 0.8=2880$

$3480\times 0.8=2784$

$3520\times 0.8=2816 > 2800$

答：團體人數88人時。



策略(S12)-猜測答案：猜測某一數值，以驗算判斷符合題意的解。

研究者設計丁組題目是考驗學生在文字應用問題的解題時，須根

據題意將文字敘述中已知的數與量之關係,結合學生自身俱備的數學知識轉化為以文字符號表示的不等式,並運用等量定理或移項法則解題，來判斷符合題意的解。此丁組類型的題目因題意較複雜，因此容易出現多樣的學生解題策略,有時在相同的策略下也會展現不同的形式，例如同在丁類一題(8)中，同樣以原價為 X 的解不等式策略，至少就展現出了 $0.3X \geqq 500$ 、$X-\frac{7}{10}X \geqq 500$ 、$0.7X+500 \leqq X$ 、 $\frac{7}{10}X \leqq X-500$ 等四種以上的形式，雖然它們的數學意義相同，對學生而言，都是將文字的理解以自己語言的表達方式,也有學生不是以解不等式的形式也能用合理的方式找到答案,尤其對不熟悉的題型更有嘗試不同策略的企圖，學生在此類型題目的表現都有上述的解題行為。

對於文字題目的詮釋,學生很習慣用等式的概念為解釋基礎，這可由學生的多種等式概念的解題方式看出，如列方程式、列比例式、比值表示或列舉比較等，經由形式化的訓練學生才熟悉以不等式解題，對於最陌生的題目則會採取列舉實際數值的方式求得解答。

比較特別的是,研究者發現學生缺乏檢驗答案的習慣與經驗，不少的學生經過正確設立未知數、正確列式與正確運算,卻於作答時產生錯誤，作答時沒有呼應到最初列式的基本意義與題意要求，這與研究者在本研究之前對「學生能查覺答案的合理性」的認知有很大的差距。

二、解題策略的討論

以上報告的四類型(甲、乙、丙、丁)的解題策略，現在研究者嘗試對對學生使用的策略作進一步的討論：

(一)甲類-以文字符號列式：第 2 題為學生常見的題目布題，所以學生能依平時答題的習慣回答，多數學生以除法或分數的方式來表示；對第 7 題玻璃珠問題還很陌生的學生有些對此題目感到不適應，其中有數位學生以 3X＜60＜5X 表式範圍值，雖然在數學意義上並無不可，但對於習慣統一答案的教學方式與題目的要求並不符合，或許可解釋為學生對陌生題目表答對題意理解的自創表示式，以 Schoenfeld (1985)對專家與生手的論點來說，生手由於對解題經驗的缺乏，尚未發展出一些有用而又一致的解題策略，只能以自已對題目的理解，用自己的語言或語法作表示。學生在甲類列式題目的綜合表現上，研究者認為學生大致已了解不等式表示的使用，對於「以上」、「大於」、「小於」的符號表示大多數能達到正確使用，惟對不等式的集合概念不熟悉或缺乏經驗。

(二)乙類-不等式運算法則：當學生很熟悉某類題型時，解題的多樣性就會減少，同樣以 Schoenfeld (1985)對專家與生手的論點來說，此時學生已發展出一些有用而又一致的解題策

略，且成為師生共同的語言。在第5題的計算並沒有呈現其他的解題策略，只有運算或移項次序的不同，但有16位學生雖然計算過程正確但並未回答問題要求的最小整數解，由訪談的結果知道有部分是因為沒有注意到不等式後面的問句，其他學生的則認為題目後段的「最小整數解為何」與題目前段的不等式「3(X-18)＜7(X-2)-14」的意義相同而忽略不答，從這個現象可推測學生對很熟悉的計算模式會很樂意地完成求解的工作，而對後半文字含意不清楚的會故意忽略，可見學生是較缺乏文字理解的能力。由學生在此類型的正確解題表現，可以確定學生能熟悉不等式(或方程式)的計算規則，「粗心大意」或過多記憶計算原則是造成計算上失誤的主要原因。

(三)丙類-不等式求解：學校使用教科書的版本在這個類項的解題結果出現很特別的差異，南一版和康軒版的教科書中都有和第4題相同的例題，題目難度較低，三個學校的學生有相近的正確解題率：A國中的0.78、B國中的0.70、C國中的0.69，但解題策略的使用有很大的不同，A國中與B國中以解不等式(S6)較多，C國中則多以代入法(S5)解題；但是在第6題時，學生解題的正確率有很大的差距，A國中的0.63、

B 國中的 0.61、C 國中的 0.37，使用南一版的 A 國中與 B 國中仍有與第 4 題相近的答對率，而 C 國中的正確率有很明顯的下降，因為康軒版的教科書中並未出現此類型的例題或練習題，研究在訪談的過程發現 A 國中與 B 國中的學生覺得題目並不特別，但在 C 國中有多位學生表示沒見過此題，也不知道題目的解題目標為何，解題正確的學生中有些表示對自己解題很有信心，有些表示看過補習班老師算過，但也有學生是說從參考書獲得經驗，可見解題類型的熟悉和解題的經驗對學生解題有很大的影響，這也可回應到在解第 4 題時 A 國中與 B 國中的學生有兩種策略可選擇使用，C 國中的學生則採用他們最熟悉的代入法。本研究設計之初並未強調版本間與學校間的比較，因此沒有更多的證據驗證上述結論，但從本研究的三所學校學生在各題正確率的比較是可看出教科書的難易度對教學結果而言是正相關的。

(四)丁類-文字問題求解：本研究所發現的解題策略中，不少學生仍習慣以解方程式(等式)去解得答案再判斷解答，不一定藉由不等符號的使用以求解，因此常出現解題方法合理且計算正確，或許多部分的不等式問題仍可用等式求得解答，但決定答案時發生的錯誤，可理解為學生對不等式文字題概念

尚未熟悉，尤其是對負分數或負小數，與其鄰近整數的大小關係容易產生混淆。對於反向式不等式的語法敘述如第 3-2 題以不確定場數為分母與第 10 題多買反而比較便宜者，學生會感到很陌生，往往知道大概意思，卻無法正確轉譯為文字符號的表示式，因此在難度較高的問題，列舉式的解題策略有偏多的現象。

(五)整體而言，在解不等式的題目中有許多題是在完成正確運算後再判斷合乎題意解，因此除了有計算式正確但選答錯誤的情形，也有算式不完全正確而在決定答案時發現錯誤改正答案者，這也是不等式單元的特性，然而學生在決定答案時發現錯誤改正答案的情形卻非常少見，可見學生算得一個特定值時就會直接作答，很少有學生能真正進到檢驗解答或反思解答的合理性，如果將不等式文字解題歷程對應 Polya(1945)所提的四個解題歷程，將得到的解作合理的判斷或驗算，此研究結果發現學生通常能達到前 3 者的解題技能，在第 4 項的「回顧」的部份是較缺乏的，在不等式的單元有很多題目在第(4)項的部份有很好的訓練效果，在教學過成強化此方面的訓練，可突顯此單元的教學目標和解不等式訓練的不同，也可使學生的邏輯推理思考更為完整。

學生在解方程式問題的解題經驗與能力直接影響學生在不等式單元的表現，完全了解文字符號的意義與後續的解題成就(解方程式、多項式、不等式)有高度正相關。學生在學習過程中認為此單元與解一次方程式的學習相似度高而感到學習容易，但在實際成就表現上有不小的差距，學生覺得上課有聽懂，但測驗時卻出現錯誤而不知道，例如：學生覺得第 5 題的運算規則題很簡單，對答案很有信心有 0.95 的作答率，認為只要移項並注意負號即可，但很多學生仍不自覺的發生運算規則的錯誤，當運算正確後卻沒有適時以數線概念輔助使得選答時出錯，最後正確率僅 0.57。研究者發現許多學生在學習時不重視細節，也沒有從實證的練習中確定結論，忽視教師的提示，顯示學生在學習過程注意力不集中。

第三節　一次不等式之解題錯誤類型

一、錯誤類型

在第二章文獻探討時提到學者林清山、張景媛(1994)所提出學生在代數應用問題的錯誤概念包括了：(1) 題意轉譯的錯誤概念，(2) 問

題整合的錯誤概念，(3) 解題計畫與監控的錯誤概念，(4) 解題執行的錯誤概念。

陳聖雄（2005）高中學生在一元二次不等式解題研究將錯誤類型分為：(1) 將先前學習過的知識作錯誤的類推，(2) 受到老師教學口訣、教材編排、及不當記憶公式的影響，(3) 先備知識不足，(4) 無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結，(5) 對不等式的運算邏輯不清楚，(6) 受到直觀的影響。

吳季鴻(2001) 在高中學生在一元二次方程式的運算之錯誤類型分為：(1) 因式分解錯誤，(2) 錯誤的運算規則，(3) 同號、異號的處理錯誤，(4) 變號的處理錯誤，(5) 恆正、恆負的判斷錯誤，(6) 將領導係數當作正數處理，(7) 將「無解」及「無限多個解」概念做過度推廣。

本節將綜合以上述論點將學生的錯誤類型以解題歷程中的轉譯、問題整合、計畫與監控、解題執行為主軸，依國中一次不等式的學習內容與學生作答情形，參考上述國內學者在不等式的研究，彙整本研究中學生出現的錯誤類型細分如下表：

表 4-3：誤類型分類表

類別	細分項目
轉譯的問題	(E1)不了解題意 (E2)誤用符號 (E3)錯誤組合數值
問題整合的問題	(E4)錯誤概念 (E5)誤判解答 (E6)假設錯誤
計畫與監控的問題	(E7)誤用未知條件 (E8)誤用解題策略
解題執行的問題	(E9)數值運算錯誤 (E10)符號運算錯誤 (E11)誤用運算規則

以下依各題錯誤類型作說明：

(一)甲類-以文字符號列式

【題目2】某國中三年一班共有學生40人，其中有25位是男生，某次數學段考，全班平均分數不低於72分。假設男生平均分數為x分，女生的平均分數比男生的平均分數多4分，則：

*依據題意可列出x的一次不等式為*__________________

錯誤類型－(E1)不了解題意：發生此項錯誤的學生，主要是不了解題目提示的意義，忽略了全班總分為平均分數×學生總人數，表示式並不完整。

25X＋15(x+4)≧72　　正確：5X＋15(x+4)≧72×40

錯誤類型－(E2)符號使用：不等式符號誤用。

$\frac{25X+15(X+4)}{40}<72$　　正確：$\frac{25X+15(X+4)}{40}\geqq 72$

錯誤類型－(E4)數學概念：未了解平均數的意義，以致平均數的表式式不正確，只對某部分作除法。

25X＋15(x+4)÷40≧72　　正確：[5X＋15(x+4)]÷40≧72

錯誤類型－(E6)假設錯誤：學生對數學概念的錯誤或數學知識不足，使文字符號與運算符號的表示出現錯誤。學生只關注男女分數的不同，沒有注意到各別人數的不同與平均數的意義，例如：學生知道兩者差 4 分，缺乏相關的平均數表示方法。

X+X+4≧72　　正確：[5X＋15(X+4)]÷40≧72

學生能正確地將男生總分 25X 加上女生總分 15(X+4)，得到全班總分為 40X+60，卻誤解平均數的意義，認為平均就是除以 2，將全班總分除以 2:

(40X+60)÷2≧72　　正確：(40X+60)÷40≧72

學生沒有將個別人數乘入個別分數中：

[X＋(X+4)]÷40≧72　　正確：[5X＋15(x+4)]÷40≧72

題目要求以 X 表示，非二元符號且不等符號也錯誤:

$$\frac{25X+15Y}{40} \geqq 72$$

錯誤類型－(E9) 數值運算：數值計算錯誤，72×40 運算結果位數不正確。

[5X＋15(x+4)]≧288　　　正確：[5X＋15(x+4)]≧2880

錯誤類型－(E11) 運算規則：沒有適當做分配律 15(X+4)的展開，這種情形出現次數很高。

[5X＋15x+4)]≧2880　正確：[5X＋15x+60)]≧2880

【題目7】推測一個玻璃珠的體積：

假設一個玻璃珠的體積爲x，分別依下列步驟列不等式推測一顆玻璃珠的體積。

步驟一，將240ml的水裝進一個容量爲300ml的杯子中。

步驟二，將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿。

可列不等式爲：______________ 。

步驟三，同樣的玻璃珠再加入兩個放入水中，結果水滿溢出。

可列不等式爲：_______________ 。

根據以上過程可依不等式推測一顆玻璃珠的體積會在哪一個可能範圍內？(1ml＝1cm^3*)*

錯誤類型－(E1)不了解題意：學生能理解圖形中數字的意義，但未整理題目訊息，對題目的目標不清楚。

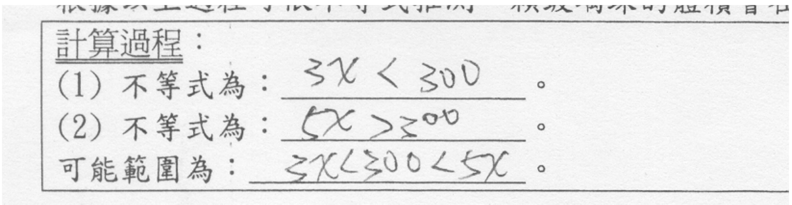
3X+240＜300　　　X＜20

5X+240＞300　　　X＞12

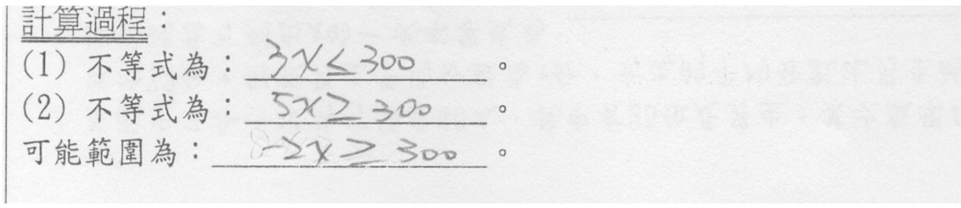
可能範圍為：3X+2400＜300＜5X+240　　　正確：12＜X＜20

可能範圍為：3X＜60＜5X

沒有察覺出關鍵詞句的意義，解題者沒有考慮原先已有 240m 的水。


計算過程：
(1) 不等式為：3X < 300。
(2) 不等式為：5X > 300。
可能範圍為：3X<300<5X。

解題者不了解題意列式錯誤或表示式不完整


計算過程：
(1) 不等式為：3X ≦ 300。
(2) 不等式為：5X ≧ 300。
可能範圍為：~~8~~ 5X ≧ 300。

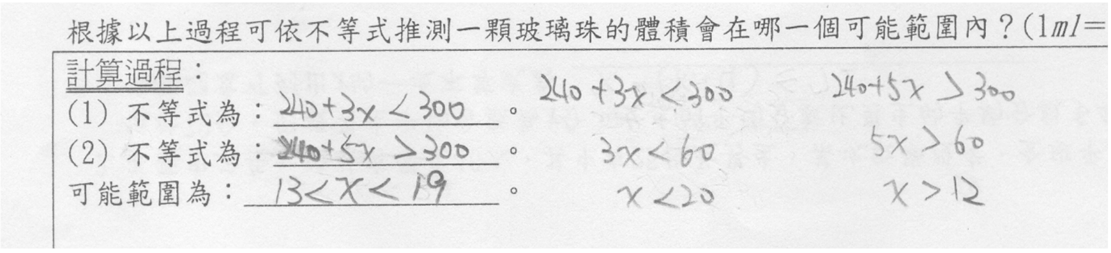
可能範圍為 12＜X　　　　　　　　正確：12＜X＜20

錯誤類型－(E2) 誤用符號：錯用不等符號

可能範圍為 12＜X≦20　　　　　　正確：12＜X＜20

錯誤類型－(E4)數學概念錯誤：未求出範圍值，第 1 個或第 2 個不等式列式正確，但未歸納求出範圍值，或是解題者對不等式有誤解，認

為「不等」的意義就是「多一點點」或「少一點點」，且只有考慮整數部分。


根據以上過程可依不等式推測一顆玻璃珠的體積會在哪一個可能範圍內？(1ml=

計算過程：

(1) 不等式為：240+3x<300 。 240+3x<300 240+5x>300

(2) 不等式為：240+5x>300 。 3x<60 5x>60

可能範圍為：13<x<19 。 x<20 x>12

錯誤類型－(E9) 數值運算：計算錯誤

3X＜60　　X＜20

5X＞60　　X＞14　　　　正確 X＞12

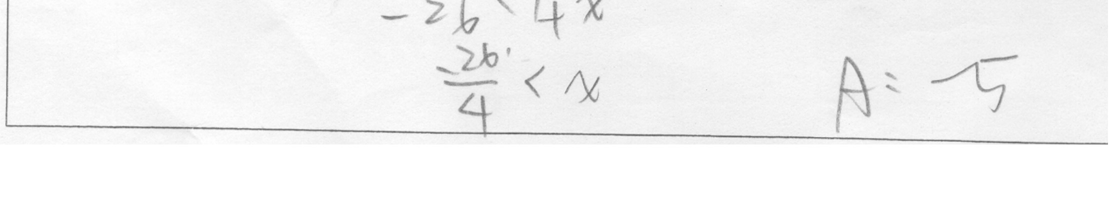
（二）乙類-不等式運算法則

【*題目 5*】*解不等式：3(X-18)＜7(X-2)-14 的最小整數解為何。*

誤錯類型－(E5) 誤判解答：未判斷解答或解題者運算正確，但對數值產生混淆又沒有參照數線作比較，故使選答錯誤者

-4X＜26

X＞-6.5　答：-5　　　正確：答：-6

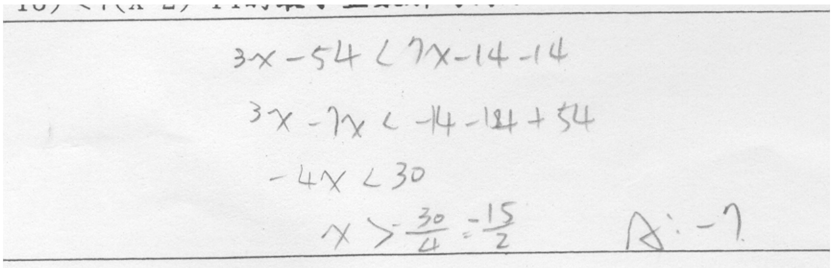

計算過程：

$3x-54<7x-14-14$

28

$-26<4x$

$-\frac{26}{4}<x$　　A: -5



誤錯類型－(E9) 數值運算：運算錯誤、數值計算錯誤、不正確的正負數相抵消。

3X-13＜7X-14-14

26＜4X　　　　　　　　　　　　　　正確：－26＜4X

解題者沒有經過式子的運算，直接套用數字想找出答案，也未具備範圍解的概念。

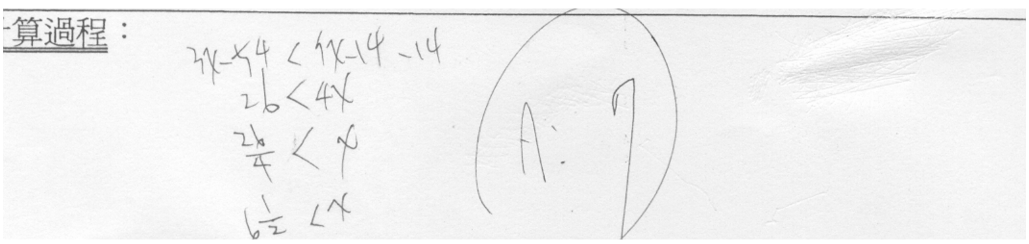
3X-54＜7X-14-14

12-55＜28-28　　　　　修正：不可直接套用某一特定數值

X=4

答：4

錯誤類型－(E11) 運算規則：未完成不等式求解運算或未注意運算式中的負號。



運算過程不完整：展開式不正確、運算規則錯誤。

3(X-18)＜7(X-2)-14

3X-54＜7X-14　　　　　正確：3X-54＜7X-14-14

3(X-18)＜7(X-2)-14

3X+54＜7X-14-14　　　正確：3X-54＜7X-14-14

（三）丙類-不等式求解

【題目 4】以下數字 3.5、4.5、6、11.3 中哪些數同時爲不等式 4x＋13＞31 及 5x －11＜42 的解？

錯誤類型一(E2)誤判解答:選答錯誤

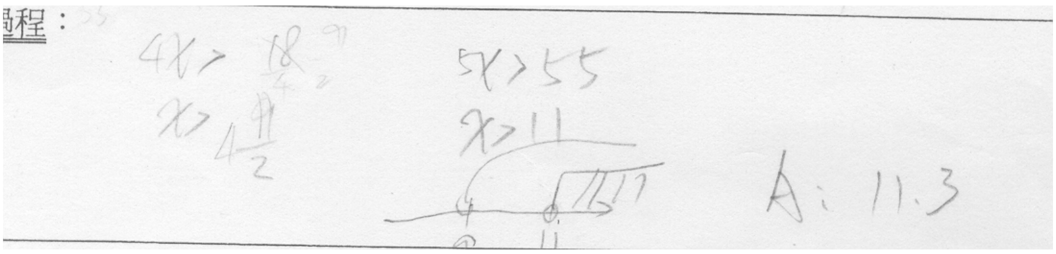
$\frac{9}{2}$＜X＜11

答：4.5、6　　　　　正確:6

錯誤類型一(E10)符號運算:誤用計算規則。

4X+13＞31　　4X＞18　　X＜$\frac{9}{2}$　正確: X＞$\frac{9}{2}$

5X-13＜42　　5X＜55　　X＜11



錯誤類型一(E9)數值運算: 數值計算時產生錯誤。

5X-13＜42

5x＜28　　　　　　　　　　　　正確:5X＜55

3.5×4=14　　　4.5×4=18　　　6×4=24　　　11.3×4=45.2

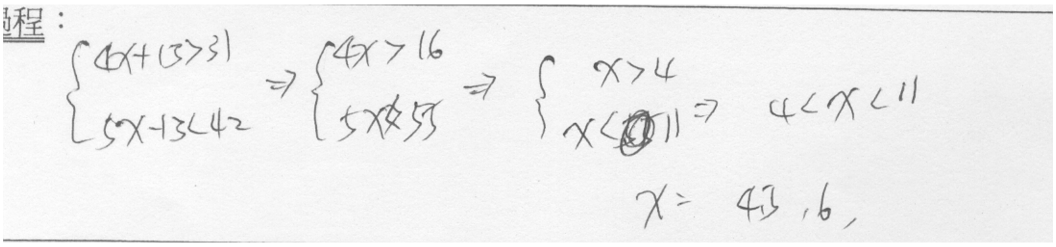
3.5×5=17.5　　4.5×5=22.5　　6×5=30　　　11.3×5=56.5

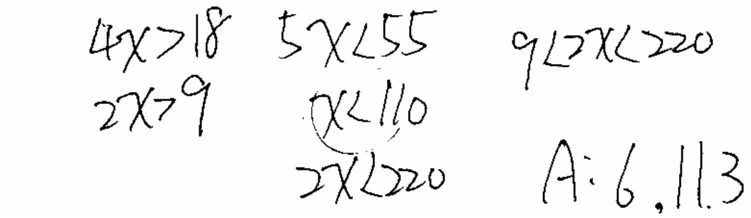
正確：

3.5×4+13　　　4.5×4+13　　6×4+13　　　11.3×4+13

3.5×5−13　　　4.5×5−13　　6×5−13　　　11.3×5−13

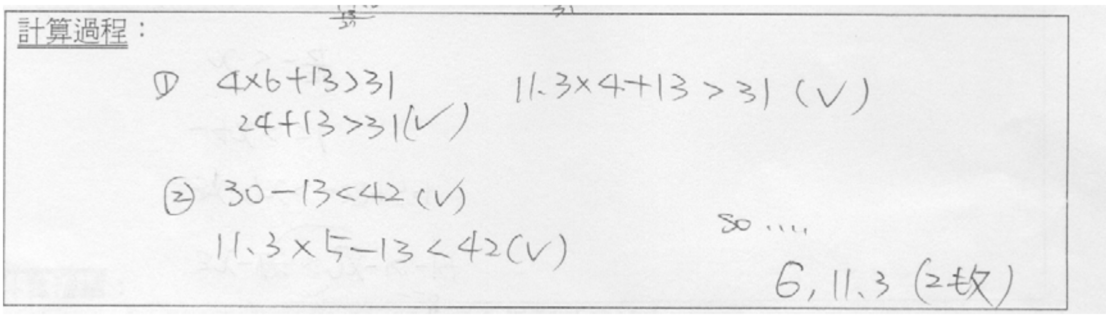
將所得數字直接化為最接近的整數。


過程：
$\begin{cases}4x+13>31\\5x-13<42\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x>16\\5x<55\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>4\\x<11\end{cases} \Rightarrow 4<x<11$
$x=4.5, 6,$


$4x>18$　$5x<55$　$9<2x<220$
$2x>9$　$x<110$
$2x<220$　A: 6, 11.3

錯誤類型－(E9):驗算不完全

數字的計算方法合理，但未計算出正確答案。


計算過程：
① $4\times6+13>31$　　$11.3\times4+13>31$ (V)
$24+13>31$ (V)
② $30-13<42$ (V)
$11.3\times5-13<42$ (V)
so....
6, 11.3 (2枚)

【題目6】請在數線上，圖示不等式－4(x+5)≦2x－2＜－3(x－6)中，x的範圍。

錯誤類型－(E1)不了解題意：不知道解題目標，直接進行移項計算沒

有達到式子簡化的效果者。

-4X-20＜2X-2＜-3X+18

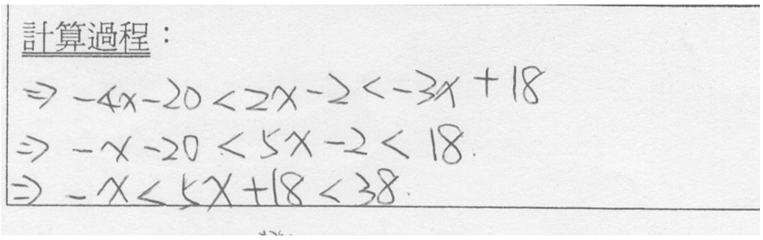
-20＜2X-2+4X＜-3X+18+2 --->將第一的式的-4X 移到第二式，將第二式的-2 移到第三式，產生違反等量公理的原則。

錯誤類型—(E8)誤用解題策略：未理解題意，分別進行兩組不等式的化簡運算，而強行用一個不等式的形式進行解題。

-4X-20＜2X-2＜-3X+18

-X-20＜5X-2＜18

-X＜5X+18＜38 ---→無法繼續求解過程的運算



計算過程：

⇒ -4x-20＜2x-2＜-3x+18

⇒ -x-20＜5x-2＜18.

