國立中山大學教育研究所

碩士論文

不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究

研究生：莊松潔 撰

指導教授：梁淑坤 博士

中華民國 九十四 年 七 月

誌　謝

攤在椅子上，望著散落桌前的文獻與原案，口考委員那句「恭喜你通過論文口試！」猶繞耳畔，同學與我握手恭喜的餘溫也仍在手心，激動的情緒方平復，心底才緩緩升起一個小天使，眨眨眼對我說：「你完成了碩士論文囉！」。兩年來努力不懈，論文的完成証明了我能夠經過嚴厲的焠煉，通過學術界的檢視而獲得肯定。當然我相信這不過是一個開始。學術的道路漫長無涯，往後還有更多的事物，等待著我繼續學習。

論文得以完成，首先要感謝我的指導教授—梁淑坤老師，她不但是一個很稱職的老闆，扮演學術領域上的標竿，永遠神采奕奕地引領我在做論文的道路上前進，而且還充當我的「心海羅盤」，關心我的生活起居，教導我許多立身之道，讓我在數學教育及為人處事方面能同時成長。老師，我會永遠記得您那句：「凡事做最好的準備，做最壞的打算！」

感謝柳賢老師及甯自強老師，公務及研究繁忙之餘，願意撥冗前來賜教。因為您們不吝珠玉，使學生茅塞頓開；更因為您們的細心郢正，讓學生的論文受益良多。

特別感謝我的父母，你們永遠是我最堅強的後盾，兩年來每日從未間斷的噓寒問暖，在我身邊打點大小生活雜事，使我能心無旁鶩完成學業。還有莊小弟的全力相挺，並適時給我精神上的支持。

感謝我的戰友—怡芳，有人並肩前行、彼此打氣的感覺很好，也因為這樣，讓我們能相互扶持一起通過這個挑戰。

感謝同門師兄弟姊妹—嘉皇學長、進寶學長、淑珠學姊、家杰學長、士傑學長、承諄及天慈，你們的提點和鼓勵，讓我遇到困難時能另闢蹊徑。

感謝文啟，和你一起吃飯打屁，排解作論文的苦悶與挫折，成為我研究所最難忘的時光。

感謝秀梅、千奇學姊和宗賢，沒有你們的協助，就沒有這本論文。

謝謝子祥、庭儀和政融三位小朋友的配合，你們好乖好棒。

感謝中山教育所的師長及同學們，求學期間的關懷與打氣，讓我感受到這個大家庭的溫暖。

最後，謝謝我的女友郁涵，體諒我的課業繁重，雖然相聚時光短少，仍一路上支持相伴左右。

不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究

摘　　要

本文旨在研究不同年級學童在具體情境中的未知數概念，以及面對未知數問題情境之解題歷程。近年來國際間有許多研究 (Carraher, Schliemann, & Schwartz, in press ; Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001 ; Bodanskii, 1991）發現，經由系統化的教學，國小中低年級學童的代數學習表現，優於同儕甚至高年級學童。於是研究者以半結構式晤談法（semi-structured interview）收集個案資料，研究參與對象為國小二年級、國小五年級及國中一年級學童各乙名，參與本研究時均使用九年一貫課程暫行綱要之現行數學教材。訪談導引為 20 以下的自然數之改變型加減法問題及等組型乘除法問題：包括單步驟問題、兩步驟混合問題、兩未知數關係問題以及未知數比大小問題。研究者從訪談逐字稿、學童紙筆解題記錄以及研究者在現場的觀察記錄等三方面著手進行資料分析。本研究共有六個主要發現，經由訪談者的引導，個案都能以代數語言轉譯問題的文字語言；三名個案的方程式解題策略均以「逆運算」為主；國小個案能在具體情境以數的基本運算性質化簡未知數的式子；小五及國一個案都能檢驗其解的合理性；等號意義逐漸由「算出答案的指令」發展到「代表相等同類量」；三名個案在「嘗試錯誤」解題策略有個別差異。以上部分研究結果與 Carraher 等人的研究結果相一致。最後本文對我國現行國中小代數課程提出建議，國小數學教材若及早加入讓學童學習或討論如何以代數式描述算術文字問題情境之單元，將有助於他們在國中正式學習代數時，對文字符號概念的認知提升。

關鍵字：未知數、半結構式晤談法、代數、解題歷程

A Study on the Concept of Unknown and Problem-Solving Process Among Different Graders in Concrete Situations

Abstract

The aim of this study is to explore different graders' concept of unknown and performance in solving equations in concrete situations. In recent years of early algebra research in the United States (Carraher, Schliemann, & Schwartz, in press), it was found that through systematic teaching, low and middle graders' algebra performance was better than the same or even higher graders without teaching. Therefore, semi-structured interview was adopted to collect data on three cases: a second-grader, a fifth-grader and a seventh-grader who were using textbooks that follow Grade one-nine Integrated Coordinate Curriculum in SY89. The interview questions included addition and subtraction CHANGE problems, as well as multiplication and division EQUAL GROUPS problems; with natural numbers below 20, and given in four types: one-step, two-steps mixed, relating two unknowns and comparing two unknowns. Data analysis was conducted by referring to three sources of data: protocols from interviews, children's problem-solving records and interviewer's observation records. Research findings were: all three cases that received guidance could use equations to express problems; "Undoing" was the most frequently used problem-solving strategy; both second and fifth graders could simplify expressions by number properties in concrete situations; both fifth and seventh graders could check if answers were reasonable; the meaning of equal sign developed from "finding the results of" to "equality in measures"; and, individual differences in "trial and error substitution" among three cases. Such results were consistent to that of Carraher. It is suggested that, introducing early algebra in the elementary school is helpful to children's learning of formal algebra in the junior high school.

Key words:

Unknown, Semi-structured interview, Algebra, Problem-solving process

不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之個案研究

目　錄

附表目次

附圖目次

不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之個案研究

第一章　緒論

本章一共分為四個小節，依序論述研究動機、研究目的、名詞解釋以及研究範圍與限制。

第一節　研究動機

代數，乃是數學學習的關鍵點。由算術進入代數，不僅是引入了文字符號來處理運算，同時也代表著數學的學習要從具體情境進入抽象概念。美國國家數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）在「學校數學的準則與標準」（PSSM）一書中揭示了代數在學校數學教學的重要性：代數不但是學校數學中一個重要的部分，而且有助於整合學校數學。代數對於學生未來的生活相當重要，不管是工作或是繼續升學，所有的學生都必須學習代數（NCTM, 2000）。我國教育部在 2000 年所提出的《九年一貫課程暫行綱要草案》中，順應世界的潮流，將代數的主題由國小五年級向下延伸，而為了培養國小學童觀察數量關係及展現數量關係數學結構之能力，把算式填充題（例如：5＋( )=7）的列式與解題引入國小二年級的數學教材之中。然而，代數教學的目的不外乎如下四點：(1)發展學生解方程式的技巧，找出適合特殊條件的數。(2)引導學生利用符號來幫助處理真實問題。(3) 提供學生數學基礎以學習其他的學科。(4)培養學生在閱讀大眾化的科學著作時，有充分的能力能了解其中的代數公式(呂玉琴，1989)。而且，在當今的資訊化及數位化的社會上，每個人對於函數所隱含之輸入與輸出的概念都應該要有所理解。綜上所述可知，代數是學生在其未來人生繼續學習及保持競爭力的必備學能之一。

雖然代數在數學教育上的重要性不言而喻，但是根據過去國內外的調查均發現，中學生在文字符號概念的學習表現卻普遍差強人意。在英國，CMSM 對於 3000 名英國中學生進行一項文字符號概念的紙筆測驗，發現 13 歲、14 歲及 15 歲的學童，只有 17%、 34%及 40%能將文字符號視爲特定未知數或一般數（Kuchemann, 1981）；在國內，林光賢、郭汾派及林福來（1989）參考英國 CMSM 所設計的題目，再配合國情修改，對全國 3609 位相若年齡的國中生施測，結果亦發現國中一、二、三年級學生分別約僅有 3.4%、31%、43%能將文字符號當變數或一般數使用、處理有括號及數字與符號混合運算的問題，或者使用兩個文字列關係式等較複雜的問題。由此可見，國內外的學童在未知數概念方面的學習成效欠佳，學校的代數教學似乎遇到了瓶頸。

那麼，代數教學的問題究竟出在那兒？早年許多研究認爲學童的文字符號概念不佳的原因與其認知層次的發展有關。對於在具體運思期的學童來說，無論在文字符號概念的理解或代數文字題的列式與解題上，均出現極大的學習困難，由於多數國中一年級的學生尚未達到形式運思的認知發展階段，自然無法勝任代數的學習。（林光賢、郭汾派、林福來，1989；袁媛，1993；陳慧珍，2001； Booth, 1984, 1988；Hercovics & Linchevski, 1994；Kieran, 1989；Kuchemann, 1978, 1981）。那麼學童究竟何時適合開始學習代數？必須等到學童認知發展成熟之後嗎？近年來，有些學者則提出了不同的看法，他們認爲若代數引入教材的方式正確及時機恰當的話，即使是幼童在文字符號方面亦能有相同的學習效果。例如：Freudentha1（1974）發現經由適當的引導，8 歲的孩童可以用 3 個未知數來表示兩個量與其總和的關係。Davis（1985, 1989）認爲如果將代數的學習轉移到與生活經驗的連結，而非數學格式的操弄，在二或三年級的數學課堂中便能引入初步代數（early algebra）。Booth（1988）則指出中學生某些未知數概念的學習困難乃是源於小學時過度重視算術過程和運算法則。Bodanskii（1991）更發現，四年

級學童（由一年級便開始導入代數符號）在未知數概念的表現，居然優於六、七年級學童（六年級才開始導入代數）。所以，這些數學教育研究者均認爲，代數的教學應經由適當的引導，給予中低年級學童討論代數關係或者發展未知數符號的機會，在正式學習代數的單元時，他們就能夠有更好的學習表現（Brito Lima & da Rocha Falcao, 1997；Brizuela & Schliemann, 2003；Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001）。

研究者爲了釐清算術與代數之間的認知間隙（cognitive gap），究竟是鴻溝抑或是罅隙？是否超過教學者所能影響的範圍？又國內尚無針對幼童未知數概念發展的個案研究。於是嘗試以國小二年級、五年級以及國中一年級的學童爲研究參與對象，探索正在學習算術的國小學童，引入未知數概念，經由研究者在晤談間給予學童（國小二、五年級）適當引導後的學習表現，並與進入正式代數單元時的學童（國中一年級下學期，一元一次方程式）之學習表現做一對照比較。一方面探討中低年級數學課堂中，引入未知數符號討論算術教學的可行性；另一方面期望能藉此研究結果，對現行九年一貫數學領域教材中的代數主題之內容提出建議。

第二節　研究目的

本研究所指之「不同年級」乃是以國小二年級、國小五年級與國中一年級爲代表。基於前一小節所論述的研究動機，本研究期望可達成下列五項目的：

一、暸解經研究者引導後，國小二年級學童在具體情境中，面對加法結構問題中所展現的未知數概念及未知數解題歷程。

二、瞭解經研究者引導後，國小五年級學童在具體情境中，面對加法與乘法結構問題所展現的未知數概念及未知數解題歷程。

三、瞭解國中一年級學童在具體情境中，面對加法與乘法結構問題所展現的未知數概念及未知數解題歷程。

四、比較國小二年級、五年級與國中一年級學童在具體情境中，面對加法及乘法結構問題所展現的未知數解題歷程。

五、比較國小二年級、五年級與國中一年級學童在具體情境中所展現的未知數概念以及未知數解題歷程。

第三節　名詞釋義

一、不同年級

本研究乃是以「國小二年級、國小五年級與國中一年級」代表不同年級。以下分別說明之：

1. **國小二年級學童**：爲民國 92 學年度進入國小就讀，現爲國小二年級學童，該年級的學童尚未接觸代數主題的學習。
2. **國小五年級學童**：爲民國 89 學年度進入國小就讀，現爲國小五年級學童。該年級的學童已學習過加減乘除的運算法則，及單步驟算式塡充題的列式。
3. **國中一年級學童**：爲民國 93 學年度進入國中就讀，現爲國中一年級學生。該年級的學童已學習過加減乘除的算式塡充題列式與解題及「一元一次方程式」單元。

以上不同年級的學童目前（93 學年度）在校所使用的數學教科書版本

，均為民間出版社依照教育部在民國 89 年頒布的《九年一貫課程暫行綱要》所編寫的數學教材。

二、具體情境

Freudenthal 認為，數學學習必須連結具體情境，貼近孩童且與社會活動有關，因為數學不只是個封閉的系統，而且是一種活動，真實情境數學化的過程往往已經將數學學習抽象化（引自 van den Heuvel-Panhuizen, 1996）。本研究的具體情境乃是指巧克力或彈珠數量的增減、合成、分解及比較的問題情境。

三、未知數

為待求的值或函數；或是一給定問題之解集合（solution set）的成員（余文卿、謝暉光譯，1997）。教育部（2003）在《國民中小學九年一貫課程綱要》裡的定義：「以文字符號列成方程式時，符號即具有未知數的意義。」；朱建正（1997）認為，可由問題情境推知某一被指稱的數或數量的值確實存在，而且可以透過算式的事演而能有效求出者，稱為未知數。綜合以上三者說法，本研究所提到的未知數定義如下：由問題情境推知某一被指稱的數或數量的值確實存在，且以文字符號列成方程式後，能透過算式的事演而有效求出者。

四、未知數概念

指學童對於未知數符號所賦予的意義，在已習得之算則範圍內（對二年級學童來說，是定位在二位數以下之加減法，而國小五年級及國中一年級學童則是定位在二位數以下之加減乘除），他們能否將未知數視同數字來進行運算，遵守各種運算法則，包括：結合律、交換律、分配律、三一律、及等

量公理。

若a、b、$c \in R$，則必符合下列運算性質：

1. 結合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$ 、 $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
2. 交換律：$a+b=b+a$ 、 $a\times b=b\times a$
3. 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
4. 三一律：$a>b$，$a=b$，$a<b$三式必有一式成立
5. 等量公理：若$a=b$，則$a+c=b+c$、$a-c=b-c$

   $a\times c=b\times c$ 、 $a\div c=b\div c,(c\neq 0)$

五、解題歷程

指孩童面對未知數的問題情境時，從設定文字符號所代表的未知量，列出方程式，化簡方程式到運用各種策略解題，最後檢視解出答案之合理性的整個過程。

第四節　研究範圍與限制

本小節論述研究的範圍以及可能產生的限制，以下細分爲研究方法以及研究內容兩方面深入闡述：

一、研究方法

本研究欲瞭解不同年級學童在具體情境中未知數概念及未知數解題歷程。但由於研究參與對象僅有二年級、五年級及國中一年級學童各乙名，故本研究結果並不預期推論至其他年級之學童。甚至能否推論至同年級其他不同能力的學童，也應特別謹慎，或需要更進一步的研究來審慎評估。另外，

在進行個案訪談收集資料的同時，研究者不僅是觀察者及訪談者，還必須扮演適時引導的角色，在研究現場中不斷的與受訪者進行互動。所以雖然研究者力求客觀，卻難免摻雜個人偏見在內。故往後還需進行更多的個案研究來強化本研究的論點。

二、研究內容

限於時間及人力的因素，本研究僅以單一問題情境（彈珠或巧克力的增減情境）及單一語意結構（加法結構問題為改變型問題，乘法結構問題為等組型問題）來設計訪談問題，並將問題的數字限制於 20 以內的自然數。學童在其他不同的問題情境或不同語意結構下是否有類似的表現，則應繼續進行其他研究來探討之。

第二章 文獻探討

第一節　　未知數概念的背景

由於學習的可能建構區之間的結構，應當是以類似學科的「發生邏輯」而非學科的「組織邏輯」的方式組織（甯自強，1993）。本節從數學史以及心理學的角度來探討未知數的背景，理解未知數的歷史發展與孩童建構未知數概念的認知脈絡關係。對於本研究訪談中，孩童的知覺歷程、研究者與孩童的溝通歷程，以及孩童如何從中主動產生意義，有更深一層的了解。以下由數學史以及心理學的角度分述之：

一、未知數的數學史觀點

在中國，曾有人使用「**算術**」作爲代數的名稱，例如：《九章算術》的「算術」所指的即是代數。《九章算術》是一本數學百科全書，代數問題分見於各章，特別是第八章方程，主要是論述線性（一次）聯立方程組的解法；南宋秦九韶的《數書九章》中有「立天元一爲某某」的術語，天元就是代表未知數，用現在的術語來說就是「設 x 爲某某」。「**代數**」這個名稱則是一直到 1859 年，晚清數學家李善蘭在代微積拾級一書中的序中指出“中法之四元，即西法之代數也”，才正式被使用。

在西方，「Algebra」一名來自阿拉伯文 al－jabr，al 爲冠詞，jabr 之意爲恢復或還原，解方程式時將負項移至另一邊變成正項，也可說是還原，也有接骨術的意思。而代數的發展歷史，一般認爲可區分爲如下三個階段，分別是文辭代數階段、簡辭代數階段以及符號代數階段（Harper, 1987；王懷權，1987；趙文敏，1985）：

(一) 文辭代數階段（rhetorical algebra stage）：

指希臘數學家 Diophantus（Diophantus of Alexandria，250 A.D.）提出文字符號代表未知量以前。在此階段，人們以口語化的自然語言來描述解特定方程式的過程，並沒有使用特殊的符號或記號（sign）來表示未知數。

(二) 簡辭代數階段（syncopated algebra stage）：

始於 Diophantus 使用文字符號代表未知量，他被譽爲「代數之父」，並將希臘人已完成的代數成果加以匯集編目，寫成《算術》一書，對後來的數論學者有很深的影響，影響力可比美歐幾里得的《原本》。

三到十六世紀的代數學家主要關注的是文字符號的特定性（identity），而非一般性（general）的表達。所以在此階段縮寫符號系統並沒有重大的發展。在七世紀回教統治後，阿拉伯的數學家在希臘及印度相當的活躍，但是他們的代數還是停留在修辭階段，直到文藝復興時期，阿拉伯的數學輾轉地傳遞到了歐洲，才開始使用省略的符號代替語言，例如，使用 p 代表加，m 代表減。

(三) 符號代數階段（symbolized algebra stage）：

當 Vieta（Francois Vieta，1540－1603）拜讀了 Diophantus 的大作之後，開始使用字母來假設未知量，便開啓了符號代數的新時代。他是第一位特意地、系統地引用字母的人。他不只用字母表示未知數和未知數的乘冪，還使用它們當做一般係數。

至此，數學家們開始以文字符號來表示數學問題的一般解，並以代數爲工具來証明數字間的關係。

二、未知數的心理學觀點

本段以 Klausmeier, Ghatala, & Frayer (引自 Sowder, 1980)及 Sfard (1991)等人的心理學觀點來剖析未知數概念。

Klausmeier, Ghatala, & Frayer 提供了一個數學概念學習和發展的模型來增進學者之間對於概念發展階段的溝通。他們認爲數學概念學習主要分爲以下五個階段（引自 Sowder , 1980）：

層次 1，具體期（concrete）：學生能理解一個先前經驗過的例子。

層次 2，恒等期（Identity）：學生可以了解一個之前遭遇過的例子，即使這個例子是由不同時空觀點或是不同形式來觀察。

層次 3，分類期（Classificatory）：學生能夠分別正例與反例。

層次 3.5，生產期（Production）：學生可以自行舉出關於此概念的例子。

層次 4，形式期（Formal）：學生可以說出此概念的定義。

他們並認爲若是出現在孩童生活週遭的例子，則不太需要教學就能達到前兩階段。於是本研究選擇巧克力與彈珠增減及比較問題來訪談孩童，正是他們熟悉的日常生活情境。

Sfard（1991）認爲，抽象數學符號（如：未知數 x）必須基於兩種不同的方法來思考，一爲結構性（視爲一個物件「object」），一爲操作性（視爲一個過程「process」）。而對於大多數人來說，學習運算概念的第一步就是獲得新的數學符號，而從「過程」過渡到「物件」是緩慢而問題重重的。在結構性及操作性概念完全發展之後，兩者均在數學活動中扮演重要的角色。其中，「物件」是指涉其爲存在某一空間的穩定結構，一看到就能理解並且將其視爲一個整體來操作；「過程」則是把抽象數學符號潛在於一系列的活動中。代數的發展就是一個「過程－物件」的循環，學校代數教學也必須依照「過程－物件」的序列，使學生了解代數的結構。

根據許多數學概念由過程到物件的歷史演進，Sfard 提出了一個三階段的數學概念發展模式：由內化（interiorization）、濃縮（condensation）到具體化（reification）。由內化到濃縮是連續的、量的變化；而由濃縮到具體化則是跳躍的、質的變化。以代數而言，她認爲學生除了必須要能十分熟練的解方程式之外，還要了解方程式一般化的特性，並且能理解「函數」不只是計算一些成對的數字，才能達

到具體化的階段。

以上所述之心理學觀點看來，在學習代數時，學生的思維有兩點必須要調整：第一、學生不能將代數式視爲數字的運算，必須要將其視爲物件，進行更高層次的運算。換句話說，必須以化簡、分解、分母有理化及解方程式，代替加、減、乘、除等運算。第二、學生必須學習如何處理代數的結構，特別是數字關係的符號表徵，像是如何將文字題轉換成方程式（Kieran, 1992）。所以代數學習的認知需求包含把缺乏語意內涵的符號表徵當做數學物件，並且運算這些符號與數字混合的物件；還有，消除孩童之前對於某些符號特定的解釋，或者一開始就不該建立這些特定解釋（例如：「=」即是要寫出答案），並讓孩童開始試著以算術解法的逆運算來表徵代數文字題。例如：大寶有 2 枝鉛筆，媽媽給大寶一些鉛筆之後，大寶有 5 枝鉛筆，問媽媽給了大寶幾枝鉛筆？在算術中，孩童會以 $5-2=3$ 解題，但是在學習代數時，則須訓練他們算術解法的逆運算，即以 $2+x=5$ 來表徵題意並解題。

第二節　孩童未知數概念的發展情形

本小節主要以 Kuchemann (1981)及林光賢、郭汾派及林福來（1989）等國內外兩個大型調查研究來瞭解孩童未知數概念的發展情形。

Collis (1975)以代數式方向的問題調查學生對於文字所代表之未知數的理解。發現孩童之未知數概念可分爲以下三個層次：

低層次（Lowest level）的孩童（10 歲－11 歲）：會使用一個特定的數來代替字母，但如果第一次嘗試失敗，孩童就會放棄。例如：問他比 x 大 5 的數是什麼，他會說 x = 3，所以是答案是 8。

中層次（Middle level）的孩童（12 歲－13 歲）：則能以「嘗試錯誤」（trial－and－error）的方式，來獲得答案。

高層次（Top level）的孩童（14 歲－15 歲）：可以將 x 視爲一般數，而此未知數 x 擁有孩童過去所學關於數的所有性質。

Kuchemann 在 1976 年根據 Collis 的文字符號發展階段，發展出六個文字符號概念的層次，並由此六個層次設計了 51 道題目，以 3000 名 13 至 15 歲的英國中學生爲研究對象，進行紙筆測驗調查學生代數方面的學習成就，其區分的六個文字符號概念層次如下（Kuchemann, 1981）：

1. 文字符號視爲可計算出的值（letter evaluated）：孩童會給予文字符號一個特定值，而不直接以文字符號做計算。例如問孩童 x ＋ 3 =11，x 值爲何？孩童會藉由回憶 8 ＋ 3 = 11 而說出 x 是 8。
2. 文字符號視爲可不使用的（letter not used）：孩童會忽略文字符號，或者雖然看見，但不賦予任何意義。例如當 a ＋ b = 27 時，a ＋ b ＋ 2 = ？孩童可以未經思考 a、b 或 a ＋ b，就回答 29。
3. 文字符號視爲一個物體（letter used as an object）：孩童認爲文字符號是指涉某個物體，如 3a 表示 3 個蘋果（apple）。
4. 文字符號視爲一特定未知數（letter used as a specific unknown ）：孩童可以將文字符號視爲一特定但未知的數來進行運算。例如：比 n ＋ 5 多 4 的數是什麼？孩童能回答 n ＋ 9。
5. 文字符號視爲一般數（letter used as a generalized number）：此層次的孩童可以意識到文字符號代表的是一組數。例如當 x ＋ y = 12，要求孩童列出可能的 x 值，他們可以舉出一個 x 值以上，但是他們還無法完整的列出解集合。
6. 文字符號視爲變數（letter used as a variable）：在此最高層次，孩童將文字符號視爲一個範圍內的非特定值，並了解變數以在式子中的運算關係來

定義的。例如：2n 和 n ＋ 2，那一個數比較大？孩童可以說出當 $n>2$ 時，$2n>n+2$。

由 Kuchemann 所區分的六個階段我們可以得知，孩童要真正瞭解未知數的意義必須先將文字符號視為可計算出的值，不使用它或視其為一個物體，才能達到將文字符號視為特定未知數的階段；且孩童必須經過將未知數視為一般數的階段，則可以提升至將未知數視為變數階段。

Kuchemann 將學生的表現分為Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 共四個層次如下表 2-1。而調查的結果發現 13 歲、14 歲及 15 歲的學生，達到層次Ⅲ只有 17%、34%及 40%；達到層次Ⅳ的百分比分別只有 2 %、 6 % 及 9 %。即使經由研究者對問題的解釋，大部分學生的表現仍無法到達層次Ⅳ，即無法靈活的將文字符號視為特定未知數使用，更遑論將文字符號視為一般數或變數。

表 2-1 學生文字符號概念層次表

層次	學 生 的 表 現
Ⅰ	學生能將文字符號當成可計算的值，或視其為一物體來解只有數字或單一文字符號的運算的題目。
Ⅱ	學生能將文字符號當成可計算的值，不使用或視其為一物體來解二個文字符號的運算的題目。
Ⅲ	學生能將文字符號當特定未知數使用，但只能解決結構簡單的題目。
Ⅳ	學生能將文字符號當特定未知數、變數或一般數使用，解決結構複雜有干擾性的題目。

我國林光賢等人（1989）參考 Kuchemann 的試題，配合國情加以修改，在民國 77 年間對大台北地區 806 個國中生，及台灣省 2863 個國中生進行紙筆測驗

與訪談。研究結果發現台灣地區國中一、二、三年級學生約有 86%、50%以及 40%屬於層次Ⅰ，顯示他們只會作單一文字符號運算或處理文字符號只當特定數或只有數字計算等結構簡單的題目。能達到層次Ⅲ的學生僅有 3.4%、 31%、 43%，而達到層次Ⅳ的學生更分別只有 0.5 %、 6.1 %、 13.1 %。

由上述過去國內外的兩個大型調查報告中不難發現，中學生在代數方面的學習效果不彰，而導致學習成就低落。另外值得注意的是，不論是英國或者我國，國二與國三的學生達到層次Ⅲ的百分比分別爲：英國的 34%、40%及我國的 31%、43%，國二學生與國三學生達層次Ⅲ的百分比差異並不大，可以看出中學生的未知數概念在國二到國三多半未明顯提升，即學生雖然達到形式運思期，其未知數概念卻未見成長，似乎意味著學校的代數教學成效有限。

有鑑於目前國中小數學課程的安排下，國中學童在代數方面的學習成效一直不佳，於是教育部在民國 93 年 11 月所發佈的《國民中小學九年一貫課程綱要》加重了代數主題在國小數學中的角色，國小學童能否接受未知數概念則成爲了此教材成敗與否的重要關鍵。然而自民國 82 年實施《國民小學數學課程標準》以來，關於國小學童未知數概念發展情形，除了陳維民（1997）曾針對一位國小六年級的兒童進行晤談，發現該生的未知數概念具有十項性質。此外，國內尚無其他針對國小六年級以下的學童未知數概念之個案研究。由此可知，在國民中小學九年一貫課程綱要即將於明年度（民國 94 年度）施行之際，亟需此類的研究來支持新綱要對於代數主題的安排，所以進行探討國小學童的未知數概念的相關研究實在是刻不容緩的。

第三節　未知數學習困難及幼童學習代數之相關研究

許多學者提出，學童在中學進入代數單元的學習時，之所以會遭遇到許多困難，乃是因為小學的過份注重算術規則及運算法則，一直到中學突然引入代數符號，讓學童難以適應。Kieran（1992）肯定這樣的說法，他認為學童學習代數往往是很膚淺的，不了解其數學結構。而且為了掩蓋此一情形，只得訴諸於記憶數學規則與程序，久而久之影響其信念系統，認為代數就是記憶規則與程序。而近年來，國外有一些學者將代數符號的討論引入中低年級學童的數學學習中，評估讓幼童以代數思維探究算術問題的可行性，期望能因此減少在中學時正式代數學習的困難。

本節分為二部分，首先探討國內外對於學童未知數概念學習困難的相關研究進行歸納瞭解，再對於支持幼童進行代數教學的可行性研究，做一整理。

一、未知數學習困難之相關研究

代數被視為「一般化的算術」，所謂「一般化」乃是指算術與代數有相同的數學運算法則。雖然使用相同的符號和記號，但解釋的角度卻全然不同。例如：「等號」在算術中，代表問題與答案，或者同義的式子的連結。例如：$3\times(6+4)=3\times10=30$。然而在代數中，等號不僅連接著同義的式子，並且給予等號兩邊的式子某些限制。例如：$6x-4=3x+5$，只有當 $x=3$ 時才成立（English & Halford, 1995）。因此，學童在開始學習代數時，往往會受到之前學習算術的經驗影響而遭遇到許多瓶頸。而 Herscovics 與 Kieran（1980）針對兒童心中的方程式概念（equation）進行探討，發現：(1)學生對符號的解釋與成人不同；(2)學生將等號視為運算後的結果；(3)學生從算術中的舊經驗來建立方程式概念。由上述可知，孩童在學習代數時深受算術的影響，包括**文字符號**、**化簡代數式**、**方程式列式與解題**、**解代數文字題**共四方面，均有不同程度的迷思概念，以下依

序呈現孩童未知數學習困難之相關研究。

1.文字符號

以文字代表數值是算術與代數之間最顯著的衝突之一，文字在算術中只代表單位（例如：m 表示「公尺」）然而在代數中，卻必須表示「公尺的量」）。這樣的轉變造成學生在沒有數字參照的問題中產生困擾，例如：3＋5a 的 a 對於學生來說，代表 apple（蘋果）。再者，每一個文字都被當成特定的數值。例如：學生認為 x＋y＋z 不會等於 x＋p＋z，因為他們認為 y 和 p 分別代表了不同的數（Booth, 1988）。

此外，大部份的學童都不了解算術之下的運算結構。Booth（1984）研究 6 至 12 歲的國小學童，指出如果他們無法了解 13 可以寫成 5＋8 的話，就不可能將 a ＋ b 視為一個物件。 Chaiklin 及 Lesgold（1984）發現六年級的學生無法直接判斷 $658-542+947$ 、 $947-658+542$ 、 $658+947-542$ 等式子是否等值，而必須使用各種方法合併或計算出結果。而 Collis（1975）則發現孩童無法判斷多種運算之間的關係，尤其是包含未知數時，例如：(235＋□)＋(679 − 122) = 235＋679。Booth（1984）在 CSMS 的調查中，給 13 歲的孩童觀察一個長為 13＋ f 、寬為 7 的長方形，然後問他們面積為何？有 42%的孩童回答像是 7f3、f21、f＋21 的答案，顯然他們並不了解代數符號的意義。從國內的許多研究也發現，大部分的國一學童都無法將文字符號視為特定未知數（袁媛，1992；陳慧珍，2001；謝和秀、謝哲仁，2002），而文化不利的原住民學生甚至於到高一仍無法達到此階段（黃志賢，2001）。

2.化簡代數式

Booth（1988）、黃寶彰（2002）指出初學代數的學童在代數式化簡時常出現一些非系統性（unsystematic）的錯誤，例如要求學生化簡 $2a+5b$ ，常常會得到

7ab 這種答案。這關係到學生對於運算符號的解釋，算術中的「＋」代表執行運算，「=」則代表寫出答案。Kieran（1992）認爲對於 12 歲到 14 歲的學生來說「=」是單向的。至於 7ab 則是來自於帶分數（$2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$）或者位値系統（43 = 40 ＋3）的影響。另外，以兩位數字來代入一個文字符號，也會使學生產生認知衝突。

戴文賓、邱守榕（1998）則指出孩童在代數式化簡時，只處理含有 x 的同類項，常數項則不合併、不接受含有加號的式子當作答案，如 3x＋4 = 7x。另外，會將 x 的係數忽略不計，3x＋x = 3x。另外，在解決含括號的化簡問題時，括號外的數字只和括號內的第一項相乘，忽略第二項以後，或者括號外爲負號時未變號；不知道括號內的算式要和括號外的那一項作運算。例如在列式時，孩童也會把 4(x – 1)寫成 4x – 1。Kieran（1992）認爲這是因爲初學代數的學生傾向由左向右閱讀一個代數式，而未發現括號的必要性。陳盈言（2001）的研究中更指出，就算是已學習過一元一次方程式的國二學生，在變數概念的測驗中，仍然出現了許多文字符號與數字混合運算上的錯誤。

總之，由於算術活動的焦點在於發現一個特定的數爲答案，但是代數的焦點則是在過程與關係的推導以及式子的化簡。許多學生無法了解，他們受到算術答案形式的影響，總是想要求出一個特定數做爲答案，他們雖然可以列出一個正確的代數式，但不知道那是正確答案。另外，在學生的眼中，「=」是具有方向性的，代表要他們做某個動作，所以無法接受等號右邊有未知數的式子。

3.方程式列式與解題

解方程式的策略方面，Kieran（1992）提出了七種學生常使用的代數解題策略，列舉如下（strategy, S1－S7）：

S1.使用數字（use of number facts）：解 5＋□ = 8，會回憶 5＋3 = 8 的事實

S2.使用數數策略（use of counting techniques）：解 4＋□ ＝8 時，孩童會把 5、6、7、8 數出來而得到答案為 8。

S3.覆蓋（cover－up）：解 2x＋9＝5x；孩童知道 5x＝2x＋3x，所以 3x＝9

S4.逆運算（undoing）：解 2x＋4＝18，先將 18 減 4，再除以 2。

S5.嘗試錯誤（trial and error substitution）：解 2x＋5＝13，會嘗試以不同的數值代入，例如 2、6 等等…

S6.移項法則（transposing）；換邊就變號（change side, change sign）

S7.等量公理（performing the same operation on both sides）。

以上 Kieran 提出的七種解題策略（S1~S7）提供了研究者分析研究參與對象之未知數解題策略的向度。

Herscovics & Linchevski（1994）設計了 50 題一元一次方程式來訪談一個七年級的資優班學生 22 人，平均年齡是 12 歲又 9 個月，每人進行個別訪談兩次各 45 分鐘。而 50 個方程式包括單步驟加減問題、單步驟乘除問題、兩步驟加減問題、兩步驟乘加混合問題，及未知數在左邊出現兩次、等號兩邊均有未知數等六種類型。結果發現學童最常使用的解題策略列表如下頁表 2-2：

Herscovics 及 Linchevski 認為學童並沒有對未知數進行運算的能力，所以他們所使用的解題策略是屬於比較低階的，包括逆運算（S4）及嘗試錯誤（S5）。並認為「是否對未知數的運算能力」即為算術與代數之間的認知間隙。

表 2-2 尚未學習代數的孩童之未知數解題策略

方程式類型	使用比例最高之解題策略
單步驟加減、乘除問題	1. 逆運算 2. 減數與除數的互補

兩步驟加減問題 （未知數在最左邊）	合併數字項後，再進行逆運算
兩步驟加減問題 （未知數在式子中間）	1. 代入並估計 2. 合併數字項後有系統的代入
兩步驟乘加混合問題	1. 兩次逆運算 2. 減數與除數的互補＋運用數字事實
未知數在左邊出現兩次	1. 除以二 2. 逆運算後再除以二 3. 有系統的代入 4. 代入，第一次就成功
未知數出現在等號兩邊	1. 有系統的代入 2. 代入，第一次就成功

方程式是一個對稱而過渡的等式，即等號的左右邊是等價的。然而「等號」對於初學代數的孩童來說，卻是一個「行動的訊號」，他們認爲等號的左邊是問題，而等號的右邊是答案，而在解方程式的過程當中，等號也不過是一個「分隔的記號」（Kieran, 1992）。所以學生往往能接受$5x+3=6$，但無法接受$5x+3=4x-5$。還有，Kieran（1984）發現 12 歲孩童在判斷等式的加減會發生兩種錯誤，第一種爲「轉換加數」（Switching Addends）例如：$x+37=150$，$x=37+150$。第二種錯誤爲「重分配」（Redistribution）例如：$x+37=150$，$x+37-19=150+19$。也就是說，孩童不了解加減法的結構關係，尤其包含文字符號時。

另外，在算術的學習過程中，有些迷思概念亦會造成代數學習的困難。例如學生不會使用括弧，他們認爲式子的順序決定運算的順序，而且計算的順序不會影響結果。像是$18\times 27+19$，孩童則認爲先做 27＋19 或先做 18×27，都不會影響此算式的答案。孩童在學習算術時，所使用的非正式方法（informal method）亦會影響代數的學習。例如：Ekenstam 和 Nilsson（1979）以 200 個 16 歲的中學生爲研究對象，發現有 82%的人可以解出$\frac{30}{x}=6$，但是只有 48%的人可以解出

$\frac{4}{x}=3$，原因在於：第一題學生可以利用嘗試錯誤的方法求出解，但第二題不行。像這種非正式方法的使用，在學習代數時就會遭遇障礙（引自 Kieran, 1992）。

Wagner（1981）研究改變方程式及函數中的文字符號對中學生的影響，發現只有38%的中學生知道 $7\times w+22 = 109$ 與 $7\times v+22=109$ 中的 w 和 v 是一樣大的，大部分的學生都認爲必須要解出答案才能知道，也就是說學生認爲替換不同的文字符號，便改變了整個題意。而 Greeno（1982）指出孩童不知道把答案代入等號的左邊與右邊來驗算，只能重新解方程式。或者，他們會使用不正確的策略以求得某數做爲答案，例如：隨意用一個數字代替未知數來求解。

4.解代數文字題

學校代數的課程教導學生解代數文字題的步驟如下：設未知數，列出方程式，經由代數處理化簡，最後把未知數都放在某一邊之後就可以找到答案。而在小學階段，要求孩童將文字題轉譯成方程式是十分困難的，因爲對孩童來說，等式只是代表運算而獲得解答的過程（Freudenthal, 1974）。

Mayer（1982）要求大學生解以下類型的代數文字題，例如：一幅長方形的圖畫，其面積比加了 2 吋寬的畫框後的面積少 64 平方吋。設這幅圖畫的長比寬多 4 吋，問此圖畫的面積為多少？問題包括了三種陳述句：(1)指定句：指定某一變數一個數值，如「畫框爲 2 吋寬」；(2)關係句：表示兩個變數間的數量關係，如「長比寬多 4 吋」；(3)疑問句：求未知數的值，如「圖畫的面積爲多少？」。研究結果發現大學生解題時，仍容易出現以下的錯誤包括：(1)遺漏的錯誤（omission error）：對命題不能完整回憶。(2)細節的錯誤（specification error）：指在陳述句中，一個變數轉換到另一個變數的能力不足。(3)轉換的錯誤（conversion error）：無法將關係句的形式轉譯爲陳述句的形式。

MacGregor & Stacey (1993)以開放式問卷訪談 9 年級的學生 281 人，並以多重選擇題問卷調查 8、9、10 年級 1048 人，發現學生將文字問題轉譯成代數式可能發生以下的錯誤：(1)語法直譯（syntactic translation）；(2)文字符號的迷思（misinterpretation of algebra letters）；(3)來自自然語言的衝突（interference from natural language）。針對上述的現象，MacGregor & Stacey 認爲應該對於學生的解題行爲提出新的解釋，他們觀察學生的錯誤解題表現來提出學生的認知模型，他認爲學生試圖從自然語言的建構中表徵被比較的不等量（compared unequal quantities），但是此模型卻只適用於一般語言，而不適用於數學語言。對於教學的啓示在於學生可能從文字中了解數學關係的認知模型。

經由上述的探討，學童在學習代數時的迷思概念一共有以下四點：(1)對於等號的狹義解讀（Booth, 1984, 1988; Kieran, 1992; 1984）。(2)文字符號意義的迷思概念，例如不同文字代表不同數字（Booth, 1988; Collis, 1975; Kieran, 1992; Kuchemann, 1981）。(3)拒絕接受像「3a ＋ 7」這種含有未知數的答案並出現許多文字與數字混合化簡的錯誤（黃寶彰，2002；陳盈言，2001；戴文賓、邱守榕，1998；Booth, 1988; Sfard & Linchevski, 1994）。(4)解等號兩邊均有未知數的方程式出現困難（Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1992）。(5)代數文字題轉譯成方程式的失敗（MacGregor & Stacey, 1993; Mayer, 1982）。

二、幼童可學習代數的相關研究

本段以蘇聯的 Bodanskii 在1991年就曾進行一項長期的教學實驗來証實初步代數（early algebra）的可行性。另外，美國的TERC (2003) 報告從1998年開始進行一連串由David Carraher所主持，關於初步代數的研究計畫。他們均認爲

幼童能夠以文字符號來描述他們正在學習的算術中所隱含的數量關係，並已有成熟的研究成果（Kaput, Carraher, & Blanton, in press; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2005）。以下分述其研究成果：

Carraher, Schliemann & Brizuela (2001) 指出算術的意義乃來自代數。例如：「＋3」可以代表對一個特定數運算，也可以代表一個輸入的集合與一個輸出的集合之間的關係，例如我們使用函數「n→ n＋3」來描述兩個變數 n 及 n＋3 之間的關係。所以算術的物件可以視爲特定的（如果n = 5，則 n＋3會等於8），或者一般化的（n→n＋3）。算術雖然圍繞在數字上討論，但是其數字底下的意義卻是一般化的。而算術也包含未知數的表徵和運算。典型的算術問題總是希望學童可以使用運算符號來表示已知的關係，未知數總是被放在等號右邊的空位（3＋4 = x）。但是如果算術問題太過複雜，學生無法直接列出算式，若以代數符號來解題則是比較容易的。所以 Carraher 等人主張在幼童數學教育初期就可以將算術注入代數意義。

首先，Bodanskii (1991)針對六個國小一年級的班級設計一套爲期四年的代數教學實驗課程，其中有一個班級接受四年的教學實驗，有一個班級接受前三年的教學實驗，有二個班級接受前兩年的實驗，有二個班級則接受第一年的教學實驗。其課程共分成 5 個階段來教導孩童利用列方程式來解題：

階段Ⅰ：教導孩童某些重要數學概念（包括：量、量的比較、等式及不等式）；解簡單題目來培養等號的概念及問題的符號表徵（一年級）。

階段Ⅱ：培養分析問題情境的能力（已知量與未知量的分別）及用簡單的符號來表示問題情境（二年級）。

階段Ⅲ：培養理解情境中資料的關係，分辨等式所需的量、以及表徵圖形關係的結構之能力（二年級）。

階段Ⅳ：培養以等式表徵問題呈現的關係之能力（二年級）。

階段Ⅴ：解方程式及驗算的教學（三、四年級）。

每個教學階段結束後的測驗調查結果均發現，經由合適的系統教學，大部分中低年級的學生在代數測驗的表現，都優於同年級，甚至更高年級的學生。

Carraher & Schliemann（2000）首先在美國波士頓某公立小學三年級班級進行未知數概念的研究，發現一開始孩童無法使用未知數來表示問題中的數量關係，例如：Maria 比 Leslie 矮六英吋，Tom 比 Maria 高四英吋，學童會利用問題中所給的數字來作答，有一半以上的學生認為 Maria 的身高是六英吋。經過雙週一次，每次 2 小時的教學後，在第六週和第七週的訪談發現，孩童便可以正確的以 x 來表示問題中的加法差異。

接下來 Carraher 等人（2001）的研究團隊（包含一位教師、二位攝影師及班級導師）對大波士頓地區（Greater Boston）的公立小學三年級學生一班共16人，進行每週90分鐘的教學活動共8次，討論一個需要多步驟一元一次方程式的代數文字題。結果發現許多學生一開始以圖像表徵問題或是以特定值代入未知數，經過教學後，都能以代數符號來表示題目中的情境，並且運算包含數字和未知數的式子而不以特定值代入未知數。另外，學生也能夠了解未知數代表的是「任何可能的值」。

Brizuela & Schliemann（2003）研究四年級學生是否能基於量的連結概念，來了解及使用代數語法規則。他們以70名四年級的學生（其中75%是拉丁美洲人）為研究對象，經由6次初步代數的教學，每次約90分鐘，教學結束後，訪談一個班級18位學生面對以下的問題：

Harold 有一些錢，Sally 的錢是他的4倍，Harold 賺了18元之後，他的錢變的和 Sally 一樣多，請問 Harold 原來有多少錢？

其中有10位學生能用N、X或H來代表 Harold 的錢，而 Sally 的錢為N×4，8個學生能寫出 Harold 賺了18元之後，有N＋18元，有4位學生可以列出N＋18=N×4，有8位學生能正確解出答案。

Brizuela & Schliemann認為這些解題活動對學生並不容易，但學生卻能夠解

決他們提出的挑戰。在整個實驗過程中，不但有許多學生可以討論及分析等號兩邊都包括未知數的問題，而且有三分之一的學生更可以將問題表示成等式，解題並解釋他們如何處理等式兩邊的項（item）。教學實驗結束後的訪談結果發現，有超過一半的四年級學生可以用未知數來表達問題中的量，並且理解處理方程式的意義。所以Brizuela & Schliemann認爲，如果類似的活動變成日常數學課的一部分，大部分的學生都能以文字符號來表現問題中的數量關係。

上述四個國外的研究結果都一致肯定國小學童可以提早學習未知數概念，並將未知數的學習困難原因指向教材引入的時機與方式。但是這並不代表這些研究否定了學童認知發展與代數學習的關係，更不是認爲任何數學概念對任何年齡的孩童都能夠勝任學習。而是代數的學習可能經由多年長期的課程導引，逐漸發展孩童的未知數概念，讓孩童習慣以代數的思考模式來解題，而不需要等到中學時才「突然」開始使用文字符號，容易造成孩童學習的障礙。

除了前一小節提到國內尚缺乏對於中低年級幼童未知數概念的研究，本節探討許多在國小數學教材中引入未知數概念的國外研究，正是目前世界的潮流，顯示本研究有進行之必要性。基於上述理由，本研究從九年一貫課程綱要所區分的四個學習階段之前三個學習階段，分別選擇：開始引入算式填充題的國小二年級、開始使用( )與□之外的文字符號列式的國小五年級及正式學習代數課程的國中一年級，來試探討國小二年級、五年級學童經由研究者引導後所展現的未知數概念及解題歷程，並與進入正式代數單元的國中一年級學童進行比較，藉以瞭解國小學童未知數概念的發展潛能。

第四節　代數教材中的未知數概念

本小節先分析九年一貫數學課程中代數教材的安排及特色，再探究未知數在代數主題之能力指標的脈絡。

一、代數課程的安排

在民國 82 年版發佈的「國小數學課程標準」中，代數的題材比較少，並集中於六年級，一方面讓學生習慣以算術思考問題，另一方面造成進入國中後突然引入文字符號的不適應。鑑於此，教育部在民國 89 年發佈的《九年一貫課程暫行綱要》就提出代數的學習應從學生生活經驗中的數量關係出發討論，於是在國小的部分加入了一些代數題材，包括強調透過具體情境，算式填充題的列式與解題、察覺生活情境中的數量關係，運用文字符號列出等式或不等式，認識變數的概念等（教育部，2000）。而預定於民國 94 年度開始實施的《九年一貫課程綱要》更加重代數主題在國小數學教材的地位，其國小代數教材安排的特色如下：

(一) 能理解常用算術符號的使用方式，並用來列出日常問題的算式，以進行解題。

(二) 從整數到分數、小數，在具體情境中，了解各基本運算之性質，並用來簡化計算。

(三) 從最基本的加減問題開始，到四則混合計算，讓學生最後能獨立於生活與具體情境，在形式與程序上，流暢進行整數計算。

(四) 協助發展對數學問題之解題策略。

此外，由國內現行版本國小數學教科書中，我們可以了解國小一到六年級學童在代數主題已完成的能力包括：

(一) 在具體情境中，認識加法的結合律、交換律（1 年級）。

(二) 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題（1 年級－2 年級）。

(三) 用<、>與=表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律（2 年級）

(四) 將生活情境中單步驟的加減乘除問題列成算式填充題，並能透過具體操作解決問題（2 年級－5 年級）。

(五) 在具體情境中，認識乘法交換律（2 年級）、乘法結合律、先乘再除與先除再乘結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積（4 年級），及乘法對加法的分配律（5 年級）

(六) 能理解乘除互逆，並運用於驗算與解題（3 年級－4 年級）。

(七) 能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係（4 年級）。

(八) 透過將生活情境中數量關係表徵爲等式的活動，經驗等號兩邊等量的觀念（4－5 年級）。

(九) 能用文字或△、□、甲、乙…等表示各種簡單幾何圖形的面積公式 與周長公式（4 年級－6 年級）。

(十) 能使用 x、y…的式子表徵生活情境中的未知量及變量，形成等式或不等式，透過生活經驗判斷其解（6 年級）。

(十一) 將需要用到多步驟運算解題的情境表徵成式子，並進行解題（6 年級）。

(十二) 能察覺簡易數量模式與數量模式之間的關係（6 年級）。

雖然算術的學習仍是國小數學學習的主體，但是爲了銜接國中的代數教學，九年一貫課程綱要中代數主題在國小部分有顯著的加重。例如：在國小二年級上學期就出現加法算式填充題，並要求孩童透過具體操作嘗試找答案；國小四年級將算式填充題類化成使用未知數符號（△、□、甲、乙…）的算式，然後透過具體表徵來嘗試解題，並且開始培養等號兩邊等量的觀念，在國小六年級更加深難度，讓孩童列多步驟算式填充題並解題。

經由上述的探討，發現代數課程在國小中低年級的部分，多以「算式填充題」表達代數問題情境，即使在算式填充題引入文字符號，也未給予學童經驗或討論未知數概念的機會。也就是說，對於國小學童而言，算式填充題中的符號（△、□、甲、乙…）代表的是一個可計算出的值，而不是一個未知數。

二、代數主題之能力指標脈絡

由於本研究的研究對象包含國小二年級、五年級及國中一年級的學生。爲了釐清從第一階段（1~3 年級）、第二階段（4~5 年級）到第三階段（6~7 年級）關於代數主題能力指標之間的關係，以及與其他主題的連結，本段列出九年一貫暫行綱要的第一至第三學習階段所有的代數能力指標，並試描繪出能力指標脈絡圖，灰底部分則是國小代數教材中與未知數概念相關的能力指標（如下圖 2－1）：

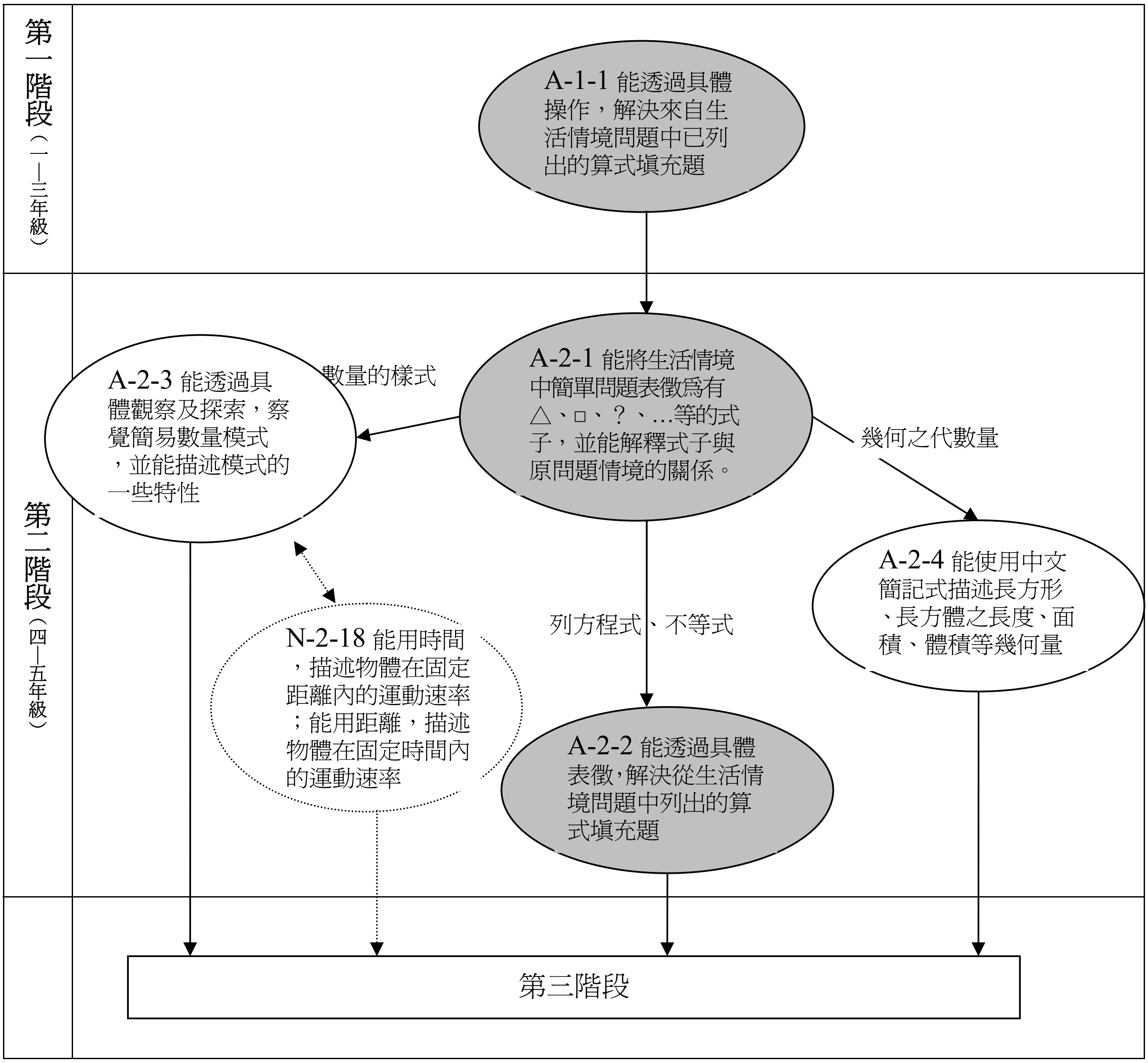


圖 2－1：「代數」主題之能力指標脈絡圖

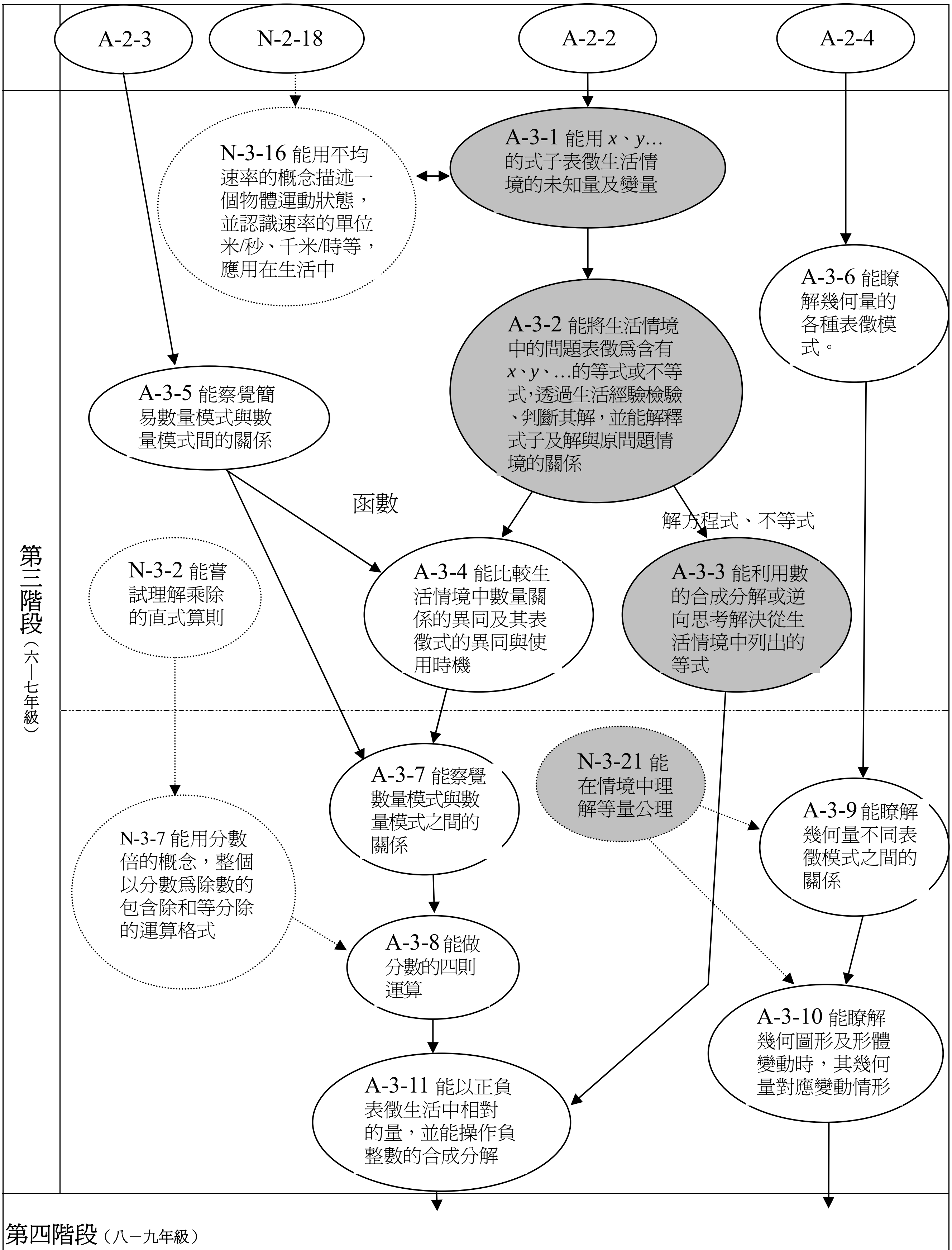


圖 2-1　「代數」主題之能力指標脈絡圖(續)

第三章 研究方法

本章共分爲研究設計與流程、研究對象、研究工具、訪談實施、晤談方法及資料分析等六節，以下依序陳述。

第一節　研究設計與流程

本研究採取個案研究爲研究方法。個案研究是從一個完整的情境脈絡下掌握所欲研究的現象，對研究參與對象進行全面的了解（Stake, 1995），並採用各種方法搜集有效的完整資料，對一個人或一個有組織的單位做深入而縝密的研究（陳李綢，1996）。而本研究欲深入暸解學童的未知數概念及解未知數文字題的解題歷程，所以選用個案研究，期能蒐集豐富完整的資料。

一、　訪談分析設計

本研究的訪談分析設計爲跨個案比較分析。由於現行九年一貫課程暫行綱要將國民教育的九個年級區分四個學習階段，研究者在第一階段選取二年級，第二階段選取五年級，加上正式進入代數課程的國中一年級，一共三個年級，每個年級乙名學童，來進行個案研究，以暸解幼童學習代數的可行性。本研究所設計的訪談導引之問題型態包括加法結構問題 14 題，及乘法結構問題 18 題。加法結構問題的訪談對象爲國小二年級、五年級以及國中一年級學童，即所有的研究參與對象；乘法結構問題的訪談對象則爲國小五年級以及國中一年級學童。除了分別進行三個個案的未知數概念探討之外，待訪談全部結束後，再分別進行國小二年級、國小五年級與國中一年級學童之跨個案比較分析。 訪談分析設計如下頁圖 3-1。

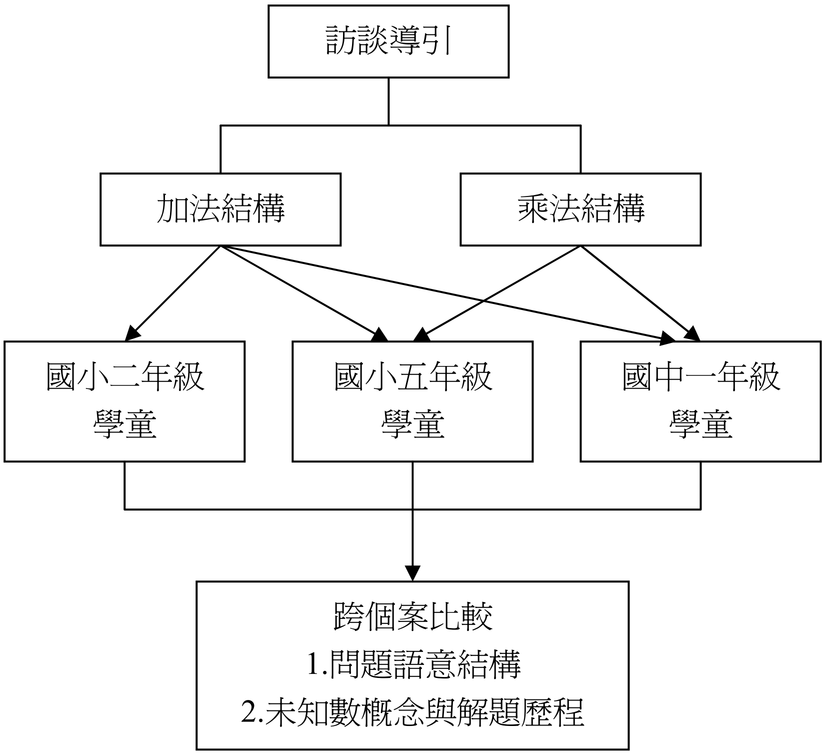


圖 3-1　訪談分析設計

二、　研究流程

研究者首先蒐集並閱讀相關文獻，再依據研究目的來編製訪談導引，選擇研究參與對象，採用半結構式晤談法（semi-structured interview）訪談個案，完整地蒐集個案資料。本研究以國小二年級、五年級及國中一年級的學童分別進行訪談，訪談時，爲求確實了解個案的未知數概念，每種型態的問題都設計多個題型相同，數據不同的問題，以便進行交叉檢定（cross checking），並引導個案於解題過程中，自行說出解題策略及作答時心中的想法。研究者在每次訪談結束後，會將該次訪談錄音資料以及現場觀察記錄轉譯爲逐字稿，每次訪談的結果與指導教授討論並與相關文獻對照，仔細分析原案，再依各次訪談分析做歸納整理，然後跨個案進行比較，形成研究結果，最後提出結論與建議。如下頁圖 3-2 所示：

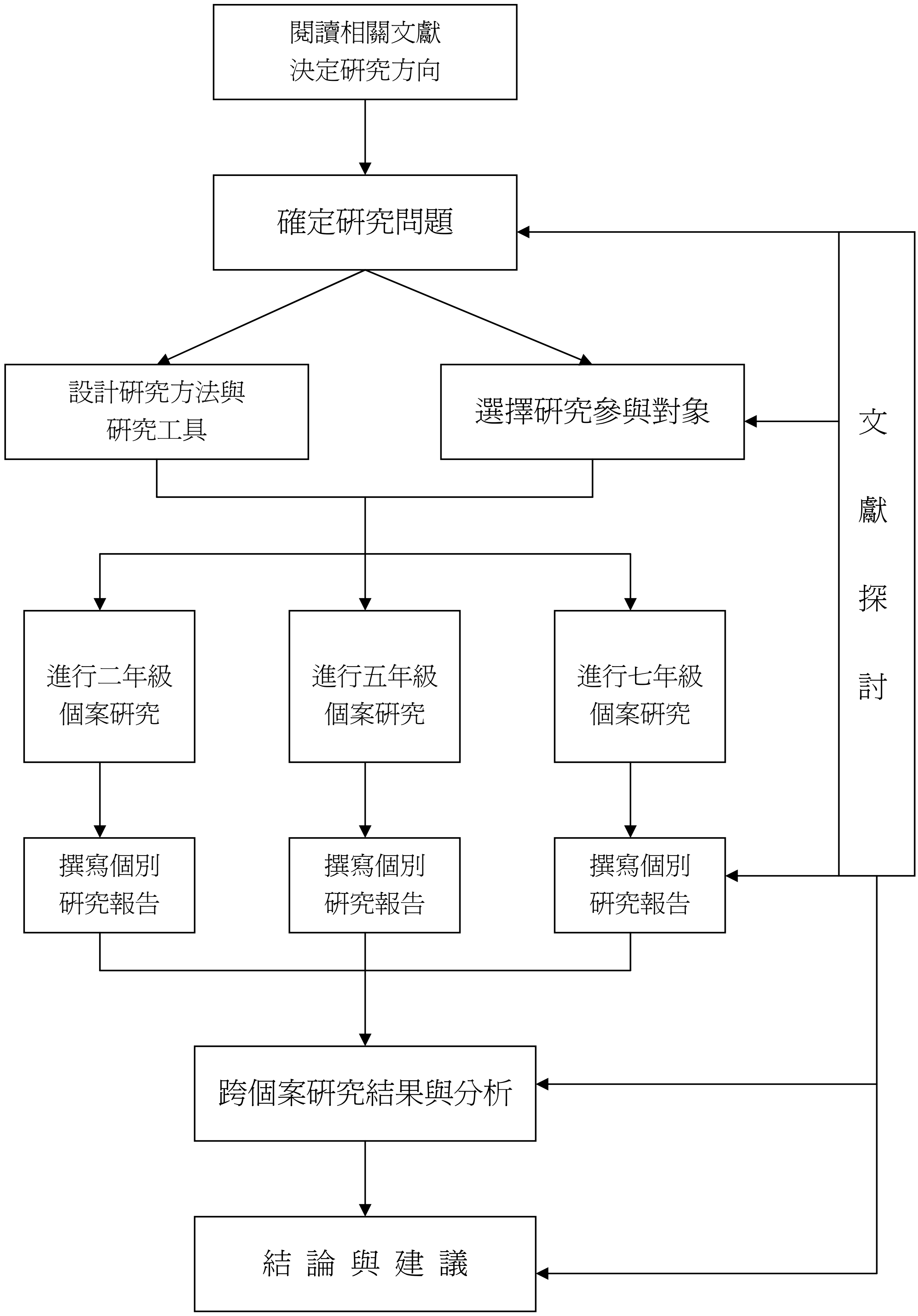

閱讀相關文獻
決定研究方向
確定研究問題
設計研究方法與
研究工具
選擇研究參與對象
文
獻
探
討
進行二年級
個案研究
進行五年級
個案研究
進行七年級
個案研究
撰寫個別
研究報告
撰寫個別
研究報告
撰寫個別
研究報告
跨個案研究結果與分析
結 論 與 建 議

圖 3-2　研究流程圖

第二節　研究參與對象

在交代研究參與對象的選取原則之前，研究者首先反省研究場所的屬性。在質性研究的過程中，研究問題和研究場所之間的關係可分為「從問題到現場」與「從現場到問題」兩種取向：「從問題到現場」－指研究者進入現場之前，對於想要研究的問題多少有些一般性的概念或想法，這個問題可能來自研究者個人的興趣、某個抽象的知識或理論、或是其他研究尚未發現的主題；「從現場到問題」，指研究者不先界定一個研究問題，再去找一個適當的研究場所，而是從每日的生活或工作當中、曾經參與的某個現場，發展學術研究的興趣和問題（Jorgensen, 1989，引自黃瑞琴，1991）。就本研究而言，研究場所與對象的決定屬於前者。由於研究者本身目前是一位全職的研究生，在攻讀研究所之前曾於台北市立某國中實習，教學實習及導師實習的對象是國一的班級，教學中發現他們在一元一次方程式的單元中有許多的學習困難，為了深究其因，於是針對中小學課程的代數主題部分進行探討，形成研究問題。所以研究者是在研究之前先形成研究問題，再依照研究設計找尋合適的研究對象。

以下接著說明研究過程中研究參與對象的選擇，包括先導研究對象與正式研究對象的選擇，以下分述之。

一、　先導研究對象的選擇

在正式研究之前最後的準備是進行先導（Pilot）個案研究。先導個案研究能夠幫忙調查者將資料收集計畫中，不論是所要收集資料的內容，以及所遵循的資料收集程序都修正得更完美（尚榮安譯，2001）。由於先導研究對象的選擇以方便性、容易接觸為主要標準，故研究者商請研究所的兩位在職同學，目前分別在高雄市某公立國小任職，推薦其任教的二年級及五年級的班級中，口語表達能力，及配合度都不錯的同學各 1 位，以及指導教授的小孩，目前就讀高雄市某公立

國中一年級等共 3 名，來進行本研究之晤談問題先導研究。

二、 正式研究對象的選擇：

爲了使本研究的設計能夠有效實施，研究者在受試者的選擇上考慮了以下兩個原則：第一、由於九年一貫數學教材在七年級才開始安排正式的代數課程，所以爲了確定研究參與對象應以已達成數學領域能力指標，也就是算術的學習已達成階段能力指標，於是選擇數學學習成就中上的學生。第二、由於本研究的設計爲半結構式晤談，研究成果十分倚重研究參與對象對於自身想法的描述，研究參與對象與研究者的互動是研究成敗之關鍵，所以研究對象的意願及口語表達能力也必須納入考量。綜合以上兩點，本研究選取的研究參與對象爲在班上數學成績在第 8 名到第 15 名間，參與意願及口語表達能力佳的學生。

以下簡略描述 3 位研究參與對象的背景資料：

1.國小二年級個案

小祥，男生，就讀高雄市苓雅區某國民小學二年級，從國小一年級開始就使用以九年一貫課程暫行綱要編寫的數學教科書審定本。上學期的月考數學成績平均約九十分，但從未考過一百分，該生十分活潑，在班上人緣不錯。他的表達意願強烈且口齒清晰。

2.國小五年級個案

小儀，女生，就讀高雄市苓雅區某國民小學五年級，在國小一年級至三年級時使用由國立編譯館依民國 82 年國民小學課程標準所編寫的數學教科書。上學期數學月考成績平均約八十五分左右，月考偶爾會考六十幾分。該生因個性文靜乖巧，表達意願較弱，在研究者經常從旁鼓勵及提醒下，她則能夠表達的十分清

晰且條理分明。

3.國中一年級個案

小融，男生，就讀高雄市前金區某國民中學一年級，國小一到六年級都使用由國立編譯館依民國 82 年《國民小學課程標準》所編寫的數學教科書。國一上學期數學平均成績達九十分，本學期第一次段考（範圍爲一元一次方程式）只考六十幾分。該生在班上有擔任幹部，配合度及表達能力佳。

第三節　研究工具

本研究的研究工具包括研究者本身與訪談導引。本小節論述研究者本身及訪談導引的效度與信度，關於訪談導引的內容，請見第五節訪談導引與實施。

一、　研究者本身

本研究屬於質性研究，研究者本身即是最主要的研究工具。Lincoln & Guba (1985) 認爲質性研究應以人做爲主要的研究工具，因爲質性研究過程充滿不確定性和可變性，只有研究者本身作爲研究工具才能順應這種多變的研究情境。這是因爲研究者在實施質性研究時，必須廣泛地運用他們自己的經驗、想像、智慧和情感，以發現與資料呈現之類型相似的經驗（引自黃瑞琴，1991）。

研究者本身畢業於國立台灣師範大學數學系，並已於國中實習完畢，具有中學數學科教師資格，退伍後曾在台北市某公立高中代課一學期。在就讀研究所期間，曾修習數學教學研究、認知與數學學習研究、數學課程研究以及課程理論研究，並且曾旁聽一學期的質性研究方法課程。另外，研究者亦常參與大專院校或相關學術機構舉辦之數學教育及質性研究之論文研討會、工作坊，以及民間團體

遠哲西子灣數學種子教師理論與實務工作坊，另外並將國小二年級的個案研究結果投稿至數學教育研討會（2005 香港數學教育會議）。透過這些修課以及與會的經驗，增加研究者本身在數學教育及質性研究的基礎。

二、 訪談導引的效度與信度

效度方面，研究者在擬定訪談導引時，除了參考過去國內外相關研究的研究工具，九年一貫課程現行數學教材之外，並與指導教授討論，更進行了三次的先導個案訪談，依照訪談結果修改題意及增刪問題，最後經指導教授建議完成修改，努力提高訪談導引的效度。另外，研究者在與每位研究參與對象訪談開始前，會利用一個機率的問題來作為暖身題，讓研究者與研究參與對象熟悉彼此的溝通方式，並且在訪談後與每位研究參與對象保持良好的互動，確保資料收集完整。

信度方面，本研究盡可能呈現原始資料，例如經由研究參與對象同意，進行全程錄音；呈現訪談逐字稿、研究現場觀察記錄以及孩童的紙筆解題記錄等。在訪談的過程中，除了錄音、觀察記錄之外，更進行交叉檢核的動作，即提出不同數據，但問題情境與列式形式相同的問題來問學生，以檢視確認其未知數概念。除了研究者本身在研究過程中不斷省思，避免主觀偏見的缺失，藉以提高研究工具的信度。在每位個案晤談完畢，進行分析及撰寫個別的研究報告後，更分別與一名現任國中教師、一名研究生，以及指導教授檢視個案分析結果，來提高分析者信度。

第四節　晤談方法

本研究以半結構式晤談法（semi-structured interview）收集個案的資料，研究者於訪談之前先針對每位個案各擬定一份訪談導引，爲了反覆測試確定研究個案的未知數概念，同一類型的問題會設計不同算則的類題來進行交叉檢定（cross checking）。當研究者佈題後，若孩童不了解問題的情境時，研究者會適時解釋題意。另外，而本研究欲藉由瞭解學童的未知數概念及其解題歷程，探究學童在未知數概念的發展準備（developmental readiness），再加上國小學童尚未正式學習相關的未知數概念及如何表達未知數的數學格式，爲了避免學童解題時遭受太大的挫折，所以本研究除了採用半結構式晤談法，一旦察覺孩童確實無法解決問題時，會在晤談中適當給予學生鷹架作用（scaffolding），來探索學生的可能發展區（zone of proximal development, ZPD）。以評估未知數討論引入國小的數學教學的可行性。

所以晤談實施時，研究者首先以訪談導引中的問題依序對孩童進行佈題，確定孩童理解問題的情境後要求他加以解題，並解釋自己的解題策略及心中的想法；接著研究者以孩童的外顯解題表現及反思活動爲基礎提出進一步的問題，用以釐清孩童如何運用他的未知數概念以及解題歷程，當孩童嘗試解題失敗時，研究者則操弄預設的三種提示引導他思考。溝通互動的過程持續到孩童完成解題或研究者以三種表徵提示孩童之後，他仍無法完成解題爲止。除了整個晤談的過程會予以錄音之外，還會加上研究者在現場的觀察記錄及孩童的紙筆解題記錄，作爲本研究資料分析的來源。

當研究參與對象解題發生困難的時候，研究者會提供三種不同的表徵協助其

思考。由於 Lesh、Post & Behr（1987）指出，數學學習與解題共有五種表徵，分別是語言（spoken languages）、圖畫或圖示（picture or diagram）、真實經驗（experience－based）、處理模式（manipulative model）及符號（written symbols）。而根據本研究的研究設計，以前三種表徵來協助孩童思考，即：第一、口語提示，即視個案作答情形，提出改變詢問技巧來協助研究參與對象解題。第二、提示孩童可以用圖畫協助思考及解題。第三、提供問題情境中的具體物讓孩童操作。

第五節　訪談導引與實施

本研究是以半結構式晤談收集個案資料，事先必須擬定一份訪談導引。訪談導引乃依據研究者閱讀參考文獻，進行先導個案訪談，最後與指導教授討論後修改而定案。訪談導引是一系列用來在訪談進行中探索的問題，是作爲訪談進行的主要方向，以確信與研究問題相關的主題都有被含括在內，在實際訪談時，可以因應特定的研究參與對象調整問題的順序（黃瑞琴，1991）。本研究的訪談導引不僅參考 Kuchemann(1981)、林光賢等人（1989），TERC（2003）及陳維民（1998）的研究工具，並參照我國現行國中一年級下學期數學教科書的一元一次方程式單元之內容，編製而成。

一、先導個案訪談

研究者於民國 93 年 11 月間，先分別訪談國小二年級、五年級及國中一年級學生各乙位。訪談內容以訪談導引的初稿爲主，除了訪談錄音記錄，還有學生的解題紙筆記錄。研究者基於先導個案的訪談結果，針對訪談導引的問題結構及研究參與對象的反應，調整問題次序、修改問題題意及增刪問題內容而形成正式訪

談導引。例如，在先導個案研究中，發現研究參與對象一看到題目，就迫不及待以算術的方法解題，於是研究者將題目分成兩個子題，子題一先要求研究對象以文字符號表達題意，子題二才進行解題。再者，由 3 位先導個案訪談中發現，有學生似乎能將未知數視爲變數，於是正式訪談導引加入了未知數比大小問題（加法第 13、14 題及乘法第 17、18 題，詳見附錄一），例如：比較 N＋2 和 2×N 的大小。

另外，研究者本身也藉由先導個案訪談來熟稔兒童語言及其思維的能力，以及增進研究者自身的訪談技巧、流暢性與掌握度。

二、加法結構訪談導引

Fuson（1992）曾提出共有四種加減法問題的語意結構，分別是改變型問題（change）、合併型問題（part－part－whole）、比較型問題（compare）及等量型問題（equalize）。

本研究以**改變型問題**爲問題語意結構，且問題中的數字在 20 以內，各題型如下所述（問題請詳見附錄一）：

1. 單步驟加減問題

   ① 未知數在被加數（N＋9=13）

   ② 未知數在被減數（N－4=12）

   ③ 未知數在加數（6＋N=11）

   ④ 未知數在減數（12－N=5）

2. 兩步驟加減問題

   ① 連加問題（N＋3＋4=12）

   ② 連減問題（N－3－7=5）

   ③ 先加後減問題（N＋2－6=7）

④ 先減後加問題（N－3＋5=4）

⑤ 兩步驟問題未知數在中間Ⅰ（14－N＋5=8）

⑥ 兩步驟問題未知數在中間Ⅱ（15＋N－9=8）

3. 兩未知數關係問題

① N＋6－6＋5 與 N＋6－8＋4 相差多少？

② 等號兩邊都有未知數（N＋N=N＋12）

4. 未知數比大小問題（先導個案訪談後新增）

① 比較 N＋2 和 N＋4 的大小

② 比較 N＋2 和 N＋N 的大小

加法訪談導引以彈珠或巧克力的增減及比較問題爲本研究之具體情境，發展上述的 14 種問題類型。例如：星期日小丸子原來有 15 個彈珠，星期一爺爺又買了一些彈珠給她，星期二她和豬太郎比賽，輸了 9 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？如果這時小丸子發現口袋裡還有 8 個彈珠，請問爺爺買了幾個彈珠給她呢？其他題目請讀者參見附錄一。

三、乘法結構訪談導引

Greer（1992）指出，乘除法的問題有十種類型，分別爲等組(Equal Group)、等量(Equal Measures)、速度 (Rate)、測量轉換 (Measure Conversion)、乘法比較(Multiplicative Comparison)、部分/全體(Part/Whole)、倍數的轉變(Multiplicative Change)、笛卡兒乘積(Cartesian Product)、矩形面積(Rectangular Area)、乘積的估計(Product)。

本研究以**等組型**的乘除問題爲語意結構，發展出以下各種題型（題目請詳見附錄一）：

1. 單步驟乘除問題

① 乘法問題（6×N=30）

② 除法問題（N÷7=11）

2. 兩步驟加減乘除混合問題

① 連乘問題（N×2×3=42）

② 連除問題（N÷5÷2=4）

③ 先乘後除Ⅰ（N×3÷4=6）

④ 先乘後除Ⅱ（24×2÷N=6）

⑤ 先乘再加（N×3＋6=30）

⑥ 先乘再減（N×7－5=23）

⑦ 先除再加（N÷5＋4=9）

⑧ 先除再減（N÷7－3=5）

3. 兩未知數關係問題（先導個案訪談後新增）

① 未知單位合成Ⅰ（N＋3×N=36）

② 未知單位合成Ⅱ（N÷2＋N÷3=15）

③ 未知單位比較Ⅰ（5×N－2×N=12）

④ 未知單位比較Ⅱ（N÷3－N÷6=3）

⑤ 兩未知量關係的問題Ⅰ（3×N＋9=4×N＋1）

⑥ 兩未知量關係的問題Ⅱ（N＋2Y＋12= N＋4Y＋2）

4. 未知數比大小問題

① 比較 2×N＋5 和 3×N＋5 的大小

② 比較 N＋6 和 2×N＋1 的大小

乘法訪談導引亦以彈珠或巧克力的增減、合成及比較問題爲本研究之具體情境，發展上述的 18 種問題類型。例如：老師有一些巧克力，分裝成 5 盒後，每 1 盒再分成 2 包，請問每包有幾個巧克力？如果 1 包有 4 個巧克力，問老師原來

有幾個巧克力？其他問題請讀者參閱附錄一。

四、三名個案的訪談導引

由於二年級學童在上學期初學二位數的加減法，下學期才開始學習乘法。所以二年級學童的訪談問題是以加法結構爲主的代數文字題；國小五年級學童由於已熟稔二位數以內的加減乘除，所以訪談問題包括加法及乘法結構的問題；另外，本研究乃是以二年級及五年級爲主要教學引導對象，所以國中一年級學童的訪談導引即包括二年級與五年級學童所面對的問題情境，藉以比較國中一年級學童面對相同的問題情境，解題歷程與二年級及五年級學童有何差異。而由於國中一年級已開始學習一元一次方程式單元，所以訪談時，研究者的角色是完全的觀察者（a complete observer），僅在研究參與對象對題意不清或對問題情境不瞭解時，予以解說，將不提供任何額外的協助。

表 3-1 訪談問題類型

<table>
<tr><th colspan="2">題號 ／ 對象 ／ 題型</th><th>國小二年級</th><th>國小五年級</th><th>國中一年級</th></tr>
<tr><td rowspan="4">加法結構</td><td>單步驟加減問題</td><td>1、2、3、4</td><td>1、2、3、4</td><td>1、2、3、4</td></tr>
<tr><td>兩步驟加減問題</td><td>5~10</td><td>5~10</td><td>5~10</td></tr>
<tr><td>兩未知數關係</td><td>11、12</td><td>11、12</td><td>11、12</td></tr>
<tr><td>未知數比大小</td><td>13、14</td><td>13、14</td><td>13、14</td></tr>
<tr><td rowspan="4">乘法結構</td><td>單步驟乘除問題</td><td></td><td>1~2</td><td>1~2</td></tr>
<tr><td>兩步驟加減乘除混合問題</td><td></td><td>3~10</td><td>3~10</td></tr>
<tr><td>兩未知數關係</td><td></td><td>11~16</td><td>11~16</td></tr>
<tr><td>未知數比大小</td><td></td><td>17~18</td><td>17~18</td></tr>
</table>

另外，爲了能確實測驗受訪者的未知數概念，避免受訪者一拿到題目，就立刻以學校教過的算術方法來解答，研究者將問題分成兩個子題先後佈題，先以第一子題要求受訪者以未知數表示出結果量，再以第二子題再告知受訪者結果量爲何，請他設法計算出答案。

例如：乘法第 7 題分爲如下兩個子題：

乘法第 7 題
7－11 大特價，小丸子買 3 盒彈珠，老闆又多送她 6 個彈珠，請問小丸子一共有幾個彈珠？
如果她回家算一算，發現一共有 30 個彈珠，請問每 1 盒中有幾個彈珠呢？

第六節　資料分析

Neuman（2000）認爲個案研究應嘗試透過不同角度或視野來觀察研究參與對象，將更能確認其真實位置。而個案研究的証據來源有六種，分別是訪談、檔案紀錄、直接觀察、文件、參與觀察、以及實體的人造物(artifact)（Yin, 1994 / 尚榮安譯，2001）。

本研究每次訪談實施時，研究者均取得研究參與對象的許可進行錄音，並且保留研究參與對象解題歷程的紙筆記錄。所以本研究的分析資料主要有三：錄音帶中的訪談內容、紙筆解題記錄以及研究者於訪談現場的觀察記錄。

研究者首先將錄音帶內的訪談內容及觀察記錄轉成訪談原案，完成之後再對照一次以求正確無誤。原案編碼的原則爲：每次訪談爲一小節，每句話以阿拉伯數字4碼加上英文字母1碼共5碼來進行編碼，編碼原則如下表3-2所示：

表3-2　原案編碼原則

編碼位置	編　碼　意　義
前二碼爲題號	1.加法第1題到加法第14題爲01~14 2.乘法第1題到乘法第18題則爲15~32（即加法的題號再加14）
第三碼及第四碼	該問題的第幾句話
第五碼爲發話者	研究者簡稱 T，二年級學童小祥簡稱 S、五年級學童小儀簡稱 F及國中一年級學童小融簡稱 R。

例如：0101T即爲加法第1題的第一句話，發話者爲研究者。1835F爲乘法第14題的第35句對話，發話者爲小儀。研究者便針對這些資料進行原案分析（protocol analysis），包括孩童所使用的未知數概念，以及面對未知數問題情境時，從設未知數，轉譯問題情境到解方程式所表現的解題歷程。

所以研究者除了實地訪談、研究者觀察，並收集研究參與對象的紙筆解題記錄，試圖從訪談（錄音逐字稿）、直接觀察（研究者觀察記錄）和文件（紙筆解題記錄）三項証據交叉比對，進行三角校正（triangulation），將這三項証據收斂於同一組事實或研究發現。而且研究者分析完畢後，會先交由一位現任國中教師及一位研究生檢查，最後再經由指導教授鑑定確認，藉此剔除研究者之個人主觀偏見。

第四章　研究結果與分析

爲了探索國小二年級學童小祥、國小五年級學童小儀以及國中一年級學童小融的未知數概念發展情形，本章前三節先從未知數概念及未知數解題歷程兩個向度來依序分析三名個案，第四節由訪談導引的問題結構分析三名個案的解題表現，最後第五節再以三名個案的未知數概念及未知數解題歷程，進行跨個案分析，期能從中瞭解他們未知數概念的差異及發展程度。爲了強化本研究的論點，研究者在文中會顯示支持該判斷的原案編碼，形式如（1101T~1105R），代表加法第11 題中的第 1 句話至第 5 句話。而討論解題策略時，會引用本文第二章第三節所探討的 Kieran (1992) 之七種解題策略（S1~S7）。

另外，本研究以加法問題共 14 題，均用彈珠增減爲具體情境；乘法問題共18 題，均以巧克力或彈珠增減、分配爲具體情境（詳見附錄一：訪談導引）。研究中視個案作答情況增加類題。

關於個案分析的呈現方式，研究者分成「**未知數概念**」及「**未知數解題歷程**」兩個面向來探討。其中「**未知數概念**」分成「文字符號發展階段」、「結合律」、「交換律」、「分配律」及「三一律」四方面討論；「**未知數解題歷程**」則分爲「列式」、「等號的意義」、「解方程式」及「檢查解的合理性」四方面來討論。

第一節　國小二年級學童個案分析

研究者於 94 年元月間對國小二年級學童—小祥進行訪談，每次 50 分鐘，一共三次。以下由小祥的未知數概念及未知數解題歷程兩方面來分析訪談結果：

一、　小祥的未知數概念：

訪談結果發現，在本研究問題情境中，小祥所展現的未知數概念有以下四點

，分別爲：他能將文字符號 N 視爲特定未知數、在具體情境中使用結合律化簡式子、在具體情境中使用交換律化簡式子，並能指出未知數符合三一律但無法提出其成立的條件。

1.將文字符號 N 視爲特定未知數

所謂的特定未知數乃是指孩童可以將文字符號視爲一特定但未知的數來進行運算。研究者利用彈珠的增減情境佈題，由於小祥在加法第 1 題所算出 N 等於 4，所以他在加法第 2 題一開始，就直接把 N 當成 4 來計算第 2 題的答案：

0201T：看一下。我們現在假設小新原來有 N 個彈珠好不好？所以這一題你要怎麼表示？

（S 寫出 N-4=0）

0202T：你怎麼知道是 0？

0203S：4-4=0 啊？

0204T：N 是 4 啊？

0205S：N 代表 4。

雖然小祥把 N 視爲加法第 1 題的答案 4，也就是把文字符號 N 當成一個固定數，但經由研究者口頭的提示：「那是上一題的哦，這一題的 N 我們知不知道？」。小祥面對的訪談問題，都可以把 N 視爲特定的未知數，而不是固定數。例如加法第 4 題，他就會列出「12-N=(　)」而不是直接把 N 當成 4，寫出「12-4=8」：

0406T：好，那老師問你，如果後來送給妹妹 N 個彈珠，那你怎麼列式？

（S 寫出 12-N=(　)）

0407T：好，所以說，後面這個(　)代表？

0408S：剩下幾個。

在加法第 11 題中，小祥算出小新最後有 N＋3 個，小丸子最後有 N＋4 個，而能夠指出因爲 N 都一樣，所以不管 N 的大小，說出兩人相差 1 個：

1163T：那老師問你的問題是，星期三小新和小丸子差幾個？

1164S：1 個

1165T：為什麼？

1166S：因為小新 3 個，小丸子 4 個。
1167T：那 N 呢？
1168S：一樣。

且在加法第 13 題「未知數比大小」中，小祥能在具體物協助下，指出 N＋4 比 N＋2 多，而且能在算不出 N 的數值（每包巧克力的個數）的情形下，說出 N＋4 比 N＋2 多 2 個。

1301T：這一題看一下。誰的彈珠比較多？
1302S：小玉
1303T：小玉。為什麼？
1304S：她多兩個
1305T：她多兩個。那你可不可以解釋給老師聽，為什麼她多兩個？
（S 排出 2 堆巧克力，一堆是 1 包＋2 個，另 1 堆是 1 包＋4 個）
1306T：(指 1 包巧克力）因為他這兩個？
1307S：一樣。然後，這兩個（指 2 個和 4 個）…不同
1308T：所以他們差了？
1309S：2 個
1310T：很好哦，那你可以算出 N 是多少嗎？
（S 搖頭）

又例如加法第 6 題：「星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和豬太郎比賽輸了 3 個彈珠，星期二，不小心掉了 7 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？」小祥可以在不知道 N 是多少的情形，說出星期二爲 N—3—7 個，並且說出一共少了 10 個。並認爲 N—3—7 等於 N－10。

0612T：那老師問你，這個 N-3-7 有沒有等於 N-10？
0613S：……有。
0614T：為什麼？可以講給老師聽嗎？
0615S：7+3=10 啊
0616T：對，很好哦。就是說，他星期一輸了？
0617S：3 個
0618T：星期二掉了？
0619S：7 個
0620T：他總共？
0621S：掉了 10 個