⇒ -x＜5x+18＜38.

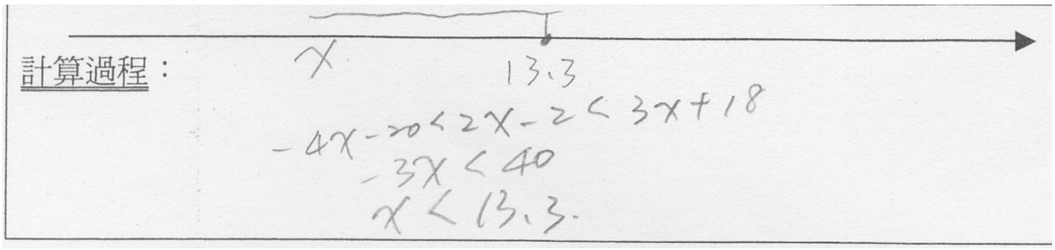
錯誤類型—(E11)運算規則：展開式運算錯誤、移項錯誤、負耗處理錯誤。

-4(X+5)＜2X-2

-4X-5＜2X-2　　　　　正確：-4X-20＜2X-2

2X-2＜-3X＋18

5X＞20　　　　　正確：5X＜20



（四）丁類-文字問題求解

【題目3-1】某職業棒球隊在例行賽前30場比賽中，只贏了12場，卻輸了18場(即稱勝率爲四成，$\frac{12}{30}=0.4$)，試問此球隊在例行賽的60場比賽中，若想使勝率達六成以上，至少還須贏幾場？

錯誤類型—(E2)誤用符號：誤解題意符號使用錯誤，將「以上」用「＞」符號表示。

$\frac{X}{60}>0.6$　　　　正確：$\frac{X}{60}\geqq 0.6$

X＞36　　　　X≧36

36-12=24 答：25 場　　　　36-12=24 答：24 場

錯誤類型—(E6)假設錯誤：誤解題意做出不正確的列式

誤解題意將比賽總場次 60 場,將出現的數字加總,誤認為 90 場。

$\frac{X}{90}\geqq 0.6$　　　　正確：$\frac{X}{60}\geqq 0.6$

X≧54

誤認場次為 90 場，且不等符號使用錯誤。

$\frac{X}{90}=0.6$　　　　正確：$\frac{X}{60}\geqq 0.6$

X= 54

54-12= 42　A：42 場

將總場次 60 場誤認為是 30 場加繼續的比賽場次。

$\frac{12+X}{30+X} \geqq 0.6$　　　　　　正確：$\frac{X}{60} \geqq 0.6$

$X \geqq 15$

誤認場次為 90 場。

$\frac{12+X}{90} \geqq 0.6$　　　　　　正確：$\frac{X}{60} \geqq 0.6$

錯誤類型－(E3)錯誤組合數值：不了解題意，沒有明確目標，以組合題目中數字求得一個解答。

$\frac{18}{30}=\frac{6}{10}$

答：6 場

錯誤類型－(E5)誤判解答：正確列式，決定解時錯誤或未做解的判斷。

$\frac{X}{60} \geqq 0.6$

$X \geqq 36$

答：36　　　　　　正確答：24

列式正確且運算正確，但作答時在原答案加 1，而產生錯誤。

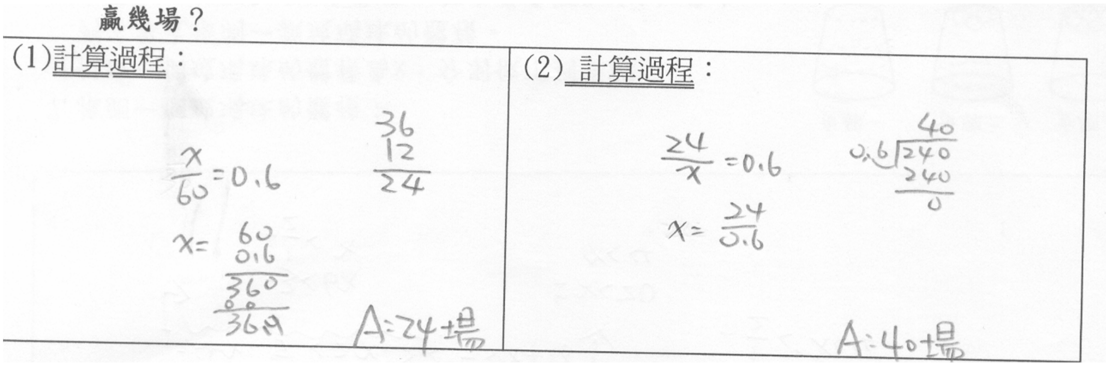
設需贏 X 場，　$\frac{12+X}{60} \geqq 0.6$

$12+X \geqq 36$

$X \geqq 24$　A:需要贏 25 場　　　　正確答：需要贏 24

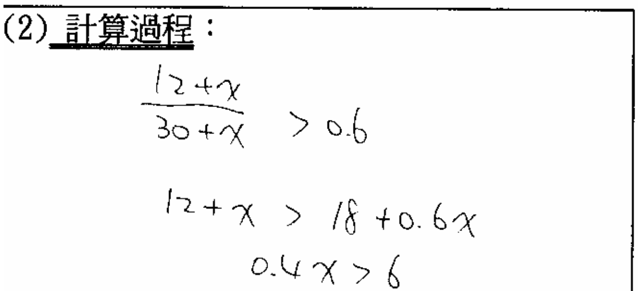
【題 3-2】接上題，如果接下來的比賽每都贏，則可以提早達到勝率六成以上，則必須要連續贏幾場？

錯誤類型－(E1) 不了解題意：有多位學生因不了解題義而抄寫前題的解答或者列一個與題意不符的不等式，「假設」是學生常忽略的重要步驟，學生會為了列式、求解而沒有分辨題目敘述的改變，分析未知數代表何數量，致假設錯誤或作答有缺陷。



錯誤類型－(E2)誤用符號：誤解題意符號使用錯誤

$\frac{12+X}{30+X}>0.6$　　　　正確：$\frac{12+X}{30+X}\geqq 0.6$



錯誤類型－(E3)錯誤組合數值：不了解題意，沒有明顯目標，依題目出現的數字以計算式湊出一個答案。

錯誤類型－(E5)誤判解答：經正確的列式與計算，但解答錯誤者，陷

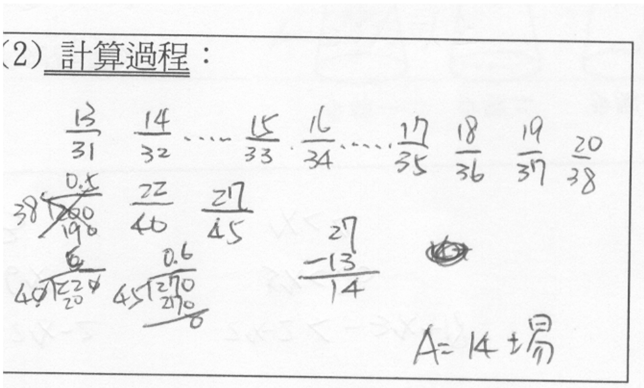
入「≧」是「多一點點」的迷失。

$\frac{12+X}{30+X}$ ≧0.6，X≧24，答：25 場

錯誤類型－(E6)假設錯誤：知道解題目標但錯用解題條件使列式錯誤者。

$\frac{X}{30+X}$ ≧0.6　　　正確：$\frac{12+X}{30+X}$ ≧0.6

錯誤類型－(E9)數值計算錯誤：計算方法合理，但未得到正確解答



【題目 8】小文到體育用品社購買球鞋時，老闆介紹：「這雙鞋子按原價以七折特價賣你，這樣你最少可省了 500 元。」，請問此雙鞋子原價最低為多少元？

錯誤類型－(E2)誤用符號：誤解題意不等符號錯用

X−0.7X＞500　　正確：X−0.7X≧500

500≧X−0.7X　　正確：500≦X−0.7X

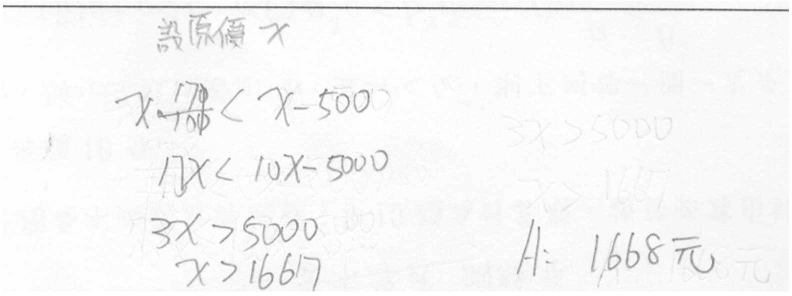
錯誤類型－(E3)錯誤組合數值：不了解題意，沒有明顯目標，依題目出現的數字以計算式湊出一個答案。

錯誤類型－(E5)誤判解答：列式正確、計算正確但答案決定錯誤

$\frac{3}{10}$X≧500

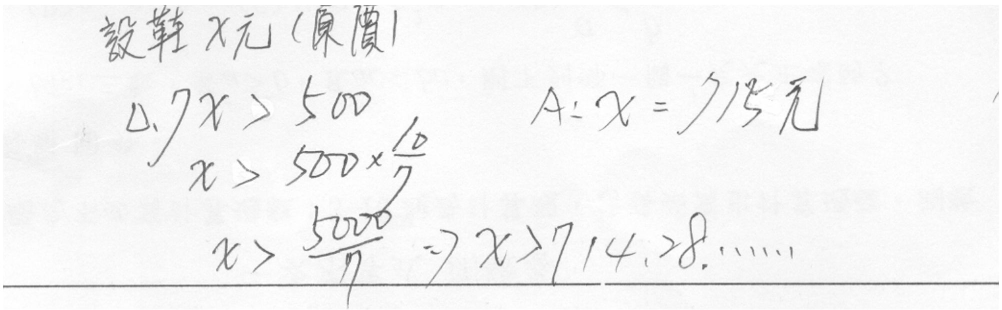
X≧1666.6

答：1666　　　　　　　　正確：答：1667



錯誤類型－(E6)假設錯誤：誤解題意不正確列式

-X+0.7X＞350

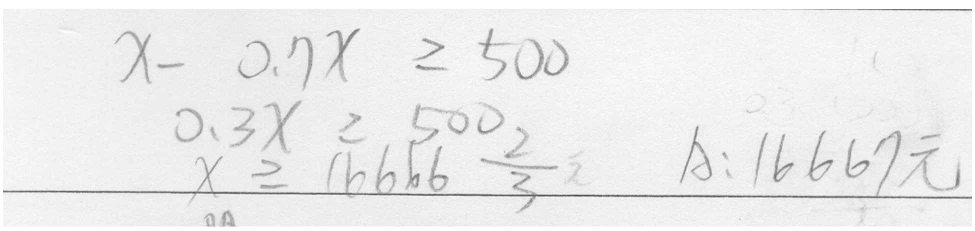


錯誤類型－(E9) 數值運算：乘、除法數值計算錯誤

X-$\frac{7}{10}$X≧500

$\frac{3}{10}$ X≧500

X≧16666$\frac{2}{3}$　　　正確：X≧1666$\frac{2}{3}$



解題方法合理，套用數值驗算時錯誤

1500×0.7= 1050　　1550×0.7=1085

1600×0.7=1120　　1700×0.7=1190

答：1700　　　　　　　　　修正：1700 不是精確解

【題目 9】平常考滿分爲 100 分，小傑在班上的前三次的平常考成績分別爲 50、60、90 分，但是小明的目標是平均 85 分以上，問小傑至少需要再考幾次小考才有可能達成目標？

錯誤類型—(E1)不了解題目：不知道解題目標，不等式或計算式不符題意者。

錯誤類型—(E2)誤用符號：誤解題意將不等符號錯用以致結果錯誤。

錯誤類型—(E3)錯誤組合數值：不了解題意，沒有明顯目標，依題目出現的數字以計算式湊出一個答案。

錯誤類型—(E5)誤判解答：列式正確計算正確答案決定錯誤

$$\frac{200+100X}{3+X} \geq 85$$

200+100X≧255+85

15X≧55

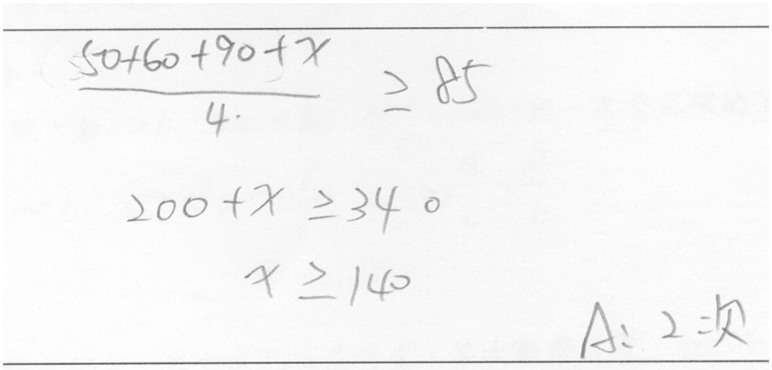
X≧$\frac{11}{3}$

答：7　　　　　　正確答：4

錯誤類型—(E6)假設錯誤：誤解題意不正確列式

$\frac{200+X}{3+X} \geqq 85$　　　正確：$\frac{200+100X}{3+X} \geqq 85$

50+60+90+X≧85　正確：$\frac{200+100X}{3+X} \geqq 85$



$$\frac{50+60+90+x}{4} \geq 85$$

$$200+x \geq 340$$

$$x \geq 140$$

A: 2次

錯誤類型—(E9) 數值運算：計算方法合理，數值計算時發生錯誤

，未得到正確解答者。

$\frac{200+100X}{3+X} \geq 85$

200+100X≧225+85X　正確：200+100X≧255+85X

錯誤類型—(E11) 誤用運算規則：正確列式，但運算過程因規則誤用

發生錯誤者。

$\frac{200+100X}{3+X} \geq 85$

200+100X≧255+X　　　正確：200+100X≧255+85X

【題目10】某旅行團想參觀天文館，天文館的入場券每張40元，規定50人以上可享八折的優待，100人以上可享七五折優待，如果此旅行團人數在50到100人之間，請問此團體_____人以上時，買100張入場券反而便宜。【舉例：50人需50×40×0.8=1600元，100人需100×40×0.75=3000元，95人需95×40×0.8=3040元】

錯誤類型－(E1) 未了解題意:未了解題意，套用數值驗算未找到正確解

100×40×0.7=2800　　50×40×0.8=1600

95×40×0.8=23040　　90×40×0.8=2880

85×40×0.8=2720 ……

錯誤類型－(E3)錯誤組合數值：不了解題意依題目數字計算找答案

依題目出現的數字以計算式湊出一個答案。

錯誤類型－(E5)誤判解答：列式正確計算正確答案決定錯誤

X×40×0.8＞2800

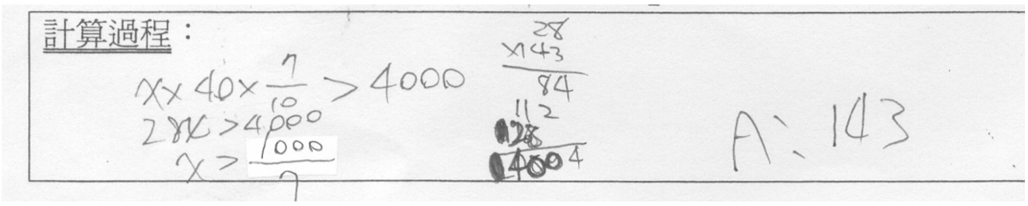
X＞87.5

答：87　　　　　　　正確答：88

錯誤類型－(E6)假設錯誤：誤解題意不正確列式(如實例23)

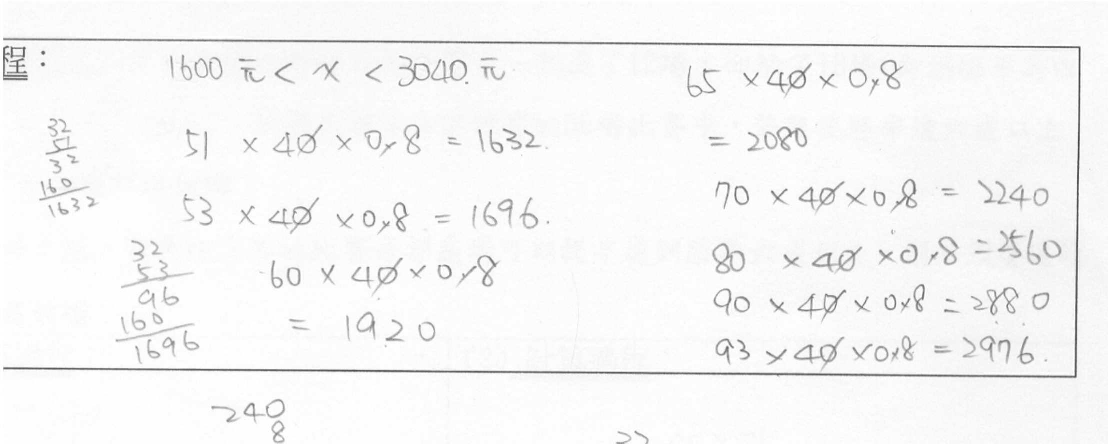
X×40×0.7＞4000　　正確: X×40×0.8＞2800

40X＜2800　　　　　正確: X×40×0.8＞2800



錯誤類型－(E9) 數值運算：數值計算時發生錯誤

計算方法合理但未得到正確解答。



程：

1600元 < x < 3040元

51 × 40 × 0.8 = 1632

53 × 40 × 0.8 = 1696

60 × 40 × 0.8

= 1920

65 × 40 × 0.8

= 2080

70 × 40 × 0.8 = 2240

80 × 40 × 0.8 = 2560

90 × 40 × 0.8 = 2880

93 × 40 × 0.8 = 2976

二、錯誤類型討論

（一）在甲類-以文字符號列式問題中學生所呈現的錯誤類型中，第 2 題學生平均分數問題在表示全班平均分數時最常出現的兩種錯誤，一種是沒有將全班的總分除以全班人數或將全班人數乘以全班平均分數，另一種是把全班的人數乘到女生的平均分數使總數表示式錯誤，而在不等符號上幾乎沒有學生出錯，這意謂此題中學生能了解「不低於 72 分」的不等量意義與表示，卻不熟悉分組平均數的意義；在第 7 題玻璃珠問題中學生必須觀察圖形中的不等量關係以結合文字敘述，大部分(佔 0.79)學生都能作出正確表示式，但在最後的結論時發生錯誤，研究者認為可能原因有 4 個：(1)不熟悉範為解的表式法(2)缺乏解集合的概念(3)缺乏合併兩不等式的技巧或經驗(4)不習慣不等

式的範圍解概念。

（二）乙類-不等式運算法則問題的第一題為選擇題，學生選答呈現的錯誤中可發現兩個現象，第一是對口訣背誦或對規則的理解，課程教學中學生已經熟悉不等式兩邊同乘一個負數會使不等符號的方相改變，卻有很多學生選擇錯誤的選項 C：$a^2c<b^2c$，研究者認為可能是學生很自然的以正數來考量任意兩個數的大小關係，沒有探討過 a 為正數，b 為負數也符合的此不等式的條件而發生錯誤；第二是對運算規則記憶的迷失，認為 C＜0，所以當看到不等符號兩邊都有 C 就立即判斷要改變不等符號的方向，而沒有去判斷其他已知條件，研究者在學生的解題行為中發現，當學生得到自己熟悉的性質或規則，為了迅速求解，會選擇忽視其他條件而求解。

第 5 題的求解運算中，學生最常發生的錯誤分別為運算規則的錯誤與答案的選擇，有時學生雖然知道運算規則，但於實際運算時還是會不自覺地犯錯，忘記負號移項的檢查動作。有時也因學生對於不等符號的最大解或最小解容易判斷錯誤，因為沒有將大小關係結合數線的概念，此種情形最常在解答為負數時發生。

(三)丙類求解題 4 中學生所採用的策略以代入法和解兩個不等式求共同範圍解為主，代入法除了計算數值錯誤外沒有發現其它系統性的錯誤，而解兩個不等式求共同範圍解的方法中發現有 8 位學生在解題概念正確、移項計算正確、兩範圍解交集也正確情況下選錯解答，得到 4.5＜X＜11 的範圍解，卻將 4.5 或 11.3 選入解答中，可能在學生在判斷解時對不等符號意義有認知上的錯誤或缺乏以數線觀念判斷解的合理性。在丙類求解題 6 的算式中，研究者發現有很多學生沒有看出原不等式可分解兩個各別的不等式，可是發現有 22 位學生有系統上的錯誤，這些學生想將原式強行化簡求解，但限於題目的設限，他們無法繼續求解而放棄，有些學生則湊一個解為答案，研究者由此結果可推論學生有固定模式的傾向，學生在某些題目的成功經驗使其無法於別類型題中再彈性運用其他解題策略。

丙類第 4 題與第 6 題的不等式求解具有不同的意義，在第 4 題的求解過程中學生大多能進行自己所選擇的解題方式，所犯的錯誤以運算錯誤或答案選擇錯誤居多，第 6 題學生最多出現的是解題策略的錯誤，學生必須理解到題目中包含的兩個不等關係式，分別求解並以解集合概念決定範圍

解，不少學生將其視為一個關係式強行求解而發生錯誤，可見學生會直接用舊經驗解決類似題而未注意題目的不同，一個關係式的求解方式有其必要條件，對第 6 題並不適用。

(四)對於丁類-文字問題學生最主要的錯誤主要發生在對題目的轉譯與關鍵字詞義的理解，其次是運算過程的監控、基本數學概念的缺乏、條件辨識不清楚、不了解不等式的涵意、無法針對不同題目採用不同方法、數字運算與運算規則…等。此階段的學生對不等式符號使用的時機還不甚理解，尤其會在決定答案的時後發生錯誤，學生能在解題過程察覺或驗證出答案的錯誤，也有以等式概念解不等式題目的習慣，對不習慣的題目與敘述適應性不高的現象，如同張景媛（1994）所言：「學生面對較長的數學文字題時，常不知重點所在，不知從何處下手，所以會立即放棄思考問題」、「有些學生在看問題時，看了後一句就忘了前一句，他們無法同時記住許多條件，而無餘力思考彼此條件的關係」、「學生對於關鍵詞的詞義無法充分瞭解，對問題中的有用條件或無用條件辨識不清」，這些語言文字的困難使學生對應用問題感到挫折，這顯示老師需發更多的時間在思考方面上，對題型作更多元的討論與練習引導。

第四節 解不等式錯誤類型的原因與分析

本研究藉由收集學生測驗的紙筆資料歸納學生的解題策略與錯誤類型，以發現學生學習代數在不等式單元會有那些方面的困難，或產生的迷失概念，分析其困難與產生迷失的原因，給與教學的改進方向。針對學生的錯誤類型採用「含指導語的晤談方式」，以了解學生對測驗題的認知與解題行為，用引導的方式讓學生能說出其想法，透過引導性的發問發現學生的困難，進而引領學生於晤談過程調整想法，走向正確理解的途徑達到正確解題的目標，或透過學生反思了解出現錯誤的原因，使其學習能更具信心與興趣。

造成學生在解題時出現錯誤，其原因可能不僅是單一的原因或單一的困難，有可能在某一小地方或過程的失誤造成，也可能是多方面能力之不足所致。Movshovitz-Hadar , Zaslavsky, Inbar (1987) 將學生解題錯誤原因分為六類：(1)誤用資料、(2)誤釋語意、(3)不合邏輯的推論、(4)扭曲定理或定義、(5)未驗證解答、(6)技術上的錯誤。綜合對學生在方程式解題的研究文獻（Kuchemann, 1981；戴文賓, 1999；林清山、張景媛, 1994），學生由算術領域轉入代數領域時，因為不了解文字符號概念，在方程式學習遇到些困難的原因有：1.解題過程受舊經驗影響、2.對文字符號認知上的差異、3.對記號以及制約認知

上的差異、4.不了解同類項的意義與合併規則、5.不了解已知條件與未知條件之關係、6.不會做假設導至假設與式子不符、7.不會計算含括號的化簡問題、8.不了解方程式的意義、9.無法查覺到所計算的答案是否合理。

本研究綜合上述研究並參考學生文字符號運算概念之研究(許正諭，2005)的節結果與不等式解題研究(陳聖雄, 2005；吳季鴻, 2001)，對學生在不等式單元解題測驗上的錯誤原因作以下分類：

D1.算術思維的錯誤類推

D2.舊思維上的解題策略受新思維干擾

D3.不瞭解符號的正確表示法

D4.認為未知數僅表示特定的數糸

D5.對運算定律、法則不瞭解或誤用

D6.忽視題目的數據與資料

D7.缺乏對「以文字符號代表數」的認知

D8.對數學的邏輯語法與定義不清楚

D9.缺乏將文字敘述轉譯成代數式的能力

學生在不等式單元產生錯誤的原因依解題歷程分類整理如下：

解題歷程	了解問題	擬定計畫	執行計畫	回顧
類別	轉譯	計畫與監控	解題執行	問題整合
錯誤類型	E1 不了解題意 E2 誤用符號 E3 錯誤組合數值 E6 假設錯誤	E7 誤用未知條件 E8 誤用解題策略	E9 數值運算錯誤 E10 符號運算錯誤 E11 誤用運算規則	E4 錯誤概念 E5 誤判解答