由小祥以上的解題表現可以知道，小祥不但能把文字符號 N 視為可算出的值（letter evaluated）、不使用的（letter not used），還能把 N 當成特定的未知數（letter used as a specific unknown）。也就是說，小祥在具體的問題情境中，可以達到 Kuchemann（1981）的文字符號概念層次的第四階段。

2 在具體情境中使用結合律化簡式子

小祥在連加問題及連減的問題情境中，能自行以結合律化簡。例如，在加法第 5 題，研究者問小祥：「星期日小新原來有一些彈珠，星期一和風間比賽贏了 3 個彈珠，星期二，小新幫媽媽擦玻璃，媽媽給他 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？」，小祥寫出：3＋4=7，N＋7=( )。在彈珠數的改變型問題情境中，小祥可以運用結合律化簡式子，指出禮拜一贏了 3 個，禮拜二得到 4 個，總共比原來多 7 個，也就是 N＋3＋4 與 N＋7 是相等的，並由題目條件：禮拜二有 12 個，解出原來的彈珠為 5 個（0517T~0519S）。

0502T：我們現在直接假設小新他原來有 N 個彈珠，好不好？
（S 寫出 N＋3=(　)）
0503T：這個(　)代表什麼？
0504S：比賽贏了 3 個。
0505T：可是星期二媽媽又給他 4 個彈珠耶，你覺得要怎麼表示
（S 寫出

3+4=7
N+7=(　)

0506T：所以這是小新…
0507S：原來的，加上媽媽給他的
0508T：所以這個（　）是？
0509S：一共有的。
………
0517T：來，他星期二發現他口袋裡共有 12 個彈珠，請問他星期天有幾個彈珠？
（S 寫出 12－7=N）
0518T：那 N 是多少？

0519S：5

接下來研究者再以加法第 6 題測試小祥能否使用結合律化簡。問題爲：「星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和豬太郎比賽輸了 3 個彈珠，星期二，小丸子不小心掉了 7 個彈珠， 請問這時候小丸子有幾個彈珠？」，小祥指出星期一掉了 3 個，星期二掉了 7 個，總共掉了 10 個，所以後來小新有 N－10 個彈珠。

0603T：來我們來看這題，一樣，我們假設小丸子原來的 N 個彈珠。

（S 寫出 N−3=( ) ( )−7=( )

0604T：那你可以寫一個最簡單的式子來告訴老師嗎？

（S 寫出 N－3－7=( )）

0605T：所以他總共掉了幾個彈珠？

0606S：10 個

0607T：所以是？

0608T：小新原來有？

0609S：N 個

0610T：所以他後來有？

（S 搖頭）

0611T：原來有 N 個，掉了 10 個之後，後來有？可以用 N 表示

（S 寫出 N－10=（ ））

0612T：那老師問你，這個 N－3－7 有沒有等於 N－10？

0613S：……有。

0614T：為什麼？可以講給老師聽嗎？

0615S：7＋3=10 啊

但是在加減混合的問題中，若是直接從算式化簡，小祥會忽略數字前面的負號，出現 N-3+5=N-8 的錯誤（0809T~0811S）。他必須藉研究者的引導：「星期二和星期日差幾個？」。例如在加法第 7 題，小祥指出星期二比星期日少 4 個，於是把 N＋2－6 化簡成 N－4（0704T~0712T），加法第 8 題可以把 N－3＋5 化簡成 N＋2（0812T~0818S），確認小祥在具體的問題情境中，能以結合律化簡含有未知數的式子。

另外，研究者推測由於小祥未學過兩步驟算式列式的格式，所以在加法第 5 題時，無法以 N＋3＋4=(　)，而以 3＋4=7，N－7=(　)來表示問題情境，然而加法第 6 題他嘗試以 N－3－7=(　)來表示後來的彈珠數，並經過研究者的默許之後（未提出質疑），雖然加法第 7 題還是習慣性的使用 N－2 = (　)、(　)－6 = 7 來表示問題情境（0742T~0744S），但是從加法第 8 題到第 10 題（0804T、0902S、1002T），小祥都能夠用一個式子來表示「未知數先加後減」、「未知數先減後加」及「未知數在式子中間」的問題情境。甚至在加法第 11 題，小祥能在具體物巧克力的協助下，將 N＋6－8＋5 化簡成 N＋3。

3.在具體情境中使用交換律化簡式子

在第 9 題「星期日小新原來有 14 個彈珠，星期一和風間比賽輸了一些彈珠，星期二和正男比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？」中，小祥可以把小新星期一輸的彈珠數當成 N 個，列出小新最後的彈珠數為 14－N＋5=( )。當研究者問他：「『星期一先輸 N 個，星期二再贏 5 個』和『星期一先贏 5 個，星期二再輸 N 個』」結果是否相同？小祥知道兩種情形的結果相同，並利用此一結論，列出最後的彈珠數為 19－N=( )，更能指出 19－N=( )與 14－N＋5=( ) 是相等的（0921T~0928S）。最後並利用題目條件：「最後發現口袋裡有 8 個」，解出小新星期一輸了 11 個。

0914T：好，老師問你一個問題哦，如果他星期一先贏了 5 個，星期二再輸 N 個彈珠，那你告訴老師，如果他這兩天調換，最後會不會有影響？
0915S：不會
0916T：他先贏後輸和先輸後贏，個數會不會一樣多？
0917S：一樣
0918T：好，那老師問你，他如果星期一贏了 5 個，這時候有幾個？
0919S：19
（S 寫下 14＋5=19）
0920T：然後星期二又輸了一些彈珠
（S 寫下 19－N=（ ））
0921T：那老師問你哦，你覺得這一個式子（19－N =（ ））跟這個式子（14－N

＋5=（ ））的結果有沒有一樣？
0922S：(點頭）嗯。
0923T：(指 14－N＋5=（ ））這個式子代表？
0924S：先輸後贏
0925T：(指 19－N=（ ））那這個式子代表？
0926S：先贏後輸
0927T：那這兩個式子的彈珠數會不會一樣？
0928S：(點頭）嗯！

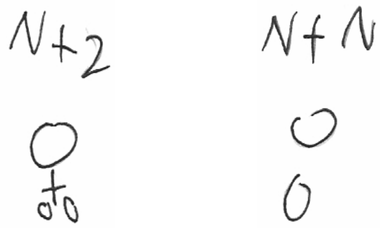
小祥在加法第 10 題也同樣能使用前一題「兩天調換」的策略來進行化簡，所以研究者認爲小祥能在具體情境中使用交換律來化簡式子（1004T~1009S）。

4.能說出未知數符合三一律但無法確定其成立條件

小祥能夠說出兩個未知數比大小的所有情形，但無法確定其成立的條件。在第 14 題「小丸子有 N＋2 個彈珠，小玉有 N＋N 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？」未知數比大小的問題情境中，小祥隨機地利用不同的數字代入，來推估 N＋2 與 N＋N 的大小，他原先認爲有可能是小玉的彈珠比較多，也有可能是小丸子的彈珠比較多，或者兩者都一樣多。他先計算出當 N 爲 2 時，小丸子和小玉的彈珠會一樣多。

1414T：什麼時候小丸子會比較多？什麼時候小玉會比較多？來，你畫在下面給老師看，小丸子有幾個，小玉有幾個

（S 畫出



1415T：那，什麼時候兩個人會一樣多？
1416S：(指其中 1 包巧克力）這邊 2 個。

當研究者問及什麼時候小玉會比較多時，小祥的回答是「兩邊不一樣多的時候」，但是進一步要小祥舉例時，他則無法回答。

於是研究者再問他，如果袋子裡有 5 個的時候呢？小祥嘗試將 5 代入，結果錯誤之後，他又代入 6 也不行，於是放棄小丸子比較多的可能性。

1439T：明明還是這邊比較多耶，所以有沒有可能（小丸子）這邊比較多？
1440S：不可能
1441T：真的不可能嗎？你覺得不可能就說不可能沒關係。
1442S：不可能
1443T：確定不可能喔？
（S 點頭）

由於他只能將 N 視爲某個特定的未知數，無法將 N 視爲一般數，於是發現「當 N 愈接近 2 時，N＋2 與 N＋N 的差會趨近 0」，所以無法舉出小丸子彈珠比較多的例子。由小祥理解三一律的表現可知：在本問題情境中，小祥可以指出兩未知數比大小的所有情形，但是小祥無法將未知數視爲不同的自然數，亦無法了解 N 在式子中的運算關係。所以無法比較 N＋2 及 N＋N 的大小。

上述國小二年級的學童小祥所顯示出的未知數概念，乃是經由研究者的導引，加上賦予其所熟悉的日常情境—彈珠或巧克力的增減及輸贏，輔助小祥以未知數來完成解題任務。例如，在未知數的交換律方面，當小祥不知如何化簡 14－N＋5 時，研究者提出：「星期一與星期二發生的事件調換會不會影響最後的結果？」關鍵性的問題，來引導小祥繼續解題。是故若無經適當的教學導引，小祥將無法自行利用未知數完成解題。

由訪談結果不難發現，在小祥熟悉的彈珠或巧克力的增減情境中，他不但能將文字符號視爲可計算出的值，並且可以在不使用它的情形下解題，另外也可以當成是一個物體（例如：一包巧克力），最後，在「未知數比大小」的問題中，顯示出小祥只能把文字符號視爲特定未知數，而無法視爲一般數來運算。

二、 小祥的未知數解題歷程：

訪談結果發現，小祥的未知數解題歷程的特徵包括：能列出未知數在等號左邊的方程式、等號的意義仍停留在「算出答案」、曾出現的解題策略包括回憶數

字事實、逆運算及嘗試錯誤，並且在具體表徵的協助下使用等量公理解題。以下分述之：

1.能列出未知數在等號左邊的出方程式

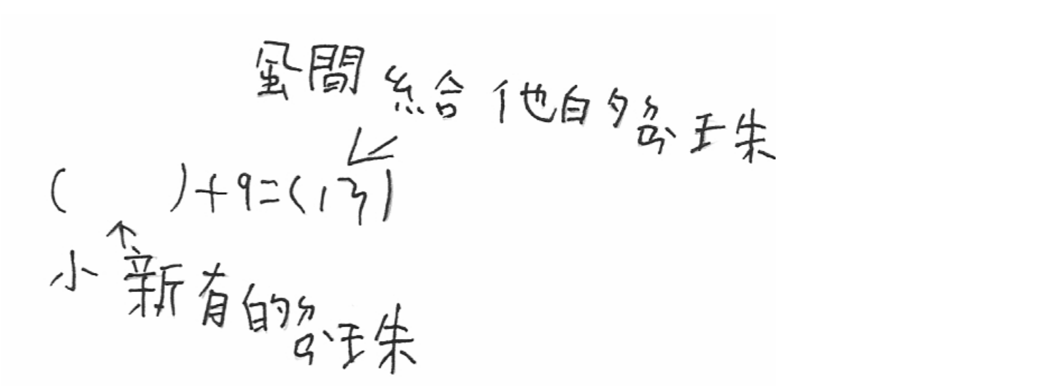
研究者嘗試讓小祥以文字符號 N 取代（　）來描述本研究的問題情境，每一個問題的 N 不但分別代表不同的數字，而且指涉不同型態的彈珠量。例如，加法第 1 題的 N 是代表小新原有的彈珠數、加法第 3 題的 N 代表阿呆給小新的彈珠數，而加法第 9 題的 N 則是代表小新星期一和風間比賽所輸掉的彈珠數。研究結果發現小祥面對加法第 1 題到第 10 題，也就是未知數 N 僅出現在等號左邊的問題情境，均能正確的列出方程式來表示問題情境。至於面對未知數同時出現在等號兩邊的問題時，小祥則無法用等式來表達問題情境，他僅能用實物來告訴研究者，這一堆等於那一堆！

2.等號的意義仍停留在「算出答案」

小祥認爲「等號」是算式與答案的連結，所以常寫出不對稱的等式。例如在加法第 1 題中，研究者問小祥：「小新有一些彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？」小祥寫出 ( )＋9=( ) ，研究者進一步要求小祥指出兩個括號的意義時，得到如下的回答：

0102T：那你這兩個括號長的一樣耶，可不可以告訴老師前面的括號代表什麼？
　　　後面的括號代表什麼？

0103S：前面代表小新有的彈珠，後面代表小新跟風間給他的加起來



0107T：好。那今天人家如果問你小新有幾個彈珠，你覺得等號的左邊比較容易知道，還是等號的右邊比較容易知道？

0108S：知道什麼？

0109T：知道你在寫什麼。

0110S：右邊。

小祥認爲寫在等號右邊的 ( ) 才是答案。在後來的問題，研究者引入 N 代表未知數時，小祥仍堅持式子後面要加上「=( )」（0313T~0314S），例如加法第 3 題：

0310T：那老師問你，如果小新有 N 個彈珠，那他後來有幾個彈珠？

（S 寫出 6+N=( )

0311T：6＋N 可不可以代表小新後來的彈珠？

0312S：可以

0313T：那你為什麼要寫這個等號？

0314S：讓人家知道小新後來有幾個彈珠。

0315T：你的意思是說，要把 6＋N 算出來嗎？

0316S：嗯。

小祥認爲「6＋N」雖然可以代表小新後來的彈珠數，但是要計算出一個數，才能代表最後的答案。小祥在每一題的列式均無法接受帶有 N 的式子爲最後的答案。也就是說小祥認爲 6＋N 只是個算式，必須透過「=」，也就是「算出答案」的動作，得到等號右邊的( )，才是最終的「答案」。

另外，小祥在加法第 8 題中，曾嘗試直接化簡 N－3＋5。他認爲會等於 N－8（0809T~0811S），顯示他乃是由左至右閱讀一個代數式 (Herscovics & Linchevski, 1994)。所以小祥對於等號的意義乃是停留在「將左邊的式子計算出答案的行動指標」。

3.解題策略包括回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤及等量公理

本研究的訪談問題一共有 15 題（訪談導引的 14 題加上 1 個類題），小祥曾經出現過的解題策略包括回憶數字事實（S1）、逆運算（S4）、嘗試錯誤（S5）及等量公理（S7）。

如果遇到熟悉的算術式子，小祥會藉著回憶數字事實（S1）來解出答案。例如加法第 3 題：

0317T：那如果這時候小新有 11 個彈珠，那問你，阿呆給小新幾個彈珠？
0318S：加 5。
0319T：嗯，你算出答案了，可是老師是要你列出式子來表示這個題目的意思。
0320S：6＋5=11

在本研究的訪談中，小祥最常使用逆運算（S4）來解題，一共有 10 題出現逆運算。例如加法第 2 題：

0219T：所以老師問你這 N－4 是代表？
0220S：代表…小新送給美美，送完還剩下幾個。
0221T：對，很好哦，然後我們來看，這時候小新剩下 12 個彈珠
0222S：16 個
0223T：16 個是怎麼算的？
（S 寫出 12＋4=16）

逆運算策略可能來自於學校算術的訓練。但是小祥的逆運算策略只能使用在單步驟問題中，若是兩步驟以上的問題，則無法直接利用逆運算來解題（0832T~0841S），必須將式子化簡成單步驟之後，再利用逆運算求解。例如加法第 8 題（N－3＋5=9）：

0839T：可是我說星期二她有 9 個耶
（S 寫出 9－3＋5=11）
0840T：你還是算出 11 個？
（S 點頭）
0841T：你有沒有辦法從星期二推到星期天呢？
（S 搖頭）
0842T：沒有辦法？
（S 點頭）
0843T：好，那我們再來看哦，後來比前面多？
0844S：2 個
0845T：那如果後來是 9 個，那原來是幾個？
（S 寫出 9－2=7）
0846T：你覺得答案是 11 還是 7
0847S：7

0848T：你覺得剛剛的 11，問題出在那裡？
0849S：輸 3 個，買 5 個
0850T：這樣子比原來？
0851S：多 2 個

在嘗試錯誤（S5）方面，例如小祥在加法第 13 題中，由於小祥認定 N 是某一個特定的未知數，而無法將 N 視爲不同的自然數來代入，所以即使研究者先以「如果袋子裡有 5 個呢？」引導他，他仍然只代入一個數字發現錯誤後便放棄。於是最後小祥作出結論，認爲小丸子不可能比小玉多。換句話說，小祥無法將 N 視爲一般數，所以他只能選擇一個已知數代入，來決定 N+N 與 N+2 的關係。

至於小祥運用等量公理（S7）進行解題的部分於下一點另述之。

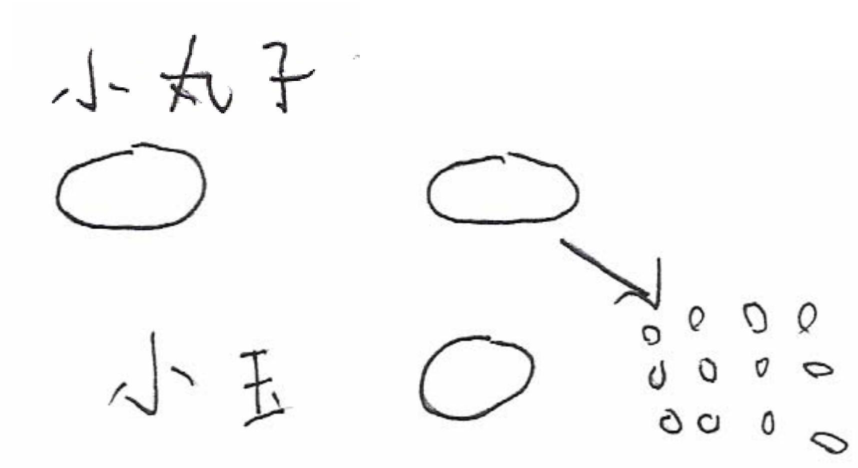
4.在圖畫或具體物的協助下以使用等量公理解題

在等號兩邊都有未知數的問題（第 12 題、第 12 題類題）中，小祥雖然無法列出等號兩邊都有 N 的方程式（N＋N=N＋12、N＋N＋N=N＋8），但是利用畫圖，或以具體物巧克力的輔助下，小祥可以算出 1 盒巧克力中有幾個。以加法第 12 題爲例：

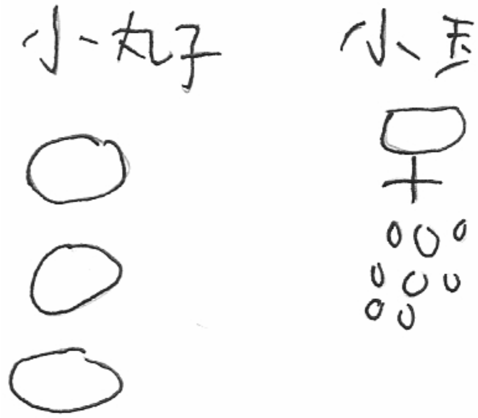
1207T：很好，那題目說他們兩個的彈珠一樣多，要怎麼表示？
1208S：……
1209T：哪邊等於哪邊？
1210S：這邊（2 盒）等於這邊（1 盒和 12 個）
1211T：那你可不可以告訴老師說，這裡面有幾個？
（S 搖頭）
1212T：不可以？從這裡看不出來？
1213S：嗯
1214T：他說小丸子 2 盒，小玉 1 盒加上 12 個，這邊的巧克力和這邊的巧克力會？
1215S：一樣多
1216T：那你沒有辦法看出這裡面有幾個嗎？
1217S：嗯
1218T：注意哦，這 3 包巧克力都是一樣多的，題目說這 2 盒和 1 盒加 12 個是一樣多的。

1219S：嗯。一盒…12 個
1220T：你怎麼知道的
1221S：(指著左邊的 1 盒，和右邊的 1 盒) 這兩個是一樣的

小祥在具體物巧克力的協助下，可以分別在小丸子那一堆（2 盒），小玉那一堆（1 盒＋12 個），說出：「左邊一盒等於右邊一盒」（1221S）各取出 1 盒巧克力抵消，然後看出 1 盒巧克力等於 12 個。



研究者爲確定小祥是否真能以具體操作的方式來表現等量公理，研究者再以類題「小丸子有 3 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠，加上 8 個彈珠，如果小丸子和小玉的彈珠一樣多。請問你要怎麼表示？」來測試他，結果亦有相同的表現，他能利用下圖來看出 2 盒巧克力有 8 個，所以 1 盒巧克力有 4 個。



第二節　國小五年級學童個案分析

研究者於 2005 年 2 月間對國小五年級學童－小儀進行訪談，一共五次，每次約 50 分鐘，以下由未知數概念及未知數解題歷程兩方面來分析訪談結果：

一、小儀的未知數概念：

訪談結果發現，在本研究的問題情境中，國小五年級學童小儀的未知數概念包括：能將文字符號 N 視爲一般數；能在具體情境中對未知數使用結合律、交換律及分配律化簡式子；由於無法對未知數進行分割，所以無法合併兩個未知數的分割量；能說出未知數符合三一律但無法完整提出其成立的條件。

1. 將文字符號 N 視爲一般數

在加法第 13 題「未知數比大小」中，小儀能在不計算出 N 的數值之情形下，以 N＋4－N＋2=2 算出 N＋4 比 N＋2 多 2 個。並且在具體情境中，解釋爲何 N＋4 比 N＋2 多 2 個。

（F 寫出 N＋4＞N＋2）
1306T：妳覺得 N＋4 比較多嘛！
1307F：嗯
1308T：那老師問妳，N＋4 比 N＋2 多幾個？
1309F：多 2 個
1310T：多 2 個，嗯，那妳可以解釋給我聽嗎？
（F 寫出 N＋4－N＋2=2）
……
1315T：那妳能不能舉一個具體的例子來告訴我，像我們之前？
1316F：…
1317T：N＋2 可能代表什麼？
1318F：一盒彈珠加 2 個
1319T：那 N＋4 呢？
1320F：一盒彈珠加 4 個
1321T：所以這個(N＋4)比這個(N＋2)多？

1322F：2 個！

由此可知小儀可以把文字符號視為不使用的。

小儀一開始先以「一些」來表示未知數：

0104T：這樣說好了，妳覺得應該要怎麼表示？假設妳要用一個數學式子把這個題目表示出來，然後要我看得懂，妳覺得…妳要怎麼寫。

0105F：一些加 9 個彈珠。

0106T：嗯，好，那妳寫給我看

（F 寫出 一些+9

研究者進一步問她，有沒有其他的表示法，她回答沒有（0116T~0120F），研究者猜想由於她一到三年級是用 82 年版的教科書，所以她不熟悉算式填充題。於是研究者直接引入 N，而小儀可以將每一個問題情境中的 N 視為特定未知數，不曾出現「將前一題的 N 所代表的數代入這一題的 N」的情形。例如在加法第 3 題中，小儀以 6＋N 代表「小新有 6 個彈珠，後來阿呆給了小新一些彈珠」，並由「小新有 11 個彈珠」計算出 N=5：

（F 寫出 6＋N）

0305T：那妳的 N 是代表？

0306F：一些

0307T：那一些？可以說清楚一點嗎？

0308F：阿呆給小新的那一些彈珠。

而接下來在第 4 題，小儀則能以 12－N 表示「小新有 12 個彈珠，後來送給妹妹一些彈珠」，並由「小新剩下 5 個彈珠」計算出 N=7：

0401T：好，來。來看看這一題

（F 寫出 12－N）

0402T：那妳的 N 是什麼？

0403F：小新送給妹妹的

0404T：嗯，很好哦。來…

兩題中的 N 分別代表的是「阿呆給小新的彈珠」、「小新送給妹妹的彈珠」，小儀知道每一題中的 N 代表的是該問題情境的特定未知數，也就是說小儀在第 3 題中算出 N=5 之後，並不會把第 4 題的 N 當作 5 來計算答案。

另外，小儀在未知數比大小的問題中，能夠將 N 代入不同的自然數來推估三一律成立之條件，即使她無法正確列出所有的解集合，但是已具備「將 N 視爲一般數」的能力。例如加法第 14 題（比較 N＋2 及 N＋N 的大小）：

1422T：那，什麼時候小玉會比較多？
（F 口中念念有詞）
1423T：妳在想什麼，就說出來啊！
1425F：3 以上的數
1426T：很好，那妳是怎麼算出來的？
1427F：如果一盒有 3 個，那小丸子有 5 個，小玉有 6 個啊。所以小玉比較多。
1428T：嗯…那妳覺得 3 以上都會是小玉比較多嗎？
1429F：嗯。

由小儀以上的解題表現可知，在本研究的問題情境中，小儀不但能把 N 視爲可算出的值、視爲可不使用的，及特定的未知數，還能把 N 當成一般數（letter used as a generalized number），列舉出一個以上的解。相當於 Kuchemann（1981）的文字符號概念階段的第五層次。

2. 在具體情境中使用結合律化簡式子

小儀在加減混合，連乘及連除的問題中能夠以結合律化簡，但在乘除混合的問題則無法順利完成，分述如下：

(1) 能以結合律化簡加減混合運算的式子

面對連加或連減的代數式，小儀能夠自行運用結合律化簡，例如加法第 5 題，小儀能夠在彈珠輸贏的具體情境中，將 N＋3＋4 化簡成 N＋7：

0512T：那如果是這個式子，妳可以把它變短一點？
（F 寫出 N＋7）
0513T：嗯，很好，來妳告訴老師 N＋7 的意思
0514F：N 是他原來有 N 個彈珠，然後他贏了 3 個媽媽又給他 4 個，加起來是 7 個。

而加減混合運算的代數式，小儀雖然無法自行化簡，必須在研究者的引導下

方能順利的將式子化簡。例如加法第 8 題，小儀能將 N－3＋5 化簡成 N＋2：

0805T：來，沒關係，我們一步一步慢慢來，我先問妳，妳覺得他禮拜二的彈珠比較多還是禮拜日的彈珠比較多？
0806F：禮拜二
0807T：禮拜二。嗯，那禮拜二多幾個？
0808F：多 5 個。
0809T：禮拜二跟禮拜天比哦！
0810F：嗯…多 2 個
0811T：多 2 個，那妳怎麼表示？這個 N 是禮拜幾？
0812F：禮拜天的啊！
0813T：那妳說比禮拜天多 2 個，所以是
0814F：N＋2

但是研究者亦發現，若是小儀已知的關係並不是以 N 為基準來敘述時，她則無法明確的表示兩量之間的關係，例如加法第 7 題，先假設星期天是 N 個，就算小儀知道星期天比星期二多 4 個時，她也無法說出星期二是 N-4：

0708T：(指 N+2-6）那現在這個式子妳可以把它變短嗎？
0709F：……
0710T：妳覺得星期二比賽完，跟星期天比的話，那一天比較多？
0711F：嗯…星期天
0712T：星期天會比較多嘛？那星期天多幾個？
0713F：星期天多…他多…
0714T：星期天比星期二多幾個？
0715F：多 4 個
……
0718T：那如果星期天，我們剛剛設他是 N 個嘛，那星期二有幾個？
0719F：星期二減…
0720T：我們剛剛不是說星期天比星期二，怎樣？
0721F：多 4 個
0722T：那星期天有 N 個的話，星期二有幾個？
0723F：星期二…

顯示小儀對於兩未知量的關係仍是不可逆的。她無法由「若星期二為 N，則星期天為 N+4，推出若星期天為 N，則星期二為 N-4」

(2) 能以結合律化簡連乘及連除運算的式子

面對乘法第 3 題及第 4 題中的連乘及連除運算，小儀可以在研究者的引導下

化簡代數式，例如第 3 題：

1707T：好，那老師問妳哦，妳覺得他總共有幾包巧克力？
1708F：有 6 包
1709T：那我們剛剛說一包有幾個？
1710F：N 個
1711T：所以說妳又可以怎麼寫？他總共有幾個巧克力？
（F 寫出 6×N）
1712T：（指 2×3×N）剛剛這樣子是表示什麼？
1713F：他有…全部！
1714T：對對對，那這樣子呢？
1715F：也是全部

並利用化簡結果，以 42÷6=7 計算出 1 盒巧克力有 7 個。

而小儀在第 4 題中，可以將「先分成 5 盒，再分成 2 包」，視爲分成 10 包，於是將 N÷5÷2 寫成 N÷10。

1834T：N÷5÷2 這個代表什麼？
1835F：老師有一些巧克力，分裝成 5 盒，然後再分成 2 包
1836T：所以他代表的是？
1837F：每包有多少巧克力
1838T：對，那這邊的話？
1839F：嗯，老師有多少巧克力，可以分成 10 包，每包有幾個
1840T：對啊，所以這兩個代表的東西一不一樣？
1841F：不一樣？
1842T：不一樣嗎？
1843F：一樣。
1844T：一樣還是不一樣？
1845F：一樣！

(3) 無法以結合律化簡乘除混合運算的式子

由於小儀無法對未知量進行分割，所以當化簡後出現分數的情境時，小儀則無法順利的以結合律來化簡式子。例如乘法第 5 題，小儀雖然能以 N×3÷4 來表示問題情境，亦能指出每個人可以分到四分之三盒，但卻無法將上式化簡成 $N\times\frac{3}{4}$（1935T~1938F）：

1919T：來老師問妳一個可能比較難一點的，這個式子妳可以把它寫短一點嗎？
1920F：……短一點…
1921T：有沒有辦法？
（F 搖頭）
……
1928T：總共有 3 盒耶，3 盒分給 4 個人，每個人分到幾盒？
（F 寫出 3÷4= 3/4）
1929T：所以每個人分到？
1930F：四分之三盒
1931T：嗯，那剛剛說到每盒有幾個巧克力？
1932F：每盒有 N 個
1933T：所以我們知道每個人分到幾個？
1934F：分到…N 個
1935T：我們知道每個人分到四分之三盒，每盒又有 N 個，所以每個人分到幾個？
1936F：……
1937T：四分之三盒是幾個巧克力？
1938F：……

研究者猜想小儀可能無法分割未知數，於是以已知量 20 再進行測試發現，小儀必須先把 20 分割成 4 份，得到 5 為新單位，計算其中 3 單位的數量，得到 20 的四分之三為 15，再以 36 測試，她也可以算出 36 的四分之三為 27。

1940T：那我問妳一個問題哦，如果一盒有 20 個，四分之三盒有幾個？
1941F：20 個…
1942T：妳可以用筆算沒關係。
（F 寫出 20÷4=5　5×3=15）
1943T：嗯，妳為什麼會用這樣算？
1944F：因為一盒有 20 個，要分給 4 個人啊，每個人可以分到 5 個，每份有 3 盒，所以每個人分到 15 個。
1945T：嗯，我懂妳的意思。
1946T：現在如果一盒有 36 個，四分之三盒是幾個？
（F 寫出 36÷4=9　9×3=27）

但是因為 N 是未知數，小儀無法對 N 進行分割，而無法表示「N 分割成 4 份，每份的數量」。

這一點由乘法第 10 題可以得到印證。在此題中，小儀覺得 N÷7 是花輪把彈

珠分給 7 個小朋友的動作，而不是代表「每個小朋友得到的彈珠數」，而「每個小朋友得到的彈珠數」指的是「N÷7 計算出的結果」。

2412T：比如我是花輪，我把我的彈珠分給 7 個小朋友，其中有一個是小丸子，那請問小丸子得到幾個？
2413F：小丸子也分到一樣多的。
2414T：對啊。所以小丸子是？
2415F：一樣多的呀
2416T：那妳可以告訴我妳寫的 N÷7 是？
2417F：花輪他把他原來的彈珠分給 7 個小朋友呀
2418T：是每一個人得到的彈珠嗎？
2419F：嗯
2420T：那小丸子也是其中之一啊，所以小丸子也得到？
2421F：也得到一樣多的
2422T：一樣多是那裡啊？
2423F：……
……
2455T：是不是乘法比較容易，除法比較搞不清楚？
2456F：不會呀！
2457T：那妳剛剛為什麼表示不出來？妳在想什麼？
2458F：我剛在想，為什麼每個人有 N÷7 個。
2459T：妳覺得 N÷7 這個表示方法感覺怪怪的嗎？
2460F：嗯。
2461T：覺得應該要把它算出來才對嗎？
2462F：嗯。

小儀認爲 N÷7 應該要計算出結果，才能用來代表一個量。也就是說她無法把 N÷7 當作是未知數 N 進行分割後的部分量。

由上述結果可知，小儀能在加減混合、連乘及連除的情境中，對未知數使用結合律來化簡式子，但由於未學過通分、約分、擴分及異分母加減的概念，於是無法將等分除的結果化成未知數的分割量。

3. 在具體情境中使用交換律化簡式子

在加法第 9 題：「星期日小新原來有 14 個彈珠，星期一和風間比賽輸了一些彈珠，星期二和正男比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？」中，

小儀可以把小新星期一輸的彈珠數當成 N 個，列出小新最後的彈珠數為 14－N ＋5=( )。經由研究者進一步引導她：「『星期一先輸 N 個，星期二再贏 5 個』和『星期一先贏 5 個，星期二再輸 N 個』」結果是否相同？小儀再利用題目條件：「最後發現口袋裡有 8 個」，寫出 14＋5=19　19－8=11，解出小新星期一輸了 11 個。

0919T：我問妳好了，如果他星期一跟星期二發生的事情調換呢？結果有沒有影響？就是說他星期一先贏 5 個，星期二再輸一些，跟原來星期一輸一些，星期二再贏 5 個，最後他彈珠的數量有沒有差？

（F 搖頭）

0920T：沒有對不對？那我們要不要把他當作星期一先贏 5 個？試試看？

（F 寫出 14＋5=19　19－8=11）

0921T：嗯？11 是什麼？

0922F：11…他輸掉的。

而接下來在加法第 10 題中，小儀能自行用前一題同樣的方法來化簡式子，並求出爺爺星期一買給小丸子的彈珠數：

1002T：嗯，很好啊，那老師問妳可不可以把這個式子弄短一點？

1003F：…

1004T：妳可以試試看啊，沒關係？

（F 寫出 15－9＋N ）

1005T：變成星期二爺爺買彈珠給他嘛！那這裡可不可以先算？

1006F：可以啊！

1007T：所以整個式子可以寫成什麼？

1008F：先算的話，就等於 6

（F 寫出 6＋N）

…

1018F：星期二有 6 個，

1019T：再來？還有…

1020F：再加上…

1021T：爺爺買給她的嗎？

1022F：嗯

1023T：題目告訴妳說，總共有幾個？

1024F：總共有 8 個

1025T：所以我們是不是可以知道爺爺星期一買給她幾個？

1026F：2 個

經由研究者在第 9 題的引導，小儀在第 10 題就能夠自發的使用「兩天輸贏調換」策略的表現，表示在具體情境中，她能夠理解並運用交換律來化簡代數式。

4. 在具體情境中使用分配律化簡式子

在乘法第 11 題中，小儀能把 N＋3×N 視爲 1 盒彈珠數加上 3 盒彈珠數，於是化簡成 4×N：

2512F：嗯，小新有 N 個
2513T：那正男呢？
2514F：正男有 3 盒，3×N 個
2515T：所以總共要怎麼寫？
2516F：N×4

在乘法第 13 題有類似的表現，小儀能將 5×N－2×N 視爲 5 盒彈珠數，所以小丸子比小玉多 3 盒，而將 5×N－2×N 化簡成 3×N。

但是在乘法第 12 題及第 14 題中，由於小儀無法將等分除的結果轉換成未知數分割量，於是無法使用分配律來化簡式子，例如乘法 12 題，小儀可以列出 N÷2＋N÷3=15，但是她不會將 N÷2＋N÷3 寫成 $\frac{N}{2}+\frac{N}{3}$ ，所以無法化簡成 N×$\frac{5}{6}$ 。

5. 能說出未知數符合三一律但無法完整提出其成立條件

面對「未知數比大小」的問題時，小儀將 N 視爲一盒的彈珠數，所以她在比較 2N＋5、3N＋5 的大小時，以日常生活經驗推估 3 盒＋5 個必定多於 2 盒＋5 個，除非阿呆吃掉 1 盒，否則兩人巧克力不會相等。她認爲 N 是代表一盒巧克力，故 N 一定是一個自然數，所以她無法提出 2N＋5=3N＋5 的條件爲 N=0：

3104F：因為…如果 N 是 1 盒的話，阿呆就是 3 盒＋5 個，小新是 2 盒＋5 個，所以阿呆會比小新多

3105T：有沒有可能兩個人一樣多？
3106F：有吧
3107T：什麼時候？
3108F：就是…阿呆吃掉一盒的時候啊
3109T：我說他們這樣，不能吃掉啦！有沒有可能？
3110F：…如果是 6 的話…（反覆代入數字計算）
3111T：他們有沒有可能一樣多？
3112F：不可能。

在比較 N＋N 及 N＋2 的問題中，小儀能指出 N＋N 與 N＋2 的關係符合三一律，並以代入不同數字的策略，來推估成立的條件。但即使研究者在前一題已提示「盒子裡可能沒東西」，小儀仍然未考慮 N=0 的情況：

1403T：有可能一樣多嗎？
1404F：可能
1405T：那 N 等於幾的時候兩個人會一樣？
1406F：N 等於 2 的時候
1407T：N 等於 2 的時候。妳是怎麼算出來的
1408F：這個 N 等於那個 N 啊，所以這個 2 就等於那個 N
……
1415T：很好！那老師問妳，什麼時候小丸子會比較多？
1416F：N…1 的時候
1417T：除了 1 之外呢？
1418F：應該沒了吧？

由上述兩個例子可發現，小儀無法脫離 N 是代表一包巧克力的具體情境，所以將 N 視爲自然數，而未考慮到 N 是 0 的情形。

另外，在乘法第 18 題，比較 N＋7、2×N＋1 大小的問題，小儀也有類似的表現。她能夠在代入 7、8、9 等不同的數字後，均發現 N＋7<2×N＋1，進而推估當 N 是 7 以上的數時，N＋7<2×N＋1；而把 5 代入 N 得到 5＋7>2×5＋1，發現當 N 是 5 以下的數時，N＋7>2×N＋1。而且她在具體物的幫助下，計算出當 N=6 時，N＋7=2×N＋1。

二、小儀的未知數解題歷程

訪談結果發現，在本研究問題情境中，小儀能列出兩邊均有未知數的等式、等號的意義正從「算出答案」過渡到「代表相等的同類量」、曾使用的解題策略包括回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤及在具體情境中使用等量公理，並能自製具體表徵解出未知數分割量的問題。而且小儀能夠掌握未知數所代表的數量之範圍，進而檢視答案的合理性。

1. 能列出兩邊均有未知數的等式

在本研究的問題中，每一題的 N 不但分別代表不同的數字，而且指涉不同型態的彈珠量。例如，加法第 1 題的 N 是代表小新原有的彈珠數、加法第 3 題的 N 代表阿呆給小新的彈珠數，乘法第 8 題的 N 代表一盒彈珠的數目，而乘法第 9 題的 N 則是代表媽媽煮了一鍋湯圓的數。而且加法第 1 題到第 10 題，以及乘法第 1 題到第 14 題，也就是未知數僅出現在等號左邊的問題情境，小儀均能正確的列出方程式來表示這些問題情境。

另外，在未知數出現在等號兩邊的問題中，小儀能用自己的意思列出等式，表示等號兩邊相等，例如加法第 12 題：

1202T：妳要怎麼表示都可以。

（F 寫出 2盒＝1盒＋12個）

1203T：嗯，那 1 盒彈珠有幾個？

1204F：12

又如乘法第 16 題，小儀可以寫出「1 盒＋2 包＋8 個=1 盒＋4 包＋2 個」來表示小新和阿呆有一樣多的巧克力數。雖然這樣的等式不能算是正確的代數方程式，可是由此可知，小儀已知曉等號不具方向性，而是等號兩邊代表相等的同類量。

2. 等號的意義正從「算出答案」過渡到「代表相等的同類量」

小儀在等號兩邊出現未知數的問題中，能以等式「2 盒=1 盒＋12 個」來表示問題的情境，值得注意的是，在等號的右邊出現加號，表示她也能由右至左來閱讀一個等式。唯小儀在訪談過程中，偶而仍會出現不合邏輯的等式，例如加法第 2 題：

（F 寫出 $N-4=12+4=16$

0217T：嗯，好，老師先問妳，這個式子妳要怎麼解釋給老師聽？

0218F：……

0219T：沒關係，妳說給我聽。

0220F：他原來有一些彈珠，然後送給美美 4 個，然後剩下 12 個，然後再加 4 個，現在就有 16 個。

所以研究者認為，小儀雖然已獲得等號是右邊與左邊的同類量相等的概念。但是尚未完全脫離等號為「算出答案」的指令。這也許是小儀已經接受了國小四年的算術訓練所致。

3. 解題策略包括回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤及等量公理

小儀在本研究的訪談問題中，曾出現的解題策略包括回憶數字事實（S1）、逆運算（S4）、嘗試錯誤（S5）及等量公理（S7）。其中等量公理的表現在下列的第 5 點中另外詳述。

在面對單步驟問題時，小儀都以逆運算（S4）求得解答，其中若是遇到較熟悉的算式，小儀也會利用「回憶數字事實」（S1）來求解，例如加法第 2 題：

0213T：好，再來他告訴妳說啊，他送給美美 4 個彈珠以後啊，他就剩下 12 個彈珠了，然後問妳說小新原來有幾個彈珠？

（F 寫出 12＋4=16）

而在兩步驟的問題中，小儀毋需化簡，能直接進行兩次逆運算（S4）來求解，例如加法第 7 題：

0704T：然後他如果說小新現在有 7 個？一樣，可以先幫老師列式嗎？

（F 寫出 N＋2－6=7）

0705T：嗯，很好。這樣就可以代表小新星期天有 N 個，星期一正男給他 2 個，星期二跟風間比賽輸了 6 個，最後他發現他有 7 個。那現在問妳，小新星期天有幾個？

（F 寫出 7＋6－2=11）

0706T：嗯，他星期天就會有？

0707F：11 個

例如乘法第 4 題，雖然小儀可以先化簡 N÷5÷2 爲 N÷10，但是她仍傾向直接使用逆運算解題：

1804T：那他現在說，我知道一包裡面有 4 個，那妳怎麼列式來表示這個式子？

1805F：原來…

（F 寫出 4×2×5=40）

此外，在加減乘除混合的問題中，小儀也有類似的表現。

若是在無法利用逆運算求解的時候，小儀會使用有系統地嘗試錯誤（S5）的方法來解決問題。例如乘法第 12 題，小儀能列出 N÷2＋N÷3=15，雖無法自行使用分配律來解題，但是她知道小新一定比較多，所以先將 15 分解成 10 和 5，10 代表小新的二分之一包，5 代表小丸子的三分之一包，結果發現答案不符，再將 10 減一得 9，5 加 1 得 6，以 9 和 6 代入，最後終於求得答案：

2617T：妳儘量試試看唷，試到不想試再跟老師說。

（F 口中念念有詞）

2618T：我好像聽到什麼答案囉，沒關係，妳說啊，1 盒有幾個？

（F 寫下「小新 9 個，小丸子 6 個」）

2619T：所以 1 盒就是？

2620F：18 個

2621T：妳可不可以告訴我妳剛是怎麼想出 18 個的？

2622F：把 15 拆成兩個，可是小新一定會比小丸子多啊

2623T：然後妳就一個一個慢慢試嗎？

2624F：沒有。

2625T：那妳試了那些數字？

2626F：我先試 10 跟 5，可是不行，就想說，10－1，5＋1 的話

2627T：這樣就是 9 個跟 6 個嘛

2628F：對啊，結果 9×2=18 的話，18 也是 3 的倍數，所以 1 盒就是 18 個彈珠

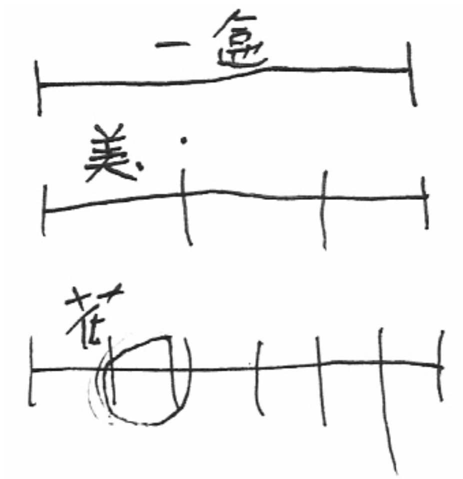
在本次訪談中，小儀的解題策略仍以逆運算（S4）爲主，訪談的問題共計有

34 題，其中以逆運算求得答案的問題一共有 25 題。顯示出逆運算仍是小儀最有把握的解題策略。

4. 自製具體表徵解出未知數分割量的問題

研究者於前面指出，由於小儀無法對未知量進行分割，故無法將兩個不同的未知數分割量合併。然而面對此類的問題，除了上述使用嘗試錯誤（S5）的方法外，小儀也能利用線段圖，把分割未知數轉化成分割已知線段，得到已知線段的新單位，進而利用新單位的伸縮，解出整個已知線段長，然後再轉化爲待求的未知數。

例如在乘法第 14 題中，小儀可以列出 N÷3－N÷6=7，然後利用下列的線段圖，解出花輪和美環相差的部分是一整個線段分成 6 份，其中的 1 份，進而以 7 ×2=14 解出美環有 14 個，而 14×3=42，於是 1 盒巧克力有 42 個：



2827T：很好哦，那那裡是 7 個呢？
（F 圈起來，如下圖）
2828T：那一整盒呢？
2829F：如果美環有 14 個，那花輪就有 7 個，14 個減掉 7 個就等於多 7 個啊
2830T：嗯，我現在問妳 1 盒耶？
2831F：1 盒？等於…等於…等於…
（F 寫出 14×3=42）
2832F：1 盒等於 42 個

5. 在圖畫或具體物的協助下，可以使用等量公理解題

在加法第 12 題中，小儀可以利用圖畫解釋左邊 2 盒，右邊 1 盒＋12 個，只要等號左右邊，各拿走 1 盒，就可以看出 1 盒彈珠有 12 個：

1208T：那妳是怎麼看出來的？
1209F：用兩盒減掉 1 盒，剩 1 盒，就是 12 個啦！
1210T：妳是說左邊和右邊都拿掉 1 盒嗎？
1211F：對啊！

而乘法第 15 題中，小儀可以按照題意列出「 3 盒＋9 = 4 盒＋1」，但無法以一元一次方程式列出 $N\times3+9=N\times4+1$ 這個等式。於是研究者提示小儀可以畫圖或使用具體物。經由具體物的協助，小儀先拿掉從兩堆巧克力分別拿掉代表 $3\times N$ 的 3 包巧克力，再同時拿掉 1 個巧克力，然後求出 $N=8$，即 1 盒巧克力有 8 個（2909T ~2915F）。

接下來小儀面對等式中有兩個未知量的問題時，她先列出「1 盒＋2 包＋8 個=1 盒＋4 包＋2 個」，利用研究者提供的巧克力，排出小新及阿呆所擁有的彈珠數，能以同樣的策略，即「從兩堆中拿出一樣數量的巧克力」，看出 2 包等於 6 個，進而計算出 1 包等於 3 個。當研究者再進一步追問小儀：「一盒彈珠有幾個？」時，她只能不斷地從題目條件所給的數字來推估一盒巧克力的數目：

3013T：那 1 盒呢？
3014F：1 盒有幾包？如果 1 盒有 4 包…四三十二。
3015T：來，我們現在是不是知道 1 包有 3 個，那麼，1 包 1 包，我們都可以拆開啊！
（F 把 1 包畫成 3 個）
3016T：那阿呆是 1 盒加幾個？
3017F：123456，6＋6=12，1 盒＋12 再加 2
3018T：所以總共是 1 盒加幾個？
3019F：14 個
3020T：那小新
3021F：也是 1 盒＋14 個，所以 1 盒也是 14 個
3022T：嗯，阿呆是 1 盒加 14 個，小新也是 1 盒加 14 個，所以他們
3023F：都一樣多啊。所以 1 盒就等於 14 個。

她無法回答出：「不論一盒有幾個，兩個人的彈珠都一樣多」。也就是說，小儀認

爲 1 盒可能是 14 個或其他數字，但無法將未知數視爲變數，即小儀尚未達到 Kuchemann 所提出的文字符號概念六階段之最高層次。

6. 能檢視解之合理性

在乘法第 8 題中，小儀最後算出來的答案是 4 個，但是她指出問題情境中提到「小新打破 1 盒巧克力，而掉出 5 個巧克力」，所以求出的答案：「1 盒有 4 個」是不合理的（2219F）。

2212T：所以 1 盒有幾個？
2213F：有 4 個，嗯？怎麼會這樣？
2214T：嗯，妳覺得那裡有問題？妳勇敢的說出來沒關係。
2215F：28÷7…
2216T：妳覺得那裡有問題，跟老師講沒關係。
2217F：答案有問題！
2218T：為什麼你覺得答案有問題？
2219F：因為它（指 4）不是 1 盒嗎？啊剛掉出 5 個，如果現在 1 盒算出是 4 個。如果是這樣就不對啊！

由此可知小儀不但可以求出未知數 N，並且能以問題情境檢驗特定未知數 N 的合理性，而掌握未知數 N 必須是大於或等於 5 的整數。

第三節　國中一年級學童個案分析

研究者於 94 年 3 月間對國中一年級學童—小融進行訪談，每次 35 分鐘，一共三次。以下由未知數概念及未知數解題歷程兩方面來分析訪談結果：

一、小融的未知數概念：

訪談結果發現，在本研究的問題情境中，國中一年級學童小融的未知數概念包括：能將文字符號 N 視爲變數；能直接對未知數使用結合律、交換律及分配律化簡式子；能指出未知數符合三一律並說出其成立的條件。

1. 將文字符號 N 視爲變數

本次訪談中，小融以「x」表示未知量，並可以將 x 視爲特定未知數，即小融能對含有 x 的式子進行四則運算，例如乘法第 5 題，他以 x 表示一盒巧克力的個數，然後用「3x」表示媽媽買了 3 盒巧克力，再用 3x÷4 表示分給 4 個人，得到最後的答案 $\frac{3x}{4}$；在乘法第 6 題中，以 $\frac{48}{x}$ 來表示 x 盒巧克力中共有 48 個。另外，在加法第 11 題中，以 x＋6－6＋4 表示「小丸子原有 x 個彈珠，星期一得到 6 個彈珠，星期二輸掉 6 個彈珠，星期三又撿到 4 個彈珠」，並計算出小丸子最後有 x＋4 個。

在加法第 14 題中，小融先以代入 0 的方式來決定 N＋2 及 N＋N 的大小。然後研究者提問「如果 N 不是 0 呢？」，小融進一步以 5 代入，發現 5＋5 大於 5＋2，於是指出 N＋N 也可能大於 N＋2。由此過程發現，小融能不斷地以正整數取代 N，推估兩未知數的大小關係。代表他能夠將 N 視爲一個非固定的正整數，即小融能將 N 視爲一般數。

於是研究者進一步問他：「當小新有 2N＋5 個巧克力，阿呆有 3N＋5 個巧克力，誰的巧克力比較多？」發現小融一開始雖然指出 3N＋5 大於或等於 2N＋5，但是研究者追問他後，他也能指出當 N 為負數時，3N＋5 會小於 2N＋5。也就是說，小融掌握了「N 可以是任何整數」，不會被問題的題意「N 是一盒巧克力」所限制，而認為 N 所代表的巧克力個數不可能是負的。

3108T：那有沒有可能小於？
3109R：小於哦？不可能…
3110T：嗯。
3111R：除非 N 是負的時候。
3112T：嗯，好。

在乘法第 16 題：「小新有 1 盒彈珠，2 包單珠和 8 個彈珠，阿呆有 1 盒彈珠，4 包彈珠和 2 個彈珠，而小新和阿呆有一樣多的彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？」小融可以指出：無論 1 盒裡有幾個彈珠，兩邊都會相等：

3026R：它是幾個應該都可以吧！
3027T：為什麼？
3028R：因為它（指 1 盒）這兩個都是一樣的啊，啊總數幾乎都是一樣的啊，不管它有幾個，答案都是一樣啊。

由此可知，小融能將 N 視為一段合理範圍之內的非特定值，即已具備將文字符號 N 視為變數的概念。換句話說，小融在本問題情境中，已達到 Kuchemann（1981）的文字符號概念階段的第六層次。

2. 對未知數使用結合律化簡式子

小融在訪談過程中，如果遇到形如 x＋a＋b、x＋a－b、x－a＋b、x－a－b（其中 a、b 為常數）均可以直接以結合律化簡成 x＋c（c 為常數）。例如加法第 8 題，小融寫出「x＋5－3＝x＋2」，研究者進一步追問：

0802T：老師問你哦，你這個 x－3＋5 怎麼變成 x＋2？解釋給老師聽。
0803R：因為＋5 跟－3 加起來，－3 加＋5 就等於 2，所以就是 x＋2

值得注意的是，小融在回答研究者的問題時，直接以＋5 跟－3 來進行運算，而

不以「得到 5 個巧克力又輸掉 3 個巧克力」來作答。小融在加法第 5 題到第 7 題均有類似的表現，讀者可參見附錄。

另外，面對乘除混合運算的式子，像是 x×a×b、x×a÷b…（a、b 爲常數），小融亦能將其化簡成 cx（c 爲常數），例如乘法第 3 題，他以 3x×2=6x 代表「2 盒巧克力，每盒有 3 包，每包不知道有幾個」；乘法第 4 題，他以 $\frac{x}{5} \div \frac{10}{5} = \frac{x}{5} \times \frac{5}{10} = \frac{x}{10}$ 來代表「老師有一些巧克力，分裝成 5 盒後，每 1 盒再分成 2 包，每包有幾個巧克力？」。

由上述小融的解題表現可知，他已能脫離具體問題情境，抽象地針對未知數運用結合律來化簡。

3. 對未知數使用交換律化簡式子

當未知數 x 出現在式子中間時，小融可以直接使用交換律將未知數 x，移到式子的最前面或最後面，並以結合律來化簡式子。例如加法第 9 題，他寫出 $14 - x + 5 = 19 - x$ ，研究者進一步追問他：

0901T：那你這裡又怎麼變成 19 的？
0902R：因為這（指 x）還是未知數，所以先暫時不用理它，把 5 和原來的彈珠加起來。
0903T：那你的意思就是可以先加上 5 再減 x？
0904R：嗯。

小融指出 $14 - x + 5$ 可以先換成 $14 + 5 - x$ ，於是等於 $19 - x$ 。而加法第 10 題時，小融亦可以將 $15 + x - 9$ 化簡成 $6 + x$ 。

在上述兩個例子中，研究者要求小融解釋交換律時，他會以數字，而不以巧克力的增減作說明。因此，研究者推論小融可以抽象地針對未知數進行交換律來化簡式子。

4. 對未知數使用分配律化簡式子

在乘法第 12 題中，小融以$\frac{x}{2}$代表小新的彈珠，以$\frac{x}{3}$代表小丸子的彈珠，而且可以由$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{2x}{6}+\frac{3x}{6}=\frac{5x}{6}$，其中$\frac{2x}{6}+\frac{3x}{6}$以分配律化簡爲$\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)\times x$，最後得到$\frac{5x}{6}$，並且知道$\frac{5x}{6}$代表六分之五盒的彈珠數。

2601T：我幫你假設好不好？1 盒有 x 個。

（R 寫出$x\div 2=\frac{x}{2}$，$x\div 3=\frac{x}{3}$，$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{2x}{6}+\frac{3x}{6}=\frac{5x}{6}$）

2602T：好，我問你，你的$\frac{5x}{6}$代表幾盒的彈珠？

2603R：六分之五盒，小新和小丸子的彈珠。

研究者從小融以$\frac{x}{2}$表示$\frac{1}{2}$盒巧克力個數，而非$\frac{1}{2}x$，推測小融將 x 視爲一般數，而非一個單位。因爲他如果把 x 視爲單位（例如：盒）的話，寫法應該是「$\frac{1}{2}$盒」，而非「$\frac{盒}{2}$」。

另外，在乘法第 11 題（2501T~2503R）、第 13 題（2701T~2702R）及第 14 題（2801T~2805R），小融也都有相同的表現。因此，研究者認爲，小融能夠直接對未知數使用分配律來進行式子的化簡。

5. 指出未知數符合三一律並說出其成立的條件

面對「未知數比大小」的問題，小融不但可以指出未知數的三一律，並且可以藉由將未知數代入數字，來分別求得在「大於、等於及小於」的情形時，分別成立的條件。

在加法第 13 題中，小融能很清楚的藉由「N 代表相同的數目」，指出 N＋4 比 N＋2 多 2：

1301T：再來，我要問你，如果小丸子有 8 個的話，小玉有幾個？

1302R：10 個。

1303T：為什麼？

1304R：8 個減掉 2 嘛，就是 6 個，這是 N，6＋4=10；也可以是，因為這個多兩

個（N+4），N 是數目一樣嘛，所以多兩個，就是這個（N+2）再加 2 就好了。

他能藉由 N＋4 比 N＋2 多 2 來推測出，當小丸子（N＋4）有 8 個時，小玉（N＋2）有 8－2＝6 個。

然而在加法第 14 題中，小融都能明確指出「當 N 在某範圍時，N＋2>N＋N」「當 N 在某範圍時，N＋2=N＋N」及「當 N 在某範圍時，N＋2<N＋N」：

1408T：很好，那你能不能告訴我，什麼時候大，什麼時候小，什麼時候等於？
1409R：大於 2 的時候。
1410T：你幫我寫一下，什麼時候小玉會比較多？
1411R：N 大於 2 的時候。
1412T：那什麼時候，兩個會相等？
（R 寫出 2＋2=4，又在「N+N」下面寫 2＋2）
1413R：2 的時候，N 是 2 的時候。
1414T：怎麼算出來的？
1415R：因為如果 N 是 2 的時候，小丸子是 N＋2 就等於 4，如果這個 N 是 2，那這個也是 2，這邊也等於 4。
1416T：所以你是用數字代進去的？
1417R：嗯。
1418T：那這邊 N 大於 2，你也是用數字代的嗎？
1419R：嗯。
1422T：那如果是小丸子比較多的時候呢？
1423R：小丸子比較多就是…N 小於 2 的時候。

在乘法第 18 題，比較「N＋7、2N＋1」的大小時（3205T~3214R、3217T~3219R、3228T~3232R），小融亦有相同的表現。

由此可知，小融已經將 N 視為一個變數，具有數的性質，所以三一律會在不同的條件下成立。而且小融可以掌握 N 的範圍是「整數」，包括正整數、零及負整數。換句話說，他可以把文字符號 N 當成任何整數代入式子，來檢驗兩個未知數的大小。

二、小融的未知數解題歷程

訪談結果發現，小融能列出等號兩邊均有未知數的方程式、等號具備「代表相等同類量」的概念、使用的解題策略包括回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤等量公理及移項法則、而且小融能夠掌握未知數所代表的數量之範圍，進而檢視答案的合理性。

1. 能列出兩邊均有未知數的方程式

由於小融目前正在學習的數學單元即為「一元一次方程式」，所以除了有一題（乘法第 16 題）需要以兩個未知數來列方程式，他無法正確的完成列式之外，其他的問題，小融都可以列出方程式。

值得一提的是，小融已可以掌握問題中量與量之間的關係，因此他可以將不同的量設成 x，然後經由問題的已知條件，來表示其他的量：例如乘法第 4 題中，小融可以假設把每包有 x 個巧克力，然後將全部的巧克力表示成 $2x \times 5 = 10x$ 個，由題目所給的條件：「每包有 4 個巧克力」，以 x=4 代入得到全部有 40 個巧克力，也可以反過來假設全部有 x 個巧克力，然後以 $\frac{x}{5} \div 2 = \frac{x}{10}$ 來表示每包的巧克力數（1803T~1808T），然後再計算出全部的巧克力。

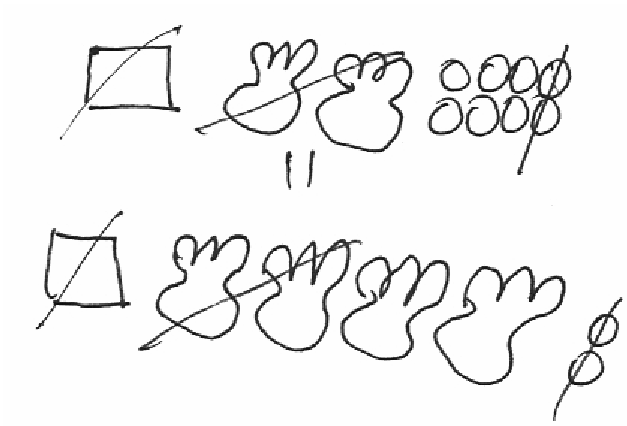
2. 等號具備「代表相等同類量」的概念

在本研究三次訪談中，小融未曾出現類似像 $x-3=5+3=8$ 之類不對稱的等式，並且在「兩未知量相等」的問題中，小融都可以清楚地寫出「A 的彈珠個數 = B 的彈珠個數」形式之方程式，例如：加法第 12 題，小融可以寫出「2x = x＋12」來表示「小丸子有 2 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠加上 12 個彈珠，兩人的彈珠個數一樣多」；乘法第 15 題，他亦可以寫出「3x＋9 = 4x＋1」來表示丸尾和小丸子的彈珠個數一樣多。

研究者認為小融不再由左至右來觀察一個等式，而能夠理解等號的左右對稱之觀念。

3. 以圖畫表示兩個未知數的方程式

面對乘法第 16 題：「小新有 1 盒彈珠，2 包彈珠和 8 個彈珠，阿呆有 1 盒彈珠，4 包彈珠和 2 個彈珠，而兩人有一樣多的彈珠」，雖然小融無法假設兩個文字符號以列出正確的方程式，但是他能夠以圖畫來表示兩個未知量相等（如下頁圖）：



而且讀者若仔細觀察，可以發現上面那堆彈珠與下面那堆彈珠之間，小融還以「=」來連結，代表兩堆彈珠相等。因此研究者推論，小融無法以方程式來表示題意是由於他未曾學習過以二個以上的文字符號來列方程式。也就是說，雖然他不諳正式的代數格式，但是他能以圖畫的方式，來表示等價的概念。

4. 解題策略包括回憶數字事實、逆運算、等量公理、移項法則及嘗試錯誤

在本研究的訪談問題中，小融曾出現的解題策略有共有五種，包括回憶數字事實（S1）、逆運算（S4）、嘗試錯誤（S5）、移項法則（S6）及等量公理（S7），以下分述之：

在面對較簡單的數字關係時，小融會利用回憶數字事實（S1）來求解，例如：6＋x=8，小融可以利用 6＋2=8，求出 x=2。

而小融最常出現的解題策略是逆運算（S4）。包括單步驟加減混合運算、加減乘除混合運算等，他都會使用逆運算來解題。例如加法第 9 題，當小融化簡成

$19-x=8$時，他接著寫出$19-8=11$，研究者問他：

0908T：嗯，我的意思是說你怎麼從 19－x=11 推得 19－8 的？

0909R：因為是未知數嘛，因為減完所有東西之後剩下 8，8 之後那想求和風間比賽輸的那些彈珠，所以就要用原來贏的…所有的彈珠加上贏的去減掉後來剩下的彈珠，就是風間贏的。

小融並未以移項法則或是等量公理來回答研究者的問題，也就是說他在處理這類的問題時，是使用逆運算的策略。

即使他已經將兩步驟運算的式子化簡成單步驟，他偶而還是會直接用逆運算（S4）解題，例如乘法第 4 題：小融已經將$x \div 5 \div 2$化簡成$\frac{x}{10}$，但是他在求解時，卻又利用「每包有 4 個」的條件，以 4×2=8，8×5=40 來求解。

除非小融遇到無法順利逆運算的問題時，他才會求助於移項法則（S6），例如乘法第 5 題，小融列出$\frac{3x}{4}=6$之後，以$3x \div 4=6$，$3x=24$，求出$x=8$。

或者等號兩邊均出現未知數時，例如乘法第 15 題，小融列出$4x+1=3x+9$之後，他會用移項法則（S6）算出 x＝8：

2907T：8，你是怎麼算出來的，你可以跟我講嗎？

2908R：順序搞錯而已

2909T：那你怎麼把 8 算出來的？

（R 寫出

$$4x+1=3x+9$$

$$4x-3x=9-1$$

2910R：就是 3x 移過來變負的，1 移過去變減的

為了要確認小融不是因為不會使用等量公理，才一直以逆運算來解題，於是研究者在乘法第 10 題時，要求小融必須以等量公理（S7）來解題：

（R 寫出$\frac{x}{7}-3=5$，$\frac{x}{7}=8$）

2416T：先停一下，老師問你，你這一步是怎麼到下面那一步的？

2417R：就是把－3 移過來，這個就要變加的。

2420T：兩邊怎樣？

2421R：兩邊…兩邊同時加 3。
2422T：嗯，很好。你會嘛，那繼續。
（R 寫出 x=56）
2423T：嗯，那像這樣子，你要怎麼做，才能算出 x=56？
2424R：因為這是除嘛。所以就再乘回去，所以就乘以 7。
2425T：所以兩邊怎樣？
2426R：兩邊同乘以 7。

研究者接著問他，比較喜歡那一種解題策略，小融先回答「逆運算」，接著他又說會「兩種都會使用」（2427T~2432R）。

研究者由小融上述的表現發現，小融他在遭遇到未知數的問題時，第一個反應就是將問題情境中待求之未知數放在等號的右邊，形成像「12－7＝x」的型態，以求出未知數 x，也許是他小學六年在算術方面的訓練所致，另一方面也顯示他對於移項法則或等量公理較不熟悉而缺乏信心。

另外，在面對未曾見過的問題類型，例如「未知數比大小」的問題中，小融則會以嘗試錯誤（S5）的方式，直接以數字代入 N，運用嘗試錯誤的方法來求出成立的條件。例如乘法第 18 題：

3205T：那你把所有的情況都寫出來。什麼時候 2N＋1 會大於 N＋7？
3206R：N……
（R 寫出 N<5）
3207T：N 小於 5 的時候，誰會比較大？
3208R：……沒有沒有
（R 寫出 N<4）
3209T：好，那 N<4 的時候，誰會比較大？
3210R：沒有沒有，這答案錯了，7…
（R 寫出 N<7）
………
3241T：所以說，你遇到這種題目，就是用代的去試看看？
3242R：嗯。

為了節省篇幅，2N＋1 小於 N＋7 及 2N＋1 等於 N＋7 的部分請參見附錄四（3217T~3240R）。另外，小融在加法第 14 題及乘法第 18 題也有類似的表現。

5. 能檢視解的合理範圍

研究者於第二次訪談時，以乘法第 8 題來測試小融是否能檢視出所解出的未知數 x 之合理性。但是小融在解出 x = 4 時，告訴研究者：「1 盒有 4 個」，卻未提出質疑。於是研究者於第三次訪談時，再加入一題與乘法第 8 題情境相同，但數據不同的類題，再次測試他，結果小融這次可以發現解出來的未知數 x = 5 是不合理的：

2222T：那你覺得 5 這個答案可不可以？
2223R：不合理。
2224T：不合理嗎？為什麼？
2225R：因為 1 盒應該要有 6 個以上，但是算出來只有 5 個。
2226T：對啊。這個答案不合理的話，所以這一題應該是怎樣？
2227R：應該是…無解。
2228T：那你剛剛怎麼沒看出來？
2229R：有啊，上次也有啊。
2230T：你有看出來怎麼沒跟我講？
2231R：有看出來啊，可是想說，就算啊。
……
2233T：所以你上次就有發現了？
2234R：有，有一題，跟這題差不多。

小融不但能指出本題不合理之處，還提出前一次訪談也有一個不合理的問題。所以由上述對話可知，小融對於求出來的解 x，可以檢視其是否符合問題情境中的合理範圍。至於小融爲何第一次未提出答案不合理之處，研究者將其歸咎於可能老師在小融心中的形象是不可挑戰的，所以他會儘量完成老師交付的問題，就像是他所說的：「有看出來啊，可是想說，就算啊。」。

第四節　訪談問題結構的跨個案比較

在本小節裡，研究者首先由訪談導引的問題結構，分別單步驟問題、兩步驟問題、未知數關係問題以及未知數比大小問題。以跨個案分析的方式，比較三個不同年級的學童：小祥、小儀及小融。研究者先從加法結構問題來比較三名個案的解題表現，再由乘法結構問題來比較國小五年級的小儀與國中一年級的小融之解題表現。希望藉此探索不同年級的學童之未知數解題歷程有何差異，並且能比較國小二年級及國小五年級的學童在研究者進行教學引導之後，與國中一年級學童正式學習代數後的表現：

一、加法結構問題：

在「**單步驟加減問題**」中，三人都能以文字符號列式表達問題情境，不過小祥是先以「(　)」列式，小儀則是先以「一些」來列式。這兩位國小學童個案二人是經由研究者引導之後，方改為以文字符號 N 列式；而國中一年級的小融則一開始就能以文字符號 x 來列式。其中，由於小儀在一到三年級的時候，使用的課本是依八十二年課程標準所編，代數方面的主題比較缺乏，導致她對於算式填充題較不熟悉，所以未以 (　) 或 □ 列式。在解題策略方面，三人都以逆運算來求得答案，其中小祥初學二位數的加減法，所以他偶而會使用數數的方式計算，例如：小祥計算 8＋3 時，會以 9、10、11 得到答案。

在「**兩步驟混合問題**」中，兩名國小個案小祥和小儀均能夠自己化簡連加與連減的問題，但面對加減混合的問題時，小祥會忽略數字前面的減號，例如 N－3＋5 會化簡成 N－(3＋5)=N－8。不過經由研究者引導：「先輸掉 3 個再買 5 個，與原來差了幾個？」，小祥就能回答：「比原來多兩個」而列出正確的式子 N＋2。另外，當未知數出現在式子中間的時候，小祥與小儀均無法自行化簡式子

，必須由研究者以「先輸後贏和先贏後輸有無差異」提示，他們才能在彈珠增減的具體情境中將式子化簡，其中小祥更須倚靠具體操作的方式，才能正確的將式子化簡。國中一年級的小融則能從已列出的代數式直接進行化簡。解題策略方面，小祥只能進行單步驟逆運算，所以他必須要先將在式子化簡，才能求答；小儀則會於使用連續兩次的逆運算來解題，即使她已經將式子化簡成單步驟的問題；而小融則均將式子化簡後以逆運算解題。

在「**兩未知數關係**」問題中，即使遇到三步驟算式，國小二年級的小祥依然可以在具體的情境下化簡，最後可以判斷出兩個未知數（N＋3 與 N＋4）之間是相差 1。值得一提的是，雖然三名個案雖然都能指出小新（N＋3）比小丸子（N＋4）少 1 個，但他們已知小丸子有 11 個彈珠，欲求小新星期四的彈珠數時，卻均未利用此一關係（見加法第 11 題）。另外，在「**等號兩邊都有未知數**」的問題中，小祥能使用具體物來表示兩堆巧克力相等（2 盒及 1 盒＋12 個），小儀可以用「2 盒=1 盒＋12 個」來列式，小融則直接列出「2N=N＋12」。解題策略方面，兩名國小個案小祥與小儀由左邊 1 盒和右邊 1 盒相等，求出一盒是 12 個；國一的小融則直接用移項法則將 x 移到等號左邊，然後得到答案。另外，研究者再以另一個類題（3 盒及 1 盒＋8 個）測試，小祥也能用同樣的方法來得知 2 盒是 8 個，然後告訴我 4＋4=8，所以一盒是 4 個。

最後，在「**未知數比大小**」的問題中，三人都能指出 N＋4 比 N＋2 多，但是作法略有不同，小二的小祥以具體物巧克力來解釋：「1 包加 4 個」比「一包加 2 個」多了 2 個；小四的小儀則以 N＋4－N＋2=2 的式子說明，從這裡可以看出小儀仍傾向於由左向右閱讀一個等式。國一的小融則以 N＋4 就是「N＋2 再加 2 個」，來解釋兩者的差異。而在另外一題，比較 N＋N 及 N＋2 的大小時，三人一開始都認爲大於、小於及等於三種情形都有可能發生。不過由於小祥無法將未知數視爲變數，所以他在研究者引導後，嘗試了一個答案不合之後，就立刻

放棄。小儀和小融都能以較有系統的方法來嘗試錯誤，發現 N 愈接近 2 時，N＋N 與 N＋2 的差愈小的事實，進而提出成立的條件，但是小儀未脫離具體表徵，她將 N 視為一盒彈珠，而未考慮 N 是 0 的情形，所以在 N＋N<N＋2 的情形，小儀會說成立的條件是「N=1」，而小融可以更清楚地指出是「N<2」。

二、乘法結構問題

在「**單步驟乘除、連乘**及**連除**」的問題中，小五的小儀雖然無法直接對代數式進行化簡，但是在具體情境的協助下，例如：分成 5 盒再分成 2 包，就可以看作分成 10 包。小儀就能以結合律化簡成 N÷10。國一的小融則能直接以代數式 $\frac{x}{10}$ 表示結果。解題策略方面，兩人多以化簡後再進行逆運算為主，或者不化簡直接依照題意進行連續兩次逆運算。

在「**兩步驟乘除混合**」的問題中，小儀則無法運用結合律來化簡，例如乘法第 5 題，她知道三盒分給四個人，每個人得到四分之三盒，但是仍然無法指出每個人得到幾個（1926T~1938F）。她未具備分割未知量的能力。小融則能夠寫出 $3x \div 4 = \frac{3x}{4}$。解題策略方面，小儀無法化簡式子，所以就連續逆運算來解題；小融則先用逆運算消去分母，再用等量公理兩邊同除得到答案。

在「**兩步驟加減乘除混合**」的問題中，小儀和小融均可以正確的列出方程式，不同的是，小儀在表現除法的時候，會寫成「N÷某數」的形式，小融則能寫成「$\frac{N}{\text{某數}}$」。例如乘法第 9 題，小儀會將題意表成「N÷5＋4」，小融則會表成「$\frac{N}{5}+4$」。解題策略方面，小融雖已學過一元一次方程式，可是他的解法與小儀並無太大差異，兩人都以連續逆運算來解題。例如乘法第 8 題，小融寫出 7x－

5=23 之後，接著就寫 23＋5=28，28÷7=4。而非合邏輯的推導：7x=23＋5，7x=28，x=4。研究者原先以爲小融不會等量公理，但在乘法第 10 題要求他使用並說出等量公理的運算步驟（2409T~2426R）時，他卻又能完成。另外，在研究者設計的問題情境：「小新有 7 盒彈珠，打破了 1 盒，掉出 5 個，最後算一算發現剩 23 個，問 1 盒彈珠有幾個？」，小儀能指出答案不合理之處：「答案是每盒 4 個，但是小新打破 1 盒卻掉出 5 個」。小融雖然在第 1 次時沒反應，但是在研究者下一次訪談進行第 2 次測試（乘法第 8 題類題）時，他不但提出來而且還指出前一次訪談也有類似問題，可見得小融在第 1 次就有注意到。

在「**兩未知數關係**」問題中，無論是**未知單位合成問題**或**未知單位比較**問題，當小儀遇到「N×某數」時，她可以使用分配律將兩個未知量合併，但是遇到「N÷某數」時，她則無法把「N÷某數」當成一個量，所以無法用分配律來化簡。小融面對「未知數乘以某數」或「未知數除以某數」，都可以使用分配律。解題策略方面，小儀遇到無法化簡的式子，就會使用嘗試錯誤的方法來計算答案，不過她也不是隨機以數字代入，她會先將未知數合成後的結果，分解成兩個數字，再進行檢查。另外，她也可以使用自製具體表徵-線段圖來輔助計算。小融的解題策略則爲「化簡式子之後，進行逆運算」。在「**等號兩邊都有兩個未知數**」的問題中，小儀能以「1 盒＋2 包＋8 個=1 盒＋4 包＋2 個」來列式，小融則畫出兩堆具體物，中間加等號（3008T~3009T）來表示。小儀使用具體物來進行等量公理算出 1 包有 3 個，小融則直接以他的圖畫來進行等量公理計算出每包有 3 個。在被問及「那每一盒有幾個呢？」，小儀會一直以題目給定的數字來求答，小融則看出「不管 1 盒有幾個，兩邊都會相等」（3027T ~3030R）。

在「**未知數比大小**」的問題中，小儀認爲 2N＋5 個巧克力一定會小於 3N＋5 個巧克力，因爲她把 N 當成 1 包巧克力，而忽略了 N 是 0 的可能性；小融則認爲 N 可能是零，甚至是負數的情形。而在研究者的追問下，小融更能指出：「

N 是－1 才行，如果 N 是－2 的話，阿呆的巧克力（3×N＋5）就變成負的了」。在另一個問題（比較 N＋7 及 2×N＋1 的大小），小儀和小融也都有類似的表現。相較之下，小融能夠脫離具體情境，把 N 當成任何整數來考慮，完整地說出成立的條件，小儀則侷限在具體情境「N 是代表 1 盒巧克力（彈珠）」，只能把 N 當成自然數。

第五節　未知數概念及解題歷程的跨個案比較

接下來，研究者試以跨個案分析的方式，比較三個不同年級的學童：小二的小祥、小五的小儀以及國一的小融，所展現的未知數概念中，以及面對本研究的問題情境時，他們的未知數解題歷程：

一、　未知數概念

以下先分析三名學童的文字符號概念層次，再從各基本運算性質，包括結合律、交換律、分配律以及三一律等逐一檢視比較。

1. 文字符號概念層次

小祥能在本研究的問題情境中，每一題都以列出方程式並算出答案，即可以將文字符號 N 視爲可以計算出的值；他也能在不使用文字符號的情形下，計算出 N＋4 比 N＋2 多 2；而小祥的最高表現爲將文字符號 N 視爲特定未知數，而進行運算，例如 N＋2－6 可以化簡成 N－4。但他在比較 N＋N 與 N＋2 的大小時，無法將 N 視爲一般數，對於 N＋N<N＋2 的情形列出解來。

而小儀更能進一步的將文字符號視爲一般數。她在比較 N＋N 與 N＋2 的大

小時，可以從整個正整數的範圍來考慮 N 的範圍。但是未考慮到 N 是 0 或負整數的情形。

小融則可以完整的考慮所有的整數，正確推估出當三一律成立時，N 的範圍分別為何。也就是說，小融可以將文字符號視為變數。

從 Kuchemann 的文字符號概念層次來看，在本問題情境中，小二的小祥可達到第四階段－文字符號視為特定未知數，小五的小儀可達到第五階段－文字符號視為一般數，國一的小融則能夠達到最高的階段－文字符號視為變數。

2. 結合律

在研究者的引導下，小祥在巧克力增減的具體情境中可以自行運用結合律來化簡像 N＋a＋b、N－a－b 兩類的式子，例如他可以算出「原來有 N 個巧克力，先得到 3 個，再得到 4 個，所以總共得到 7 個，即 N＋3＋4 跟 N＋7 的結果是一樣的」。而 N＋a－b、N－a＋b，則必須經研究者引導：「星期二比星期日多還是少？差幾個？」，小祥才能順利化簡。

小儀在加法結構的兩步驟問題中也有相同的表現。而在乘法結構的問題中，面對 N×a×b、N÷a÷b 及 a×b÷N 都可以順利以結合律化簡，但是在面對 N×a÷b 時，研究者發現在因為她無法對未知數進行分割，所以她無法將 N×a÷b 表示成 N×$\frac{a}{b}$。

小融則能夠脫離具體的問題情境，直接對未知數以結合律進行代數式的化簡，例如：x×3÷4=$\frac{3x}{4}$，$24\times2\div x=\frac{48}{x}$。

3. 交換律

小祥及小儀都是經由研究者的引導：「如果星期一發生的事情和星期二發生的事情對調，結果有沒有一樣？」，才能在具體的情境中使用交換律化簡式子，例如加法第 9 題：將 14－N＋5 化簡為 19－N。

小融則是能脫離具體情境，指出「因爲 x 還是未知數，所以先暫時不用理它，把 5 和 14 加起來」順利將 14－N＋5 化簡爲 19－N。

4. 分配律

由於小祥尚未學習乘法，所以在分配律的部分僅就小儀和小融的表現進行比較。

小儀能將 N＋3×N 視爲 1 盒彈珠數加上 3 盒彈珠數，所以總共是 N×(1＋3)=N×4，也就是說她能在具體的情境中使用乘法對加法分配律來化簡。但是由於她無法將等分除的結果轉換成未知數的分割量，也就是說她無法將 N÷2 看成是 $\frac{\mathrm{N}}{2}$，所以無法用分配律來化簡像是 N÷3－N÷6 的式子。

小融則可以成功地以分配律化簡 N÷3－N÷6 爲 $\frac{N}{3}-\frac{N}{6}=\frac{N}{6}$，即小融可以用分數的型式來表示未知數分割量，並進行運算，得到最後的結果 $\frac{N}{6}$。

5.三一律

以比較 N＋N 及 N＋2 的大小爲例，小祥雖然一開始認爲 N＋N＞N＋2、N＋N＝N＋2、N＋N＜N＋2 三種情形都有可能成立，但是由於小祥是以「亂槍打鳥」的選擇一個數字代入 N 來嘗試錯誤，因爲小祥無法將文字符號 N 視爲變數，所以無法由數的次序性質中發現 N＋N 與 N＋2 的差之趨勢：N 越接近 2，N＋N 與 N＋2 的差越小，所以當找不出 N＋N<N＋2 成立的條件時，就否認了 N＋N<N＋2 成立的可能性。

相較於小祥，小儀可以按照自然數的次序來進行嘗試錯誤，例如在比較 N＋7 及 2×N＋1 的大小時，小儀先算出當 N 等於 6 時，N＋7 會等於 2×N＋1，接下來，她就會用 7，8…代入 N 來發現 N＋7 與 2×N＋1 的差愈來愈大。所以她能順利推估出當 N 等於 7 以上時，N＋7 會小於 2×N＋1，以及當 N 等於 5 以下時，N＋7 會大於 2×N＋1。但由於小儀無法抽離具體情境，一直將 N 視爲 1 盒巧

克力的個數，所以當她比較 2×N＋5 及 3×N＋5 時，小儀認爲 3 盒加上 5 個巧克力一定比 2 盒加上 5 個巧克力多。而無法發現當 N 等於 0 時，兩人會一樣多。

小融則能進一步將 N 視爲任何可能的整數，不再侷限於自然數，所以在比較 2×N＋5 及 3×N＋5 時，他除了指出當 N 等於 0 時，2×N＋5 會等於 3×N＋5，而且可以指出當 N 爲負數時，2×N＋5 會大於 3×N＋5。

二、 未知數解題歷程

以下由未知數的解題歷程，包括列式、等號的意義、解方程式以及對於所求出的解之合理性依序來比較分析三位學童的表現。

1. 列式

三位學童都可以用文字符號 N 或 x 來表示每一題中不同的未知量。其中小二的小祥曾出現把前一題 N 所代表的數字，代入下一題中進行計算。不過經研究者提示：「上一題的 N 和這一題不同」，他就再也沒有出現這種情形。

而小祥面對未知數僅出現在等號左邊的問題，可以正確的列出方程式。但是在面對等號兩邊均出現未知數的問題時，則無法正確列式，僅能以圖畫或具體物告訴研究者，「這一堆等於那一堆」。

小五的小儀在面對等號兩邊均出現未知數的問題時，則能以「2 盒 ＝1 盒＋12 個」列式來表示，即使面對等號兩邊均出現兩個未知數的問題亦有相同的表現，雖然未能將等號兩邊化成同類量，但是她初步的具備方程式的概念，即等號不具有方向性。

國一的小融則順利的以 x 來表示出兩人的彈珠個數相等。不過在需要以兩個不同未知數的式子中，小融雖然無法順利的列式，但是他能以圖畫來表示兩人的彈珠個數，且在圖畫中使用等號表示兩人的彈珠個數一樣多。

2. 等號的意義

等號對於小祥來說，相當於「算出答案」的指令，也就是說，等號具有方向性，乃是「過程」到「結果」的連結符號。他並認爲一切帶有運算符號（＋或－）的式子，例如 N＋5 只是過程，必須要寫成 N＋5=( )，才是真正算出答案。所以他在面對等號兩邊均有未知數的問題時，無法正確的列式。

小儀在等號兩邊均出現未知數的問題中，已能以等號來列式。代表小儀對等號已有初步的理解，等號具有對稱性，即等號兩邊爲相等的同類量。但是在解題過程中，小儀仍會出現$24 \times 2 = 48 \div N = 8$這種不對稱的式子，研究者認爲她尚未完全脫離等號在算術中的意義。

至於小融，他已完全能夠將等號視爲「代表相等的同類量」，在「兩未知量相等」的問題中，都能正確的列式來表示兩個未知量相等。訪談過程中，也從未出現像小儀那種不對稱的式子。

3. 解方程式

研究者將三位學童所曾出現的解題策略製表如下：

表 4-1　三名個案之解題策略次數統計

	使用數字事實	數數策略	覆蓋	逆運算	嘗試錯誤	等量公理	移項法則
小祥	1			10	1	3	
小儀	1			25	4	4	
小融	1			20	3	3	8

值得一提的是，三人最常使用的解題策略均爲「逆運算」。訪談中顯示出在國小的算術訓練下，讓他們對於逆運算的策略深具信心。對於小祥和小儀來說，逆運算可能是「嘗試錯誤」之外，唯一可以使用的策略。但是研究者觀察小融，

發現雖然他已經學習過「等量公理」以及「移項法則」，但他仍偏愛使用逆運算，即使是在方程式已列出的情形下，他仍不直接以方程式解題，而採用逆運算。除非他遇到無法使用逆運算的問題，才會改以移項法則來求解。

另外同樣是「逆運算」的策略，三人有不同程度的表現。小祥只能在單步驟的方程式或研究者引導他將式子已化約成單步驟方程式（N－a＝b）後，才能進行逆運算，而小儀可以在列出兩步驟方程式（N＋a＋b＝c）後，直接進行逆運算。小融則是必定將式子化簡之後，才會進行求解。

在「使用數字事實」的策略方面，三人各僅出現一次。研究者認爲該策略只有在學童十分熟悉該算式，甚至於已牢記該算式時才可能發生。

在具體情境中，小祥和小儀都能用等量公理來解題，但只限於兩堆物品中同時加上某物或拿掉某物，小融則能夠直接從在方程式中，對於等號兩邊的未知量同時進行加減乘除四則運算。

當學童們無法以他們所熟知的策略來解題時，就會以「嘗試錯誤」的方法來找出未知數所代表的值。像是在未知數比大小的問題中，三名學童都會以嘗試錯誤的策略來推估 N 的範圍。不同的是，小祥只代入一個數字，答案不合就直接放棄，而小儀和小融能夠不斷的以不同數字代入求得答案。

4. 檢查解之合理性

小儀與小融在面對乘法第 8 題：「求出一盒巧克力的個數，卻少於掉出來的個數時」都能發現所得的解是對於問題情境是不合理的。小融更在比較 3×N＋5 及 2×N＋5 時，更能成功地指出，N 不可以小於－1，因爲這樣巧克力就會變成負的。研究者認爲他們在計算答案的同時，可以針對整個命題完整的回憶，評估解答的合理範圍。

表 **4-2**　三名個案之未知數概念及未知數解題歷程比較

<table>
<tr><th colspan="2">個案
概念</th><th>小二的小祥</th><th>小五的小儀</th><th>國一的小融</th></tr>
<tr><td rowspan="4">未知數概念</td><td>文字符號概念層次</td><td>在本研究問題情境中，將文字符號視為特定未知數</td><td>在本研究問題情境中，將文字符號視為一般數</td><td>在本研究問題情境中，將文字符號視為變數</td></tr>
<tr><td>結合律</td><td>1.連加、連減可自行完成
2.加減混合則需研究者引導至具體情境中，方可使用結合律化簡式子
3.有時需操作具體物來進行化簡</td><td>1.連加、連減、連乘及連除可自行完成
2.加減混合則需研究者引導至具體情境中，方可使用結合律化簡式子
3.乘除混合則由於她無法分割未知量，無法完成化簡。</td><td>直接對文字符號使用結合律化簡式子</td></tr>
<tr><td>交換律</td><td>1.經研究者以問題引導（先輸後贏 or 先贏後輸　有沒有差？），可以使用分配律化簡式子
2.有時需操作具體物來進行化簡</td><td>1.經研究者以問題引導（先輸後贏 or 先贏後輸有沒有差？），可以使用分配律化簡式子</td><td>直接對文字符號使用交換律化簡式子</td></tr>
<tr><td>分配律</td><td></td><td>面對 N×a+N×b 可以順利化簡。但 N÷a+N÷b 則無法化簡。</td><td>直接對文字符號使用分配律化簡式子</td></tr>
</table>

	三一律	1.可指出兩未知量的關係可能是「大於、小於或等於」 2.以「在具體情境中無系統的隨機代入一個數字」來決定成立條件 3.嘗試代入一個數字，發現不合，就馬上否定了成立的可能性	1.可指出兩未知量的關係可能是「大於、小於或等於」 2.以「在具體情境中有系統的依序代入數字」來決定成立條件 3.無法脫離具體情境，N 當作自然數（一盒巧克力的數目）	1.可指出兩未知量的關係可能是「大於、小於或等於」 2.以「在抽象情境中有系統的依序代入數字」來決定成立條件 3.可以將 N 當成任何整數
未知數解題歷程	列式	1.可列出等號左邊有未知數的式子 2.面對兩邊都有未知數的式子則只能以「這堆等於那堆」表示。	1.可列出等號左邊有未知數的式子 2.面對兩邊都有未知數的式子則能以「2 盒=1 盒+12 個」表示。	1.可以列出兩邊都有未知數的式子 2.遇到需要以兩個未知數來列式時，則用圖畫表示。
	等號	等號代表「算出答案」 Ex：N+3=( )	已有「等號兩邊代表相等同類量」的概念，但尚未脫離「算出答案」。 偶爾會出現不合邏輯的等式，ex： N-4=12+4=16	等號兩邊代表相等同類量

	解方程式	1.回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤，在具體情境下使用等量公理 2.最常使用逆運算	1.回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤，在具體情境下使用等量公理 2.最常使用逆運算	1.回憶數字事實、逆運算、嘗試錯誤，等量公理及移項法則 2.最常使用逆運算
	檢驗解之合理性		能以問題情境檢驗特定未知數 N 的合理性。	能以問題情境檢驗特定未知數 N 的合理性。 在不等式中，也能檢驗解的合理性。

第五章　結論與建議

本章依據前一章的研究成果先提出結論，再與前人研究進行比較及反省，最後針對課程、教學及後續研究等三方面提出建議。

第一節　結論

數學教育家過去對於代數學習的看法是孩童必須達到形式運思的階段才能學好代數；但近來許多國際間的研究結果在在顯示，若教學方法及教材安排得宜的話，國小學童就可以開始接觸代數。本研究結果支持後者的看法，認爲代數與算術之間的認知間隙是罅隙而非鴻溝，若能根據孩童的日常生活經驗編製初步代數的教材，學童是可以接受學習的，以下根據研究結果做成六點結論：