二、錯誤原因與困難分析

本單元以學生晤談所選取的題目進行學生紙筆資料呈現錯誤類型與晤談的結果作錯誤原因與困難的分析。晤談對象主要是針對在一次不等式紙筆測驗的資料中明顯有困難者，於甲、乙、丙、丁四類題目中每一類中挑選一題學生較常發生錯誤的題目進行晤談，所選取的題目分別為：甲類（第 2 題）、乙類（第 1 題）、丙類（第 6 題）、丁類（第 3 題）。

以下以四個類型的晤談題針對錯誤原因所引發的錯誤類型的分析作舉例說明：

甲類-以文字符號列式

【題目2】某國中三年一班共有學生40人，其中有25位是男生，某次數學段考，全班平均分數不低於72分。假設男生平均分數為x分，女生的平均分數比男生的平均分數多4分，則：

*依據題意可列出x的一次不等式為*__________________

錯誤原因 D1 造成數值運算錯誤(E9)：學生在數值計算過程沒有注意數字的位數，出現數字計算的錯誤使運算結果位數不正確，學生在移項計算時將數字 72×40 計算失誤使表示式[5X＋15(x+4)]≧288 的數值少了一個位數。

錯誤原因 D3 造成誤用符號(E2)：學生不瞭解符號的正確表示法，部份學生對不等符號中「不大於」、「不低於」、「不足」等反向涵意的符號界定不清，常有誤用而不自知的情形，例如將題目中的平均不低於 72 分以 $\frac{25X+15(X+4)}{40}$＞72 表示，忽略了題意中有可能「等於」的情形。

錯誤原因 D5 對運算規則錯誤(E11)：學生在學習「正負數與括號的運算」時就有些學生已經迷失還沒有得到適當的修正，加上粗心的干擾使有些學生對分配律如 15(X+4)的展開沒有充分的理解，出現[5X＋15x+4)]≧2880 的錯誤，此類學生能順利的計算出答案，但結果是「有時後會對」或「有時後會錯」，尤其在在展開示中具有負號或係數時常會出現此類錯誤，原因在於學生對運算定律、法則不瞭解或誤用所造成。

錯誤原因 D8 造成不了解題意的錯誤(E1)與數學概念的錯誤(E4)：發生此項錯誤的學生，主要是因為對數學邏輯的語法與定義不清楚，或對於關鍵詞句詞義無法充分了解，學生對於問題中哪些是無

用的條件辨識不清楚，以致不了解題目的解題目標，沒有掌握到關鍵詞句的涵義而產生錯誤，例如學生會忽略了全班總分為平均分數×學生總人數，將表示式寫為 25X＋15(x+4)≧72，但此表示式並不完整。對於不了解平均數定義的學生，即始他能理解符號所代表的意義，也可能錯置除數的位置，如：25X＋15(x+4)÷40≧72。

錯誤原因 D9 造成假設的錯誤(E6)：學生對文字敘述轉譯成代數能力的不足，造成學生假設出錯誤的不等式，學生會對部分資訊過於重視而忽略其他必要的已知條件，若加上數學概念的錯誤或運算符號的錯誤表示，則會出現和題意要求有很大差距的表示式，例如：X+X+4≧72 的表示式中，可能看出學生只關注到男、女分數的不同，沒有注意個別人數的不同與平均數的意義。也有學生能正確將男生的總分 25X 加上女生的總分 15(X+4)，得到全班總分為 40X+60，卻誤解平均數的意義，將全班總分除以 2，表示成(40X+60)÷2≧72。由於不少學生在代數能力轉譯的不足也有出現如[X＋(X+4)]÷40≧72 的情形，此表示式中沒有將男生人數乘上男生分數、女生人數乘上女生分數，因此造成第 6 題雖然是填充形式，其出現的錯誤類型是所有題目中最具多樣化的結果，學生缺乏文字敘述轉譯成代數式的能力是主要的原因。

第 2 題學生面談結果

學生錯誤類型-數學概念的錯誤(E4)－錯誤情形：25X＋15(x+4)÷40≧72。

T1：你在這題的答案不正確，請你再詳細檢查表示式找出錯誤的地方。

S1：看不出來(學生經過仔細重看題目並比對原答案後) 。

T2：那我們從最開始的地方一個一個步驟來檢查，你要把你的結果說出來。

S2：好。

T3：全班 40 人，其中男生有 25 人，那女生有幾人？

S3：40-25，有 15 人(很肯定)。

T4：全部男生分數的總分如何表示？可以用寫的。

S4：25x(邊說邊寫)。

T5：好，那麼女生的總分數又如何表示？

S5：女生分數是 x+4，所以是 15(x+4)

T6：很好，到目前都很正確。那現在寫出全班的總分。

S6：總分是 25x+15(x+4)。(學生覺得很振奮)。

T7：全班有 40 人，那麼全班的平均是多少？

S7：25x+15(x+4)÷40

T8：現在再把不低於 72 分，加到表示中。

S8：25x+15(x+4)÷40≧72。(學生發現和原來的答案相同而感到奇怪)。

T9：這樣好了，你把它寫成分數的形式。

S9：$\frac{25x+15(x+4)}{40} \geq 72$

T10:這個答案是正確答案，請你比較看看和原來的式子有何不同

S10：………

T11：發現錯誤的原因了嗎？

S11：全班平均是全班總分除以全班人數，原來的式子中只有女生的分數有除以 40，男生的沒有。

T12：如果我不想以分數表示那要怎麼做？

S12：25x+15(x+4)≧72×40

面談分析

研究者先讓學生對自己的答案先做觀察，讓學生先做第一次的反思動作，然後以階段性的引導讓學生逐步把結果以分段的方式說出，在此過程學生逐漸建立起信心，學生也能把分段的結果作組合並結合

不等符號的表示，研究者也從中發現此學生對平均數的定義大致上是清楚的，此時學生卻發現結果和原來的答案相同，這時研究者發覺在語言敘述上無法讓學生看出不等式的不同，「男生的總分加上女生的總分除以學生的總人數」中文語言和數學語言在結構上是有區別的，因此給予適當的引導讓學生改以分數的形式表示，讓學生以不同的模式作表示式，並給予對其答案的肯定，學生則開始自動做第二次的反思動作，給與答案合理化的解釋發現其對原表示式錯誤的地方，在上述過程中學生對分段式的答案較具信心，研究者則去發現如何讓學生不會出錯的運算模式並給予修正意見，讓學生能找出自己出現錯誤的地方。

如同戴文賓(1998)對由算術領域進入代數領域的國一學生學習現象的研究發現，只要學生得到解題與輔導的機會，都願意且有能力進入代數領域，這能克服學生不肯學習數學的情形。國三學生即使對代數學習已有長時間的學習經驗，但是在解題過程中還是常會遭遇困難，從上數學生的晤談實例，學生需要的並不是長時間的反覆練習，透過對語言結構的辨證，學生能從錯誤的經驗中理解語言與符號的轉化所應注意的細節。

乙類-不等式運算法則

【題目1】(　)已知a、b和c三數，若a＞b，且ac＜bc，則下列哪一個一定是正確的？

(A) $a+c<b+c$　*(B)* $a-c<b-c$　*(C)* $a^2c<b^2c$　*(D)* $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

錯誤原因 D2 造成運算規則的錯誤(E11)：發生此類錯誤的原因是學生的新思維（解不等式）解題策略加入到已經習慣的舊思維（解方程式或等式）的解題策略產生干擾，直接套用所背誦運算規則而沒有考慮其它可能情形，例如學生知道不等式兩邊同乘以一個負數時就必須改變不等符號的方向而選取 C 選項。

錯誤原因 D4 造成概念的錯誤(E4)：學生從 a＞b 且 ac＜bc，判斷因為「＞」的兩邊同乘以 c 使得方向改變為「＜」，所以 c 必為負數。因此在 $a^2>b^2$ 的條件下，若兩邊也是同乘以 c，則必須改變不等符號的方面故答案一定是 C 選項：$a^2c>b^2c$，但是由於學生認為未知數僅表示代表一個特定的數，大部份的學生認定 a、b 應該都是正整數，而沒考慮 $a^2>b^2$ 的真實性，而出現概念的錯誤，很多學生都是以正數或正整數來驗證未知數。

錯誤原因D5造成運算規則的錯誤(E11)：當學生知道一個大家都在用的口訣時，往往會忽略計算法則的推理過程與其細節，此種對運算定律、法則不瞭解會造成運算規則的錯誤，例如:有學生認為在a＞b，c

＜0的條件下$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$是正確的，因為他知道：兩邊同「乘以」負數要變號。而他固執地相信除法不是乘法，忽略了「除以c就是乘以c的倒數」的另一個計算原則。

錯誤原因 D6 造成運算規則的錯誤(E11)：忽略題目的數據與資料也是造成運算規則錯誤的原因之一，學生忽略已知條件中 a＞b，且 ac＜bc 暗示 c 即為一個負數的訊息，而認為 D 選項的$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$是錯誤的，而選取其它選項。Matz (1982) 提出的錯誤形成原因：第一是學生錯誤地使用法則，第二是學生在不恰當的時機使用不適當的法則。也就是說學生會因能力不足會在解題過程使用不適當的法則，或者在解題過程中將舊經驗類化到不適用的新題目中。

第 1 題學生面談結果

學生錯誤類型-數學概念的錯誤(E4)－錯誤情形：答案為 C 選項。
T1：你在這題的答案是錯的，請你重看題目再重新選答。
S1：答案是 D(學生沒有重看題目而立即選答)　。
T2：爲什麼？
S2：因爲 A 和 B 一定是錯的。那答案一定是 D 了。(很有自信)。
T3：怎麼說 A 和 B 一定是錯的。
S3：因爲 A 和 B 是兩邊同時加和同時減，同加、同減是不會變號的。
T4：那 C 爲什麼是錯的　。
S4：不知道。(立即就說)。
T5：好，那麼你現在把錯的原因找出來。
S5：沒找到。(立即就說)。
T6：那這樣好了，你認爲 c 是正數還是負數。
S6：c 是負數。
T7：爲什麼？

S7：因爲 a＞b，且 ac＜b c，有變方向所以 c 是負的。
T8：這樣說也是對啦，那你覺得 a＞b，a^2＞b^2是對的嗎？
S8：對呀。(想了一下)。
T9：你真的這樣認爲嗎？
S9：(又想了一下)。對呀，因爲如果 a 是 2、b 是 1 那麼 2^2是大於 1^2。
T10:a 和 b 一定都是正數嗎？題目有說嗎？
S10：………
T11：如果 a 是 2 而，b 是-3 呢？這樣會 2 還會大於(-3)嗎？(寫在計算紙上)。
S11：………。
T12：那你覺得 a＞b 的情況下，a^2＞b^2還是對的嗎？
S12：不一定是對的，要看情形而定。

面談分析

研究者在此次的晤談中用了很多的問句，因為是選擇題很少有寫字的機會，所以研究者用問句的模式讓學生將判斷的結果說出，並以學生的前段結果引導出令一個問句讓學生能跟著研究者的方向作思考，目的在使學生不受其它因素的干擾。從上述的問句中，可發現學生一開始時很不願意去思考，研究者則針對學生的回答提出進一步的詢問，使得學生逐漸進入狀況去思考面對的問題，從這位學生的回答中可看出有錯誤原因 D4 認為未知數僅表示特定的數系的情形，在此學生的迷失概念是「習慣以正整數和正數去做數值的驗證工作」，所得的結論又造成令一個迷思概念「a＞b，則 a^2＞b^2」，因此研究者認為教學者在基礎計算原則建立的初期，應給與更多的「實驗」機會，數學原則如果能透過多次、多維的「實際數值的驗證」經驗，可以真切的感受到計算原則的細節與計算原則的信任。

丙類-不等式求解

【題目6】請在數線上，圖示不等式－4(x+5)≦2x－2＜－3(x－6)中，x的範圍。

錯誤原因 D9 造成不了解題意的錯誤(E1)：題目是由兩個不等式所串聯出一個相互關係的不等式，由於學生未理解題意，沒有找到階段性目標（Polya，1945），用原來的解題模式去強用一個不等式解題方式求解出現錯誤，例如：學生由原題利用分配律作展開化簡得-4X-20＜2X-2＜-3X+18，利用移項法則移(-2)到等式令一邊得-4X-18＜2X＜-3X+20，學生開始發現無法繼續運算而放棄。此類原因是學生缺乏將文字題目轉譯成代數式的能力，而本題更要把不同型式的代數式轉換成為學生熟悉的代數計算式，這對缺乏相關題目解題經驗的學生是有困難的。