一、個案都能以代數語言轉譯問題的文字語言

國小二年級的小祥、五年級的小儀及國中一年級的小融在面對已學習過的算術問題，均能夠成功的以代數語言轉譯問題的文字語言，將問題情境的數量關係寫成代數方程式。

Malara（2000）認爲，從描述問題的詞彙語言間之數量關係轉譯成正式的代數語言乃是最重要的代數概念之一。而本研究發現二年級的小祥及五年級的小儀，在本研究彈珠（巧克力）增減的問題情境，即改變型的加減法問題語意結構及等組的乘除法問題語意結構，兩人在單步驟運算問題及兩步驟混合運算問題兩個類型中，當研究者指定某一量爲未知數 N 時，小祥和小儀都能夠成功的將該未知數與問題中的其他數量之關係以代數式表示。顯示若是問題情境之下的運算法則是學童已習得的，則以代數式敘述問題情境，對於學童來說是可以順利完成的

。至於前人研究中所提到「從 □ 轉換成文字符號（N、x、甲、乙等…）」的認知障礙，在本研究的問題情境中則未曾出現。

國中一年級的小融由於在學校已學習「一元一次方程式」的單元，已能進行抽象的代數思考。而且他認爲，本研究的問題情境相較於學校數學課程是比較容易的，所以列式對他來說毫無困難。

二、個案的方程式解題策略均以「逆運算」爲主

本研究的三位個案，在面對方程式時，最常使用的解題策略均爲逆運算。

二年級學童小祥只能進行單步驟的逆運算，面對兩步驟以上的問題，必須由研究者引導他化簡成單步驟之後才能進行解題。五年級學童小儀則能夠熟練的運用兩步驟以上的逆運算，所以她不用進行化簡就可以解答。而且研究者發現化簡對她而言，反而比較困難。另外，列出方程式有助於小儀以逆運算求解。

小祥及小儀由於未學習過正式的代數課程，所以總是使用算術來解決代數方程式。但是國中一年級的小融則出乎研究者的意料之外，他在面對方程式時，最常用的解題策略仍爲「化簡式子，然後進行逆運算」，並未根據自己所列出的方程式，以移項法則或等量公理來解題。例如：加法第 8 題，他的解題過程爲「x－3＋5＝x＋2，x＋2=7，7－2＝5」，而不以「x＋2＝7，x＝7－2，x＝5」來解題。此時，研究者原本猜想他有可能不會等量公理或移項法則，但是當研究者要求他以等量公理解題，他則可以順利完成。例如：乘法第 10 題，當他列出 $\frac{x}{7}-3=5$ 時，他可以先兩邊同時加 3，再同時乘以 7 來求出 $x=56$，於是推翻了研究者的假設。所以研究者認爲，逆運算還是小融最具信心，且最熟悉的解題策略。

三、國小個案能在具體情境以數的基本運算性質化簡未知數的式子

在彈珠或巧克力的具體情境中，如果經由研究者適當的引導，小祥和小儀可以利用包括結合律、交換律及分配律等來化簡含有未知數的式子。其中由於小祥尚未學習九九乘法表，所以他的訪談問題只含有加法結構。小儀的訪談問題則包含了加法與乘法結構。以下就加法與乘法結構分述之：

在加法結構問題情境方面。小祥和小儀在面對連加與連減的問題情境，都能直覺以「得 a 又得 b，即得 a＋b」或「輸 a 又輸 b，即輸 a＋b」來化簡式子。而他們面對兩步驟的加減混合問題時，則以具體情境中的想法操作加法結合律簡化未知數的式子，例如：人家給我 2 個再輸掉 6 個就是比原來少 4 個，所以 N＋2－6 與 N－4 的結果會相同。另外，在研究者引導下，小祥和小儀可以把加法交換律想成是「星期一做的事和星期二做的事調換，結果不會改變」。例如：他利用「星期一先得到 N 個彈珠，星期二再輸掉 9 個，跟星期一輸掉 9 個，星期二再得到 N 個的結果是一樣的。」將 15＋N－9 轉換成 15－9＋N，進而化簡成 6＋N。

另外，在乘法結構問題情境方面，小儀能利用乘法對加法的分配律來化簡式子，例如：「1 盒是 N 個，所以 N 個加上 3×N 個，就是 4×N 個」將 N＋3×N 化簡成 4×N。但是 N÷a＋N÷b 的形式則無法化簡。

四、小五及國一個案都能檢驗其解的合理性

小儀與小融能將所求的解，置於原問題情境中所代表的未知量來檢驗合理性。例如乘法第 6 題，小儀與小融均能夠發現題目敘述有一包掉出 5 個，但是最後計算出的答案卻是一包有 4 個，所以求出的解是不合理的。另外，小融在「未知數比大小」的問題（比較 2N＋5 及 3N＋5 的大小），不但考慮到 N 是負數的情形，而且還能指出 N 只能是－1，若是－2，3N＋5 就會是負的，不合理。

五、等號意義逐漸由「算出答案的指令」發展到「代表相等同類量」

在本研究的三個個案中可以發現，等號的意義會隨著年級升高而逐漸成熟。

在小祥的訪談中，可以從訪談的過程中發現，「=」代表「算出答案」的動作。而問題答案的一定是在等號的左邊，也就是說小祥的「=」是由左至右，有方向性的。所以他不僅無法接受含有運算符號的式子（例如：N＋4）為最後的答案，一定要在後面加上「= ( )」，而且由於他剛接受算術的訓練不久，所以偶爾會出現不合邏輯的算式。例如：N＋2－6 = 4 或是( )－7 = ( )。是故，而他面對等號兩邊都有未知數的問題情境時，則無法列出等式來表示。

小儀的等號意義則是介於「算出答案的指令」及「代表相等同類量」之間。她雖然可以接受含有運算符號的式子當作答案，但是在面對未知量分割的情境時，她卻會覺得將「N÷6」視為一個數，感覺怪怪的。另外，小儀已經有「等號兩邊是相等的同類量」的概念。她在面對等號兩邊均有未知數的問題情境時，可以用例如「2 盒=1 盒＋12 個」的形式，即等號右邊出現運算符號，來表達問題情境。但是她偶爾也會將等號狹義地視為算出答案的指令，而未考慮等號兩邊的對稱性。例如：她以 24×2=48÷N=8 代表 24 先乘以 2 再除以 N 的算式。

小融不但在面對等號兩邊均有未知數的問題情境時，可以順利的列出等式，並且能夠使用等量公理來解題。在本研究中也未出現不對稱的等式，也就是說小融已可以將等號廣義的視為「代表相等的同類量」。不過研究者發現，在訪談過程除非研究者要求，否則小融並不會將等量公理視為解題策略的第一選擇。研究者推想，可能是由於小學六年級算術的訓練，讓小融仍較習慣於狹義的「算出答案」來看待等號。所以解題時會自然而然的使用其他的解題策略。

六、「嘗試錯誤」解題策略的個別差異

不同年級的三名個案在面對不知道如何解題的情形時，他們不約而同地都會以「嘗試錯誤」爲策略來設法求解。但是三人在「嘗試錯誤」的內容表現則有所差異。

其中，小祥的嘗試錯誤策略是「在具體情境中無系統的隨機代入」。小祥在比較 N＋N 及 N＋2 的大小時，會隨機的假設 1 盒巧克力有幾個，而且只代了一個數字，失敗後就直接放棄，所以不會發現 N 愈接近 2 時，N＋N 及 N＋2 的差會收斂。

小儀的嘗試錯誤策略是「在具體情境中系統性依序代入」。小儀面對無法化簡的式子例如 N÷2＋N÷3=15 時，她可以將 15 拆成 10 和 5，接著用 10－1=9，5＋1=6，依序來代入，最後順利解題。另外，由於她無法脫離具體情境，所以在比較 2×N＋5 個巧克力及 3×N＋5 個巧克力時，把 N 視爲 1 盒巧克力，未考慮盒中沒有巧克力的情形，故認爲兩者不可能相等。

小融的嘗試錯誤策略則是「在抽象情境中系統性依序代入」。在比較兩未知量大小時，小融他不但可以有系統的觀察到當 N 趨近於某個數時，兩未知量的差會趨近於 0，而且在比較 2×N＋5 個巧克力及 3×N＋5 個巧克力時，會脫離「N 一定是自然數」的侷限，進而考慮 N 爲 0、甚至小於零的情形。

第二節　與前人研究之比較與反省

本節首先將本研究與兩個國外的研究進行對照比較，分別是 Kuchemann (1981)在 1981 年對英國 13 歲到 15 歲的中學生所進行文字符號概念測驗的調查，Herscovics & Linchevski (1994)以 50 個方程式訪談一個七年級的班級之研究，

以及 Carraher 等人自 1998 年起，在美國大波士頓地區進行的長期教學研究（Carraher, Schliemann, & Schwartz, in press）瞭解並藉此反省本研究不足之處。

一、比較

Kuchemann (1981)於 1976 年發展出 6 個文字符號概念層次，並以該層次設計了 51 道問題，對 3000 名 13 歲到 15 歲的英國中學生進行紙筆測驗，結果發現能達到第四階段，即能將文字符號視爲特定未知數的學生分別只有 17%、34%及 40%，然而在本研究卻指出國小二年級的學童只要經由適當的引導也能達到此階段，國小五年級的學童甚至於可以到達第五階段。是什麼原因造成這樣的差距？研究者以下分三點說明：

1. Kuchemann 的研究乃是使用傳統紙筆測驗，所以學生無法成功地解題並不見得是他們不會作答，有可能是他們對題意不了解。另外，僅僅憑藉學生的紙筆解題記錄來判讀學生的文字符號概念，無法確實掌握學生心中的想法，因此極有可能低估了學生的未知數概念。
2. Kuchemann 的文字符號概念測驗中的問題，大部分是以抽象的形式顯示，而未賦予具體的情境，例如：比較 2n 和 n＋2 的大小。對於學生來說比較陌生。而本研究乃是選擇學生在日常生活常遭遇到，而比較熟悉的彈珠或巧克力增減及分配的情境，可能增加了學生在思考推理上的空間。
3. 本研究訪談在學生遭遇困難或無法繼續解題時，研究者會給予適當的引導，包括口語提問、圖畫或具體物。相較於學生在紙筆測驗時一遇到困難便顯得孤立無援，本研究個案在解題時，研究者會在一旁解說題意，研究個案會有較高的解題動機。除此之外，紙筆測驗無法掌握學生當時的身心狀態，而本研究在訪談時，則能夠考量學生生理及心理上疲倦或者厭煩而隨時暫停休息，也可能是表現差異的原因之一。
4. 台灣中小學學生的數學學習成就在國際間一向名列前茅，例如在 2003 年

國際數學與科學成就趨勢調查（TIMSS），在四十九個參與國家之中，台灣的國二及小四學生的數學總平均成績排名都是第四，英國則僅排名第二十一。另外，國二學生在「代數」方面及小四在「數型與關係」方面的排名更高居第三（Martin, Mullis & Chrostowski, 2003）。所以本國學生在代數方面的成績十分優異，也有可能造成兩者研究結果的差異。

Herscovics & Linchevski (1994)以 50 個一元一次方程式，包括單步驟運算問題、兩步驟混合運算問題、等號同一邊出現兩次未知數及未知數出現在等號兩邊的問題，來訪談一個七年級的資優班級，該班共有 22 名學生，平均年齡爲 12 歲又 9 個月，而且他們完全未學習過代數。研究結果發現受試者們不但答對率不高，而且解題策略多半屬於較低階，包括逆運算、代入與估計等。最後指出算術與代數的認知間隙（cognitive gap）在於學生未具對未知數進行運算的能力。而本研究結果發現學生不但可以對未知數進行運算，而且在解題策略方面則曾出現較高階的「等量公理」。造成本研究與 Herscovics & Linchevski 的研究結果之差異原因可能有如下三點：

1. Herscovics & Linchevski 的訪談問題並未賦予受試者生活化的問題情境，對於初次見到一元一次方程式的學童來說，沒有具體情境可供思考時，只能將方程式轉換爲「已知答案的算術式，欲求運算過程中的某一項」，其解題策略自然受限於逆運算。而遇到等號兩邊都有未知數的情形，在無法求諸於逆運算時則只能使用嘗試錯誤的方法。
2. Herscovics & Linchevski 在訪談中雖然有提供計算機，以減少學生在算術上發生錯誤，並且在訪談過程中讓學生理解方程式符號的意義，但是未提供其他具體物來協助學生求解。而本研究除了問題情境是學生在日常生活經常遭遇的彈珠或巧克力增減及分配的問題，研究者更提供了具體物（巧克力）讓學生親自操作，所以進而發現學生能在具體情境中使用等量公理來解決兩未知量相等的問題。

3. 在本研究訪談過程中，由於研究者會適時給予教學引導，所以個案可能在訪談問題序列中歸納出某些學習心得及經驗；而 Herscovics & Linchevski 則提到他們的研究是個別晤談並非教學實驗，則強化了學生在七年級仍無法運算未知數的說法。換句話說，本研究的個案可能受到一些鷹架作用，而導致他們有較良好的表現。

Carraher, Schliemann, & Schwartz（in press）的研究團隊從 1998 年起，在美國大波士頓地區一所公立小學的四個班級進行一項長期的教學實驗研究，每週進行九十分鐘初步代數的教學活動，一個學期約六到八個單元，從二年級下學期持續到四年級結束。（http://www.earlyalgebra.terc.edu/）實驗結果發現經由這些教學活動，孩童能以包含變數的函數關係，來描述各種問題情境，並使用文字符號來釐清問題情境中的數量關係。也就是說，孩童能以代數符號來表現數學的一般化。所以 Carraher 等人認爲算術與代數之間並沒有很大的間隙。

本研究亦發現國小孩童可以成功將彈珠或巧克力的增減情境轉譯成代數式，在具體情境下能進行等量公理，均支持 Carraher 等人的論點。然而本研究與 Carraher 等人的研究範圍及方法差異如下：

1. 本研究僅討論國小孩童的未知數概念及方程式解題策略，其他的代數子概念（例如：函數）及其他的表徵（例如：圖形、表格）則沒有涉及。
2. 本研究並非教學實驗，研究結果無法推論至其他的問題情境，是故無法如 Carraher 等人的研究成果做出一般化的結論。
3. Carraher 等人的研究未對於不等式進行教學及討論；本研究則在孩童面對不等式時，發現他們對於文字符號所包含的範圍有不同程度的掌握。

換言之，本研究僅在單一的問題情境及單一的語意結構，支持 Carraher 等人的論點。所以還需以其他的研究成果佐證，方能歸納出比較完整的結論。

二、反省

經由與上述三個知名的國外研究的比較過程中，研究者對於本研究有以下三點反省與檢討：

1. 由於財力、人力與時間的限制，本研究雖然試圖在三個個案的選擇上力求具代表性及說服力，但在研究樣本及訪談問題的數量上，均不如以上的三個國外研究，所以本研究的推論性仍待進一步的研究來釐清。
2. 研究者本身為初窺高深學術殿堂之新手，由於訪談技巧仍相當生澀，加上理論觸覺（theoretical sensitivity）較為遲鈍，可能在訪談過程中有錯失了某些重要的概念或影響因素而不自知。例如：算術方面的迷思概念（例如：括號、分數）亦可能影響受試者的解題表現，在本研究則未納入探討。
3. 研究者應該避免有偏見的介入行為，而導致受試者表現出研究者預期的概念類型。例如在五年級的個案訪談中，小儀在面對兩步驟加減問題時，直接以兩步驟逆運算求解，出乎研究者的意料之外，而研究者則欲引導小儀先化簡，再進行解題的動作，反而讓小儀不知所措，看似簡單的問題答不出來，只好暫時休息（見加法第 7 題）。所幸短暫的休息過後，並未影響小儀之後的解題表現，故該原案仍被本研究保留。

第三節　建議

本節根據本研究的結論作成建議，以下分為在教學、課程以及後續研究三方面分項討論：

一、　在國民小學數學課程加入代數題材：

我國在民國 82 年版以前的「國小數學課程標準」中，代數方面安排的題材較少，進入中學後突然引入文字符號，很容易造成學童學習代數的挫敗。而教育部（2003）最新公佈的《國民中小學九年一貫課程綱要》中，特地在小學階段代數題材向下延伸，包括運用未知數作算式填充題、認識變數的概念、理解等量公理等，就是希望能夠有系統地、順利地銜接國中代數課程。而本研究結果發現小學二年級學童能以文字符號列式來描述改變型的問題情境，正好呼應九年一貫課程綱要的安排。另外，在本研究的訪談問題情境中，研究者在訪談時嘗試讓學童以 N 取代(　)來代表未知數，兩位國小的學童都能很順利的使用 N 來代表一個量，順利的表達問題情境，並不會覺得(　)可以填入數字，但 N 不行。也許在這方面累積大量研究成果之後，日後撰寫教科書的學者專家，可以歸納出在某些條件限制下能夠引入文字符號來代替(　)或□，讓學童試著使用文字符號 N 代表某個特定未知數來討論他們所熟悉的日常生活問題情境的數量關係，而不只是要他們列出算式填充題後，在(　)或□中填入數字。

二、 引導學童以代數式表達問題情境

雖然本研究結果發現，國小的學童在已熟悉的算則範圍之內，他們都可以正確列出方程式，並且以逆運算來解題。不過由於他們仍然將等號視為「算出答案」的指令，無法由右至左來閱讀一個方程式。而且國小的學童剛開始接觸數學不久，各種運算法則及性質尚未紮實，所以教師在實施初步代數的教學時，應該側重如何在學童已習得的算則中，以代數式來表達各種具體的文字問題情境。換句話說，就是文字符號的概念要建立在具體問題情境中。例如：小新有一些彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，如果這時候小新有 13 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？讓學童理解能用 N＋9=13 來表示問題

中的數量關係，而以減法計算出答案。Carracher, Schliemann & Schwartz (in press)認為，這種形式的初步代數課程有助於建立不同數學主題（算則、變數、集合…）及不同表徵（表、圖形、數線、文字符號）之間的連結網絡。但初步代數的課程旨在建立學童的代數前置經驗，所以千萬不能超出學童已學的算則範圍，或者讓國小中低年級學童提早學習如何以較高階的解題策略例如等量公理，甚至移項法則來解方程式，這種揠苗助長的行為，無助於學童在未知數概念方面的提升，不但加重學童的負擔，更會造成學童厭惡數學的原因之一。

三、 後續可進行更多個案調查或教學實驗研究

由於本研究的問題情境侷限於 20 以下的自然數之加減法改變型問題及乘除法等組型問題，而且僅選取三個年級共三名個案。為了要更進一步的釐清國小學童的未知數概念，研究者建議，可以設計其他問題情境的個案晤談問題，徹底了解學童們未知數的概念。另外，本研究是以數學能力中上程度的孩童為個案，所以可以繼續針對不同能力的學童進行個案研究。再者，為了要針對國小一到六年級設計完整的初步代數課程，並能銜接國中的代數課程，應該對於其他年級學童的未知數概念深入探討，累積大量研究成果以建立國小學童的代數概念模型。是故，可針對選取不同年級、不同能力的個案繼續進行研究。

最後，教育部將於今年度（94 年度）在國小一年級及國中一年級同步實施九年一貫數學課程的新綱要，後續的研究者可參考新綱要裡國小的代數能力指標及新版數學教科書，來研擬設計初步代數的課程進行教學實驗，以探究在國小中低數學課堂實施初步代數教學之可行性及各種侷限。

參考書目

一、中文部分：

王懷權（1987）。數學發展史。新竹：凡異。

朱建正（1997）。國小數學課程的數學理論基礎。未出版。

余文卿、謝暉光（譯）（1997）。John Daintith & R. D. Nelson 著。數學辭典。台北：牛頓。

呂玉琴（1989）。在國小實施代數教學的可能性研究。台北師院學報，2，263-283。

尚榮安（譯）（2001）。R. K. Yin 著。個案研究。台北：弘智。

林光賢、郭汾派、林福來（1989）。國中生文字符號概念的發展。國科會專題研究計畫報告。計畫編號：NSC 77-0111-S004-001-A

袁媛（1993）。國中一年級學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究。國立高雄師範大學數學教育系碩士論文，未出版，高雄市。

教育部（1993）。國民小學課程標準。台北：教育部。

教育部（2000）。國民教育九年一貫課程暫行綱要：數學學習領域。台北：教育部。

教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域。台北：教育部。

陳李綢（1996）。個案研究。台北：心理。

陳盈言（2001）。國二學生變數概念的成熟度對其函數概念發展的影響。國立台灣師範大學數學系碩士論文，未出版，台北市。

陳維民（1998）。兒童的未知數概念研究—一個國小六年級兒童的個案研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。

陳慧珍（2001）。南投縣國一男女生對文字符號概念與代數文字題之解題研究。國立高雄師範大學數學系教學碩士論文，未出版，高雄市。

黃志賢（2000）。原住民學生利用代數方法解題之研究。原住民教育季刊，21，

17-38。

黃瑞琴（1991）。質的教育研究方法。台北：心理出版社。

黃寶彰（2002）。六、七年級學童數學學習困難部分之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。

甯自強（1993）。「建構式教學法」的教學觀－由根本建構主義的觀點來看。載於詹志禹（主編），建構論-理論基礎與教育應用（頁 286-294）。台北市：正中書局。

趙文敏（1985）。數學史。台北市：協進。

戴文賓、邱守榕（1999）。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。科學教育，10，頁 148-174。

謝和秀、謝哲仁（2002）。國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究。九十一年度師範院校教育學術論文發表會論文集，3，頁 1491-1521。

二、英文部分：

Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebra method of problem solving in primary school children. In V. Davydov (Ed.), Soviet Studies in Mathematics Education (vol. 6, pp. 275-338). Reston, VA: NCTM.

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor, United Kingdom: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The Ideals of Algebra, K-12 (pp.20-32). Reston, VA: NCTM.

Brito-Lima, A. P. & da Rocha Falcao, J. T. (1997). Early development of algebraic representation among 6-13 year old children: the importance of didactic contract. In Proceedings of the 21th International Conference Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp 201-208), Lahti, Finland.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. In Proceedings of the 27th International Conference Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp 201-208), Lahti, Finland.

Carraher, D., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (in press). Early Algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D.W. Carraher, & M. Blanton (ed). Algebra in the Early Grades. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D., Schliemann, A.D. (2000).Bringing out the Algebra Character of Arithmetic: Instantiation Variables in Addition and Subtraction. In Proceedings of the 24th conference of the International Group for the PME (vol. 2, pp 145-152).

Carraher, D., Schliemann, A.D., & Brizuela, B.M. (2001). Can Young Students Operate on unknowns. In Proceedings of the 25th conference of the International Group for the PME (vol. 1, pp 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Chaiklin, S., & Lesgold, S. (1984). Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions. Paper present at the annual meeting of the American Educational Research Association.

Collis, K. F. (1975). The Development of Formal Reasoning. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Davis, R. (1985). ICME－5 Report: Algebraic thinking in the early grades. Journal of Mathematical Behavior, 4, pp.195-208

Davis, R. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how human think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, vol. 4. (pp.266-274)Restion, VA: NCTM/ NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower of the elementary school. Educational Studies in Mathematics, 5, 391-412.

Fuson, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Substraction. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.243-275). New York: Macmillan Pub.

Greeno, J. G. (1982). A cognitive learning analysis of algebra. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. Educational Studies in Mathematics, 18(1), 75-90.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing Meaning for the Concept of Equation. Mathematics Teacher, 73(8), 572-580.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics, 27(1), 59-78.

Kaput, J., Carraher, D.W. & Blanton, M. (in press). Algebra in the Early Grades. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more－expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J. M. Moser (Ed.), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA (pp. 93-91). Madison: University of Wisconsin.

Kieran, C. (1989). The early learn of algebra: a structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra(pp. 33-56). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp.390-419). New York: Macmillan Pub.

Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. Mathematics in School, 7(4), 23-26.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), Children's Understanding of Mathematics: 11-16 (pp 102-119). London: John Murray.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying student's formulation of simple linear equations. Journal for Research in Mathematics Education, 24(3), 217-232.

Malara, N. A. (2003). Dialectics Between Theory and Practice: Theoretical Issues and Aspects of Practice from an Early Algebra Project. In Proceedings of the 27th International Conference Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp 201-208), Lahti, Finland.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Chrostowski, S. J. (Eds.) (2004). TIMSS 2003 Technical Report. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Mayer, R.E. (1982). Different problem－solving strategies for algebra word and equation problems. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 8(5), 448-462.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Neuman, W. L. (2000). Social Research Methods: Qualitative and Quantitative Approaches. MA: Boston.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2005). Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.

Sowder, L. K. (1980). Concept and Principle Learning. In Shumway, R.J. (Ed.) Research in Mathematics Education. Reston, VA: NCTM.

Stake, R. E. (1995). The art of case study research. Thousand Oaks, CA: Sage.

TERC (2003). Early Algebra, early arithmetic - Class materials. Retrieved from http://www2.earlyalgebra.terc.edu/Materials/index.html

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and realistic mathematics education. Utrecht, The Netherlands: Center for Science and Mathematics Education.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 107-118.

附錄一：訪談導引

一、加法結構訪談導引（國小二年級，五年級、國中一年級）

1.未知數在被加數（N+9=13）

加法第 1 題	目的
小新有一些彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？	瞭解能否以方程式表達題意及未知數在被加數解題策略
如果這時候小新有 13 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？	

2. 未知數在被減數（N－4=12）

加法第 2 題	目的
小新有一些彈珠，後來送給美美 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？	瞭解能否以方程式表達題意及未知數在被減數解題策略
如果這時候小新剩下 12 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？	

3. 未知數在加數（6+N=11）

加法第 3 題	目的
小新有 6 個彈珠，後來阿呆給小新一些彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？	瞭解能否以方程式表達題意及未知數在加數的解題策略
如果這時候小新有 11 個彈珠，請問阿呆給了小新幾個彈珠？	

4. 未知數在減數（12－N=5）

加法第 4 題	目的
小新有 12 個彈珠，後來送給妹妹一些彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？	瞭解能否以方程式表達題意及未知數在減數的解題策略
這時候小新剩下 5 個彈珠，請問小新送給妹妹幾個彈珠？	

5. 連加問題（N+3+4=12）

加法第 5 題	目的
星期日小新原來有一些彈珠，星期一和風間比賽贏了 3 個彈珠，星期二，小新幫媽媽擦玻璃，媽媽給他 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？	瞭解未知數能否進行結合律連加運算及 連加問題解題策略
小新發現口袋裡有 12 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？	

6. 連減問題（N－3－7=5）

<table>
<tr><td>加法第 6 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和豬太郎比賽輸了 3 個彈珠，星期二，小丸子不小心掉了 7 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行結合律連減運算及
連減問題解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小丸子發現口袋裡有 5 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？</td></tr>
</table>

7. 先加後減問題（N＋2－6=7）

<table>
<tr><td>加法第 7 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>星期日小新原來有一些彈珠，星期一正男給他 2 個彈珠，星期二，他跟風間比賽輸了 6 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行結合律先加後減運算
及先加後減問題解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小新發現口袋裡有 7 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？</td></tr>
</table>

8. 先減後加問題（N－3＋5=9）

<table>
<tr><td>加法第 8 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和丸尾比賽輸了 3 個彈珠，星期二，跟小玉出去逛街買了 5 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行結合律先減後加運算及
先減後加問題的解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小丸子發現口袋裡有 9 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？</td></tr>
</table>

9. 兩步驟問題未知數在中間 I （14－N+5=8）

<table>
<tr><td>加法第 9 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>星期日小新原來有 14 個彈珠，星期一和風間比賽輸了一些彈珠，星期二和正男比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行交換律

兩步驟問題未知數在中間的解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小新發現口袋裡有 8 個彈珠，請問小新星期一和風間比賽輸了幾個彈珠？</td></tr>
</table>

10. 兩步驟問題未知數在中間Ⅱ（15+N－9=8）

加法第 10 題	目的
星期日小丸子原來有 15 個彈珠，星期一爺爺又買了一些彈珠給她，星期二她和豬太郎比賽，輸了 9 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？	瞭解未知數能否進行交換律
如果這時小丸子發現口袋裡還有 8 個彈珠，請問爺爺買了幾個彈珠給她呢？	兩步驟問題未知數在中間解題策略

11. 兩未知數關係的問題Ⅰ

加法第 11 題	目的
星期日，小丸子和小新有一樣多的彈珠。 星期一，他們考試都考 100 分，老師送給他們每一個人 6 個彈珠；星期二，小丸子和小玉比賽輸了 6 個彈珠，小新和風間比賽，輸了 8 個彈珠；星期三，小丸子在路上撿到 4 個彈珠，小新的媽媽買了 5 個彈珠給小新； 請問小丸子和小新這時候有幾個彈珠？	瞭解孩童是否知導兩未知數間的關係 及兩未知數關係的問題的解題策略
如果小丸子發現她有 11 個彈珠，那請問小新星期四有幾個彈珠？	

12. 兩未知數關係的問題Ⅱ（N+N=N+12）

加法第 12 題	目的
小丸子有 2 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠，加上 12 個彈珠，如果小丸子和小玉的彈珠一樣多。請問你要怎麼表示？	瞭解未知數能否進行等量公理的運算等號兩邊都有未知數解題策略
請問 1 盒彈珠有幾個？	

13.未知數比大小Ⅰ（比較 N+2 和 N+4 的大小）（先導個案訪談後新增）

加法第 13 題	目的
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+4 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？	瞭解學童未知數概念是否符合三一律。

14. 未知數比大小Ⅱ（比較 N+2 和 N+N 的大小）（先導個案訪談後新增）

加法第 14 題	目的
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+N 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？	瞭解學童未知數概念是否符合三一律。

二、乘法結構訪談導引（國小五年級、國中一年級）

1. 乘法問題（N×6=30）

乘法第 1 題	目的
小光有 6 盒巧克力，每 1 盒不知道有幾個，請問一共有幾個巧克力？	瞭解能否以方程式表達題意及乘法問題的解題策略
如果一共有 30 個巧克力，請問 1 盒中有幾個巧克力？	

2. 除法問題（N÷7=11）

乘法第 2 題	目的
小光有一些巧克力，分裝成 7 盒， 請問每盒有幾個巧克力？	瞭解能否以方程式表達題意及除法問題的解題策略
如果每盒有 11 個，請問小光原來有幾個巧克力？	

3. 連乘問題（N×2×3=42）

乘法第 3 題	目的
小光有 2 大盒巧克力，每 1 大盒中有 3 小盒，每 1 盒不知道有幾個，請問一共有幾個巧克力？	瞭解未知數能否進行結合律（連乘）運算及連乘問題的解題策略
如果一共有 42 個巧克力，請問 1 盒中有幾個巧克力？	

4. 連除問題（N÷5÷2=4）

乘法第 4 題	目的
老師有一些巧克力，分裝成 5 盒後，每 1 盒再分成 2 包，請問每包有幾個巧克力？	瞭解未知數能否進行結合律（連除）運算及連除問題的解題策略
如果 1 包有 4 個巧克力，問老師原來有幾個巧克力？	

5. 先乘後除 I （N×3÷4=6）

乘法第 5 題	目的
媽媽買了 3 盒巧克力，分給小新一家 4 人，請問每個人分到幾個巧克力？	瞭解未知數能否進行結合律（先乘後除

如果每個人分到 6 個巧克力，請問 1 盒巧克力有幾個？	）運算及先乘後除問題解題策略

6. 先乘後除 II（24×2÷N=6）

乘法第 6 題	目的
媽媽買了好多盒彈珠，全部分給小丸子和姐姐，結果 2 人都得到 24 個彈珠，請問每盒有幾個彈珠？	瞭解未知數在式子中間能否進行結合律（先乘後除）運算及先乘後除問題解題策略
如果每盒中有 6 個彈珠，請問媽媽買了幾盒彈珠呢？	

7. 先乘再加（N×3+6=30）

乘法第 7 題	目的
7-11 大特價，小丸子買 3 盒彈珠，老闆又多送她 6 個彈珠，請問小丸子一共有幾個彈珠？	瞭解先乘再加問題的解題策略
如果她回家算一算，發現一共有 30 個彈珠，請問每 1 盒中有幾個彈珠呢？	

8. 先乘再減（N×7－5=23）

乘法第 8 題	目的
小新買了 7 盒彈珠，走路回家時，不小心跌倒，打破了其中一盒，掉出了 5 個彈珠，請問這時候小新剩幾個彈珠？	瞭解先乘再減問題的解題策略
如果小新回家算一算，發現他還有 23 個彈珠，請問每盒中有幾個彈珠呢？	

9. 先除再加（N÷5+4=9）

乘法第 9 題	目的
豬太郎的媽媽煮了一鍋湯圓，剛好分成 5 碗，每個人碗中有一樣多的湯圓，豬太郎的媽媽不想吃這麼多，於是又分給豬太郎 4 個湯圓，請問豬太郎碗裡有幾個湯圓？	瞭解先除再加問題的解題策略
如果豬太郎碗中有 9 個湯圓，請問豬太郎的媽媽煮了幾個湯圓？	

10. 先除再減（N÷7－3=5）

<table>
<tr><td>乘法第 10 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>花輪把彈珠分給 7 個小朋友，每個小朋友得到一樣多的彈珠，小丸子不小心掉了 3 個，請問她剩下幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解先除再減問題的解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小丸子剩下 5 個彈珠。請問花輪原來有幾個彈珠？</td></tr>
</table>

11. 未知單位合成Ⅰ（N+3×N=36）

<table>
<tr><td>乘法第 11 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>小新有 1 盒彈珠，正男有 3 盒彈珠， 請問他們一共有幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行分配律運算及未知單位合成問題解題策略</td></tr>
<tr><td>如果他們一共有 36 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？</td></tr>
</table>

12. 未知單位合成Ⅱ（N÷2+N÷3=15）

<table>
<tr><td>乘法第 12 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>小新和正男 2 人平分一盒彈珠，小丸子、小玉和美美 3 個人平分一盒彈珠，請問小新和小丸子兩個人一共有幾個彈珠？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行分配律運算
及未知單位合成問題解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小新和小丸子兩個人一共有 15 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？</td></tr>
</table>

13. 未知單位比較Ⅰ（5×N－2×N=15）

<table>
<tr><td>乘法第 13 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>小丸子有 5 盒彈珠，小玉有 2 盒彈珠，請問小丸子的彈珠比小玉多幾個？</td><td rowspan="2">瞭解未知數能否進行分配律運算
解及未知單位比較問題解題策略</td></tr>
<tr><td>如果小丸子的彈珠比小玉的彈珠多 15 個，請問 1 盒彈珠中有幾個？</td></tr>
</table>

14. 未知單位比較Ⅱ（N÷3－N÷6=3）

<table>
<tr><td>乘法第 14 題</td><td>目的</td></tr>
<tr><td>濱崎、花輪、丸尾、豬太郎、山田和藤木 6 人平分一盒彈珠，小丸子、小玉和美環 3 個人平分一盒彈珠，請丸尾比小丸子多幾個彈珠？</td><td>瞭解未知數能否進行分配律運算
及未知單位比較問</td></tr>
</table>

如果美環比花輪多了 3 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？	題解題策略

15. 等號兩側均有未知數（3×N+9=4×N+1）

乘法第 15 題	目的
丸尾有 3 盒彈珠，加上 9 個彈珠，小丸子有 4 盒彈珠，加上 1 個彈珠，如果小丸子和丸尾的彈珠一樣多。請列出式子表示。	瞭解未知數能否進行等量公理運算及等號兩側均有未知數的問題解題策略
請問 1 盒彈珠有幾個？	

16. 等號兩側均有兩個未知數，其中一個未知數不會使用到

（N+2Y+12= N+4Y+2）

乘法第 16 題	目的
小新有 1 盒彈珠，2 包彈珠和 8 個彈珠，阿呆有 1 盒彈珠，4 包彈珠和 2 個彈珠，而小新和阿呆有一樣多的彈珠，請問 1 包彈珠有幾個？	瞭解未知數能否進行等量公理運算及等號兩側均有未知數的問題解題策略
請問 1 盒彈珠有幾個？	

17. 未知數比大小（比較 2×N+5 和 3×N+5 比大小）（先導個案訪談後新增）

乘法第 17 題	目的
小新有 2×N+5 個彈珠，阿呆有 3×N+5 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？	瞭解未知數是否符合三一律及未知數比大小問題解題策略

18.未知數比大小（比較 N+6 和 2×N+1 比大小）（先導個案訪談後新增）

乘法第 18 題	目的
小新有 N+7 個彈珠，阿呆有 2×N+1 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？	瞭解未知數是否符合三一律及未知數比大小問題解題策略

附錄二：國小二年級訪談原案

第一次訪談原案

0001T：來，小朋友你叫什麼名字啊？
0002S：小祥
0003T：小祥，老師問你幾個數學問題，這不是考試。你如果聽不懂老師在講什麼的話，你可以跟老師講沒關係。你如果不會做的話，就告訴老師你不知道要怎麼做。

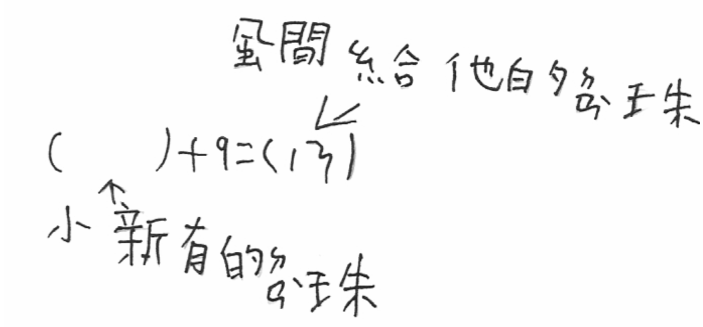
暖身題

0004T：老師有一個十元硬幣，然後掉到桌上之後，你覺得可能是那一面朝上？
（S 寫出「人頭」）
0005T：還有別的可能嗎？
（S 寫出「10 元」）
0006T：那還有別的可能嗎？
0007S 考慮中
0008T：如果你覺得沒有可以說沒有。
0009S：沒有。
0010T：那人頭跟 10 元，那一面的可能性比較大？或者是一樣大？
0011S：兩面都有可能
0012T：那你覺得兩面的可能性一樣大嗎？還是有一面的可能性會比較大？
0013S：人頭應該會比較大。
（S 寫出「人頭」）
0014T：人頭會比較大。爲什麼呢？
0015S：因爲我以前都會用錢來當陀螺，通常都是人頭在上面。有時候會出現 10 元。
0016T：所以出現人頭的機會比較大？
0017S：嗯。

加法第 1 題
小新有一些彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0101T：來，老師問你這個問題。（讀題）
S 寫出（ ）+9=（ ）
0102T：那你這兩個括號長的一樣耶，你可不可以告訴老師前面的括號代表什麼

？後面的括號代表什麼？
0103S：前面代表小新有的彈珠，後面代表小新跟風間給他的加起來。
0104T：很好，你可不可以幫老師寫一下
0105S：寫什麼？
0106T：寫國字，只要寫的讓老師看的懂你這個式子就好了，可以寫注音。
（S 寫出



0107T：好。那今天人家如果問你小新有幾個彈珠，你覺得等號的左邊比較容易知道，還是等號的右邊比較容易知道？
0108S：知道什麼？
0109T：知道你在寫什麼？
0110S：右邊。
0111T：為什麼？
0112S：……
0113T：還是你覺得要整個寫出來？
0114S：整個寫出來
0115T：那如果只寫 ( )+9 的話，你覺得別的小朋友看的懂看不懂？能不能知道題目的意思？
0116S：有點看的懂又有點看不懂。
0117T：如果是你看的懂嗎？
0118S：一點點
0119T：那如果我們只寫成( )+9 你覺得可不可以？
0120S：也是可以。

如果這時候小新有 13 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？

0121T：好。再來看，如果這時候小新有 13 個彈珠，問你小新原來有幾個彈珠？
（S 寫出 4）
0122T：那 4 是怎麼來的
0123S：算來的
0124T：寫給老師看好不好？
（S 寫出 13-9=4）
0125T：好，那老師如果要你用算式填充題來表示這整個題目的意思，你要怎麼

寫？
0126S：（搖頭）算式填充題？
0127T：（指上面的 ( )+9=( )）就是這個啊！
（S 寫出（4）+9 = (13) ）
0128T：可是啊，我們這個題目裡面有沒有提到 4？
0129S：沒有。
（S 把 4 擦掉）
0130T：所以前面這個 ( ) 是代表小新他？
0131S：原來的。
0132T：ok。那如果這個 ( ) 老師用別的東西代表可不可以？
0133S：可以。
0134T：比方說，老師問你，你有沒有學過英文？
0135S：有啊。
0136T：（寫出 N）這個字是什麼？
0137S：N
0138T：那老師能不能用這個字代替 ( )？
（S 搖頭）
0139T：你認爲不行，爲什麼呢？
0140T：如果我用 N 代替 ( ) 那這個式子要怎麼寫？
0142T：你寫寫看沒關係。寫在這裡，不要擦
0143T：我用 N 代替小新原來的彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，要怎麼寫？
（S 寫出 N+9）
0144T：那我整個式子要怎麼寫才能代表小新後來有 13 個彈珠？
（S 寫出 N+9=13）
0145T：對，所以這個 N 是代表？
0146S：4
0147T：那 4 是代表？
0148S：小新原來的
0149T：嗯，很好。

加法第 2 題
小新有一些彈珠，後來送給美美 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0201T：看一下。我們現在假設小新原來有 N 個彈珠好不好？所以這一題你要怎麼表示？
（S 寫出 N-4=0）
0202T：你怎麼知道是 0？

0203S：4-4=0 啊？

0204T：N 是 4 啊？

0205S：N 代表 4。

0206T：那是上一題的唷，這一題的 N 我們知不知道？

0207S：不知道

0208T：我們重來一次，小新原來有一些彈珠，後來送給美美 4 個彈珠。所以我們就知道後來的彈珠，是小新原來的彈珠，怎樣？

0209S：送給美美

0210T：送給美美幾個？

0211S：4 個。

如果這時候<u>小新</u>剩下 12 個彈珠，問<u>小新</u>原來有幾個彈珠？

0212T：所以<u>小新</u>如果原來有 9 個，後來會有？

0213S：5 個

0214T：原來如果有 5 個的話，後來有？

0215S：1 個

0216T：那我現在假設他原來有 N 個，後來是？

0217S：……

0218T：可以寫出來嗎？

（S 寫出 N-4 = ( ) ）

0219T：所以老師問你這 N-4 是代表？

0220S：代表…小新送給美美，送完還剩下幾個。

0221T：對，很好哦，然後我們來看，這時候小新剩下 12 個彈珠

0222S：16 個

0223T：16 個是怎麼算的？

（S 寫出 12+4=16）

0224T：那老師問你，今天如果老師要你用 N 來表示這個題目的意思，你有辦法嗎？就是用一條式子

0225S：N-4=12

0226T：可以寫給老師看嗎？

（S 寫出 N-4=12）

0227T：所以我們看到這個式子，就可以知道？

0228S：答案。

0229T：對…很好

加法第 3 題
<u>小新</u>有 6 個彈珠，後來<u>阿呆</u>給小新一些彈珠，請問<u>小新</u>這時候有幾個彈珠？

0301T：接著看下一題，你會不會覺得這個題目很困難？
0302S：一點點
0303T：不會就跟老師講，老師不會罵你
0304T：小新有 6 個彈珠，後來阿呆給他一些彈珠，這時候小新有幾個彈珠？
（S 寫出 6 + ( ) = ( )）
0305T：(指左邊的括號)：這個 ( )是代表？
0306S：阿呆給小新的。
0307T：(指右邊的括號）那這邊的 ( )是代表？
0308S：小新最後的
0309T：可以幫老師寫一下嗎？
0310T：那老師問你，如果小新有 N 個彈珠，那他後來有幾個彈珠？
（S 寫出 6+N= ( ) ）
0311T：6+N 可不可以代表小新後來的彈珠？
0312S：可以
0313T：那你爲什麼要寫這個等號？
0314S：讓人家知道小新後來有幾個彈珠
0315T：你的意思是說，要把 6+N 算出來嗎？
0316S：嗯。

如果這時候<u>小新</u>有 11 個彈珠，請問<u>阿呆</u>給了<u>小新</u>幾個彈珠？

0317T：那如果這時候小新有 11 個彈珠，那問你阿呆給小新幾個彈珠
0318S：加 5。
0319T：嗯，你算出答案了，可是老師是要你列出式子來表示這個題目的意思。
0320S：6+5=11
0321T：可是我們原來知不知道阿呆給小新幾個彈珠？
（S 搖頭，並寫出 11-N=6）
0322T：嗯，沒錯，可是你這樣寫和題目原來的意思一樣嗎？
0323S：不一樣。
0324T：那要怎麼寫？小新有 6 個彈珠，後來阿呆給他 N 個彈珠，結果他有 11 個彈珠。
（S 寫出 6+N=11）
0325T：所以現在問你阿呆給小新幾個彈珠？
0326S：N 個
0327T：N 是多少？
0328S：5
0329T：你怎麼算出來的？是比手指嗎？
0330S：6 加幾等於 11

0331T：所以你是在腦中想 6 加 5 等於 11？
0332S：嗯
T：你如果累了，可以告訴老師，我們可以稍微休息一下哦
S：（點頭）嗯。
T：喜不喜歡數學。
S：（點頭）嗯。
T：數學考的好不好？
S：1 年級的時候很好，2 年級比較不好。今天才考試。

加法第 4 題
小新有 12 個彈珠，後來送給妹妹一些彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0401T：我們來看這題
（S 寫出 12-( ) = ( ) ）
0402T：所以前面這個( )代表？
0403S：小新送給妹妹的。
0404T：後面這個( )代表？
0405S：小新剩下的。
0406T：好，那老師問你，如果後來送給妹妹 N 個彈珠，那你怎麼列式？
（S 寫出 12-N=( ) ）
0407T：好，所以說，後面這個( )代表？
0408S：剩下幾個。

這時候小新剩下 5 個彈珠，請問小新送給妹妹幾個彈珠？

0409T：那如果這時候小新剩下 5 個呢？
（S 寫出 12-5=( ) ）
0410T：你可以算出答案嗎？
（S 寫出 12-5=7）
0411T：所以小新送給妹妹 7 個彈珠？
0412S：嗯
0413T：那老師如果要你列式呢？
（S 寫出 12-N=5）
0414T：那你可以把這個式子解釋給老師聽嗎？
0415S：小新本來有 12 個彈珠，送給妹妹 N 個，剩下 5 個。
0416T：嗯，很好。

加法第 5 題
星期日小新原來有一些彈珠，星期一和風間比賽贏了 3 個彈珠，星期二，小新幫媽媽擦玻璃，媽媽給他 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0501T：接下來，第 5 題，這一題比較難一點。
0502T：我們現在直接假設小新他原來有 N 個彈珠，好不好？
（S 寫出 N +3=( ) ）
0503T：這個( )代表什麼？
0504S：比賽贏了 3 個。
0505T：可是星期二媽媽又給他 4 個彈珠耶，你覺得要怎麼表示
（S 寫出 3+4=7，N+7=( ) ）
0506T：所以這是小新…
0507S：原來的，加上媽媽給他的
0508T：所以這個 ( ) 是？
0509S：共有的。
0510T：那你寫成 N+7 人家知不知道小新星期一發生什麼事情，星期二發生什麼事情？
（S 搖頭）
0511T：那可不可以分開寫？
0512S：……
0513T：老師問你，小新星期日有 N 個，星期一贏 3 個，星期二媽媽又給他 4 個
（S 寫 N、3、4）
0514T：那這樣會等於什麼？
（S 寫 (N 7) ）
0515T：所以是？
（S 寫出 N+7=( ) ）
0516T：嗯，你會寫呀，你勇敢的寫沒關係，老師不會罵你。

小新發現口袋裡有 12 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？

0517T：來，他星期二發現他口袋裡共有 12 個彈珠，請問他星期天有幾個彈珠？
（S 寫出 12-7=N）
0518T：那 N 是多少？
0519S：5
0520T：嗯，對
0521T：那如果整個題目的意思，我要寫一個式子來表示，要不要老師引導你？
（S 寫下 7+N=12）
0522T：那你要把他的過程表示出來呀！

（S 寫出 3+4=7　7+N=12）
0523T：寫的很好哦

加法第 6 題
星期日<u>小丸子</u>原來有一些彈珠，星期一和<u>豬太郎</u>比賽輸了 3 個彈珠，星期二，<u>小丸子</u>不小心掉了 7 個彈珠， 請問這時候<u>小丸子</u>有幾個彈珠？

0601T：你們等一下幾點吃飯？
0602S：(搖頭）不知道。
0603T：來我們來看這題，一樣，我們假設小丸子原來的 N 個彈珠。
（S 寫出 N-3=( )　( )-7=( )）
0604T：那你可以寫一個最簡單的式子來告訴老師嗎？
S 寫出 N-3-7=( )
0605T：所以他總共掉了幾個彈珠？
0606S：10 個
0607T：所以是？
0608T：小新原來有？
0609S：N 個
0610T：所以他後來有？
（S 搖頭）
0611T：原來有 N 個，掉了 10 個之後，後來有？可以用 N 表示
（S 寫出 N-10= ( )）
0612T：那老師問你，這個 N-3-7 有沒有等於 N-10？
0613S：……有。
0614T：為什麼？可以講給老師聽嗎？
0615S：7+3=10 啊
0616T：對，很好哦。就是說，他星期一輸了？
0617S：3 個
0618T：星期二掉了？
0619S：7 個
0620T：他總共？
0621S：掉了 10 個

如果<u>小丸子</u>發現口袋裡有 5 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

0622T：那老師再問你，如果小丸子發現口袋裡有 5 個彈珠，她星期日有幾個？
（S 寫出 15 個）
0623T：很好，那 15 個是怎麼算來的？

（S 寫出 N-10=5　　10+5=15）
0624T：你就是用 10+5 算來的嗎？
0625S：嗯。

第二次訪談原案

加法第 7 題
星期日小新原來有一些彈珠，星期一正男給他 2 個彈珠，星期二，他跟風間比賽輸了 6 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？

0701T：首先看這題。如果我們假設小丸子原來的彈珠是…上次告訴你說，要假設成什麼？

0702S：N。

0703T：很好。

（S 寫出 N+2-6）

0704T：那你覺得 N+2-6 可以寫成怎麼樣？

（S 搖頭）

0705T：我原來有一些彈珠，人家給我 2 個，後來我又輸掉…

0706S：6 個

0707T：那跟原來差幾個？

0708S：4 個

0709T：那你要怎麼寫？

（S 寫出(N)+2-6=(4) ）

0710T：爲什麼會等於 4？

（S 又把 4 塗掉）

0711T：怎麼樣寫才能讓人家知道後來跟原來差 4 個？

（S 搖頭）

0712T：我們假設小新原來有 N 個，跟 N 差 4 個怎麼表示？

（S 寫出 N-4= ( ) ）

0713T：你覺得 N+2-6 有沒有等於 N-4？

0714S：有

0715T：爲什麼？你可以解釋給我聽嗎？

0716S：……

0717T：今天假設是你在打彈珠好了，你可以用你當例子講給我聽嗎？

0718S：先 6-2=4 嘛，這樣我就知道剩下幾個了

0719T：能舉一個日常生活的例子嗎？ 比如說媽媽給你一些糖果吃，媽媽先給你 2 個，你再吃掉 6 個，所以是比原來？

0720S：少，少 4 個

0721T：所以原來如果是 N 個，後來就是

0722S：比 N 少 4 個。

如果小新發現口袋裡有 7 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？

0723T：很好哦，那這時候它如果告訴你，這時候小新發現口袋裡有 7 個彈珠，問你他原來星期天的時候有幾個彈珠？

（S 寫出 7+4=11）

0724T：來，你告訴老師，你是怎麼算出 7+4=11 的？

0725S：心算

0726T：你是用 8、9、10、11 嗎？

（S 點頭）

0727T：ok，那如果要你用一個式子來表示整個題目的意思

（S 寫出 N+7=11）

0728T：11 是代表什麼？

0729S：全部

0730T：是代表星期幾的彈珠？

0731S：禮拜天

0732T：嗯，那我現在問你的，如果你要告訴人家這個題目的意思，用數學的式子來表示的話，應該怎麼寫

（S 寫出 N+2= ( )　( ) – 6 = 7）

0733T：N 是代表什麼？

0734S：N…原來的彈珠，然後正男給他 2 個

0735T：那這個 ( ) 代表什麼？星期天、星期一、還是星期二的彈珠？

0736S：星期一

0737T：那接下來這個式子呢？

0738S：他比賽輸了 6 個彈珠，發現口袋裡有 7 顆

0739T：這題會不會有點難

0740S：一點點。

加法第 8 題
星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和丸尾比賽輸了 3 個彈珠，星期二，跟小玉出去逛街買了 5 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？

0801T：來我們再來看這個問題

（S 念題目）

0802T：如果我們假設他星期天…

0803S：N

0804T：對，星期天有 N 個彈珠

（S 寫出 N-3+5= ( )　）

0805T：那我問你哦，他星期二的時候跟原來差幾個彈珠？

0806S：差…2 個
0807T：是多還是少？
0808S：多
0809T：那你可以怎麼表示？
（S 寫出 5+3=8　N-8 = ( )　）
0810T：爲什麼呢？
0811S：………
0812T：他原來是 N 個彈珠，星期二比原來？
0813S：多兩個
0814T：那該怎麼寫？
（S 寫出 N+2= ( )　）
0815T：所以你可以告訴老師這個式子的意思？
0816S：原來有一些，逛街買 5 個，比賽輸 3 個
0817T：嗯，所以他後來比原來？
0818S：多 2 個
0819T：好。所以原來如果有 1 個的話，後來會有？
0820S：3 個。
0821T：如果原來有 2 個的話，後來會有？
0822S：4 個。
0823T：原來如果有 5 個的話，後來會有？
0824S：7 個。

如果小丸子發現口袋裡有 9 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

0825T：很好哦，那我如果告訴你這時候小丸子發現口袋裡有 9 個彈珠…
0826S：9+2=11
0827T：爲什麼是 9+2？
0828S：差 2 個
0829T：後來多 2 個
0830S：…
0831T：你可以理解題目的意思嗎？
（S 搖頭。）
0832T：來，老師來告訴你，就是說她星期天有一些彈珠，星期一輸了 3 個，星期二逛街買了 5 個，最後發現她口袋裡有 9 個，要問你，她星期天有幾個？
0833S：4 個
0834T：爲什麼？
（S 寫下 9-3=6　6+5=11）
0835T：所以你覺得她原來有 11 個？

0836S：嗯。
0837T：那我們來看哦，如果他原來有 11 個，那星期一輸了 3 個，還剩幾個？
（S 寫出 11-3=8）
0838T：那星期二逛街買了 5 個，
（S 寫出 8+5=13）
0839T：可是我說星期二她有 9 個耶
（S 寫出 9-3+5=11）
0840T：你還是算出 11 個？
（S 點頭）
0841T：你有沒有辦法從星期二推到星期天呢？
（S 搖頭）
0842T：沒有辦法？
（S 點頭）
0843T：好，那我們再來看哦，後來比前面多？
0844S：2 個
0845T：那如果後來是 9 個，那原來是幾個？
（S 寫出 9-2=7）
0846T：你覺得答案是 11 還是 7
0847S：7
0848T：你覺得剛剛的 11，問題出在那裡？
0849S：輸 3 個，買 5 個
0850T：這樣子比原來？
0851S：多 2 個
0852T：這樣子的話，後來有 9 個，原來有？
0853S：原來有 7 個
0854T：那你可不可以像剛剛一樣，用一個式子來表示問題的意思？
（S 寫出 N-3+5=9）
0855T：你可不可以把式子解釋給老師聽
0856S：比賽輸 3 個，買 5 個，全部共有 9 個
0857T：9 是代表？
0858S：最後發現
0859T：那這個 N 是代表？
0860S：N 是代表原有一些彈珠
0861T：很好，那整個式子看下來是不是，小丸子原來有 N 個彈珠，比賽輸了 3 個，逛街買了 5 個，最後發現她有 9 個彈珠？
0862S：嗯。

加法第 9 題
星期日<u>小新</u>原來有 14 個彈珠，星期一和<u>風間</u>比賽輸了一些彈珠，星期二和<u>正男</u>比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候<u>小新</u>有幾個彈珠？

0901T：那我們接下來看這題。來我們可以假設他禮拜二…

0902S：N，輸了 N 個

（S 寫出 14-N+5= ( ) ）

0903T：這個代表他星期幾的彈珠

0904S：整個就是，星期二…

0905T：贏完 5 個彈珠之後嗎？

0906S：嗯。

0907T：那這時候小新有幾個彈珠？跟原來比的話。

0908S：…不知道。

0909T：沒關係。來我們仔細看喔，小新原來有 14 個，輸了一些彈珠，後來又贏了 5 個，那後來小新有幾個彈珠？

0910S：……

0911T：你覺得要怎麼表示才清楚？後來跟原來差幾個？

0912S：9 個

0913T：跟原來差 9 個嗎？

（S 點頭）

0914T：好，老師問你一個問題哦，如果他星期一先贏了 5 個，星期二再輸 N 個彈珠，那你告訴老師，如果他這兩天調換，最後會不會有影響？

0915S：不會

0916T：他先贏後輸和先輸後贏，個數會不會一樣多？

0917S：一樣

0918T：好，那老師問你，他如果星期一贏了 5 個，這時候有幾個？

0919S：19

（S 寫下 14+5=19）

0920T：然後星期二又輸了一些彈珠

（S 寫下 19-N= ( ) ）

0921T：那老師問你哦，你覺得這一個式子（19-N = ( )）跟這個式子（14-N+5= ( )）的結果有沒有一樣？

0922S：(點頭）嗯。

0923T：(指 14-N+5= ( )）這個式子代表？

0924S：先輸後贏

0925T：(指 19-N= ( )）那這個式子代表？

0926S：先贏後輸

0927T：那這兩個式子的彈珠數會不會一樣？

0928S：（點頭）嗯！

如果小新發現口袋裡有 8 個彈珠，請問小新星期一和風間比賽輸了幾個彈珠？

0929T：老師請問你哦，如果他發現口袋裡有 8 個，那問你，他星期一和風間比賽時輸了幾個？

（S 寫出 19-8=11）

0930T：很好，那老師問你，爲什麼？你爲什麼用這個式子算出來？

0931S：19 嘛，本來全部有 19，現在發現口袋裡有 8 個，所以就減 8，就得到 11 個。

0932T：好，所以 11 就是代表？

0933S：輸的

0934T：那這裡代表禮拜幾小新所有的彈珠？

0935S：禮拜二

0936T：那你能不能列式給老師知道？就是這整個題目，他發 S 了什麼事。

（S 寫出 19-8= N）

0937T：很好，那你還記得前幾題老師要你表示題目的意思嗎？要從星期幾開始？

0938S：星期天

0939T：好。

（S 寫出 14-N+5=8）

0940T：很好。這個 N 你有沒有算出來了？

0941S：有，11

0942T：很好。這個題目有點難吧？

0943S：嗯

0944T：不過沒關係，你不用怕，你不會可以跟老師講。

加法第 10 題
星期日小丸子原來有 15 個彈珠，星期一爺爺又買了一些彈珠給她，星期二她和豬太郎比賽，輸了 9 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？

1001T：接下來看這題。

（S 看題目）

1002T：星期一爺爺給他一些彈珠，我們設成 N

（S 寫出 15+N-9= ( ) ）

1003T：那這樣你可以看出後來跟原來差幾個嗎？

（S 搖頭）

1004T：那你還記得前一題的作法嗎？

1005S：把星期一和星期二調換過來
1006T：那你要不要試試看
（S 寫出 15-9+N）
1007T：那你可不可以把可以算的先算出來
（S 比手指，寫下 15-9=6　6+N=　）
1008T：（指 6+N=　）所以這代表星期幾的彈珠？
1009S：星期二。
1010T：嗯。那我們再來看下面。

如果這時<u>小丸子</u>發現口袋裡還有 8 個彈珠，請問爺爺買了幾個彈珠給她呢？

（S 讀題目）
1011T：爺爺買的是？
1012S：N 個
（S 寫出 8+9=17　）
1013T：爺爺買了 17 個彈珠給她？
（S 點頭）
1014T：為什麼爺爺買了 17 個彈珠給她？
1015S：……不知道
1016T：來，你看上面的式子，你可以告訴老師那一些式子是代表星期二的彈珠嗎？
（S 指 15+N-9=( )）
1017T：還有嗎？
（S 指 6+N=　）
1018T：那人家告訴你星期二有幾個彈珠？
1019S：……8 個
（S 寫出 8+6=N）
（S 寫 8+N=17，在 N 的下面寫 6）
1020T：為什麼？你可以告訴老師嗎？你是怎麼想的呢？
1021S：……
1022T：你看一下，這裡的 15+N-9=( ) 和 6+N=，這個 6+N 的意思，你可不可以跟老師講？N 是什麼？
1023S：星期一爺爺買彈珠給他
1024T：那 6 呢？
1025S：相差
1026T：他原來有 15 個，後來
1027S：輸了 9 個
1028T：所以他用原來的去輸掉還有 9 個？
1029S：嗯。

1030T：那 6+N 是代表？
1031S：後來
1032T：那人家告訴你，後來有 8 個啊，所以爺爺買幾個給他
1033S：7 個
1034T：爲什麼是 7 個？
1035S：……
（S 寫出 15-9+N=8）
1036T：這個算式寫的很好，然後呢？你覺得 N 應該是多少？
1037S：7
1038T：N 如果是 7 的話，15-9 是多少？
1039S：6
1040T：那 6+N 如果是 8 的話，N 是多少？
1041S：2
1042T：嗯。那你剛剛爲什麼會說是 7？
1043S：……
1044T：那你可以把剛剛的算式寫一次嗎？
（S 寫出 15-9+2=8）
1045T：那你這個 2 是怎麼算出來的？
（S 寫出 15-9=6　6+2=8）
1045T：很好哦。我們今天就先到這邊，你可以下課休息了。

第三次訪談原案

第 10 題（以具體物輔助）
星期日小丸子原來有 15 個彈珠，星期一爺爺又買了一些彈珠給她，星期二她和豬太郎比賽，輸了 9 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？

1046T：看的懂題目嗎？
1047S：用 N
1048T：設那裡爲 N？
（S 手指題目的「買了一些彈珠」）
1049T：最後小丸子有幾個彈珠？
（S 寫出 15+N-9 = ( ) ）
1050T：那你可不可以再把這個式子寫簡單一點？
（S 搖頭）
1051T：你還記得上次的做法嗎？
1052S：兩個換過來

（S 寫出 N+15-9 = ( ) ）
1053T：所以 N+15-9 跟 N 加多少是一樣的？
1054S：不知道。
1055T：來，沒關係。老師今天還準備道具哦！
（T 拿出一包巧克力）
1056T：來哦，你看，我們假設這個是爺爺買的彈珠，我們不知道裡面有幾個嘛！
1057S：嗯
1058T：小丸子原來有幾個？
1059S：15
1060T：好，你在這邊點 15 個巧克力給我看
（S 數了 15 個巧克力）
1061T：好，那你可不可以告訴老師，那邊是爺爺禮拜一買彈珠給他之後的？
（S 指著那包巧克力）
1062T：很好，那這時候他總共有幾個彈珠？原來的和爺爺買給他的，總共是那邊的彈珠？
1063S：（指著 15 個彈珠）這部分，（再指那包巧克力）還有這部分
1064T：那他禮拜二跟豬太郎比賽輸了 9 個，那你怎麼表示？
（S 拿掉 9 個巧克力）
1065T：所以這時候他只剩幾個？
1066S：6 個
1067T：還有嗎？
1068S：爺爺買給他的。
1069T：爺爺買給他的是什麼？
1070S：N
1071T：嗯。很好。那這一堆代表小丸子禮拜幾的彈珠？
1072S：禮拜二
1073T：跟豬太郎比賽完了嗎？
1074S：比賽完了。

如果這時<u>小丸子</u>發現口袋裡還有 8 個彈珠，請問爺爺買了幾個彈珠給她呢？

1075T：很好。那這時候如果小丸子發現口袋裡還有 8 個彈珠的話，老師先問你，8 個代表那邊的彈珠？
1076S：爺爺買給她的，還有他自己的
1077T：他自己剩幾個？
1078S：6 個
1079T：那爺爺買給她幾個？
1080S：……

1081T：（指巧克力）你可以看這邊來想答案。這裡有 8 個，所以你知道爺爺買給她幾個彈珠嗎？

1082S：2 個

1083T：（指巧克力）如果用這個表示你可以比較容易知道答案嗎？

1084S：嗯。

第 9 題（以具體物輔助）
星期日小新原來有 14 個彈珠，星期一和風間比賽輸了一些彈珠，星期二和正男比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？

0945T：如果是這一題的話，你也可以用巧克力表示。做給老師看嗎？

（S 點數 14 個彈珠）

0946T：那星期一跟風間比賽輸了一些彈珠，星期二又贏了 5 個

（S 點數 5 個）

0947S：輸了要怎麼表示？

0948T：沒關係啊，你可以用任何方法表示，你自己懂就好了

0949T：所以這時候，他總共剩下幾個彈珠？

0950S：……

0951T：你看這邊也不知道嗎？

（S 點數彈珠）

0952S：21 個

0953T：你再數一次

0954S：19 個

0955T：那輸的彈珠怎麼辦？

0956S：減掉

0957T：嗯，所以這裡要怎麼列式

（S 寫出 19-N = ( )）

0958T：那這個 ( ) 代表什麼？

0959S：小新有幾個彈珠。

0960T：什麼時候的彈珠？

0961S：星期二

0962T：那老師如果要你把題目表示出來呢？原來有幾個？

0963S：14 個

0964T：那中途發生什麼事情，記錄下來

（S 寫出 14-N+5= ）

0965T：很好。那我問你，這裡的巧克力，那些是他禮拜二剩下的巧克力？

（S 指 19 個巧克力）

0966T：這裡，然後？

0967S：減

（S 指一包巧克力）
0968T：這個袋子裡面的嗎？
0969S：嗯

如果小新發現口袋裡有 8 個彈珠，請問小新星期一和風間比賽輸了幾個彈珠？

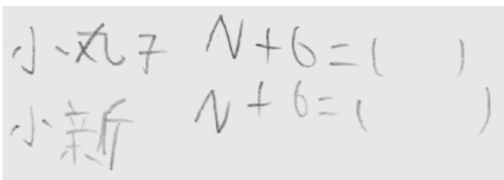
0970T：好，那他如果發現說口袋裡剩 8 個啊，那他星期天的時候有幾個？
（S 從 19 個巧克力中，拿掉 8 個）
0971S：11 個
0972T：可以跟老師說你 11 個是怎麼算出來的嗎？
0973S：用心算
0974T：那可以跟老師說你是用什麼心算法算出來的嗎？
0975S：19 減 8
0976T：那上面那裡會等於 11，
0977S：（指著 19-N = ( )的 N）這裡。
0978T：（指著 14-N+5= ( ) 的 N）那這裡會不會等於 11？
0979S：會

第 11 題

星期日，小丸子和小新有一樣多的彈珠
星期一，他們考試都考 100 分，老師送給他們每一個人 6 個彈珠；星期二，小丸子和小玉比賽輸了 6 個彈珠，小新和風間比賽，輸了 8 個彈珠；星期三，小丸子在路上撿到 4 個彈珠，小新的媽媽買了 5 個彈珠給小新； 請問小丸子和小新這時候有幾個彈珠？

1101T：來，這一題很長哦，我們一步一步慢慢來看。
（S 念題目）
1102T：星期天的時候他們都一樣多
1103S：N
1104T：好，那我們把他們都設成 N，那星期一老師送他們每人 6 個彈珠
（S 寫出 N+6=( )）
1105T：這是誰的？
1106S：他們兩個的
1107T：小新和小丸子都是 N+6 嗎？
1108S：嗯
1109T：好，那你可以分開來寫給老師看嗎？

（S 寫出



1110T：那星期二呢？星期二小丸子和小玉比賽輸了 6 個，所以剩幾個？
（S 寫出 N+6=( )　( )-6=N）
1111T：嗯，聰明，那小新呢？
（S 寫出 N+6=( )　( )-8=( )　）
1112T：你能不能用 N 表示？
（S 在( )中寫 N　( )-8=(N)　，思考一下後搖頭）
1113T：他禮拜一的時候有幾個？
1114S：N+6
1115T：N+6 又輸掉 8 個怎麼辦？來，你可以用巧克力數數看，我們用一包巧克力當 N。
（S 點數 6 個巧克力，加上 1 包）
1116T：那輸掉 8 個怎麼辦？
1117S：不夠減
1118T：不夠減沒關係，你心裡面記得就可以了
1119S：……
1120T：你沒有辦法用這個表示？
（S 點頭）
1121T：可以用說的說給老師聽嗎？
1122S：沒辦法
1123T：那你可以把整個過程列出來？
（S 寫下 N+6-8=）
1124T：嗯，這是小新的。那小丸子的呢？小丸子禮拜二剩下多少？
1125S：輸了 6 個
1126T：所以他剩幾個？
1127S：N 個
1128T：那小丸子禮拜三又撿到 4 個，這時候她有幾個？
（S 寫出 N+4=　）
1129T：好，那換小新，小新禮拜二在那裡？\
（S 指出 N+6-8）
1130T：好，那禮拜三？
（S 寫出 3）
1131T：好，那你可以把中途發生什麼事情寫給老師看嗎？
（S 搖頭）
1132T：不行的話，那你可以用巧克力哦
（S 先拿一包巧克力，再拿 5 個，再拿 6 個，最後再拿掉 8 個巧克力）
1133S：3 個
1134T：還有嗎？

1135S：N

（S 寫出 3+N= ）

1136T：所以這是小新星期幾的？

1137S：星期三的

1138T：來老師問你哦，那最後他們要結算了啊，你看小新和小丸子。小新是什麼？

（S 指出 3+N= ）

1139T：那小丸子呢？

1140S：N+4

如果<u>小丸子</u>發現她有 11 個彈珠，那請問<u>小新</u>星期四有幾個彈珠？

1141T：如果星期四的時候，小丸子還有 11 個，那小丸子星期日有幾個？

（S 寫出 N+4=11）

1142T：那你可以告訴老師，N 是幾個？

1143S：11 個？

1144T：爲什麼？

1145S：……

1146T：（指巧克力）你可以看這邊啊，N+4=11，所以 N 是幾個？

1147S：8 個

1148T：8 個嗎？你可以再點數一次給老師看？

1149S：7 個

1150T：好，N 是 7 個，那老師問你 N 是什麼你還記得嗎？

1151S：他們兩個一樣多的。

1152T：星期幾？

1153S：星期日。

1154T：那小丸子算出來 N 是 7 個，那小新呢？

1155S：一樣多

1156T：那是幾個？

1157S：7 個

1158T：老師再問你一個問題喔，星期三他們發生很多事情嘛，那這時候小新和小丸子的彈珠差幾個？

1159S：很多個

1160T：很多個。小新星期三剩幾個？

（S 指 3+N= ）

1161T：那小丸子呢？

（S 指 N+4= ）

1162T：可以幫老師在上面寫星期三嗎？

1163T：那老師問你的問題是，星期三小新和小丸子差幾個？

1164S：1 個
1165T：爲什麼？
1166S：因爲小新 3 個，小丸子 4 個。
1167T：那 N 呢？
1168S：一樣。
1169T：我們用巧克力來看好不好，你告訴老師，那裡是小丸子？
1170S：N 個，再加上 4 個
（S 拿了 1 包巧克力，和 4 個巧克力）
1171T：那小新怎麼表示？
（S 拿了 1 包巧克力，和 3 個巧克力）
1172T：所以他們兩個差了幾個
1173S：1 個

第 12 題
小丸子有 2 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠，加上 12 個彈珠，如果小丸子和小玉的彈珠一樣多。請問你要怎麼表示？

1201T：來我們看看這一題。我們假裝一盒彈珠是 N 個，你可以用巧克力。
（S 先拿 2 包巧克力，再拿 1 包和 12 個巧克力）
1202T：（指 1 包和 12 個）這是誰的？
1203S：小丸子
1204T：小丸子嗎？看題目。
1205S：小玉。
1206T：那小丸子呢？
（S 指 2 盒）
1207T：很好，那題目說他們兩個的彈珠一樣多，要怎麼表示？
1208S：……
1209T：哪邊等於哪邊？
1210S：這邊（2 盒）等於這邊（1 盒和 12 個）

請問 1 盒彈珠有幾個？

1211T：那你可不可以告訴老師說，這裡面有幾個？
（S 搖頭）
1212T：不可以？從這裡看不出來？
1213S：嗯
1214T：他說小丸子 2 盒，小玉 1 盒加上 12 個，這邊的巧克力和這邊的巧克力會？
1215S：一樣多
1216T：那你沒有辦法看出這裡面有幾個嗎？

1217S：嗯

1218T：注意哦，這 3 包巧克力都是一樣多的，題目說這 2 盒和 1 盒加 12 個是一樣多的。

1219S：嗯。一盒…12 個

1220T：你怎麼知道的

1221S：（指著左邊的 1 盒，和右邊的 1 盒）這兩個是一樣的

1222T：你可以用畫圖解釋給老師看嗎？在圖的旁邊要寫小丸子和小玉哦

（S 畫出）

1223T：那裡一樣多？

1224S：（指小丸子的 1 盒，和小玉的 12 個）這裡一樣多

1225T：（指小丸子和小玉的另一盒）那你把這兩個放到那裡去了？

1226S：……

1227T：也會一樣多嗎？

1228S：嗯

1229T：所以因爲這兩個一樣多，所以這兩個（1 盒和 12 個）也會一樣多？

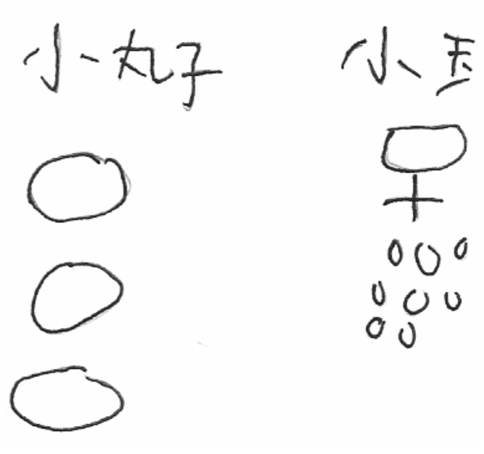
1230S：嗯

1231T：嗯，聰明

第 12 題類題
小丸子有 3 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠，加上 8 個彈珠，如果小丸子和小玉的彈珠一樣多。請問你要怎麼表示？

1232T：那老師再問你一個問題。如果小丸子現在有 3 盒，小玉有 1 盒加 8 個，你畫在這裡給老師看，旁邊要寫小丸子和小玉哦！

（S 畫出



請問 1 盒彈珠有幾個？

1233T：那我現在告訴你，她們兩個的彈珠是一樣多的，你可不可以告訴老師 1 盒裡面有幾個？

1234S：……
1235T：那你可以用巧克力試試看嗎？
（S 拿 3 包巧克力，和 1 包巧克力加上 8 個巧克力）
1236T：可以告訴老師，一盒有幾個嗎？
1237S：這邊…4 個 4 個
1238T：你是怎麼知道的，可以寫給老師看嗎？
（S 寫出 4+4=8）
1239T：因爲這一盒和這一盒怎樣？
1240S：一樣
1241T：所以？
1242S：這 2 盒和這一個（指 8 個巧克力）一樣
1243T：所以這兩盒各有？
1244S：4 個
1245T：好，非常好

第 13 題
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+4 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

1301T：這一題看一下。誰的彈珠比較多？
1302S：小玉
1303T：小玉。爲什麼？
1304S：她多兩個
1305T：她多兩個。那你可不可以解釋給老師聽，爲什麼她多兩個？
（S 排出 2 堆巧克力，一堆是 1 包+2 個，另 1 堆是 1 包+4 個）
1306T：(指 1 包巧克力）因爲他這兩個？
1307S：一樣。然後，這兩個（指 2 個和 4 個）…不同
1308T：所以他們差了？
1309S：2 個
1310T：很好哦，那你可以算出 N 是多少嗎？
（S 搖頭）

第 14 題
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+N 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

1401T：來，再來的話是最後一題囉！
1402T：N+N 代表什麼意思？
1403S 拿起 2 包巧克力，又拿起 1 包巧克力+2 個

1404T：誰比較多？
1405S：小玉。
1406T：有沒有可能小丸子比較多？
1407S：…有可能。
1408T：什麼樣的情況？
1409S：……
1410T：不知道。你再想一想
1411T：你可以告訴老師如果袋子裡面有幾個的時候，小丸子會比較多嗎？
1412T：你剛剛跟老師說小丸子有可能比較多啊
1413S：兩個都有可能
1414T：什麼時候小丸子會比較多？什麼時候小玉會比較多？來，你畫在下面給老師看，小丸子有幾個，小玉有幾個
（S 畫出 ）
1415T：那，什麼時候兩個人會一樣多？
1416S：(指其中 1 包巧克力）這邊 2 個
1417T：好，那什麼時候小玉會比較多？
1418S：這邊跟這邊不同的時候
1419T：嗯，不同的時候會有一邊比較多，一邊比較少
1420T：那你可以舉一個例子給老師看嗎？
（S 搖頭）
1421T：例如說，當袋子裡面有幾個的時候，小玉會比較多？
（S 搖頭）
1422T：沒有辦法？
1423S：嗯。
1424T：那老師問你，如果袋子裡面有 5 個的時候，誰比較多？
（S 指小玉那邊）
1425T：這邊，嗯，(指小丸子這邊）那有沒有可能是這邊比較多？
1426S：嗯…6 個
1427T：6 個的時候，(小玉）這邊會有幾個？
1428S：12 個
1429T：那（小丸子）這邊呢？
1430S：8 個
1431T：還是小玉比較多啊？再猜猜看
1432S：9 個
1433T：好，那我們來看看，9 個的話，(小玉）這邊幾個
1434S：18
1435T：你會乘法喔？
1436S：嗯

1437T：那（小丸子）這邊呢？

1438S：11

1439T：明明還是這邊比較多耶，所以有沒有可能（小丸子）這邊比較多？

1440S：不可能

1441T：真的不可能嗎？你覺得不可能就說不可能沒關係。

1442S：不可能

1443T：確定不可能喔？

（S 點頭）

1444T：好，那我們的訪談就到這邊，謝謝你哦！

附錄三：國小五年級訪談原案

第一次訪談原案

暖身題

0001T：好來。我們這個不是考試啦，所以妳放輕鬆作答，那妳如果聽不懂我講的題目的意思的話，妳就跟我說，沒關係！或者妳如果不會寫，妳就說不會寫，沒有說一定要妳寫出來哦，來，我們來看這一題。這裡有個骰子可以給妳試試看哦！

0002F：……

0003T：這個題目的意思就是說啊，我一丟啊，有可能是什麼面朝上？

0004F：……

0005T：妳可以把全部的情形都說出來嗎？妳有玩過這個嗎？

0006F：每一邊都有可能。

0007T：嗯，那有哪一邊妳可不可以幫我寫一下？

（F 寫出一、二、三、四、五、六）

0008T：那一二三四五六，除了這些以外，妳覺得還有沒有其他的可能？

（F 搖頭）

0009T：沒有了？

（F 點頭）

0010T：好，那老師接著問妳，妳覺得那一面比較可能出現？

0011F：就是……

0012T：妳覺得啦，或者是他們出現的機會一樣多？

0013F：……

0014T：就是我們這樣丟啊，丟啊，那妳覺得說一、二、三、四、五、六點啊，幾點比較容易出現？

0015F：六！

0016T：六點比較容易出現？那妳幫老師寫在上面。

（F 寫出六）

0017T：那老師可以問妳說，為什麼是六點嗎？

0018F：嗯…因為如果是一（朝上）這要丟的話，這可能就是會比較像這樣。

0019T：妳說怎樣？

0020F：如果說拿這樣丟的話，就可能是這個面。

0021T：哦，就是說，跟它朝上的面是幾點有關係？

0022F：嗯！

0023T：所以妳就覺得我們剛剛六點在上面，這樣子丟，就比較容易出現六點？

0024F：嗯！

0025T：就是這樣的問題而已啦，妳就反正…就勇敢的把妳的想法說出來，老師可以問一下妳的名字嗎？可以寫給老師看。

（F 寫出名字。）

0026T：哦，小儀哦，那老師也自我介紹一下…

（T 寫在紙上）

加法第 1 題
小新有一些彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0101T：好，那我們接著下一題，這樣會很難嗎？

（F 搖頭。）

0102T：不會嘛，那妳就放心，儘量回答。來我們來看這題。

0103F：……

0104T：這樣說好了，妳覺得應該要怎麼表示？假設妳要用一個數學式子把這個題目表示出來，然後要我看得懂，妳覺得…妳要怎麼寫。

0105F：一些加 9 個彈珠。

0106T：嗯，好，那妳寫給我看

（F 寫出 一些+9

如果這時候小新有 13 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？

0107T：很好啊，這樣寫沒錯啊。那好，妳把下面那題打開。如果這時候小新有 13 個彈珠的話，就是風間給他 9 個彈珠以後，那妳知道他原來有幾個嗎？

（F 寫出 13-9=4）

0108T：所以說小新原來有 4 個？

0109F：嗯。

0110T：那這樣子好了，那今天如果要妳用一個數學式子，來表示這一整個題目的意思，妳可以嗎？

（F 寫出「一些+9」）

0111T：一些加 9 然後會怎樣？

0112F：等於…就等於 13

0113T：很好啊，可以寫給老師看嗎？

0114T：那這樣子的話，是不是我看到這個式子就知道題目原來大概是什麼意思，那妳看一下「一些」，妳會不會覺得如果每次我們寫這種數學式子，都寫「一些」這兩個字，會不會太麻煩？

0115F：不會。

0116T：不會，有沒有想到其他比較簡單的表示法？學校教過的？

0117F：（指 9+4）就是這兩個加起來

0118T：可是我們不知道他原來有多少？
0119F：就⋯一些，比較有可能等於「一些」的數字
0120T：比較有可能等於「一些」的數字？妳沒有學過其他可以代表這個「一些」的？
（F 搖頭）
0121T：沒有？嗯好，就這樣子，「一些」其實也很好啦。

加法第 2 題
小新有一些彈珠，後來送給美美 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0201T：好，那接下來看這一題。
0202F：一些減 4
0203T：妳講話可不可以大聲一點？因為我怕我會錄不到⋯
0204F：一些減掉 4 個
0205T：好，可以寫給老師看嗎？
（F 寫出「一些 - 4」）
0206T：嗯，一些減 4 哦，那現在老師問妳哦，我這個「一些」啊，我如果要用一個英文字代替，行不行？
0207F：可以。
（T 寫出 N）
0208F：N
0209T：欸，妳會啊⋯N 好不好？N 學過嘛，英文學過？
（F 點頭）
（F 寫出 N-4）
0210T：那這個 N 是不是比剛剛的「一些」好寫，妳剛剛怎麼沒想到？還是不敢講？
0211F：沒想到。
0212T：沒想到哦⋯是嗎？可是妳現在怎麼馬上就想到了

如果這時候小新剩下 12 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？

0213T：好，再來他告訴妳說啊，他送給美美 4 個彈珠以後啊，他就剩下 12 個彈珠了，然後問妳說小新原來有幾個彈珠？
（F 寫出 12+4=16）
0214T：嗯，就是說他原來會有 16 個彈珠？那一樣啊，我們剛剛用一條數學式子來表示這個問題，現在可不可以也這樣做？
0215F：用 N⋯
0216T：嗯，那妳要不要試試看。
（F 寫出

N-4=12+4=16

0217T：嗯，好，老師先問妳，這個式子妳要怎麼解釋給老師聽？
0218F：……
0219T：沒關係，妳說給我聽。
0220F：他原來有一些彈珠，然後送給美美 4 個，然後剩下 12 個，然後再加 4 個，現在就有 16 個。
0221T：沒錯，可是我問妳哦，這樣一個式子可以表示這個題目嗎？我現在只是說要表示這個題目，然後不要算出答案。
0222F：N-4…然後 12+4
0223T：嗯，妳的 12 加 4 是要算出答案？
（F 點頭）
0224T：那我問妳啊，這樣子可以表示這個題目？
0225F：可以啊
0226T：怎麼講？妳講給老師聽，好不好？
0227F：嗯，他有一些，然後送給美美 4 個，他剩下 12 個。
0228T：對啊，這樣子是不是表示這個題目，所以妳懂老師的意思嗎？
0229F：嗯。
0230T：那妳後面加了這些的話，是怎樣？
0231F：…
0232T：妳跟老師講沒關係啊，妳爲了要？
0233F：算出答案
0234T：對啊，OK 就是這樣子。

加法第 3 題
小新有 6 個彈珠，後來阿呆給小新一些彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0301T：好，來哦，那我們再來看這個題目。可以嗎，這樣的題目？
0302F：嗯。
0303T：有趣嗎？
0304F：還好啦。
（F 寫出 6+N）
0305T：那妳的 N 是代表？
0306F：一些
0307T：那一些？可以說清楚一點嗎？
0308F：阿呆給小新的那一些彈珠
0309T：那妳可以幫老師寫在下面，寫簡單一點。
（F寫出

6+N

阿呆給小新的

<u>如果這時候小新</u>有 11 個彈珠，請問<u>阿呆</u>給了<u>小新</u>幾個彈珠？

0310T：好，非常好哦，那我們來看哦。

（F 寫出 11-6=5）

0311T：所以阿呆給小新？

0312F：5 個

0313T：5 個彈珠。好，那我現在也一樣要拜託妳，寫一個式子來表示這個題目。

（F 寫出 6+N=11）

0314T：欸，很好，所以妳用這個式子就可以看出這個題目嗎？妳可以講一次老師聽嗎？

0315F：小新有 6 個彈珠，後來阿呆又給他一些，然後小新有 11 個

0316T：最後他有 11 個嘛，所以這樣就代表這個題目嘛！

（F 點頭）

加法第 4 題
<u>小新</u>有 12 個彈珠，後來送給妹妹一些彈珠，請問<u>小新</u>這時候有幾個彈珠？

0401T：好，來。來看看這一題

（F 寫出 12-N）

0402T：那妳的 N 是什麼？

0403F：小新送給妹妹的

這時候<u>小新</u>剩下 5 個彈珠，請問<u>小新</u>送給妹妹幾個彈珠？

0404T：嗯，很好哦。來…

（F 寫出 12-5=7）

0405T：哦好，那妳可以跟剛剛一樣…用一個式子來表示這個問題？

（F 寫出 12-N=5）

0406T：OK 沒有錯嘛…小新原來有？

0407F：12 個彈珠

0408T：後來發生什麼事？

0409F：他給妹妹一些

0410T：那最後他發現他有？

0411F：他剩下 5 個

0412T：好，很容易哦，會愈來愈難哦！

乘法第 1 題
<u>小光</u>有 6 盒巧克力，每 1 盒不知道有幾個，請問一共有幾個巧克力？

1501T：看一下！

1502F：嗯…

1503T：如果我們假設一盒是 N 個，那妳可以告訴老師說，小光他總共有幾個巧克力嗎？

（F 寫出 6×N）

如果一共有 30 個巧克力，請問 1 盒中有幾個巧克力？

1504T：嗯，很好啊，就是這樣子。那如果他發現他一共有 30 個呢？要問妳說一盒有幾個？

（F 寫出 30÷6=5）

1505T：所以一盒有？

1506F：5 個

1507T：好，那妳一樣，用一個式子來表示這個問題。

（F 寫出 6×N=30）

1508T：嗯，很好！小光有 6 盒，一盒有？

1509F：N 個

1510T：然後總共有？

1511F：總共有 30 個。

乘法第 2 題
小光有一些巧克力，分裝成 7 盒， 請問每盒有幾個巧克力？

1601T：來！

（F 寫出 N÷7）

1602T：N 是代表那裡？

1603F：他有一些巧克力

1604T：可以圈給老師看嗎？代表那一句話？

（F 在「小光有一些巧克力」下劃線）

1605T：嗯，這個是 N 嘛！那他如果說每盒有 11 個啊，要問妳他原來有幾個？來，這樣子好了，妳能不能先用一個式子表示這個題目，我們先不要算答案，好不好？

（F 寫出 N÷7=11）

如果每盒有 11 個，請問小光原來有幾個巧克力？

1606T：那我們現在問妳說，他原來總共有幾個巧克力啊？

（F 寫出 11×7=77）

1607T：77 個？確定？

1608F：嗯。

1609T：很好，就是 77 個嗎？

1610F：嗯。

乘法第 3 題
小光有 2 盒巧克力，每 1 盒中有 3 包，每 1 包不知道有幾個，請問共有幾個巧克力？

1701T：好那接下來這個問題，看看！

1702F：……

1703T：來，如果我們假設一盒有 N 個巧克力的話，妳可以怎麼列這個式子？

（F 寫出 2×3×N）

1704T：哦，那這樣這個式子啊，妳可不可以再化簡？如果不行就說不行。

1705F：不行

1706T：妳覺得這樣就是最簡單的？

（F 點頭）

1707T：好，那老師問妳哦，妳覺得他總共有幾包巧克力？

1708F：有 6 包

1709T：那我們剛剛說一包有幾個？

1710F：N 個

1711T：所以說妳又可以怎麼寫？他總共有幾個巧克力？

（F 寫出 6×N）

1712T：（指 2×3×N）剛剛這樣子是表示什麼？

1713F：他有…全部！

1714T：對對對，那這樣子呢？

1715F：也是全部

1716T：所以說，妳會嘛！是不是？

如果一共有 42 個巧克力，請問 1 包中有幾個巧克力？

1717T：好，那一樣，他現在告訴妳說，他總共有 42 個巧克力，妳可不可以幫老師列一個式子？

（F 寫出 42÷6=7）

1718T：所以他一包有？

1719F：7 個

1720T：那妳能不能幫我列一個式子來代表這個題目？

（F 寫出 6×N=42）

1721T：那我如果要清楚一點呢？就是說題目會先告訴妳有幾盒，有幾包，那妳這樣子的話，看的出來嗎？

1722F：幾盒…

1723T：是不是沒辦法看出來過程？

1724F：嗯

1725T：那妳如果要清楚一點列式的話

（F 寫出 $2\times3\times N=42$）
1726T：嗯，如果是這樣子的話我們是不是可以很清楚的看出來他有幾盒？
1727F：他有 2 盒
1728T：然後每一盒有？
1729F：3 包
1730T：然後每一包有？
1731F：N 個
1732T：全部總共有？
1733F：42 個
1734T：那這樣是不是非常清楚？
1735F：嗯