錯誤原因 D5 造成運算規則的錯誤(E11)：學生對運算定律、法則不瞭解或誤用會造成學生在代數展開式運算發生錯誤，或移項過程符號變換錯誤，例如學生由-4(X+5)＜2X-2 經由分配律做展開與化簡時，由於對分配律的不瞭解以致成為-4X-5＜2X-2，或是在將 2X-2＜-3X＋18 簡化時對轉變方向法則的不熟悉造成過度轉換成為 5X＞20，此類的錯誤在學生的運算行為上是很常出現的。

第 6 題學生面談結果

學生錯誤類型-對不了解題意的錯誤(E1)－錯誤情形：題目重抄一次沒有其它計算。

T1：你在這題的計算過程寫得很少，你對這題有什麼看法。

S1：我不知道從那理開始寫，題目我看不懂。
T2：爲什麼？
S2：這種題目我不會做。
T3：我們一起來看題目，這是一題組合題，如果我把最右邊的部份遮住，這樣你看到什麼？
S3：$-4(x+5)\leqq 2x-2$。
T4：這樣可以算了嗎？ 。
S4：可以，這樣可算出來 $-3\leqq x$。
T5：好，那麼你現在把最左邊遮住，這樣你看到什麼？
S5：$2x-2\leqq -3(x-6)$。
T6：那這樣是不是也可以進行計算。
S6：這樣可以算出 $x\leqq 4$。
T7：這樣可以寫出答案爲何？
S7：………。
T8：這樣好了，你先畫一條數線出來。
S8：好了。
T9：把 $-3\leqq x$ 標示上去。
S9：好了。
T10:再把 $x\leqq 4$ 標示上去[2]。
S10：好了。
T11：這樣你可以寫答了嗎？
S11：答案是 $-3\leqq x \leqq 4$。
T12：這就是正確答案了，有沒有作過很像這種的題目
S12：有，在聯立方程式的時有作過。
T13：現在還覺得很難嗎？
S13：原來這題這麼容易，比聯立方程式好算多了。

面談分析

從以上的晤談發現學生對陌生題目的解題意願很低落，會認為自己一定不會算，當學生讀完題目沒有找到關鍵詞句或沒有初始的解題策略時會感到挫敗感，研究者在晤談的過程企圖找出學生熟悉的情境，讓學生覺得能開使進行運算時，學生能很快速地將計算結果算出，逐漸建立出學生的信心，利用畫數線的方式將抽象的數值轉換為

熟悉的圖形，在後來的解題過程已可發現學生能結合舊有的經驗自行解題並作題目內容的比較，從此次的晤談內容知道解題經驗對學生而言是很重要的，除了基礎概念的建立，教授學生各種不同類型題目，對學生解題能力的提昇肯定是很有助益。

丁類-文字問題求解

【題目3- 1】某職業棒球隊在例行賽前30場比賽中，只贏了12場，卻輸了18場(即稱勝率為四成，$\frac{12}{30}=0.4$)，試問此球隊在例行賽的60場比賽中，若想使勝率達六成以上，至少還須贏幾場？

題 3-2.接上題，如果接下來的比賽每都贏場可以提早達到勝率六成以上，則必須要連續贏幾場？

錯誤原因 D3 造成誤判解答的錯誤(E5)：由於有些學生在學習不等式單元時對不等符號的正確表示法或符號所代表數的意義的認知不足，會出現學生過度判讀的情形以致有常有誤判解答的情事，例如在 3-1 題中有學生能依題意正確列式為$\frac{X}{60}\geqq 0.6$，經運算得 X≧36，在決定解答時，學生忘記設未知數的立意，沒有減去原先贏的 12 個場次；也有學生已算出還須贏至少 24 場（y≧24），卻對答案沒有信心而過度判斷須贏（24+1）場導致錯誤

錯誤原因 D9 造成假設的錯誤(E3)：學生對題 3-1 的列式為$\frac{X}{90}\geqq 0.6$，是因為對於文字題目轉譯為代數式能力的缺乏，使對題目的假設產生

錯誤，此位學生對題目過度解讀將題意中應以 60 場為分母，但在已知條件訊息的干擾下誤植為 90 場，發生假設上的錯誤。相同的原因下也有學生誤解題目敘述將題目 3-2 的列式寫在題目 3-1 中。

錯誤原因 D8 造成組合數值的錯誤(E3)：學生對數學邏輯的語法與定義不清，沒有理解題目對勝率的解釋，造成學生為得一個答案，沒有根據題目要求誤組數值，例如$\frac{18}{30}=\frac{6}{10}$，答：6 場可見此位學生並不了解題目中的舉例說明。在題目 3-2 中很多學生對『接下來的比賽每都贏則可以提早達到勝率六成以上，則必須要連續贏幾場』的解讀覺得困難，比在題 3-1 中有更多的人隨意組合已知數值的錯誤。

面談分析

學生錯誤類型-對不了解題意的錯誤(E1)－錯誤情形：在題目 3-1 能正確解題，在題 3-2 中把出現在題目 3-1 的解題策略重抄一次。

T1：你在這題的第 3-1 題是正確的，但我看不你在第 3-2 題的解答方式，因此還是要從第 3-1 題開始問起以確定你對這個題目的想法。首先請你解釋第 3-1 題的作法。

S1：總共要比 60 場，所以我假設 x 爲全部贏了 x 場，不等式是 $\frac{X}{60}\geqq 0.6$，所以 x≧36，減掉先前贏的 12 場，所以至少還要贏 24 場。(看著解答說)。

T2：很好，解釋的很詳細。接下來是第 3-2 題。

S2：這題目我不會做，我是亂寫的。

T3：那理不會做。

S3：我看不懂題目，越看越亂，不知道題目在講什麼？

T4：今天看了，對題目有比較懂嗎？　。

S4：還是不懂，題目講得很亂，我只知道和第 3-1 題不一樣。

T5：好，我們看這一句，「接下來的比賽每都贏」是不是表示第 31 場開始每場都贏，不可輸球，你覺得這樣會不提高勝率？

S5：會。

T6：那要不要把所有場次比完？
S6：應該是不用吧。
T7：這樣可以寫出說只要繼續再比 x 場
S7：對。
T8：這樣分母怎麼表示？
S8：30+x。
T9：那分子呢？
S9：12+x。
T10:那我們把它寫成分數形式。
S10：這樣是 $\frac{12+x}{30+x} \geqq 0.6$。
T11：很好，那請你把 x 算出來？
S11：答案是 x≧15，再比 15 場就可以了。
T12：這就是正確答案了，現在有沒有覺得比較簡單。
S12：沒有。
T13：那老師換個問法，你平常考考了三次平均是 60 分，如果你的目標是平均 85 分，你要怎麼辦？
S13：當然是以後都每次都考 100 分才有可能囉。
T14：那就對了，如果我以 $\frac{60\times3+100x}{3+x} \geqq 85$ 表示，這樣是不是前面的題目很像。
S14：老師，你這樣用考試來講我就比較懂了，不過，下次還是不要考這種題目啦。

面談分析

從上述的晤談中可知學生對固定某數值為分母的比率問題接受度很高，但是對不確定數值為分母的問句方式會感到很困難，同時學生的生活經驗也會影響學生對題目的理解程度，上述晤談的對象為女學生，其對題目中以棒球勝率的描述感到很難理解，但是另外舉考試分數為例時，就覺得較易聽懂，可見在測驗卷的文字題命題上還是儘量以學生生活的實例為主。

在教師手冊上有說明：教師在教學時，若能將時常見到大小關係比較的敘述為例，並結合情境能減低學習的困擾。在本研究中發現學生會熟悉固定的語法，對於真實的情境有時反造成學生解題的干擾。在題 2 平均數的問題，學生能正確地以不等式作表示，但對第 10 題購票優待題，與第 3 題勝率問題，從研究發現學生能理解真實的情境，但對如何以數學式子表示已知的事實感到困難，當教師以列舉方式將數值逐項代入時，學生接受度則增高，學生對文字題的語文轉譯為符號的能力是比較欠缺的。

第五章　結論與建議

本研究主要的目的在探討三所國中學生204位學生在一次不等式單元之解題策略、錯誤類型及造成學生錯誤的原因。研究者首先以紙筆測驗的結果依學生的表現分別作解題策略與錯誤類型的歸類，並隨後透過晤談方式以瞭解學生解題錯誤的原因與困難，引導學生修正錯誤。

第一節 結論

以下分別以學生呈現的解題策略、錯誤類型、錯誤原因與學生表現說明本次研究的結論：

一、解題策略

在本研究中學生在不等式單元的解題策略有：(1)轉譯、(2)化簡、(3)運算性質、(4)畫圖表徵、(5)代入法、(6)解集合法、(7)等量公理、(8)解不等式、(9)解方程等式、(10)組合數字、(11)列舉法、(12)猜測答案。

研究發現學生對於愈熟悉的題目所使用的策略會愈趨一致性，會依教學內容以不等式求解的策略獲得答案，對於學生較感困難或未

見過的問題，學生的解題策略會趨向多樣化，尤其在文字應用題時，學生會依題目的理解以自己熟悉的方式分別使用列舉、組合數字、畫圖表徵、解方程式、猜測驗算等策略。

學生使用策略受學生解題經驗的影響，當學生學習新的解題策略時，會優先使用新的策略，例如：在第 4 題對不等式的解做判斷時，優先採用解集合的方法。在解題困難時，學生會降低解題策略的層次，例如：在第 3 題與第 10 題有較多的學生採用列舉法與代入法。

二、錯誤類型

在本研究中學生在不等式學習單元所出現的錯誤類型有：(1)不了解題意、(2)誤用符號、(3)錯誤組合數值、(4)錯誤概念、(5)誤判解答、(6)假設錯誤、(7)誤用未知條件、(8)誤用解題策略、(9)數值運算錯誤、(10)符號運算錯誤、(11)誤用運算規則。

研究發現學生在解不等式單元最容易發生錯誤的地方是對題目的理解轉譯與答案的選取判斷。對不熟悉的類型題學生對寫出對應的不等式感到困難，有多位學生在解文字應用題時沒有用列式的方法求得正確解；研究也發現學生對於負小數或負分數的大小關係辨識不清，不論應用題或計算題都有不少學生有出現此類的錯誤。

在運算規則上，有些學生雖能記憶運算規則的特別規定，如分配律去括號與負號的乘除對不等式的改變，在實際運算過程中卻無法集

中注意力，無法查覺容易出現錯誤的重要關節，總是在答案修正或第二次計算後才能發覺錯誤。

三、錯誤的原因

在不等式單元引起學生錯誤的原因有：算術思維的錯誤類推、舊思維上的解題策略受新思維干擾、不瞭解符號的正確表示法、認為未知數僅表示特定的數系、對運算規則不瞭解或誤用、忽視題目的數據與資料、缺乏對「以文字符號代表數」的認知、對數學的邏輯語法與定義不清楚等。

研究發現學生解一次不等式錯誤的原因主要在於學生的語文與數學文字符號轉換能力的不足，學生在看題目時無法掌握關鍵的詞句而不了解題意，其次是對數學的邏輯語法和定義不清處楚，這影響學生無法列出正確的式子，再來是學生認為未知數代表特定的數系，使學生在決定最後答案時出現錯誤。

研究者認為學生在學習過程中會覺得「自己聽懂了」、「這樣我應該會算了」而忽略了重要的細節，加上缺乏作實際驗證的經驗，使學生將教師在課堂教學示範的解題經驗誤認為自己的解題經驗，因此會有「不知不覺的就做出答案了」或「上次這樣算是對的為什麼這次算是錯的」的情形，例如：在和學生晤談時，發現學生在經過正確運算卻選錯解答時，研究者總是要求解題者畫上數線並將參考點標示出

來，學生才恍然大悟：「原來數線是這樣用的。」，在之前的教學過程中學生因「很簡單」而忘了。因此，研究者認為：『缺乏實際驗證的經驗』是學習過程中除了上述引發錯誤原因外的另一個很重要的原因。

四、學生表現結果

文字符號方面：

從本研究對象的三所國中三年級學生的表現成果可知，多數國中三年級學生已熟悉文字符號表示與操作符號運算的規則，但對數學的實質意義的了解，還有很大空間需要教學者以更精進的教學方式、更完備的教學內容與學習者正確的學習態度去開展。研究發現參與本研究的學生較常出現對數學名詞定義模糊不清的情形，例如平均數的部分量與總體量的混淆、率定義的理解、新增次數後的平均分數等，使學生無法依題意寫出正確的表示式；另外在不等式文字符號的能力上，學生雖然能根據文字作符號表示，但對符號所代表的實質數值掌握不清，對不等符號容易陷入「多一點點」或「少一點點」的迷失。

運算法則方面：

本研究的資料顯示學生能記憶並熟練移項、去刮號、化簡的代數運算法則，例如在第 5 題的運算部分有 80％的學生能達成運算正確，出現錯誤多由於學生對文字符號意義的不了解或缺乏運算規則的背

景知識，在急於求解的情況下，使得他們在括號的展開、負號乘除的處理、分數的轉換及不等式符號變換方向的時機會產生錯誤，在運算過程產生混淆；再者學生在正整數值範圍的運算有很好的表現，但對非正整數的處理會依問題難度的增加有很不穩定的現象，學生容易陷入以正數為任意數的迷思。

求解題歷程方面：

學生能完成基本的運算過程，但缺乏對訊息的處理與應變能力，對單一層次的運算問題有較好的效果與信心，而對不同的題目敘述與多層次的問題多數學生漸感到困難，有較多的學生會感到無從下手，例如：在第 6 題雙重的不等式的情形下，學生無法察覺出有用的已知條件；第 3-1 題勝率的單一層次的問題，學生能確定 60 場為分母以求解，超過半數的學生能正確解題，但是在第 3-2 題時，許多學生無法察覺到文字之外的數學關係式，不知如何解題。對非單一層次問題，學生須藉由解題經驗的豐富增進其解題能力。

文字應用問題方面：

學生在解決不等式問題時，不一定立刻由不等式的列式著手，有些學生會略過文字中的不等式關係，有不少學生能以等式的概念仍然可求得其參考值獲致正確解答，例如學生在沒有完全理解第 10 題中多買 100 張票反而比較便宜的意義，尚未找出其不等關係，但以列舉

方式讓自己對題目的瞭解逐漸清楚，雖然最後仍無法列出不等式，卻能解釋其正確解的意義。不等式的文字應用題的解題失敗者，對代數語言的表示模式或關鍵詞句最主要原因是沒有正確的轉譯，分別會在「目標的確立」、「數學知識的結合」、「解題方法的使用」、「求解的運算過程」、「解答的判決」感到困難而發生錯誤，已經有很多學生看到文字題時會直接放棄。

數線概念上：

學生在判決答案時並沒有結合數線的概念以判斷大小關係，因此學生對負數、分數的不等關係作比較時是容易出現錯誤的。學生在使用不等符號和判斷符合符號解間有很大的落差，；研究結果發現學生能夠依題意正確使用不等符號，但是依不等式的表示式判斷符合不等符號的解時，有很高的錯誤率，學生對「不低於 72 分」多數學生能以「≧72」作表式示，但對「x＞-6.5 的最大整數」，204 位學生中有 24 位學生選答錯誤，有 16 沒有依照題意選答。

範圍值與解集合的認知：

研究發現學生對範圍值常受限於整數間的比較，對題目中所求範圍解的意義不是很瞭解，學生對正整數部分能正確判斷，但在小數系與分數系會不定時出錯。學生能具備求解集合的技能，對解集合的概念皆受度高，第 4 題採用代入法的學生，在晤談時經過示範演練，學

生即能正確回答類似題。

不同版本教材的影響：

就本研究的對象學生而言，已發現一個特別的現象是：使用南一版教科書與使用康軒版教科書的學生在某些題型的正確錯誤率表現上有明顯差距。南一版教科書的內容的例題與練習題的難度高於康軒版，對於南一版書中有而未曾在康軒版出現的題型，對使用康軒版的學生是感到明顯困難的，而在兩種版本皆有的問題卻未出現明顯差異，顯示教科書的版本的不同確會使學生的解題能力上產生差異，此差異確為存在事實。研究者認為，雖然造成此結果的原因並不為唯一原因，教師教學的方式、學生練習時間、城鄉的文化差距都可能影響著此研究的結果。此三所學校 A 國中為高雄市區大型學校其學生成就表現為三者最佳者、B 國中為高雄縣中型學校成就表現次之、C 國中為屏東線偏遠小型學校成就表現低於前兩者，城鄉的文化影響與教科書的難易程度的設定（有明顯的高低）對其教學訓練對學生的能力有不同程度的影響可作為後續者研究的參考。

本研究目的並非比較三所學校解題表現情形，但的確發現有差異，現報告三所學校狀況與學生成就表現比較並列表於下：

	學校位置	學校規模	教科書版本	10 題的正確率
A 國中	高雄市市區	110 班	南一版	0.55
B 國中	高雄縣鄉鎮	16 班	南一版	0.54
C 國中	屏東縣偏遠	11 班	康軒版	0.39

不等式單元的運算原則與數學概念對國中三年級學生是比較簡單的，但由此次的研究發現學生表現並未如預期，可見本單元還是有許多地方讓學生覺得困難，尤其是此次測驗設計幾個和真實生活會出現的情境，學生普遍在這些情境題表現較差，反而是數學式的計算學生表現較好，表示將學生的數學概念落實到真實生活有段距離，或者將這些情境問題還需作調整，以更符合學生的語言描述，讓學生能體會不等式求解的意義。

第二節　建議

一、教學方面的建議

（一）實際數值的使用與比較：

不等式以比較大小為起點，在本次研究結果，學生在解答判斷能力較差，教學者可以用更多的實際數值的使用與比較，來確立學生對不等式判定的數感，尤其是在負數值的判定上，教學者應在教學過程利用解題示範的時機，結合數線概念，引導學生落實數線標示的實證工作，內化數值在不等式中的合理意義，破除學生對整數解的迷失，應可使學生避免此類的錯誤，並增進學生對運算規則的理解。

（二）重視文字轉譯的訓練：

本研究發現：學生在此單元最大的困難在於文字符號的轉譯上，從幾題學生以列舉的方式求解的例子，可知學生對數值接受度高於文字，教學者可藉由更多對問題作實證行為，使學生理解題目中不等條件，加強學生對關鍵詞句的掌握能力，協助學生具有文字符號的列式能力，學生使用經驗的增加，應能降低學生上課有理解與測驗時不會寫的落差，對於多層次的思考題還是以引導式的問句為訓練方式為宜，減少學生直接放棄作答，方有助於學生在代數學習的思考與解題。

（三）做好實證的工作：

綜合學生測驗結果的資料與學生晤談的經驗，可發現學生在「運算」部分出現錯誤有些是急於求解，導致某一步驟失誤，或是「粗心大意」致運算錯誤，要不就是數值計算能力的缺乏，這些部分應可透過細心、練習、計算習慣的調整加以糾正而獲得改善；至於文字符號的能力與文字題的問題解決方面，有學生反應：『上課老師講的都很簡單，也都有聽懂，但遇到測驗題目時是容易錯。』。學生會將看懂老師的解題行為誤認為自己在聽懂後也能做到，因此上課老師對語言連結到文字符號的說明與解釋的過程，應引導學生在課堂內對上課內容的數學原則做實證的工作，將教師教學過程中的數學概念轉化為學生的數學知識，強化學生數學概念轉譯為符號文字的理解。

二 對未來研究的建議

（一）不等式學習對不同學習階段的成就與影響

本研究目的在探討學生在不等式單元的解題策略和錯誤類型的原因與困難，施測與面談對象為國中三年級學生，使用課本為國中數學第六冊。在最新教科書的編輯，此單元現已編排在七年級學習完二元一次聯立方程式之後，對於七年級與九年級學生兩個不同的學習歷程，是否會有相當類似的學習表現與學習困難，建議未來可針對此方面做研究與探討。

（二）教科書編選對不等式學習表現

本研究樣本的三所學校所使用的教材僅包含X版與Y版共兩個版本，目前市面上使用教科書計有四個版本，本研究結果已呈現在不同版本間有某些程度上的差異，但在所有不同版本的教學下是否真的存在不同的差異與影響，此全面性的問題或可提供後續的研究做探討。

（三）其它變項在不等式的研究

本研究目的在探討學生解題策略和錯誤類型的原因與困難，並未探就其它的變項，諸如：地域、性別、學習成就、學習態度與補救教學對此單元學習的影響，都可作進一步的探討。

參考文獻

一、中文部分

九章（1996）。**錯在那裡？：中學生解數學題常犯的錯誤分析**。九章出版社。

王如敏（2004）。**國二學生解一元一次方程式錯誤類型分析研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

仁林出版社（2006）。國民中學數學教師手冊第六冊。

余民寧（1999）。**國小數學學習障礙學生的知識結構評量與數學學習障礙診斷測驗編製之研究**。行政院國科會專案研究。

李靜瑤（1993）。**高雄市國二學生數學解題歷程之分析研究**。國立高雄師範大學水利及海洋工程學系碩士論文。

吳明玲（2003）。**國小二年級學童數感表現之研究**。屏東師範學院數理教育研究所。

吳季鴻（2001）。**高雄地區高三學生一元二次不等式運算錯誤類型之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

林清山（1987）。認知心理學對教育研究的影響。**現代教育，第四卷第六期，71-85 頁。**

周宏樵（2004）。**八年級學生對代數文字題錯誤類型分析之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

金玉麒(1987)。**國中生絕對值及不等式概念的錯誤分析與補救教學。國科會專題研究**。編號：NSC75-01110-S017-005。

南一書局（2006）。國民中學數學教師手冊第六冊。

袁　媛（1993）。**國中一年級學生文字符號概念與代數文字題的解題研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

莊松潔（2005）。**不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究**。國立中山大學教育研究所碩士論文。

許正諭（2005）。**九年一貫體制下國中生文字符號運算概念認知理解情形之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

陳聖雄（2005）。**高一學生解**一元二次不等式**的主要錯誤類型及其補救教學之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

陳建廷（2006）。**國一學生一元一次方程式解題歷程之研究**。國立中山大學教育研究所碩士論文。

陳慧珍（2001）。**南投縣國一男女生對文字符號概念與代數文字題之解題研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

黃明晃（1998）。**數學年夜飯**。台北市。心理出版社。

康軒書局（2006）。國民中學數學教師手冊第六冊。

楊金城（2004）。**國一學生解數學文字題**解題歷程**之分析研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

蔡育霖（2005）。**嘉義地區八年級學生一元一次方程式單元錯誤類型之分析研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

鄭麗玉（1994）。**認知心理學**。台北市。五南出版社。

謝孟珊（2000）。**以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討**。國立台北師範學院數理教育研究所。

謝明昆（2002）。**國二學生解數學文字題歷程之分析研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

戴文賓（1998）。**國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵**。彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。

二、英文部分

Brown, J. S. & Vanlehn, K. (1980). *Repair Theory : A generative of theory of bugs in procedural skill*. Cognitive, 4, 379-426.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle: Australia: University of Newcastle.

Femiano, R. B. (2003). *Algebraic problem solving in the primary grades. Teaching Children Mathematics*, 9(8), 444-449.

Kaput, J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. In National Council of Teachers of Mathematics(Eds.), The nature and role of algebra in the K-14 curriculum. Washington, DC: National Academy Press.

Kathlen, T. T. (1986). *Error reduction strategies for whole number operations in grade four*. Doctoral Dissertation, University of Brigham Young.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan Pub.

Kilpatrick, J. (1985). *A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving*. In Silver, E. A. (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives, (pp. 1-15). N.J. : L. Erlbaum Associates.

Kuchemann, D. E. (1981). *Algebra*. In K. Hart (Ed.), Children's understandings of mathematics. London: John Murry.

Lester, F.K. (1980). *Problem solving: Is it a problem*? In M.M. Lindquist (Eds.), Selected issues in mathematics education (pp.29-45). Berkeley, Calif: McCutchan Pub. Co.

Matz, M. (1982). *Towards a process model for high school algebra errors*. In D. Sleeman, & J. S. Brown, (Eds.), Intelligent tutoring system. London: Academic Press.

Mayer R. E. (1985). *Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving*. In E. A. Silver (Ed.). Teaching and learning mathematical problem solving. New Jersey, NY: Hillsdale.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). *An empirical classification model for errors in high school mathematics*. Journal for sesearch in mathematics education, 18, 3-15

National Council of Teachers of Mathematics. (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it* : A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Rojano, T. (1994). *Problem solving: From the development of algebraic ideas to algebraic thinking*. Kluwer Academic Publishers, New York, USA.

Schliemann D. A., Carraher W. D., J. S. & Brizuela M. B., (2007). *Bringing out the algebraic character of Arithmetic from childrens ideas to classroom practice*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schwarzenberger, R. (1984). *The importance of mistakes*. The 1984 presidential address. The Mathematical Gazetee, 68(445): 159-173.

Simon, H. A. (1980). *Problem soloving and education: Issues in teaching and research*. In D. T. Tuma, and F. Reif (Eds.), New York: Lawrence Erlbaum Associates, Publishes.

Sutton, C. & West, L. (1982). *Investigating children's existing ideas about science*. ERIC Document Reproduction Service.

Vanlehn, K. (1982). *Bugs are not enough. Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills*. The Journal of Mathematical Behavior. 3, 3-71.

Vergnaud, G.. (1988). *Long term and short term in learning algebra*. In C. Laborde (Ed.), (pp. 189-199). Paris: La Pensee Sauvage.

Von Glaserfeld E. (1987) *Constructivism as a scientific method*. Pergamon Press, New York.

Wagner, S. (1981). *Conservation of equation and function under transformations of variable*. Journal for Research in Mathematics Education.

Whitney, H. (1985). *Taking responsibility in school mathematics education*. L. Streefland (ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol.2).Utrecht: State University of Utrecht.