乘法第 4 題
老師有一些巧克力，分裝成 5 盒後，每 1 盒再分成 2 包，請問每包有幾個巧克力？

（F 寫出 $N\div5\div2$）
1801T：妳的 N 是代表什麼？幫老師寫一下好不好？
（F 寫出「老師有一些巧克力」）
1802T：嗯，所以妳的 N 代表的是這個東西嗎？
1803F：嗯

如果 1 包有 4 個巧克力，問老師原來有幾個巧克力？

1804T：那他現在說，我知道一包裡面有 4 個，那妳怎麼列式來表示這個式子？
1805F：原來…
（F 寫出 $4\times2\times5=40$）
1806T：所以原來總共有 40 個嗎？
1807F：嗯
1808T：那現在在回頭過來看這裡，這樣子的話妳能不能化簡？
1809F：……
1810T：我所謂化簡的意思，妳懂我意思嗎？就像剛剛一樣。寫成比較短一點
1811F：哦。
（F 寫出 $N\div2$）
1812T：$N\div2$。妳告訴老師，爲什麼？
1813F：嗯，因爲…他原本有一些巧克力，就直接分成兩包
1814T：來題目看清楚哦，他要先怎樣？
1815F：先分成 5 盒
1816T：然後怎樣？

1817F：分成 2 包
1818T：來我們來看一下這個（巧克力），他要先分成 5 盒，再分成兩包
（T 拿出 5 盒巧克力）
1819T：那妳這樣除以 2 的話，可以嗎？
1820F：不行。
1821T：所以要怎樣？
1822F：N 除以 5
1823T：然後呢？再分成兩包？
1824F：嗯
1825T：好。那老師問妳哦，像剛剛一樣，他總共可以分成幾包啊？
1826F：總共可以分成…可以分成 10 包！
1827T：10 包對不對？
1828F：嗯
1829T：那原來有幾個巧克力？
1830F：有 40 個
1831T：我們先不看下面。原來有幾個巧克力？
1832F：有 N 個。
1833T：那分成 10 包妳要怎麼寫？
（F 寫出 N÷10）
1834T：N÷5÷2 這個代表什麼？
1835F：老師有一些巧克力，分裝成 5 盒，然後再分成 2 包
1836T：所以他代表的是？
1837F：每包有多少巧克力
1838T：對，那這邊的話？
1839F：嗯，老師有多少巧克力，可以分成 10 包，每包有幾個
1840T：對啊，所以這兩個代表的東西一不一樣？
1841F：不一樣？
1842T：不一樣嗎？
1843F：一樣。
1844T：一樣還是不一樣？
1845F：一樣！
1846T：那妳能不能幫老師寫一個式子來代表這個問題？要清楚一點哦，我可以一看就知道這個問題在幹嘛！
（F 寫出 N÷5÷2=4）
1847T：很好。老師有？
1848F：N 個巧克力，分裝成 5 盒，然後再分成 2 包
1849T：然後最後？
1850F：一包有 4 個。

加法第 5 題
星期日小新原來有一些彈珠，星期一和風間比賽贏了 3 個彈珠，星期二，小新幫媽媽擦玻璃，媽媽給他 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0501T：好接下來看這個問題。

（F 寫出 N-3+4）

0502T：妳可以解釋給老師聽嗎？

0503F：小新原來有一些彈珠，星期一風間贏了 3 個彈珠

0504T：咦，他是星期一和風間比賽，小新贏了 3 個，不是輸哦！

（F 改成 N+3+4）

0505T：所以這個式子就很好解釋嘛，禮拜天有

0506F：N 個，禮拜一贏了 3 個，禮拜二媽媽又給他 4 個

小新發現口袋裡有 12 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？

0507T：如果這時候小新發現他口袋裡有 12 個彈珠啊？那妳要怎麼？

（F 寫出 12-3-4=5）

0508T：5 個？

0509F：嗯

0510T：好！所以說他星期天的時候有

0511F：5 個

0512T：那如果是這個式子，妳可以把它變短一點？

（F 寫出 N+7）

0513T：嗯，很好，來妳告訴老師 N+7 的意思

0514F：N 是他原來有 N 個彈珠，然後他贏了 3 個媽媽又給他 4 個，加起來是 7 個。

0515T：所以他總共多得了？

0516F：總共多得了 7 個

0517T：嗯，很好，那妳這邊最後要列式哦

（F 寫出 N+3+4=12）

0518T：好，非常好哦！

加法第 6 題
星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和豬太郎比賽輸了 3 個彈珠，星期二，小丸子不小心掉了 7 個彈珠， 請問這時候小丸子有幾個彈珠？

0601T：看這邊，最後一題哦！

（F 寫出 N-3-7）

0602T：嗯，然後他說小丸子發現她口袋裡剩 5 個彈珠啊

0603T：妳可以先列出一個式子來表示題目的意思嗎？先不要管答案

（F 寫出 N-3-7=5）

如果<u>小丸子</u>發現口袋裡有 5 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

0604T：那現在問妳，N 是多少？
（F 寫出 5+7+3=15）
0605T：嗯，對啊，所以說他星期天的時候有？
0606F：有 15 個
0607T：（指 N-3-7）那這邊妳可以把它變短嗎？
（F 寫出 N-10）
0608T：10 是怎麼來的？
0609F：10 是…星期一輸的 3 個，加星期二不小心掉的 7 個
0610T：所以他總共不見了？
0611F：10 個

加法第 7 題
星期日<u>小新</u>原來有一些彈珠，星期一<u>正男</u>給他 2 個彈珠，星期二，他跟<u>風間</u>比賽輸了 6 個彈珠，請問這時候<u>小新</u>有幾個彈珠？

0701T：那…再做一題，好不好？
0702F：嗯
0703T：妳如果累了，就跟老師講，我不會強迫妳，這一題做完就好了
（F 寫出 N+2-6）
0704T：然後他如果說小新現在有 7 個？一樣，可以先幫老師列式嗎？
（F 寫出 N+2-6=7）

如果<u>小新</u>發現口袋裡有 7 個彈珠，請問<u>小新</u>星期日時有幾個彈珠？

0705T：嗯，很好。這樣就可以代表小新星期天有 N 個，星期一正男給他 2 個，星期二跟風間比賽輸了 6 個，最後他發現他有 7 個。那現在問妳，小新星期天有幾個？
（F 寫出 7+6-2=11）
0706T：嗯，他星期天就會有？
0707F：11 個
0708T：（指 N+2-6）那現在這個式子妳可以把它變短嗎？
0709F：……
0710T：妳覺得星期二比賽完，跟星期天比的話，那一天比較多？
0711F：嗯…星期天
0712T：星期天會比較多嘛？那星期天多幾個？
0713F：星期天多…他多…
0714T：星期天比星期二多幾個？

0715F：多 4 個
0716T：星期天比星期二多 4 個嘛。
0717F：嗯
0718T：那如果星期天，我們剛剛設他是 N 個嘛，那星期二有幾個？
0719F：星期二減…
0720T：我們剛剛不是說星期天比星期二，怎樣？
0721F：多 4 個
0722T：那星期天有 N 個的話，星期二有幾個？
0723F：星期二…
0724T：好那老師問妳，如果我星期天有 6 個的話，星期二會有幾個？
0725F：星期二…2 個！
0726T：啊如果他（星期天）有 8 個，他（星期二）有幾個？
0727F：有 4 個。
0728T：那他如果有 10 個，他有幾個？
0729F：8 個。
0730T：這裡比這裡多幾個？
0731F：哦，6 個
0732T：嗯，6 個，那如果這裡有 N 個，那這裡就有？
0733F：就：咦？7 個
0734T：星期天 N 個哦
0735F：……
0736T：好，那我們再重來一次哦！我們剛剛是不是知道星期天比星期二？
0737F：多…4 個
0738T：好，那妳寫在旁邊。
（F 寫出 星期日比星期二多4
N　N-4
0739T：那星期天有幾個？
0740F：N
0741T：N 個嘛，好，寫在下面。那妳覺得星期二是幾個？用 N 來表示。
0742F：N+4
0743T：N+4 嗎？
0744F：N-4
0745T：嗯：N-4 嘛，因為他比他？
0746F：多 4 個
0747T：所以反過來說的話，星期二會比星期天？
0748F：少 4 個

0749T：所以星期天是 N 的話，星期二的話就是。
0750F：…
0751T：是不是 N-4？
0752F：嗯。
0753T：沒關係，那我們今天就先到這邊。
0754F：好。

第二次訪談原案

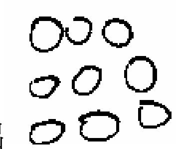
加法第 8 題
星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和丸尾比賽輸了 3 個彈珠，星期二，跟小玉出去逛街買了 5 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？

（F 寫出 N-3+5）
0801T：嗯，那妳的 N 代表的是什麼
0802F：小丸子原來有一些彈珠
0803T：這樣子，那我問妳啊，他禮拜天跟禮拜二差幾個彈珠？
0804F：差……
0805T：來，沒關係，我們一步一步慢慢來，我先問妳，妳覺得他禮拜二的彈珠比較多還是禮拜日的彈珠比較多？
0806F：禮拜二
0807T：禮拜二。嗯，那禮拜二多幾個？
0808F：多 5 個。
0809T：禮拜二跟禮拜天比哦！
0810F：嗯…多 2 個
0811T：多 2 個，那妳怎麼表示？這個 N 是禮拜幾？
0812F：禮拜天的啊！
0813T：那妳說比禮拜天多 2 個，所以是
0814F：N+2

如果小丸子發現口袋裡有 9 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

0815T：很好，妳就勇敢說沒關係，說錯了也沒關係 妳如果覺得累也可以說，我們就休息一下下。來，如果他禮拜二的時候就發現他有 9 個彈珠，要問妳說他禮拜天的時候有幾個彈珠？
（F 寫出 9-3=6　6-5=1）
0816T：這個是禮拜二哦，也就是說他發生了這些事情之後，他發現口袋裡有 9 個彈珠，他問妳原來有幾個彈珠？

0817F：嗯…
0818T：所以妳的意思是他原來有 1 個彈珠？
0819F：嗯！
0820T：妳可以解釋給老師聽嗎？
0821F：就他星期二發現有 9 個，他有出去買 5 個啊，又輸掉 3 個，所以星期日就有 1 個。
0822T：妳可以畫圖表示給老師看嗎？妳先畫 9 個彈珠

（F 畫出 ）

0823T：那他星期一的時候會有幾個？
0824F：星期一…輸掉 3 個
0825T：星期二他逛街買彈珠之後有 9 個，那他在逛街之前有幾個彈珠？
0826F：…1 個
0827T：星期天有 1 個嗎？
0828T：妳剛剛說星期天跟星期二差幾個？
0829F：差 2 個
0830T：那妳現在看哦，算出來星期天是 1 個，星期二是 9 個。咦？怎麼差這麼多？發生什麼事情？
0831F：……
0832T：如果妳慢慢往回推呢？星期二到星期一到星期天？
0833F：星期二…9 個，減掉 5 個，還有 4 個，然後再減掉 3 個
0834T：他輸掉耶，他是輸給丸尾 3 個哦。好，那沒關係。如果他星期天只有 1 個，星期一怎麼輸給丸尾 3 個呢？
0835F：……
0836T：妳可以把整個問題的意思列式出來嗎？列看看。
0837F：這一題嗎？
0838T：對，這一整題。
（F 寫出 N-3+5=9）
0839T：嗯，很好。（指 N）那現在是不是要算這裡？就知道星期天是幾個嘛，那妳覺得這裡是多少？
0840F：7 個
0841T：咦？對啊，妳是怎麼算的？告訴老師。
0842F：9 減掉 5 再加 3
0843T：嗯，那妳剛剛怎麼說減 3？妳說一說妳的想法
0844F：因為…
0845T：沒關係啦，那不然妳 7 怎麼算出來，幫我列一下式子。

（F 寫出 9-3+5=7）
0846T：好，那這一題就先這樣子。

加法第 9 題
星期日小新原來有 14 個彈珠，星期一和風間比賽輸了一些彈珠，星期二和正男比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？

0901T：我們看下一題。
（F 寫出 14-N+5）
0902T：嗯，很好啊，那妳的 N 是代表？
0903F：星期一和風間輸掉的
0904T：就是他和風間比賽他輸給風間的嗎？
0905F：嗯。

如果小新發現口袋裡有 8 個彈珠，請問小新星期一和風間比賽輸了幾個彈珠？

0906T：ok，好，那我們接著下來看。妳可以先列式沒關係。
0907F：……
0908T：妳可以先把整個式子列出來嗎？
（F 寫出 14-N+5=8）
0909T：嗯，很好啊，就是這樣子，那現在問妳說他星期一他輸給風間幾個彈珠？
0910F：如果…就…
0911T：妳可以把妳的想法跟老師講嗎？妳要怎麼算出這個 N？
0912F：……
0913T：妳會一個一個代進去嗎？
0914F：一個…嗯…
0915T：妳剛剛心裡面是怎麼想的？妳把 N 當作是一個數來算嗎？
0916F：嗯：他星期天原來有 14 個，啊減掉他跟正男比賽贏的
0917T：為什麼要減掉？
0918F：……
0919T：我問妳好了，如果他星期一跟星期二發生的事情調換呢？結果有沒有影響？就是說他星期一先贏 5 個，星期二再輸一些，跟原來星期一輸一些，星期二再贏 5 個，最後他彈珠的數量有沒有差？
（F 搖頭）
0920T：沒有對不對？那我們要不要把他當作星期一先贏 5 個？試試看？
（F 寫出 14+5=19　19-8=11）
0921T：嗯？11 是什麼？
0922F：11…他輸掉的。
0923T：所以啊，妳就知道這裡可以化簡成什麼？

0924F：……
0925T：就是妳的算法啊，妳看妳是不是把星期一和星期二調過來，所以他可以寫成比較短的式子是什麼？
0926F：……
0927T：好，沒關係，如果他今天是星期一先贏 5 個，星期二再輸一些，妳要怎麼列式？
0928F：14+5=19，然後 19 減掉 N。
0929T：對，很好，寫給老師看，要完整一點哦！
（F 寫出 14+5=19 19-N）
0930T：嗯，對嘛，妳覺得這個數量（14-N+5）和這個數量（19-N）有沒有一樣？
0931F：有
0932T：嗯。他只是兩天？
0933F：對調
0934T：所以妳就利用這個算出來，他輸了？
0935F：11 個
0936T：所以像這種啊，他兩天對調其實是？
0937F：一樣的。
0938T：好那老師看看，嗯，這題就先這樣子。

加法第 10 題
星期日<u>小丸子</u>原來有 15 個彈珠，星期一爺爺又買了一些彈珠給她，星期二她和<u>豬太郎</u>比賽，輸了 9 個彈珠，請問這時候<u>小丸子</u>有幾個彈珠？

1001T：來我們看下一題
（F 寫出 15+N-9）
1002T：嗯，很好啊，那老師問妳可不可以把這個式子弄短一點？
1003F：…
1004T：妳可以試試看啊，沒關係？
（F 寫出 15-9+N ）
1005T：變成星期二爺爺買彈珠給他嘛！那這裡可不可以先算？
1006F：可以啊！
1007T：所以整個式子可以寫成什麼？
1008F：先算的話，就等於 6
（F 寫出 6+N）
1009T：對啊，很好！妳不要怕啊，妳覺得是什麼，就把它寫出來。然後看下面。

如果這時<u>小丸子</u>發現口袋裡還有 8 個彈珠，請問爺爺買了幾個彈珠給她呢？

1010F：……
1011T：妳可以先列式嗎？
1012F：……
1013T：他星期二會有幾個？
1014F：星期二…如果…
1015T：如果妳看這裡的話，他星期二是有幾個？
1016F：他有…N-9 個
1017T：6 啊，妳已經算出來了，所以星期二有？
1018F：星期二有 6 個，
1019T：再來？還有…
1020F：再加上…
1021T：爺爺買給她的嗎？
1022F：嗯
1023T：題目告訴妳說，總共有幾個？
1024F：總共有 8 個
1025T：所以我們是不是可以知道爺爺星期一買給她幾個？
1026F：2 個
1027T：對啊，勇敢一點，好不好？幫老師寫一下。
（F 寫出 6+2=8）
1028T：答案是什麼？
1029F：2 個
1030T：嗯，那妳可以把這整個題目的過程列一個式子給老師看？
（F 寫出 15+N-9=8）
1031T：嗯，很好哦，最後會等於 8 個。嗯，我問妳，如果要妳從這個式子算出 N 來，妳可以嗎？
1032F：……
1033T：來，妳把妳的算式寫給老師算！
（F 寫出 8+9=17 17-15=2）
1034T：嗯，很好哦，妳這 8+9=17 是先把輸掉的加回來嗎？
1035F：嗯。
1036T：那妳這 17-15 呢？可以解釋給老師聽嗎？
1037F：加回來等於 17 然後再減掉他原來星期天有的。
1038T：嗯，很好。這是 15+N 會等於 17 啊，所以妳就把加的減回來？
1039F：嗯。
1040T：很好。

乘法第 5 題
媽媽買了 3 盒巧克力，分給<u>小新</u>一家 4 人，請問每個人分到幾個巧克力？

1901T：來！老師幫妳指定好不好？我指定一盒是 N 個，那妳可以列式給我看嗎？
1902F：一盒是 N 個，等於…
1903T：妳覺得要怎麼表示每個人得到的？
（F 寫出 N×3÷4）
1904T：嗯，很好，N×3 是代表什麼？
1905F：幾顆。
1906T：代表全部的巧克力嗎？
1907F：嗯。
1908T：然後分給 4 個人嗎？
1909F：嗯。

如果每個人分到 6 個巧克力，請問 1 盒巧克力有幾個？

1910T：好，那它說每個人如果分到 6 個的話，妳要怎麼算一盒有多少？
1911F：一盒多少？
（F 寫出 6×4=24 24÷3=8）
1912T：24 是代表？
1913F：24 顆
1914T：是代表全部的巧克力？
1915F：嗯。
1916T：嗯好。所以每盒巧克力有？
1917F：有 8 個
1918T：嗯，很好，那妳可不可以一樣，幫老師列式來表示整個題目發生的事情？
（F 寫出 N×3÷4=6）
1919T：來老師問妳一個可能比較難一點的，這個式子妳可以把它寫短一點嗎？
1920F：……短一點…
1921T：有沒有辦法？
（F 搖頭）
1922T：好，老師給妳提示哦。妳覺得每個人分到幾盒？
1923F：分…到…
1924T：妳會用分數嗎？
1925F：嗯
1926T：好，那妳覺得每個人分到幾盒？
1927F：每個人分到四分之一盒
1928T：總共有 3 盒耶，3 盒分給 4 個人，每個人分到幾盒？
（F 寫出 3÷4= 3/4）
1929T：所以每個人分到？

1930F：四分之三盒
1931T：嗯，那剛剛說到每盒有幾個巧克力？
1932F：每盒有 N 個
1933T：所以我們知道每個人分到幾個？
1934F：分到…N 個
1935T：我們知道每個人分到四分之三盒，每盒又有 N 個，所以每個人分到幾個？
1936F：……
1937T：四分之三盒是幾個巧克力？
1938F：……
1939T：沒關係妳如果不知道算不出來，可以跟我講沒關係！我沒有一定要妳算出來哦。
1940T：那我問妳一個問題哦，如果一盒有 20 個，四分之三盒有幾個？
1941F：20 個…
1942T：妳可以用筆算沒關係。
（F 寫出 20÷4=5　5×3=15）
1943T：嗯，妳爲什麼會用這樣算？
1944F：因爲一盒有 20 個，要分給 4 個人啊，每個人可以分到 5 個，每份有 3 盒，所以每個人分到 15 個。
1945T：嗯，我懂妳的意思。
1946T：現在如果一盒有 36 個，四分之三盒是幾個？
（F 寫出 36÷4=9　9×3=27）
1947T：27 個？那老師問妳，妳們有沒有學過這樣子表示？
（T 寫出 $36\times\frac{3}{4}$）
1948F：沒有。
1949T：哦，好。我懂了。可以了，下一題

乘法第 6 題
媽媽買了好多盒彈珠，全部分給小丸子和姐姐，結果 2 人都得到 24 個彈珠，請問每盒有幾個彈珠？

2001T：來，我們再看一題就好了。
2002F：嗯…
2003T：我們假設媽媽買了…
2004F：N 盒
2005T：好，很好，然後妳來來試看看。
2006F：很多盒…平均一人 24 個？
2007T：啊？

2008F：他說她買很多盒，全部平均是每人 24 個？

2009T：對。

（F 寫出 $24\times2=48$　$48\div N$）

2010T：這個就是？

2011F：很多盒。

如果每盒中有 6 個彈珠，請問媽媽買了幾盒彈珠呢？

2012T：很多盒？嗯，很好。妳表達的沒錯。那…接下來看這一題

（F 寫出 $48\div6=8$）

2013T：嗯，所以媽媽買了幾盒？

2014F：買了 8 盒

2015T：妳可以解釋給老師聽嗎？這 48 是什麼？

2016F：48 是全部的彈珠

2017T：嗯，全部的彈珠總共要分裝在這些盒子裡面嗎？

2018F：嗯。

2019T：然後他要告訴妳，一盒有 6 個啊，所以媽媽就買了？

2020F：8 盒。

2021T：那如果這個問題，要妳寫成一個式子，妳有辦法嗎？

（F 寫出 $24\times2=48\div N=8$，又畫掉，再寫出 $24\times2\div N=8$）

2022T：我們寫錯，不要畫掉哦，老師想要知道妳的想法。

2023F：嗯。

乘法第 7 題
7-11 大特價，小丸子買 3 盒彈珠，老闆又多送她 6 個彈珠，請問小丸子一共有幾個彈珠？

2101T：那再一題好不好？會不會很累？

2102F：不會。

2103T：這一題真的是最後一題囉，老師不會再黃牛。老師幫妳假設好不好？

2104F：嗯。

2105T：如果我這一盒有 N 個。

（F 寫出 $N\times3+6$）

2106T：嗯，這個就是小丸子他有的彈珠嗎？

2107F：嗯。

如果她回家算一算，發現一共有 30 個彈珠，請問每 1 盒中有幾個彈珠呢？

2108T：那如果他回家算一算發現買了 3 盒老闆又多送 6 個，結果一共有 30 個彈珠？

（F 寫出 $30-6=24$　$24\div3=8$）

2109T：嗯，寫的很好啊，那妳可不可以幫老師用一個式子來表示這個問題？
2110F：……
2111T：我的意思是這裡發生了這麼多事，最後會等於 30 個。
（F 寫出 N×3+6=30）
2112T：嗯，對啊，很好，就是這樣子。那我們今天就到這邊！

第三次訪談原案

乘法第 8 題
小新買了 7 盒彈珠，走路回家時，不小心跌倒，打破了其中一盒，掉出了 5 個彈珠，請問這時候小新剩幾個彈珠？

2201T：來吧，我們先看這一題，我們大概做 40 分鐘，做太久，你也會累吧？
2202F：不會。
2203T：嗯，很好。
2204F：7 盒…掉 1 盒，那剩下 6 盒？
2205T：妳懂題目的意思嗎？就是說他拿了 7 盒，走在路上，然後掉下 1 盒，裡面掉出了 5 個，當然剩下的我還是要撿起來
2206F：哦！
2207T：所以總共你只有失去幾個彈珠？
2208F：5 個
2209T：嗯，那他現在問你小新剩下幾個彈珠。這樣子，那我們現在假設 1 盒有 N 個彈珠。
2210T：1 盒彈珠有 N 個，小新買了 7 盒…
（F 寫出 Nx7-5）

如果小新回家算一算，發現他還有 23 個彈珠，請問每盒中有幾個彈珠呢？

2211T：那如果小新回家算一算，發現他剩下的彈珠還有 23 個，就問妳說，原來 1 盒有幾個？
（F 寫出 23+5=28 28÷7=4 個）
2212T：所以 1 盒有幾個？
2213F：有 4 個，嗯？怎麼會這樣？
2214T：嗯，妳覺得那裡有問題？妳勇敢的說出來沒關係。
2215F：28÷7…
2216T：妳覺得那裡有問題，跟老師講沒關係。
2217F：答案有問題！

2218T：爲什麼你覺得答案有問題？

2219F：因爲它（指 4）不是 1 盒嗎？啊剛掉出 5 個，如果現在 1 盒算出是 4 個。如果是這樣就不對啊！

2220T：如果是 4 個就掉不出來？

2221F：嗯

2222T：不可能 1 盒掉出 5 個。

（F 點頭）

2223T：很好哦，妳有發現，其實是老師題目設計的關係，所以妳答對了。

乘法第 10 題
花輪把彈珠分給 7 個小朋友，每個小朋友得到一樣多的彈珠，小丸子不小心掉了 3 個，請問她剩下幾個彈珠？

2401T：來我們看下一題。

（F 寫出 N÷7）

2402T：嗯，那小丸子不小心掉了 3 個，那可以表示嗎？

2403F：……

2405T：妳是不是看不懂題目的意思啊？就是花輪把他的彈珠分給 7 個小朋友，其中一個是小丸子啊，所以一開始小丸子分到幾個？

2406F：分到…

2407T：妳的 N 是指什麼？

2408F：N 是花輪的。

2409T：好，那妳寫下來

2410T：嗯，那他把他的彈珠分給 7 個小朋友啊，那請問小丸子得到幾個？

2411F：得到 N-3 個

2412T：比如我是花輪，我把我的彈珠分給 7 個小朋友，其中有一個是小丸子，那請問小丸子得到幾個？

2413F：小丸子也分到一樣多的。

2414T：對啊。所以小丸子是？

2415F：一樣多的呀

2416T：那妳可以告訴我妳寫的 N÷7 是？

2417F：花輪他把他原來的彈珠分給 7 個小朋友呀

2418T：是每一個人得到的彈珠嗎？

2419F：嗯

2420T：那小丸子也是其中之一啊，所以小丸子也得到？

2421F：也得到一樣多的

2422T：一樣多是那裡啊？

2423F：……

2424T：來，我們來看哦！花輪他原來有這麼多個彈珠嘛，那他分給 7 個小朋友，所以妳就寫 N÷7，那我問妳，這個 N÷7 代表什麼？
2425F：花輪把他的彈珠分給 7 個人，每個人都有一樣多的
2426T：對，每個人都得到 N÷7 嗎？

如果<u>小丸子</u>剩下 5 個彈珠。請問<u>花輪</u>原來有幾個彈珠？

2427T：好，我問妳，花輪如果原來有 21 個彈珠，那每個小朋友可以得到幾個？
2428F：3 個
2429T：對呀，那 3 是怎麼算來的？
2430F：3……21÷7
2431T：那如果花輪原來有 35 個呢？
2432F：嗯…5
2433T：對呀，很好，那如果花輪原來有 N 個的話，那每個小朋友得到
2434F：……N…÷7
2435T：是不是 N÷7？
（F 點頭）
2436T：所以小丸子也得到？
2437F：也得到 N÷7
2438T：嗯，漂亮，那她又掉了 3 個
（F 接著寫下-3）
2439T：（指 N÷7-3）所以這就是？
2440F：她剩下的。
2441T：那接下來小丸子還剩下 5 個。
（F 寫出 5+3=8，8×7=56）
2442T：所以…
2443F：花輪原來有 56 個
2444T：那老師問妳哦，妳的 5+3=8，這個 8 是代表什麼時候？
2445F：8 是…每個人分到的。
2446T：嗯，很好，那總共有幾個人？
2447F：7 個
2448T：所以花輪原來就有
2449F：56 個
2450T：嗯。那妳還記得老師說要用一個式子來表示這個問題嗎？
2451F：嗯。
（F 寫出 N÷7-3=5）
2452T：嗯，對，很好。
2453T：這一題會覺得比較難嗎？

2454F：還好。
2455T：是不是乘法比較容易，除法比較搞不清楚？
2456F：不會呀！
2457T：那妳剛剛爲什麼表示不出來？妳在想什麼？
2458F：我剛在想，爲什麼每個人有 N÷7 個。
2459T：妳覺得 N÷7 這個表示方法感覺怪怪的嗎？
2460F：嗯。
2461T：覺得應該要把它算出來才對嗎？
2462F：嗯。

乘法第 11 題
小新有 1 盒彈珠，正男有 3 盒彈珠， 請問他們一共有幾個彈珠？

2501T：好，來，我們來看哦。一樣，我們假設 1 盒彈珠有 N 個。妳幫老師寫一下。
2502F：然後…

如果他們一共有 36 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？

2503T：嗯，爲什麼 36÷1+3=9
2504F：因爲小新有 1 盒彈珠，正男有 3 盒，他說一共有 36 個，就把他們兩個的盒加起來，再用 36 去除啊！
2505T：這樣子寫，妳不會覺得怪怪的嗎？
（F 搖頭）
2506T：那我現在要妳用一個式子來表示這個題目，妳可以嗎？
2507T：小新有幾盒？
2508F：小新有 1 盒？
2509T：那小新有幾個？
2510F：小新有 9 個
2511T：嗯，我們現在先假設答案還沒算出來
2512F：嗯，小新有 N 個
2513T：那正男呢？
2514F：正男有 3 盒，3×N 個
2515T：所以總共要怎麼寫？
2516F：N×4
2517T：嗯對，那我如果要寫清楚一點呢？讓人家看的出來兩個人分別有幾個。
（F 寫出 N+N×3=36）
2518T：對啊，很好。那 N+N×3，跟妳剛剛說的 N×4 一不一樣？
2519F：一樣。

2520T：嗯，好，那就這樣。

乘法第 12 題
小新和正男 2 人平分一盒彈珠，小丸子、小玉和美美 3 個人平分一盒彈珠，請問小新和小丸子兩個人一共有幾個彈珠？

2601T：來，看這一題，有點難哦！
2602T：老師問妳，妳覺得應該要把什麼當做 N？
2603F：1 盒彈珠！
2604T：很好，幫我寫一下。
2605T：好，那我問妳呀，小新得到幾個彈珠？
2606F：N÷2
2607T：那小丸子呢？
2608F：N÷3
2609T：那妳可以用分數表示嗎？
2610F：分數…
2611T：小新得到 N÷2 嘛，那 N÷2 等於什麼？
2612F：二分之一

如果小新和小丸子兩個人一共有 15 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？

2613T：嗯，沒關係，那不然我們用除法好了，那他說兩個人一共有 15 個彈珠，妳要怎麼寫？
（F 寫出 N÷2+N÷3=15）
2614T：哦，很好，那我現在問妳，1 盒彈珠有幾顆？
2615F：…
2616T：你也可以用畫圖的啦，任何方式把它算出來，都可以，我沒有規定妳一定要用什麼方法。
2617T：妳儘量試試看唷，試到不想試再跟老師說。
（F 口中念念有詞）
2618T：我好像聽到什麼答案囉，沒關係，妳說啊，1 盒有幾個？
（F 寫下「小新 9 個，小丸子 6 個」）
2619T：所以 1 盒就是？
2620F：18 個
2621T：妳可不可以告訴我妳剛是怎麼想出 18 個的？
2622F：把 15 拆成兩個，可是小新一定會比小丸子多啊
2623T：然後妳就一個一個慢慢試嗎？
2624F：沒有。
2625T：那妳試了那些數字？
2626F：我先試 10 跟 5，可是不行，就想說，10-1，5+1 的話

2627T：這樣就是 9 個跟 6 個嘛
2628F：對啊，結果 9×2=18 的話，18 也是 3 的倍數，所以 1 盒就是 18 個彈珠
2629T：嗯嗯，很好很好。很不錯哦。

乘法第 13 題
小丸子有 5 盒彈珠，小玉有 2 盒彈珠，請問小丸子的彈珠比小玉多幾個？

2701T：來，我們接著看一下這個。妳可不可以先列式啊？
2702F：嗯
2703T：那妳要假設什麼是 N？
2704F：1 盒。
2705T：好，那我們先來列式
2706F：小丸子有 5 盒，小玉有 2 盒……
2707T：我們剛剛說 1 盒是 N 個，小丸子有 5 盒，所以小丸子有幾個？
2708F：5×N 個
2709T：那小玉呢？
2710F：2×N 個

如果小丸子的彈珠比小玉的彈珠多 15 個，請問 1 盒彈珠中有幾個？

2712T：啊他說小丸子比小玉多 15 個，妳要怎麼列一個式子來表示這個問題？
（F 寫出 5×N）
2713T：這是什麼？
2714F：小丸子。
2715T：那小玉呢？
2716F：2×N
2717T：那小丸子比小玉多 15 個呀，妳要怎麼寫？
（F 寫出 N×5-15+N×2）
2718T：好，妳到這裡 N×5-15 是什麼意思？是把多的 15 個減掉嗎？
2719F：嗯
2720T：那這樣代表誰的彈珠？
2721F：小玉的
2722T：對啊，很好啊，那爲什麼又要加 N×2？
2723F：……
2724T：妳要怎麼列式比較好列？
（F 寫出 N×5-N×2=15）
2725T：好我問妳一個問題。我現在小丸子有 5 盒，小玉有 2 盒，那我說小丸子比小玉多 15 個，那這個式子可以表示這個問題嗎？
2726F：可以
2727T：那我問妳，如果我要妳算出 1 盒有幾個彈珠呢？

2728F：……
2729T：小丸子比小玉多幾盒？
2730F：多 3 盒
2731T：所以 1 盒有幾個？
2732F：3 盒…1 盒有 5 個
2733T：是不是很容易？
2734F：嗯。
2735T：有沒有問題？
2736F：沒有。

第四次訪談原案

乘法第 9 題
豬太郎的媽媽煮了一鍋湯圓，剛好分成 5 碗，每個人碗中有一樣多的湯圓，豬太郎的媽媽不想吃這麼多，於是又分給豬太郎 4 個湯圓，請問豬太郎碗裡有幾個湯圓？

2301T：如果看不懂題目的意思可以跟我講，我解釋給妳聽。
（F 寫出 N÷5+4）
2302T：很好哦，那 N 是什麼？
2303F：嗯…一鍋湯圓

如果豬太郎碗中有 9 個湯圓，請問豬太郎的媽媽煮了幾個湯圓？

2304T：好，如果他發現他碗裡有 9 個湯圓的話
2305F：9 個湯圓…
（F 寫出 9×5=45，45+4=49）
2306T：妳寫的算式是什麼意思，解釋給我聽好不好？
2307F：嗯…
2308T：他碗裡的湯圓是媽媽給他以後哦。
（F 寫出 9-4=5，5×5=25，25+4=29）
2309T：什麼意思，可以解釋給老師聽嗎？
2310F：嗯，豬太郎碗中有 9 個湯圓，因爲他媽媽給他 4 個，所以他才有 9 個啊，所以要減掉，然後這樣就變成每個人都一樣多，然後再把一樣多乘以 5 碗，然後再加 4 個。
2311T：這個加 4 是加那裡的湯圓呢？
2312F：加上剛剛減掉的湯圓啊

2313T：減掉的 4 個湯圓？妳懂我題目的意思嗎？我首先把湯圓分成 5 碗，媽媽不太想吃，所以從她的碗裡撥 4 個給豬太郎，這時候豬太郎有 9 個。所以原來一整鍋裡有幾個？

2314F：25 個

2315T：嗯 25 個，那妳這邊爲什麼是 29 個？

2316F：嗯…豬太郎碗中有 9 個

2317T：對啊，然後呢？

2318F：多給他 4 個所以要減掉啊

2319T：那妳最後這個加 4 是什麼意思？

2320F：…

2321T：可以講給老師聽嗎？像講故事那樣。

2322F：煮了一鍋湯圓然後分成 5 碗，我以爲煮了剩 4 個湯圓要給豬太郎

2323T：哦，我懂妳的意思了。所以最後答案到底是？

2324F：25 個湯圓

2325T：一鍋裡面有 25 個湯圓嗎？

2326F：嗯。

加法第 11 題
星期日，小丸子和小新有一樣多的彈珠 星期一，他們考試都考 100 分，老師送給他們每一個人 6 個彈珠；星期二，小丸子和小玉比賽輸了 6 個彈珠，小新和風間比賽，輸了 8 個彈珠；星期三，小丸子在路上撿到 4 個彈珠，小新的媽媽買了 5 個彈珠給小新； 請問小丸子和小新這時候有幾個彈珠？

1101T：來，看這張

（F 念題目）

1102T：他們各有幾個彈珠？

1103F：嗯…

1104T：那我們要假設什麼爲 N？

1105F：一樣多的彈珠

1106T：哦，沒關係，妳可以一個一個算啊

1107F：那我先算小丸子

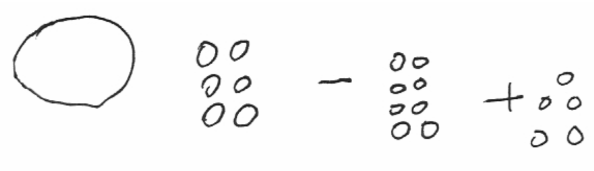
1108T：嗯

1109F：那小新的話…

小丸子 $N+6-6+4$

小新 $N+6-8+5$

1110T：那這兩個式子妳能不能寫短一點？
1111F：寫短一點…
1112T：嗯，N+6-6+4 相當於怎樣？
1113F：N+4！
1114T：為什麼？
1115F：因為 N 加 6 又減掉 6 啊
1116T：嗯，那小新呢？
（F 寫出 N-7）
1117T：N-7 怎麼來的，解釋給我聽
1118F：因為 6-5 還有 1 啊
1119T：為什麼 6 要減掉 5 呢？
1120F：咦…
1121T：我問妳好了，小新後來星期三跟原來星期天差幾個？
1122F：……
1123T：小新比原來多還是少？
1124F：多
1125T：多幾個？
1126F：……
1127T：妳可以畫圖來想想看啊。假設小新原來有一些彈珠…
（F 畫出



1128T：那妳覺得呢？原來有這包，然後禮拜一加 6 個，禮拜二又輸 8 個是什麼情況？
1129F：原來這包要減掉 2 個
1130T：嗯，那再補充 5 個呢？
1131F：3
1132T：嗯很好啊，完整的說一次，說清楚！
1133F：是…3 個彈珠
1134T：跟誰比 3 個彈珠？跟星期幾比？
1135F：星期日跟星期一到三比
1136T：嗯，所以總共是怎樣？
1137F：這一包再加 3 個。
1138T：這一包是幾個？
1139F：N 個
1140T：所以小新後來會有多少個？

1141F：原來再加 3 個
1142T：要怎麼寫？
（F 寫出 N+3）
1143T：很好啊，非常好。那小丸子是比原來多幾個？
1144F：比原來多 4 個
1145T：那老師問妳一個問題，禮拜三之後啊，他們兩個人差幾個彈珠？
1146F：差 1 個
1147T：差 1 個嗎？爲什麼？
1148F：因爲小丸子是 N+4 個，小新是 N+3 個

如果小丸子發現她有 11 個彈珠，那請問小新星期四有幾個彈珠？

1149T：嗯，很好，那過來如果小丸子星期四發現有 11 個，那問妳小新有幾個？
（F 寫出 11-4=7，7+3=10）
1150F：所以小新有 10 個。
1151T：嗯，很好。這一題比較長，會不會很難？
1152F：還好。

乘法第 14 題

濱崎、花輪、丸尾、豬太郎、山田和藤木 6 人平分一盒巧克力，小丸子、小玉、美環和 3 個人平分一盒巧克力，請問美環比花輪多幾個巧克力？

2801T：來哦，看這題。
2802F：這麼多人呀！
2803T：這邊是 6 個人分，那邊是 3 個人分。
2804T：我們假設一盒巧克力有 N 個好不好？
2805F：嗯
2806T：所以美環有幾個？
2807F：N÷3
2808T：那花輪呢？
2809F：N÷6

如果美環比花輪多了 7 個巧克力，請問 1 盒巧克力有幾個？

2810T：那他說美環比花輪多了 7 個巧克力，那你要怎麼表示？
2811F：N÷3……加上某個東西等於 7
2812T：美環是不是 N÷3？
2813F：嗯。
2814T：花輪是不是 N÷6？
2815F：嗯。
2816T：那他說美環比花輪多 7 個啊，要用加法還是減法？

2817F：減法

2818T：那是誰減誰？

2819F：N÷3 減 N÷6

2820T：可以完整的寫給我看嗎？

（F 寫出 N÷3-N÷6 = 7）

2821T：很好，那妳可以算出 1 盒巧克力有幾個嗎？

2822F：1 盒巧克力……

2823T：妳可以畫圖啊，我們用線段好了，一段當做 1 盒巧克力，那 1 盒巧克力分給 3 個人要怎麼表示？

（F 畫出）

2824T：那 1 盒巧克力分給 6 個人呢？

（F 畫出下頁圖）

2825T：那妳可以指出來那裡是代表美環嗎？幫老師寫上去。

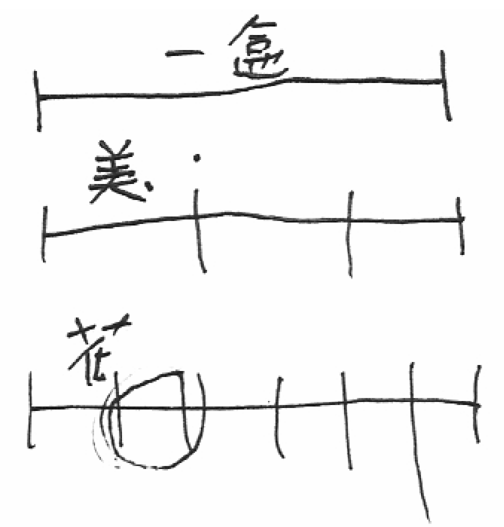
（F 寫出「美」）

2826T：那裡代表花輪？

（F 寫出「花」）

2827T：很好哦，那那裡是 7 個呢？

（F 圈起來



2828T：那一整盒呢？

2829F：如果美環有 14 個，那花輪就有 7 個，14 個減掉 7 個就等於多 7 個啊

2830T：嗯，我現在問妳 1 盒耶？

2831F：1 盒？等於…等於…等於…

（F 寫出 14x3=42）

2832F：1 盒等於 42 個

2833T：很好，1 盒等於 42 個。那妳可不可以告訴我，美環比花輪多幾盒？

2834F：多一半，等於二分之一盒。

2835T：(指一整個線段）這樣是一盒哦。

2836F：…
2837T：好，那妳告訴我，多那裡？
2838F：（指圈起處）多這裡。
2839T：那這裡是幾盒？
2840F：六分之一盒
2841T：嗯，很好哦。

加法第 12 題

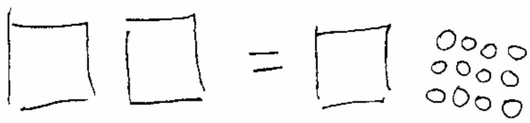
小丸子有 2 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠，加上 12 個彈珠，如果小丸子和小玉的彈珠一樣多。請問你要怎麼表示？

1201T：再來哦。
（F 念題目）
1202T：妳要怎麼表示都可以。

（F 寫出 2盒=1盒+12個）

請問 1 盒彈珠有幾個？

1203T：嗯，那 1 盒彈珠有幾個？
1204F：12
1205T：確定？確定嗎？妳可以畫圖解釋給我聽嗎？

（F 畫出  ）

1206T：所以妳覺得 1 盒是幾個？
1207F：12 個
1208T：那妳是怎麼看出來的？
1209F：用兩盒減掉 1 盒，剩 1 盒，就是 12 個啦！
1210T：妳是說左邊和右邊都拿掉 1 盒嗎？
1211F：對啊！

乘法第 15 題

丸尾有 3 盒彈珠，加上 9 個彈珠，小丸子有 4 盒彈珠，加上 1 個彈珠，如果小丸子和丸尾的彈珠一樣多。請列出式子表示。

2901T：那再來就難一點點哦。
（F 念題目）
2902T：妳可以先表示。
（F 寫出「3 盒+9=4 盒+1」）

2903T：那我今天如果說 1 盒彈珠有 N 個，那丸尾有多少彈珠？

2904F：N 乘以 3 加 9

2905T：那小丸子呢？

2906F：N 乘以 4 加 1

請問 1 盒彈珠有幾個？

2907T：好，那現在跟妳說他們兩個彈珠一樣多啊，請問妳 1 盒彈珠有幾個？妳可以用任何方法算哦！

2908F：嗯…

2909T：還是妳要用巧克力？這個當作 1 盒，這個當作 1 個，妳告訴我丸尾怎麼表示？可以排給我看嗎？

（F 排出 3 盒，再數 9 個巧克力）

2910F：小丸子的話…

（F 排出 4 盒，再數 1 個巧克力）

2911T：那題目說這樣子一樣多啊，妳可不可以告訴我 1 盒有幾個？

（F 先兩邊各拿掉 1 包，再各拿掉 2 包，接著兩邊各拿掉 1 個巧克力）

2912T：所以 1 盒有幾個？

2913F：（指巧克力）1 盒就這麼多。

2914T：這麼多是幾個？

（F 點數）

2915F：8 個，那我猜對了

2916T：妳怎麼猜的？

2917F：我用 9 減掉 1，因爲 9 減掉 1 等於 8 個，然後差 1 盒，所以 1 盒就等於 8 個。

2918T：很好。

乘法第 16 題
小新有 1 盒彈珠，2 包彈珠和 8 個彈珠，阿呆有 1 盒彈珠，4 包彈珠和 2 個彈珠，而小新和阿呆有一樣多的彈珠，請問 1 包彈珠有幾個？

3001T：這一題比較難一點

3002F：1 盒、兩包、8 個，還有 1 盒、4 包、2 個

3003T：妳要怎麼表示？

（F 寫出 1盒+2包+8個=1盒+4包+2個）

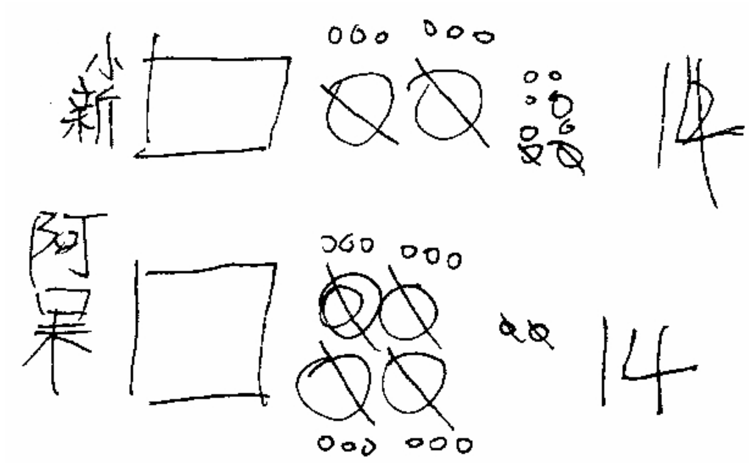
3004T：這樣可以啊，很好

（F 開始畫圖）

3005T：那我問妳，1 包彈珠有幾個？
3006F：…
3007T：（拿出巧克力）來，我也有準備。
（F 排出一邊是 1 盒、2 包和 8 個，另一邊是 1 盒、4 包和 2 個）
3008T：妳能不能看出 1 包有幾個？
3009F 先把兩邊各拿掉 1 盒，兩邊再各拿掉 2 包，最後兩邊各拿掉 2 個
3010F：2 包有 6 個。
3011T：2 包有 6 個，所以 1 包有？
3012F：1 包有 3 個。

請問 1 盒彈珠有幾個？

3013T：那 1 盒呢？
3014F：1 盒有幾包？如果 1 盒有 4 包…四三十二。
3015T：來，我們現在是不是知道 1 包有 3 個，那麼，1 包 1 包，我們都可以拆開啊！
（F 把 1 包畫成 3 個）



3016T：那阿呆是 1 盒加幾個？
3017F：123456，6+6=12，1 盒+12 再加 2
3018T：所以總共是 1 盒加幾個？
3019F：14 個
3020T：那小新
3021F：也是 1 盒+14 個，所以 1 盒也是 14 個
3022T：嗯，阿呆是 1 盒加 14 個，小新也是 1 盒加 14 個，所以他們
3023F：都一樣多啊。所以 1 盒就等於 14 個。
3024T：好，很好，那我們今天就先到這邊。

第五次訪談原案

加法第 13 題
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+4 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

1301T：來吧，我們來看這一題，今天比較少哦，因為我們只剩 4 題囉，你覺得誰比較多？
1302F：這個 N 一樣嗎？
1303T：兩個都是 N 啊
1304F：一樣多嗎？
1305T：在同一題裡面的 N 都一樣多哦！
（F 寫出 N+4>N+2）
1306T：妳覺得 N+4 比較多嘛
1307F：嗯
1308T：那老師問妳，N+4 比 N+2 多幾個？
1309F：多 2 個
1310T：多 2 個，嗯，那妳可以解釋給我聽嗎？
（F 寫出 N+4-N+2=2）
1311T：妳覺得妳的算式對嗎？
1312F：…
1313T：妳的意思是 N+4 減 N+2 嗎？
1314F：嗯！
1315T：那妳能不能舉一個具體的例子來告訴我，像我們之前？
1316F：…
1317T：N+2 可能代表什麼？
1318F：一盒彈珠加 2 個
1319T：那 N+4 呢？
1320F：一盒彈珠加 4 個
1321T：所以這個(N+4)比這個(N+2)多？
1322F：2 個！
1323T：好！很好！簡單嗎？
1324F：嗯！
1325T：愈來愈難哦！

加法第 14 題
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+N 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

1401T：再來看這個問題，妳覺得誰比較多？
1402F：嗯，都有可能…
1403T：有可能一樣多嗎？
1404F：可能
1405T：那 N 等於幾的時候兩個人會一樣？
1406F：N 等於 2 的時候
1407T：N 等於 2 的時候。妳是怎麼算出來的
1408F：這個 N 等於那個 N 啊，所以這個 2 就等於那個 N
1409T：那妳可以告訴老師，當 N 是 2 的時候，小丸子有幾個彈珠嗎？
1410F：4 個
1411T：那小玉呢？
1412F：也是 4 個
1413T：所以他們兩個？
1414F：一樣多！
1415T：很好！那老師問妳，什麼時候小丸子會比較多？
1416F：N…1 的時候
1417T：除了 1 之外呢？
1418F：應該沒了吧？
1419T：沒有了嗎？妳有沒有想過，盒子裡面沒有東西呢？
1420F：0
1421T：嗯，很好哦
1422T：那，什麼時候小玉會比較多？
（F 口中念念有詞）
1423T：妳在想什麼，就說出來啊！
1425F：3 以上的數
1426T：很好，那妳是怎麼算出來的？
1427F：如果一盒有 3 個，那小丸子有 5 個，小玉有 6 個啊。所以小玉比較多。
1428T：嗯…那妳覺得 3 以上都會是小玉比較多嗎？
1429F：嗯。
1430T：好吧…

乘法第 17 題
小新有 2×N+5 個巧克力，阿呆有 3×N+5 個巧克力，請問誰的巧克力比較多？

3101T：看這題。
3102F：阿呆比較多
3103T：爲什麼阿呆比較多？
3104F：因爲…如果 N 是 1 盒的話，阿呆就是 3 盒+5 個，小新是 2 盒+5 個，所以阿呆會比小新多

3105T：有沒有可能兩個人一樣多？
3106F：有吧
3107T：什麼時候？
3108F：就是…阿呆吃掉一盒的時候啊
3109T：我說他們這樣，不能吃掉啦！有沒有可能？
3110F：…如果是 6 的話…（反覆代入數字計算）
3111T：他們有沒有可能一樣多？
3112F：不可能。
3113T：那我如果說有可能呢？
3114F：有可能的話…
3115T：當盒子裡沒東西的時候啊！
3116F：對啊，沒東西的時候，兩個人…咦！對啊。

乘法第 18 題
小新有 N+7 個彈珠，阿呆有 2×N+1 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

3201T：妳覺得誰比較多？
3202F：不一定耶…
3203T：妳的不一定是指有可能小新比阿呆多？
3204F：嗯！
3205T：也有可能阿呆比小新多？
3206F：嗯！
3207T：也有可能兩個人一樣多嗎？
3208F：嗯
3209T：好，那我問妳，妳覺得什麼時候他們兩個會一樣多？
3210F：…
3211T：如果 N 是多少的時候他們會一樣多？妳可以畫圖哦！
3212F：如果 N 是…
3213T：你可以用之前講的彈珠來想嗎？
3214F：彈珠彈珠…嗯…如果這個改成加 7 呢？
3215T：妳要不要用巧克力來排？還是妳要用畫的？
3216F：這裡是 N+7…然後……這裡是 2N+1，嗯……
（F 拿起巧克力，分兩堆，一堆是 1 盒加 7 個，一堆是 2 盒加 1 個）
3217F：（指 2 盒加 1 個那堆）如果這個減掉 1 盒，再加 6 個，就會一樣多…
3218T：所以妳覺得 1 盒是幾個？
3219F：6 個
3220T：那妳可以幫老師寫一下嗎？
（F 寫出一盒是 6 個）
3221T：可是題目沒有 1 盒啊！題目只有 N 耶

3222F：所以 N 是 1 盒
3223T：那 N 是幾個？
3224F：6 個
3225T：所以當 N 等於 6 個的時候，小新跟阿呆的彈珠會一樣多嗎？
3226F：嗯
3227T：等於的時候很簡單嗎？
3228F：嗯
3229T：那我現在問妳啦，小新什麼時候會比阿呆多？
3230F：……
3231T：N 是多少的時候？
3232F：如果 7 個的時候……如果是 8 個的時候…
3233T：那妳覺得什麼時候阿呆比小新多？
3234F：就是……N 是 8 的時候
3235T：N 是 8 的時候。嗯，那還有沒有別的可能？
3236F：8…以上
3237T：8 以上，妳覺得 8 以上阿呆都會比較多？
3238F：嗯。
3239T：爲什麼？
3240F：因爲…如果 N 是 7 的話，7 乘 2 加 1 等於 15 啊，啊 7 加 7 就等於 14。咦！7 也有可能！
3241T：7 也有可能。所以妳覺得應該是？
3242F：7 以上
3243T：嗯，爲什麼？妳說說妳的感覺。
3244F：因爲 7 以上都是阿呆比較多
3245T：因爲妳剛試 7 啊 8 啊，都是阿呆比較多嗎？
3246F：對啊，所以 7 以上都是阿呆比較多。
3247T：因爲妳試了 2 個，妳覺得…
3248F：都是
3249T：那妳覺得要不要再試第 3 個，例如 9 啊，20 啊，100 啊？
3250F：如果是 9 的話…
3251T：還是一樣嗎？
3252F：嗯
3253T：那我現在問妳啊，如果是小新比較多呢？什麼時候小新會比較多？
3254F：N 等於…5 的時候
3255T：5，嗯，還有沒有別的可能
3256F：有！5 以下的數
3257T：5 以下的數，可以解釋一下嗎？
3258F：嗯…因爲當是 5 的時候小新就比阿呆多啊

3259T：嗯
3260F：啊接下來 4 也是小新比較多啊，所以接下來都是小新比較多
3261T：都是小新比較多？
3262F：對啊
3263T：嗯，很好哦，那我們的訪談到這邊全部結束了哦！

附錄四：國中一年級訪談原案

第一次訪談原案

0001T：這不是考試，所以你能回答就盡量回答，不知道題目的意思可以問我。
0002R：嗯
0003T：你叫什麼名字啊？
0004R：小融。
0005T：小融，嗯，我姓莊，叫我莊老師就可以了。

加法第 1 題
小新有一些彈珠，後來風間又給他 9 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0101T：來，你先看一下題目。
0102R：可以直接寫答案嗎？
0103T：當然啊。
（R 寫出 x+9）
0104T：你的 x 是指什麼？
0105R：嗯，小新的那些彈珠。

如果這時候小新有 13 個彈珠，問小新原來有幾個彈珠？

0106T：好，你可以不用寫 Ans，直接寫答案就好。那你這個要幫我寫算式哦。
（R 寫出 13-9=4）
0107T：如果要你先列式呢？
0108R：先列式？
0109T：一元一次方程式，就是先列式表達這個問題。
0110R：……
0111T：就是啊，要用 x 啊，用一個式子來表達這個問題，你覺得要怎麼表達？
（R 寫出 x+9=13）
0112T：嗯，很好。

加法第 2 題
小新有一些彈珠，後來送給美美 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0201T：來，你看第 2 題。
（R 寫出 x-4）
0202T：嗯，那你的 x 是什麼？
0203R：也是一樣，小新原來有的彈珠。
0204T：嗯，那等一下你如果 x 是代表什麼，就在下面寫一個 x，這樣我就了解

了。
0205R：嗯。

如果這時候<u>小新</u>剩下 12 個彈珠，問<u>小新</u>原來有幾個彈珠？

0206T：好，接下來。那<u>小新</u>原來有幾個彈珠呢？
（R 寫出 12+4=16，x-4=12）
0207T：嗯，很好。這題目應該很簡單吧？
0208R：嗯。

加法第 3 題
<u>小新</u>有 6 個彈珠，後來<u>阿呆</u>給小新一些彈珠，請問<u>小新</u>這時候有幾個彈珠？

0301T：下一題。
0302R：<u>阿呆</u>給<u>小新</u>一些。
0303T：很好，幫我寫在那邊我就知道了。
（R 寫出 6+x）

如果這時候<u>小新</u>有 11 個彈珠，請問<u>阿呆</u>給了<u>小新</u>幾個彈珠？

0304T：嗯，所以？
（R 寫出 11-6=5，6+x=11）
0305T：嗯，很好，前面的問題都比較簡單，算是熱身，好不好？

加法第 4 題
<u>小新</u>有 12 個彈珠，後來送給妹妹一些彈珠，請問<u>小新</u>這時候有幾個彈珠？

（R 在「送給妹妹」下面寫 x，並寫出 12-x）

這時候<u>小新</u>剩下 5 個彈珠，請問<u>小新</u>送給妹妹幾個彈珠？

0401T：所以 x 等於？
（R 寫出 12+5=17，12-x=5）
0402T：嗯，我們來看一下第 4 題，你覺得小新送給他妹妹 17 個彈珠？你看一下整個問題。
（R 寫出 12-5=7）
0403T：嗯？你覺得 17 對，還是 7 對？
0404R：（指 7）這個。
0405T：那你剛剛爲什麼說是 17？
0406R：看錯了。
0407T：（指 12-x）你剛剛是根據這個式子去判斷的嗎？
（R 點頭）
0408T：那如果不根據這個算式，直接看題目你是不是很容易可以算出這個？

0409R：嗯。

0410T：你覺得是這個算式誤導你嗎？

0411R：差不多，有一點。

0412T：所以像這些問題，你覺得列 x 比較方便，還是直接算比較方便？

0413R：直接算。

0414T：直接算，列 x 比較容易誤導你嗎？

0415R：就…比較容易搞混。

乘法第 1 題
小光有 6 盒巧克力，每 1 盒不知道有幾個，請問一共有幾個巧克力？

（R 在「1 盒」下寫出 x，並寫出 6x）

如果一共有 30 個巧克力，請問 1 盒中有幾個巧克力？

1501T：接下來，如果一共有 30 個巧克力的話，問你一盒有幾個？

（R 寫出 30÷6=5，6x=30）

1502T：嗯，很好。

乘法第 2 題
小光有一些巧克力，分裝成 7 盒， 請問每盒有幾個巧克力？

1601T：繼續看。

（R 在「一些巧克力」下寫出 x，並寫出 $x \div 7 = \frac{x}{7}$ ）

如果每盒有 11 個，請問小光原來有幾個巧克力？

1602T：嗯

（R 寫出 11×7=77， $\frac{x}{7} = 11$ ）

1603T：你這個 77 是從 $\frac{x}{7} = 11$ 推過來的嗎？

1604R：嗯…反推回去。

1605T：嗯。

乘法第 3 題
小光有 2 盒巧克力，每 1 盒中有 3 包，每 1 包不知道有幾個，請問共有幾個巧克力？

1701T：你現在假設什麼是 x？老師幫你指定好不好？

（R 在「每一包」下寫出 x）

1702T：很好，那你幫老師把式子詳細列出來。

1703R：1 包裡面不知道有幾個，所以是 x。
1704T：嗯。
（R 寫出 $x\times3=3x$，$3x\times2=6x$）
1705T：所以總共是 6x？
（R 點頭）

如果一共有 42 個巧克力，請問 1 包中有幾個巧克力？

（R 寫出 $42\div6=7$，$6x=42$）
1706T：所以 1 包裡面有 7 個？
（R 點頭）
1707T：好，那老師問你一個問題哦，你剛剛都是用兩個式子，你能不能用一個式子把問題表達出來。
1708R：是…還不知道 1 包有幾個的時候嗎？
1709T：嗯。
1710R：我想想看。本來的想法是不用這個（指 $3\times x=3x$），如果要詳細的話，才要這個（指 $3\times x=3x$）。
1711T：嗯，好，那你能不能把兩個式子寫在一起？
1712R：兩個式子…
1713T：我問你你的 3x 代表什麼？
1714R：3x 代表 3 包裡面的全的巧克力，
1715T：也就是？
1716R：也就是一盒。
1717T：現在有 2 盒，也就是？
1718R：$3x\times2$
1719T：那 $3x\times2$ 如果寫慢一點的話呢？
1720R：慢一點是？
1721T：如果要你用「連乘」表示？
1722R：連乘？
1723T：你看嘛，你這 3x 代表 $3\times x$。
1724R：……
1725T：好，沒關係，這樣就可以了。

乘法第 4 題
老師有一些巧克力，分裝成 5 盒後，每 1 盒再分成 2 包，請問每包有幾個巧克力？

1801T：來下一題。
1802R：是要全部都是詳答，還是？
1803T：嗯，詳細一點。

（R 寫出 x×2=2x，2x×5=10x）

如果 1 包有 4 個巧克力，問老師原來有幾個巧克力？

（R 寫出 x=4，4×2=8，8×5=40）

1804T：來，你先看一下，老師有一些巧克力，分裝成 5 盒，然後每 1 盒再分裝成 2 包，請問每包有幾個巧克力？我現在問你的是每包有幾個巧克力耶？如果你告訴我每包是 x 個，那不就等於沒有回答了嗎？

1805T：（指「老師有一些巧克力」）如果這個是 x 的話呢？

（R 寫出 $x \div 5 = \frac{x}{5}$，$\frac{x}{5} \div \frac{10}{5} = \frac{x}{5} \times \frac{5}{10} = \frac{x}{10}$）

1806T：這 $\frac{10}{5}$ 是從那裡來的？

1807R：除以 2 就等於除以 $\frac{10}{5}$，通分。

1808T：嗯，所以我們知道每包裡面有 $\frac{x}{10}$ 個巧克力？

（R 點頭）

（R 寫出 4×2=8，8×5=40）

1809T：那如果要你列式呢？

1810R：列式？

1811T：這個 4 等於上面的什麼？

1812R：每包的巧克力。

1813T：等於上面你這些算式的什麼？

1814R：$\frac{x}{5}$

1815T：$\frac{x}{5}$？那你的 $\frac{x}{10}$ 是什麼？

1816R：這裡每包有幾個巧克力。

1817T：對啊，那這個是等於？

1818R：這個就等於這個（指 4）。

1819T：嗯，那如果要你列一個式子來表示問題，你要怎麼寫？

1820R：$\frac{x}{10} = 4$

1821T：嗯，沒錯，你們考試的時候會不會要你們列方程式？

1822R：這種的不會。

加法第 5 題
星期日小新原來有一些彈珠，星期一和風間比賽贏了 3 個彈珠，星期二，小新幫媽媽擦玻璃，媽媽給他 4 個彈珠，請問小新這時候有幾個彈珠？

0501R：小新原來的彈珠 x 個。

（R 寫出 x+3+4=x+7）

0502T：好。

小新發現口袋裡有 12 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？

（R 寫出 x+7=12，12-7=5）

0503T：所以小新原來有幾個？

0504R：5 個。

0505T：確定？

0506R：嗯。

0507T：好，你們幾點午休完？

0508R：1 點 20 分。

加法第 6 題
星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和豬太郎比賽輸了 3 個彈珠，星期二，小丸子不小心掉了 7 個彈珠， 請問這時候小丸子有幾個彈珠？
如果小丸子發現口袋裡有 5 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和豬太郎比賽輸了 3 個彈珠，星期二，

x

小丸子不小心掉了 7 個彈珠， 請問這時候小丸子有幾個彈珠？

$x-3-7=x-10$

如果小丸子發現口袋裡有 5 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

$x-10=5$

$5+10=15$

加法第 7 題
星期日小新原來有一些彈珠，星期一正男給他 2 個彈珠，星期二，他跟風間比賽輸了 6 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？
如果小新發現口袋裡有 7 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？

星期日小新原來有一些彈珠，星期一正男給他 2 個彈珠，星期二，他跟風間比賽輸了 6 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？

x

$x+2-6=x-4$

如果小新發現口袋裡有 7 個彈珠，請問小新星期日時有幾個彈珠？

$x-4=7$

$7+4=11$

加法第 8 題
星期日小丸子原來有一些彈珠，星期一和丸尾比賽輸了 3 個彈珠，星期二，跟小玉出去逛街買了 5 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？

0801T：好，下一題。

（R 在「小丸子原來有一些彈珠」下寫出 x）

（R 寫出 x-3+5=x+2）

0802T：老師問你哦，你這個 x-3+5 怎麼變成 x+2？解釋給老師聽。

0803R：因為+5 跟-3 加起來，-3 加+5 就等於 2，所以就是 x+2

如果小丸子發現口袋裡有 9 個彈珠，請問她星期日時有幾個彈珠？

（R 寫出 x+2=9，9-2=7）

0804T：嗯，好。

加法第 9 題
星期日小新原來有 14 個彈珠，星期一和風間比賽輸了一些彈珠，星期二和正男比賽又贏了 5 個彈珠，請問這時候小新有幾個彈珠？

（R 寫出 $14-x+5=19-x$ ）

0901T：那你這裡又怎麼變成 19 的？

0902R：因為這（指 x）還是未知數，所以先暫時不用理它，把 5 和原來的彈珠加起來。

0903T：那你的意思就是可以先加上 5 再減 x？

0904R：嗯。

0905T：好，ok。

如果小新發現口袋裡有 8 個彈珠，請問小新星期一和風間比賽輸了幾個彈珠？

（R 寫出$19-x=8$，$19-8=11$）

0906T：你是怎麼知道要用 19-8？說說你的想法。

0907R：因爲他是輸掉，所以輸掉就是減，贏就是加嘛。

0908T：嗯，我的意思是說你怎麼從 19-x=11 推得 19-8 的？

0909R：因爲是未知數嘛，因爲減完所有東西之後剩下 8，8 之後那想求和風間比賽輸的那些彈珠，所以就要用原來贏的…所有的彈珠加上贏的去減掉後來剩下的彈珠，就是風間贏的。

0910T：嗯，說的很好。所以 x 等於？

0911R：11 個。

0912T：11 個，好。

加法第 10 題
星期日小丸子原來有 15 個彈珠，星期一爺爺又買了一些彈珠給她，星期二她和豬太郎比賽，輸了 9 個彈珠，請問這時候小丸子有幾個彈珠？

（R 在「爺爺買了一些彈珠」下寫 x，並寫出$15+x-9=6+x$）

如果這時小丸子發現口袋裡還有 8 個彈珠，請問爺爺買了幾個彈珠給她呢？

1001T：再來。

（R 寫出$6+x=8$）

1002T：（指 6+x=8）如果你可以直接看出答案也可以直接跟我說，不一定要寫算式。

1003T：6+x=8，x 是多少？

（R 寫出 6+8=14）

1004T：我問你，6 加多少會等於 8？

1005R：2

1006T：所以你如果可以直接看出來，也 ok。所以 x 是 2？

1007R：嗯。

乘法第 5 題
媽媽買了 3 盒巧克力，分給小新一家 4 人，請問每個人分到幾個巧克力？

1901T：假設 1 盒有 x 個。

（R 寫出$3x \div 4=\frac{3x}{4}$）

1902T：嗯，很好，那我問你，每個人可以分到幾盒？

1903R：每個人分到幾盒？

1904T：嗯。

1905R：四分之三盒。

1906T：嗯，好。

如果每個人分到 6 個巧克力，請問 1 盒巧克力有幾個？

（R 寫出$\frac{3x}{4}=6$）

1907T：沒關係，你也可以用除法做啊。

（R 寫出 3x÷4=6，3x=24）

1908T：所以 x 等於？

（R 寫出 x=8）

1909T：好，如果要你用這個做的話，你覺得比較難？

1910R：嗯。

1911T：用除法比較簡單？

1912R：嗯。

乘法第 6 題
媽媽買了好多盒彈珠，全部分給<u>小丸子</u>和姐姐，結果 2 人都得到 24 個彈珠，請問每盒有幾個彈珠？

2001T：這張寫完就好了，老師下次再來哦。

2002R：好。

2003T：來看下面。

2004T：你可以列式嗎？用除法也沒關係。

（R 寫出 24×2=48，$48\div x=\frac{48}{x}$）

如果每盒中有 6 個彈珠，請問媽媽買了幾盒彈珠呢？

2005T：嗯。看下面。

（R 寫出 48÷x=6，48÷6=8）

2006T：你可以解釋$\frac{48}{x}$怎麼來的嗎？

2007R：好多盒彈珠，盒子是 x 個嘛，然後 x 個彈珠，就因爲全部的彈珠就是 48 個，48 個又除掉…因爲他說要 1 盒彈珠有幾個，所以 48÷x

2008T：嗯，很好哦！

乘法第 7 題
7-11 大特價，<u>小丸子</u>買 3 盒彈珠，老闆又多送她 6 個彈珠，請問小丸子一共有幾個彈珠？

2101T：辛苦了，最後一題哦。

（R 寫出 3×x=3x，3x+6）

如果她回家算一算，發現一共有 30 個彈珠，請問每 1 盒中有幾個彈珠呢？

2102T：嗯，再來。

2103T：你可以慢慢寫出你的算式給我看嗎？

（R 寫出 3x+6=30，30-6=24，3x=24，x=8）

2104T：1 盒等於 8 個，怎麼來？

2105R：用 24÷3。

2106T：嗯，很好，我們今天先到這邊。下次再來找你。

第二次訪談原案

乘法第 8 題
小新買了 7 盒彈珠，走路回家時，不小心跌倒，打破了其中一盒，掉出了 5 個彈珠，請問這時候小新剩幾個彈珠？

2201T：來，我們看一下這題。

（R 在「其中一盒」下寫出 x，並寫出 7×x=7x，7x-5）

2202T：所以這時候小新剩下 7x-5 個？

2203R：嗯。

如果小新回家算一算，發現他還有 23 個彈珠，請問每盒中有幾個彈珠呢？

2204T：你可以先列式，再算答案，好不好？

2205R：哦。跟上次一樣嗎？

2206T：對。那你題目如果看不懂可以問我。

（R 寫出 7x-5=23，23+5=28，28÷7=4）

2207T：所以 1 盒裡面有 4 個？

2208R：嗯。

2209T：好，那老師問你哦，你從這個式子（7x-5=23）算下來，會從這個式子來作計算嗎？

2210R：什麼意思？

2211T：就是最後的答案要是「x=…」。

2212R：……

2213T：老師上課教這樣嗎？

2214R：嗯。

乘法第 10 題
花輪把彈珠分給 7 個小朋友，每個小朋友得到一樣多的彈珠，小丸子不小心掉

了 3 個，請問她剩下幾個彈珠？

2401T：好吧，下一題。
2402R：這個「她」是花輪還是小丸子？
2403T：是小丸子。花輪是男生你不知道嗎？
2404R：不知道，我沒看。
（R 在「每個小朋友得到一樣多的彈珠」下寫 x，並寫出 x-3）
2405T：嗯，那我如果假設花輪的彈珠是 x 個，那你要怎麼列式？怎麼表示小丸子的彈珠？
（R 寫出 $x \div 7 = \frac{x}{7}$ ，$\frac{x}{7} - 3$ ）
2406T：所以這是小丸子的彈珠？
（R 點頭）
2407T：好，那到這裡先停下來老師問你哦！像這樣子的問題啊，你都是用這樣子做？
（T 寫出 4x+3=19，19-3=16，16÷4=4）
2408R：嗯。
2409T：那你們沒教過像這個…
（T 寫出 4x+3=19，4x=○，x=__）
2410R：有哦。這個有！
2411T：那你沒辦法用這樣做？
2412R：有時候會選其中一樣。

如果小丸子剩下 5 個彈珠。請問花輪原來有幾個彈珠？

2413T：那你這一題要不要試試看用這樣做？
2414R：這個比較……
2415T：先列式嘛。題目說他最後剩下 5 個…
（R 寫出 $\frac{x}{7} - 3 = 5$ ，$\frac{x}{7} = 8$ ）
2416T：先停一下，老師問你，你這一步是怎麼到下面那一步的？
2417R：就是把-3 移過來，這個就要變加的。
2418T：有沒有另外一種說法？
2419R：…
2420T：兩邊怎樣？
2421R：兩邊…兩邊同時加 3。
2422T：嗯，很好。你會嘛，那繼續。
（R 寫出 x=56）
2423T：嗯，那像這樣子，你要怎麼做，才能算出 x=56？
2424R：因為這是除嘛。所以就再乘回去，所以就乘以 7。

2425T：所以兩邊怎樣？

2426R：兩邊同乘以 7。

2427T：嗯，很好，兩邊同乘以 7。那我問你哦，你覺得你比較喜歡用這種方法做（逆運算），還是比較喜歡用這種方法（等量公理）？就是兩邊同時幹嘛幹嘛…

2428R：這種（逆運算）。

2429T：爲什麼？

2430R：通常…有時候都是兩個都會用。

2431T：兩個都會用？交替使用？

2432R：嗯。

乘法第 11 題
<u>小新</u>有 1 盒彈珠，<u>正男</u>有 3 盒彈珠， 請問他們一共有幾個彈珠？

2501T：然後…<u>小新</u>有 1 盒，<u>正男</u>有 3 盒，他們總共有幾個巧克力？

（R 在「1 盒巧克力」下寫 x，並寫出 3×x=3x，x+3x=4x）

2502T：所以他們一共有 4x 個巧克力嗎？

2503R：嗯。

2504T：你的 x 是一盒巧克力的個數？

2505R：嗯。

2506T：好

如果他們一共有 36 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？

（R 寫出 4x=36，36÷4=9）

2507T：嗯，1 盒就是？

2508R：9 個。

2509T：嗯，好。

乘法第 12 題
<u>小新</u>和<u>正男</u> 2 人平分一盒彈珠，<u>小丸子</u>、<u>小玉</u>和<u>美美</u> 3 個人平分一盒彈珠，請問<u>小新</u>和<u>小丸子</u>兩個人一共有幾個彈珠？

2601T：我幫你假設好不好？1 盒有 x 個。

（R 寫出 $x \div 2 = \frac{x}{2}$ ，$x \div 3 = \frac{x}{3}$ ，$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} = \frac{5x}{6}$ ）

2602T：好，我問你，你的 $\frac{5x}{6}$ 代表幾盒的彈珠？

2603R：六分之五盒，<u>小新</u>和小丸子的彈珠。

如果小新和小丸子兩個人一共有 15 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？

2604T：可以用剛剛的方法做嗎？

2605R：兩邊先除以 3

2606T：除以 3。

2607R：不對，乘以 6

2608T：乘以 6

（R 寫出$6\times\frac{5x}{6}=15\times 6=80$ ，$5x=80$ ，80÷5=16，$x=16$）

2609T：15 乘以 6 是 80 嗎？

（R 寫出$5x=90$ ，$x=18$）

2610T：嗯，好。你怎麼心算錯誤啊？

2611R：沒看清楚。

乘法第 13 題
小丸子有 5 盒彈珠，小玉有 2 盒彈珠，請問小丸子的彈珠比小玉多幾個？

2701T：假設一盒有 x 個。

（R 寫出 5×x=5x，2×x=2x，5x-2x=3x）

如果小丸子的彈珠比小玉的彈珠多 15 個，請問 1 盒彈珠中有幾個？

（R 寫出 3x=15，x=5）

2702T：嗯，一盒 5 個嗎？

（R 點頭）

乘法第 9 題
豬太郎的媽媽煮了一鍋湯圓，剛好分成 5 碗，每個人碗中有一樣多的湯圓，豬太郎的媽媽不想吃這麼多，於是又分給豬太郎 4 個湯圓，請問豬太郎碗裡有幾個湯圓？

2301T：繼續。

（R 在「一鍋湯圓」下寫 x，並寫出$x\div 5=\frac{x}{5}$ ，$\frac{x}{5}+4$）

如果豬太郎碗中有 9 個湯圓，請問豬太郎的媽媽煮了幾個湯圓？

2302T：嗯，好。繼續看下面。

（R 寫出$\frac{x}{5}+4=9$ ，$9-4=5$）

2303T：所以那裡等於 5？你現在寫$9-4=5$嘛，所以是⋯

2304R：一碗湯圓。

2305T：所以在這裡是那裡？

2306R：這個（指$\frac{x}{5}$）

2307T：$\frac{x}{5}$，嗯，很好。

（R 寫出$5\times 5=25$）

2308T：很好，你不會覺得用等量公理比較容易嗎？

2309R：不會。

加法第 11 題
星期日，小丸子和小新有一樣多的彈珠 星期一，他們考試都考 100 分，老師送給他們每一個人 6 個彈珠；星期二，小丸子和小玉比賽輸了 6 個彈珠，小新和風間比賽，輸了 8 個彈珠；星期三，小丸子在路上撿到 4 個彈珠，小新的媽媽買了 5 個彈珠給小新； 請問小丸子和小新這時候有幾個彈珠？

（R 在「一樣多的彈珠」下寫 x）

1101T：那你分別幫我把小新跟小丸子的彈珠數表示出來。

（R 寫出

小丸子 $= x+6-6+4 = x+4$

小新 $= x+6-8+5 = x+3$

1102T：好，繼續。

如果小丸子發現她有 11 個彈珠，那請問小新星期四有幾個彈珠？

1103R：小丸子發現他有 11 個是在禮拜天還是最後一天？

1104T：最後一天。

（R 寫出 x+4=11 11-4=7，x=7，7+3=10）

1105T：嗯，很好，先算出 x 再算出 10 嘛。那你看禮拜三的時候，小新和小丸子差幾個啊？就是最後。

1106R：禮拜三的時候⋯差 1 個

1107T：誰比較多？

1108R：小丸子。

1109T：所以這一題說小丸子有 11 個的話，你就知道小新有？

1110R：10 個

1112T：因爲小丸子比小新？

1113R：多 1 個。

1114T：ok

乘法第 14 題

濱崎、花輪、丸尾、豬太郎、山田和藤木 6 人平分一盒彈珠，小丸子、小玉、美環和 3 個人平分一盒彈珠，請問美環比花輪多幾個彈珠？

（R 在「一盒彈珠」下寫 x，並寫出

$$x \div 6 = \frac{x}{6}$$

$$x \div 3 = \frac{x}{3}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{2x}{6} - \frac{x}{6} = \frac{x}{6}$$

如果美環比花輪多了 3 個彈珠，請問 1 盒彈珠有幾個？

2801T：那我現在如果跟你說，美環比花輪多 3 個的話。

2801R：那現在是求怎樣？

2803T：求 1 盒有幾個？

（R 寫出 $\frac{x}{6} = 3$ ，x=18）

2804T：所以 1 盒有幾個？

2805R：18 個。

加法第 12 題

小丸子有 2 盒彈珠，小玉有 1 盒彈珠，加上 12 個彈珠，如果小丸子和小玉的彈珠一樣多。請問你要怎麼表示？

1201R：表示…

（R 寫出 2xx=2x，2x=x+12）

請問 1 盒彈珠有幾個？

1202T：嗯，很好，那你可以算出 1 盒有幾個嗎？

（R 寫出 2x-x=12，x=12）

1203T：1 盒 12 個？

1204R：嗯。

1205T：好，很好。

乘法第 15 題

丸尾有 3 盒彈珠，加上 9 個彈珠，小丸子有 4 盒彈珠，加上 1 個彈珠，如果小丸子和丸尾的彈珠一樣多。請列出式子表示。

2901T：這題比較難一點點。我們做到這題就好了。

（R 寫出

$$3 \times x = 3x \quad 4 \times x = 4x$$

$$3x + 9 = 4x + 1$$

2902T：所以你這個式子是代表…（指 3x+9）這邊是什麼？
2903R：這邊是丸尾的
2904T：（指 4x+1）那這邊呢？
2905R：小丸子的。

請問 1 盒彈珠有幾個？

2906T：好。接下來
（R 寫出 x=8）
2907T：8，你是怎麼算出來的，你可以跟我講嗎？
2908R：順序搞錯而已
2909T：那你怎麼把 8 算出來的？
（R 寫出

$$4x+1=3x+9$$
$$4x-3x=9-1$$

2910R：就是 3x 移過來變負的，1 移過去變減的
2911T：嗯，很好哦，那我們今天先到這邊。

第三次訪談原案

乘法第 8 題-類題
小丸子買了 9 盒彈珠，走路回家時，不小心跌倒，打破了其中一盒，掉出了 6 個彈珠，請問這時候小丸子剩幾個彈珠？

（R 在「其中一盒」下寫 x，並寫出 9×x=9x，9x-6）
2215T：嗯。

如果小丸子回家算一算，發現她還有 39 個彈珠，請問每盒中有幾個彈珠呢？

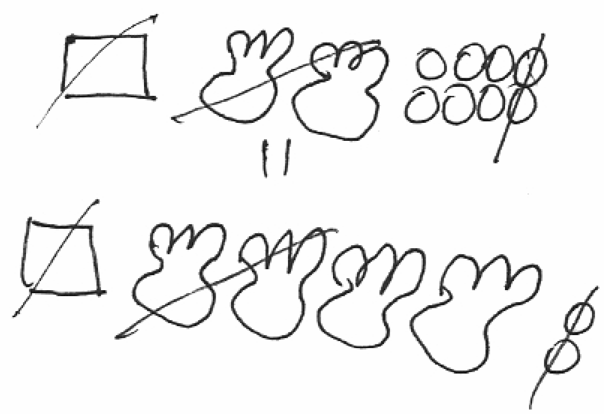
（R 寫出 9x-6=39，39+6=45，45÷9=5）
2216T：所以？
2217R：所以 1 盒有 5 個。
2218T：那你看一下，確定 1 盒有 5 個嗎？
2219R：對啊！
2220T：你算出來 x 是 5 嘛。
2221R：嗯。

2222T：那你覺得 5 這個答案可不可以？
2223R：不合理。
2224T：不合理嗎？爲什麼？
2225R：因爲 1 盒應該要有 6 個以上，但是算出來只有 5 個。
2226T：對啊。這個答案不合理的話，所以這一題應該是怎樣？
2227R：應該是…無解。
2228T：那你剛剛怎麼沒看出來？
2229R：有啊，上次也有啊。
2230T：你有看出來怎麼沒跟我講？
2231R：有看出來啊，可是想說，就算啊。
2232T：你覺得有問題一定要跟我講啊！
（R 點頭）
2233T：所以你上次就有發現了？
2234R：有，有一題，跟這題差不多。

乘法第 16 題
小新有 1 盒彈珠，2 包彈珠和 8 個彈珠，阿呆有 1 盒彈珠，4 包彈珠和 2 個彈珠，而小新和阿呆有一樣多的彈珠，請問 1 包彈珠有幾個？

3001T：接下來這題比較難。你可以先列式表示小新跟阿呆是一樣多的，試試看
3002R：全部的彈珠是 x 個。
3003T：嗯 。
（R 寫出 $x+\frac{x}{2}+8=x+\frac{x}{4}+2$

3004T：你把這個式子解釋給老師聽好不好？
3005R：1 盒彈珠嘛，就 x 啊，然後就是除以包數啊，8 個彈珠就直接加 8…
3006T：我現在題目的意思是，小新有 1 盒、2 包再加 8 個彈珠，就是他有 3 個包裝，那另一邊就是有 1 盒彈珠、4 包彈珠和 2 個彈珠。不是說他一盒有 4 包，一盒有 2 包哦。如果是這樣子呢？
3007R：……
3008T：你可以畫圖嗎？你把這些包裝都畫出來。
（R 畫出



3009T：那現在要問你，一包有幾個？
3010R：3 個，有 3 個。
3011T：你告訴我，你 3 個是怎麼看出來的？
3012R：（指 1 盒）這個跟這個去掉，（指 1 包）這 2 包跟這 2 包去掉，然後這 2 個跟這 2 個，就剩下這 2 個和這 6 個，平均分配。
3013T：嗯，很好。那如果要你列成方程式的話，可以嗎？
3014R：…
3015T：沒有限定用一個未知數。
3016R：什麼意思？
3017T：你可以用 2 種
3018R：……

請問 1 盒彈珠有幾個？

3019T：沒關係，那接下來，你覺得 1 盒有幾個？
3020R：1 盒哦………6 個，1 盒有 6 個
3021T：6 個，為什麼？
3022R：猜的。
3023T：你覺得 1 盒有沒有可能等於 7 個
3024R：為什麼？
3025T：我問你覺得有沒有可能？
3026R：它是幾個應該都可以吧！
3027T：為什麼？
3028R：因為它（指 1 盒）這兩個都是一樣的啊，啊總數幾乎都是一樣的啊，不管它有幾個，答案都是一樣啊。
3029T：嗯，很好，你可以再說一次嗎？
3030R：因為它總數都是一樣的，（指 1 盒）這兩個盒子都是一樣的啊。
3031T：嗯，很好。

加法第 13 題
<u>小丸子</u>有 N+2 個彈珠，<u>小玉</u>有 N+4 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

1301T：再來，我要問你，如果<u>小丸子</u>有 8 個的話，<u>小玉</u>有幾個？
1302R：10 個。
1303T：為什麼？
1304R：8 個減掉 2 嘛，就是 6 個，這是 N，6+4=10；也可以是，因為這個多兩個（N+4），N 是數目一樣嘛，所以多兩個，就是這個（N+2）再加 2 就好了。

1305T：所以你認爲 N+4 比 N+2…
1306R：多…多 2 個。

加法第 14 題
小丸子有 N+2 個彈珠，小玉有 N+N 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

1401R：小丸子。
1402T：小丸子比較多？
1403R：因爲，就算 N 是 0 的話，N+2 等於 2 個，如果 0+0 就等於 0
1404T：如果 N 不是 0 呢？
1405R：N 不是 0…如果像 N 是 5 的話。加起來是 7 嘛…咦，這個答案都還不知道啦！
1406T：所以你覺得怎樣？
1407R：有可能大，也有可能小，也有可能等於
1408T：很好，那你能不能告訴我，什麼時候大，什麼時候小，什麼時候等於？
1409R：大於 2 的時候。
1410T：你幫我寫一下，什麼時候小玉會比較多？
1411R：N 大於 2 的時候。
1412T：那什麼時候，兩個會相等？
（R 寫出 2+2=4，又在「N+N」下面寫 2+2）
1413R：2 的時候，N 是 2 的時候。
1414T：怎麼算出來的？
1415R：因爲如果 N 是 2 的時候，小丸子是 N+2 就等於 4，如果這個 N 是 2，那這個也是 2，這邊也等於 4。
1416T：所以你是用數字代進去的？
1417R：嗯。
1418T：那這邊 N 大於 2，你也是用數字代的嗎？
1419R：嗯。
1420T：那你覺得沒有錯？
1421R：嗯。
1422T：那如果是小丸子比較多的時候呢？
1423R：小丸子比較多就是…N 小於 2 的時候。

乘法第 17 題
小新有 2×N+5 個巧克力，阿呆有 3×N+5 個巧克力，請問誰的巧克力比較多？

3101R：（指 3N+5）這個比較多。
3102T：3N+5 比 2N+5 多？
3103R：嗯。

3104T：有沒有可能相等？有沒有可能 2N+5 比較多？
3105R：有可能…大於或是等於。
3106T：等於的時候是怎樣？
3107R：N 是 0 的時候
3108T：那有沒有可能小於？
3109R：小於哦？不可能…
3110T：嗯。
3111R：除非 N 是負的時候。
3112T：嗯，好。那 N 是負的都行嗎？
3113R：嗯，不行…N 是－1 才可以
3114T：為什麼？
3115R：因為如果 N 是－2 的話，阿呆的巧克力就變成負的了，不行。
3116T：喔，所以 N 只能是 0 和－1 嗎？
3117R：……嗯。
3118T：很好哦。

乘法第 18 題
小新有 N+7 個彈珠，阿呆有 2×N+1 個彈珠，請問誰的彈珠比較多？

3201T：好，來。
3202R：這也差不多…
（R 寫出 N+7<2N+1, N+7=2N+1）
3203T：那有沒有可能小於？
3204R：有！有！
3205T：那你把所有的情況都寫出來。什麼時候 2N+1 會大於 N+7？
3206R：N……
（R 寫出 N<5）
3207T：N 小於 5 的時候，誰會比較大？
3208R：……沒有沒有
（R 寫出 N<4）
3209T：好，那 N<4 的時候，誰會比較大？
3210R：沒有沒有，這答案錯了，7…
（R 寫出 N<7）
3211T：嗯，N 小於 7 的時候，怎樣？
3212R：N 小於…N 小於 7 的話，這個（指 N+7）會比較大
3213T：N 小於 7 的時候，N+7 會比較大？
3214R：嗯
3215T：那你是怎麼算出來的？
3216R：就慢慢算。

3217T：好，那什麼時候兩個人會等於？

（R 寫出 N=6）

3218T：N=6 的時候？

3219R：嗯。

3220T：那什麼時候 2N+1 會比較大？

3221R：就…7 以後…

3222T：7 以後？

3223R：咦…

3224T：你看哦，你剛剛說 N 小於 7 的時候，這個（N+7）會比較大，可是你現在又說，N 等於 6 的時候，這兩個會一樣大？

3225R：咦…等一下等一下…小於 7 的時候，這個（N+7）就會比較大。

3226T：可是 6 也是小於 7 啊。

3227R：沒有，這個 N 小於 7 的時候是…

3228T：你可以把他所有的可能都列出來好了，不要用小於，大於。

3229R：什麼意思？

3230T：例如小於 7 就有 6、5、4、3、2、1。

（R 寫出 5、4、3、2、1、0）

3231T：5、4、3、2、1、0 的時候，誰會比較大？

3232R：這個（N+7）會比較大

3233T：6 的時候兩個會一樣大？

3234R：嗯。

3235T：那再來呢？什麼時候這個（2N+1）會比較大？

3236R：7 以上。

3237T：到幾千萬也都是嗎？

3238R：嗯。

3239T：確定？

3240R：嗯。

3241T：所以說，你遇到這種題目，就是用代的去試看看？

3242R：嗯。

3243T：好，那可以了，我的題目就是這樣子，我們到這邊，可以休息了。