附錄一：預試測驗題

選擇題 7 題與非選擇題 13 題共 20 題如下：

一次不等式單元預試測驗卷

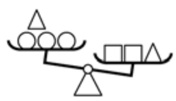
1.（　）甲、乙、丙、丁四人比身高，若丁比甲矮，丙比丁高，乙比丁矮，甲比丙高，則下列何者正確？
(A)甲最矮　(B)乙最矮(C)丁最矮　(D)丙最高

2.（　）已知a、b和c三數，若$a>b$，且$ac<bc$，則下列哪一個一定是正確的？

(A)$a+c<b+c$　(B)$a-c<b-c$(C) $a^2c<b^2c$　　(D) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

3.（　）某職業棒球隊在例行賽前30場比賽中，只贏了12場，卻輸了18場(即稱勝率為四成， $\frac{12}{30}=0.4$)，試問此球隊在例行賽的60場比賽中，至少還須贏幾場方可使勝率達六成以上。
(A)20　(B)24　(C)25　(D)30

4.（　）如圖，已知2個□比3個○重，則下列哪一個圖示是錯誤的？

(A) 　(B) 　(C) 　(D) 

5.（　）下列何者不是二元一次不等式$2x+5y-3\geqq 0$的解？
(A)(0，$\frac{1}{2}$)　　(B)(－1，1)(C)($\frac{11}{4}$，$-\frac{1}{3}$)　(D)(1.1，0.2)

6.小章身上原有x元，先用去5元，又用去了剩下的一半，而剩下的還超過20元，則依題意可列不等式為：________________________

7.某國中三年一班共有學生40人，其中有25位是男生，某次數學段考，全班平均分數不低於72分。假設男生平均分數為x分，女生的平均分數比男生的平均分數多4分，則：
依據題意可列出x的一次不等式為______________________

8. 以下數字4.5、6、11.3、5.2、－5、$6\frac{1}{4}$中哪些數同時為不等式$4x$＋13＞31及$5x$－11≦42的解？

9. 解不等式：3(x-15)＞7(x-2)-14的最大整數解為何。

10. 請在數線上，圖示不等式$2x$－2≦－3(x－6)中，x的範圍。

11. 一元一次不等式－5(x＋a)＜3＋x的解為x＞－13，則a =？

12. 解$\frac{3x+4}{6}-1\leq\frac{x+2}{8}+2$的一元一次不等式，求x的範圍

13. 若 x、y 的範圍為分別－3＜P＜2，－2＜Q＜4，則試求(1)P+2Q

（1）5P－2Q 與（2）P×Q 的範圍。

14. x 取什麼整數值時，$\frac{1-3x}{3}$的值會在 3 與 4 之間。

15下圖是測量一物體體積的過程：

步驟一，將300ml的水裝進一個容量為450ml的杯子中。
步驟二，將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿。
步驟三，同樣的玻璃珠再加入兩個放入水中，結果水滿溢出。
根據以上過程，推測一顆玻璃珠的體積在下列哪一個範圍內？
(1ml＝1cm^3)

16 小文到體育用品社購買球鞋時，老闆介紹：「這雙鞋子按原價以七折特價賣你，這樣你最少可省了 500 元。」，請問此雙鞋子原價最低為多少元？

17.某水果商發現一般在運送高級甜柿的過程中，都會有10%受到碰撞損壞。如果他打算將每個以30元買進的高級甜柿，以每個40元的價格出售，而且要賺1200元以上(假設那些受損的不能販賣)，那麼他至少要訂購多少個高級甜柿？

18.某旅行團想參觀天文館，天文館的入場券規定50人以上可享八折的優待，100人以上可享七五折優待，如果此旅行團人數在50到100人之間，請問此團體______人以上時，買100張入場券反而便宜。

19.小明帶了150元到麵包店買麵包與蛋糕，若麵包一個15元，蛋糕一個20元，小明兩種都要買，請問共有多少種買法？

20.平常考滿分為100分，小傑在班上的前三次的平常考成績分別為50、70、90分，但是小明的目標是平均85分以上，問小傑至少需要再考幾次小考才有可能達成目標。

附錄二：正式施測卷

一次不等式 測驗卷

測驗說明：1-2 題為不必寫計算過程；3-10 題為計算題，請務必寫出計算過程。

測驗時間 30 分鐘，每題 10 分。

1.（　）已知a、b和c三數，若$a>b$，且$ac<bc$，則下列哪一個一定是正確的？

(A)$a+c<b+c$　(B)$a-c<b-c$(C)$a^2c<b^2c$　(D)$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

2. 某國中三年一班共有學生40人，其中有25位是男生，某次數學段考，全班平均分數不低於72分。假設男生平均分數為x分，女生的平均分數比男生的平均分數多4分，則：

依據題意可列出x的一次不等式為 ________________________

3. (1)某職業棒球隊在例行賽前30場比賽中，只贏了12場，卻輸了18場(即稱勝率為四成，$\frac{12}{30}=0.4$)，試問此球隊在例行賽的60場比賽中，若想使勝率達六成以上，**至少還須贏幾場**？

(2)接上題，如果接下來的比賽每場都贏場可以提早達到勝率六成以上，**則必須要連續贏幾場**？

(1)計算過程：	(2) 計算過程：

4.以下數字3.5、4.5、6、11.3中，哪些數**同時為**不等式$4x+13>31$及$5x-13<42$的解？

計算過程：

5.解不等式：$3(x-18)<7(x-2)-14$的**最小整數解為何**？

計算過程：

6.請在數線上，圖示不等式$-4(x+5)<2x-2<-3(x-6)$中，**x的範圍**。

計算過程：

7.推測一個玻璃珠的體積：

假設一個玻璃珠的體積為x，分別依下列步驟列不等式推測一顆玻璃珠的體積。

步驟一，將240*ml*的水裝進一個容量為300*ml*的杯子中。

步驟二，將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿，**可列不等式為：**

_______(1)________。

步驟三，同樣的玻璃珠再加入兩個放入水中，結果水滿溢出。**可列不等式為：**

_______(2)________。

根據以上過程可依不等式推測一顆玻璃珠的體積會在哪一個可能範圍內？（1*ml*＝1cm^3）

計算過程：
(1) 不等式為：________________。
(2) 不等式為：________________。
可能範圍為：__________________。

8.小文到體育用品社購買球鞋時，老闆介紹：「這雙鞋子按原價以七折特價賣你，這樣你最少可省了 500 元。」，請問此雙鞋子**原價最低為多少元**？

計算過程：

9.平常考滿分為100分，小傑在班上的前三次的平常考成績分別為50、60、90分，但是小傑的目標是平均85分以上，問小傑**至少需要再考幾次小考才有可能達成目標**?

計算過程：

10.某旅行團想參觀天文館，天文館的入場券每張40元，規定50人以上可享八折的優待，100人以上可享七折優待，如果此旅行團人數在50到100人之間，請問此**團體_____人以上時**，買100張入場券反而便宜。【舉例：50人需50×40×0.8=1600元，100人需100×40×0.7=2800元，95人需95×40×0.8=3040元】

計算過程：

附錄三：不等式測驗卷答題統計表

(一)「甲類-列式」題目 2 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
2	A 國中	35	26	17	0.45
2	B 國中	34	15	15	0.54
2	C 國中	27	28	7	0.44

「甲類-列式」題目 7 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
7	A 國中	49	19	10	0.63
7	B 國中	47	21	6	0.58
7	C 國中	29	30	3	0.47

(二)「乙類-規則」題目 1 之答題統計表

題目	學校	選 A	選 B	選 C	選 D	正確率
1	A 學校	4	3	20	51	0.65
1	B 國中	0	9	28	37	0.56
1	C 國中	3	6	19	34	0.53

「乙類-規則」題目 5 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
5	A 國中	43	29	6	0.55
5	B 國中	47	16	1	0.73
5	C 國中	25	34	3	0.40

(三)「丙類-求解」題 4 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
4	A 國中	61	12	5	0.78
4	B 國中	43	20	1	0.67
4	C 國中	42	17	3	0.68

「丙類-求解」題 6 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
6	A 國中	49	21	8	0.63
6	B 國中	39	19	6	0.61
6	C 國中	23	35	4	0.37

(四)「丁類-文字題」題 3-1 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
3-1	A 國中	40	24	14	0.51
3-1	B 國中	36	21	7	0.56
3-1	C 國中	25	23	14	0.40

「丁類-文字題」題 3-2 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
3-2	A 國中	27	27	24	0.35
3-2	B 國中	15	24	25	0.23
3-2	C 國中	10	30	22	0.17

「丁類-文字題」題 8 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
8	A 國中	36	25	17	0.46
8	B 國中	33	21	10	0.52
8	C 國中	13	28	21	0.21

「丁類-文字題」題 9 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
9	A 國中	44	16	18	0.56
9	B 國中	38	14	12	0.59
9	C 國中	17	25	20	0.28

「丁類-文字題」題 10 之答題統計表

題目	學校	答對人數	答錯人數	空白	正確率
10	A 國中	33	25	20	0.42
10	B 國中	19	20	25	0.30
10	C 國中	20	17	26	0.32

附錄四：各題解題策略統計

說明：除第 1 題為選擇題不作解題策略統計，依各類型將解題策略列表如下。

一、各題解題策略統計表

類型	題目	解題策略	解題人數	佔正確總人數
甲	2	轉譯	83	86%
		化簡	13	14%
	7	轉譯	92	74%
		化簡	33	26%
乙	5	運算性質將未知數文字置於左邊	76	66%
		運算性質將未知數文字置於右邊	36	31%
		運算後以畫圖表徵判斷	3	3%
丙	4	運算性質	9	6%
		代入法	68	47%
		解集合法	69	47%
	6	解集合法	104	94%
		等量公理	7	6%
丁	3-1	解不等式	74	73%
		解方程式	8	8%
		組合數字	16	16%
		解不等式	3	3%
	3-2	解不等式	42	81%
		解方程式	4	7%
		組合數字	3	6%
		列舉	3	6%
	8	解不等式	77	94%
		組合數字	5	6%
	9	解不等式	66	67%
		列舉法	24	24%
		猜測答案	9	9%
	10	解不等式	57	80%
		列舉	14	19%
		猜測答案	1	1%

二、各校正確解題策略統計

(一)「甲類-列式」題目 2 正確解題策略統計

題目	學校	解題策略	解題人數
2	A 國中	轉譯	27
		化簡	8
	B 國中	轉譯	32
		化簡	2
	C 國中	轉譯	24
		化簡	3

「甲類-列式」題目 7 正確解題策略統計

題目	學校	解題策略	解題人數
7	A 國中	轉譯	34
		化簡	15
	B 國中	轉譯	35
		化簡	12
	C 國中	轉譯	23
		化簡	6

(二)「乙類-規則」題目 5 正確解題策略統計

題目	學校	解題策略	解題人數
5	A 國中	運算性質將未知數文字置於左邊	24
		運算性質將未知數文字置於右邊	18
		運算後以畫圖表徵判斷	1
	B 國中	運算性質將未知數文字置於左邊	35
		運算性質將未知數文字置於右邊	12
		運算後以畫圖表徵判斷	0
	C 國中	運算性質將未知數文字置於左邊	17
		運算性質將未知數文字置於左邊	6
		運算後以畫圖表徵判斷	2

「丙類-求解」題 4 正確解題策略統計

題目	學校	解題策略	解題人數
4	A 國中	運算性質	1
		代入法	25
		解集合法	35
	B 國中	運算性質	4
		代入法	13
		解集合法	26
	C 國中	運算性質	4
		代入法	30
		解集合法	8

「丙類-求解」題 6 正確解題策統計

題目	學校	解題策略	解題人數
6	A 國中	解集合法	44
		等量公理	5
	B 國中	解集合法	37
		等量公理	2
	C 國中	解集合法	23
		等量公理	0

(四)「丁類-文字題」題 3-1 正確解題策統計

題目	學校	解題策略	解題人數
3-1	A 國中	解不等式	31
		解方程式	1
		組合數字	7
		猜測答案	1
	B 國中	解不等式	23
		解方程式	6
		組合數字	5
		猜測答案	2
	C 國中	解不等式	20
		解方程式	1
		組合數字	4
		猜測答案	0

「丁類-文字題」題 3-2 正確解題策統計

題目	學校	解題策略	解題人數
3-2	A 國中	解不等式	22
		解方程式	2
		組合數字	2
		列舉	1
	B 國中	解不等式	13
		解方程式	2
		組合數字	0
		列舉	0
	C 國中	解不等式	7
		解方程式	0
		組合數字	1
		列舉	2

「丁類-文字題」題 8 正確解題策統計

題目	學校	解題策略	解題人數
8	A 國中	解不等式	34
		組合數字	2
	B 國中	解不等式	30
		組合數字	3
	C 國中	解不等式	13
		組合數字	0

「丁類-文字題」題 9 正確解題策統計

題目	學校	解題策略	解題人數
9	A 國中	解不等式	33
		列舉法	7
		猜測答案	4
	B 國中	解不等式	26
		列舉法	8
		猜測答案	4
	C 國中	解不等式	7
		列舉法	9
		猜測答案	1

「丁類-文字題」題 10 正確解題策統計

題目	學校	解題策略	解題人數
10	A 國中	解不等式	30
		列舉	3
		猜測答案	0
	B 國中	解不等式	15
		列舉	4
		猜測答案	0
	C 國中	解不等式	12
		列舉	7
		猜測答案	1