第一章　緒　論

本章首先闡述本研究問題的背景及激發研究者從事本研究之動機，其次說明本研究的研究目的，繼而將本研究所涉及之主要名詞予以界定，最後說明本研究的範圍與限制。

第一節　研究背景與動機

國小數學課程中「數與計算」主題裡涵括正整數、分數與小數等三個主要部分。其中，「分數」不僅被列為正整數和小數之間的橋樑，也是未來國中階段擴展為有理數概念的基礎。然而實際上「分數」卻是小學數學課程中浮現最多教學與學習兩方面問題的主題(Moss & Case, 1999; Streefland, 1991)。Smith Ш (2002)認為：在小學數學的領域裡沒有像分數這樣饒富數學味、極具認知複雜度而難以施教的主題。此觀點具體而微點出分數主題的特性，以及其在教學上實際面臨的困境。

國內方面，過去的許多研究顯示，國小學生的分數概念發展不甚理想，存有許多缺陷或迷思概念，例如：不會等分、不認為分數是一個數、缺乏單位量概念（呂玉琴，1991；林碧珍，1990；陳瑞發，2003；詹婉華，2003）。國外方面，以美國 2003 年全國考試（NAEP）試題為例，學生解答「一條繩子$\frac{3}{4}$碼，每$\frac{1}{8}$碼剪一

段，可以剪多少段？」的表現很不理想，四年級學生只有 27%答對，而八年級學生也只有 55%答對（NAEP，2004）。從這個測驗結果可知，國外的學生對分數的瞭解也不夠充分，缺乏以分量當作單位進行加法性或乘法性運思。

事實上，不只學生學習分數有困難，老師本身分數的教學知識亦顯不足(呂玉琴，1996)；陳竹村、林淑君、陳俊瑜(2001)亦指出在教學現場不僅學生怕學「分數」，甚至部分的國小教師也視教「分數」為畏途。「分數」儼然成為數學課室內師生須共同面對的一大考驗，值得吾人投入更多的努力。

以上呈現的困難，原因何在？Behr, Lesh, Post 與 Silver（1983）在整理以「分數」為主題的相關文獻後，將導致學童學習分數困難的原因歸納為二：一是分數本身包含許多的子結構（subconstructs），不容易完全清楚掌握，此觀點和 Kieren（1988）一致；其二是學校教學通常傾向於教導程序及運算技巧（procedure and operation），缺乏真正功能性的瞭解。Moss 與 Case（1999）兩人亦指出，老師進行分數教學所採用的方法可能犯有太過於強調規則（syntactic）而忽略語意（semantic）之流弊。換言之，老師的教學常限於以「工具性的瞭解」為目標，忽略培養學生「關係性的瞭解」（Skemp, 1987），以致於學生並未能完全清楚的掌握分數概念。所謂工具性的瞭解，係指學生只是背誦規則而未真正理解；關係性的瞭解則是學生能夠理解規則、活用規則，且推演出和其他規則之間的關係。

「分數」的教與學雖呈現若干困境，但也絕非沒有改善之策。例如，Behr 等人（1983）以心理學「表徵」（representation）為基礎，提出以「表徵系統互動模式」(an interactive model for using representational system)提昇數學的學習效能，便是最常受到學界和實務界引用及重視的策略之一。所謂「表徵系統互動模式」即從表徵的觀點將學習數學的表徵區分成「口語」(spoken symbols)、「圖像」（pictures）、「書寫符號」（written symbols）、「操作」（manipulative aids）及「真實情境」（real-world situations）等五種，並進一步強調它們和數學解題之間具有重要的連結關係。實際上，Behr 等人根據多元表徵觀點所做的「有理數方案」（Rational Number Project，簡稱 RNP）課程，和國內九年一貫課程綱要數學學習領域強調「說、讀、聽、寫、做」以進行數、量、形學習的主張，具屬異曲同工。此故，多元表徵在數學教與學的角色，令所有從事數學教育的人無法小覷。

以多元表徵為基礎的分數課程在實徵研究上有其成效，例如 Behr, Wachsmuth, Post 與 Lesh（1984）等人所做的研究，便發現教學活動中若能提供學童多元表徵分數的機會，可以增進對分數概念的理解。至於國內數學教育界近幾年來雖也重視多元表徵在數學教育上的角色，但是將它系統性運用在分數學習上的實徵研究則尚不多見。

研究者分析國內外有關學生學習分數的研究大致有兩種取向：其一是以學科知識做為分析參照，係從數學學科知識出發，

探討學童所持有的分數概念及迷思概念(或錯誤類型)(如：呂玉琴，1991，1996；林碧珍，1990；陳和貴，2002；游政雄，2002；詹婉華，2003)。其二以兒童認知結構做為分析的主體，即探討學童對所持分數之意義及運思型態，特別重視兒童心中所持「單位」(unit)的變化，並據此區分不同的認知階段及各階段運思的特質，亦即以 Piaget 認知學說及建構主義為基礎，從認知結構的觀點切入(如：李端明，1997；張日齊，2003； Ning, 1992; Olive, 1999, 2001; Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2002)。此二種取向互為表裡，前者偏重在外顯行為事實的描述，後者側重內隱認知結構的推論，而認知結構是外顯行為表徵的源頭，特定的基模將會導致特定的行為模式。因此，研究兒童的分數解題表徵當有助於瞭解其思考的特質，而探究兒童分數學習的「學習路徑」(learning trajectories)對於從事教學實務工作者而言，將有相當大的助益。

檢驗數學學習的效果及教學目標達成程度，最直接的方法即從觀察學生解題的過程及結果著手。1980 年代起美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM)（2000)即在《學校數學原則和標準》中將「解題」和「推理證明」、「溝通」、「連結」及「表徵」等並列為重要的學習標準，其中解題表現和題目的性質有密切的關係。Kilpatrick（1975）整理歸納解題研究的類型，將之分為兩大類：一為自變項(含受試變項、作業變項和情境變項)，另一為依變項(含成果變項、過程變項、評鑑變項和附隨變項)。因此，當吾人欲瞭解兒童對分數的

解題表現時，必需將相關的變項納入考量。

研究者擔任多年小學數學教師並擔任國教輔導團數學領域輔導員，從自身經驗及各校老師的反映均感受到分數教學的不易。因此，不斷地思索提昇學生學習成效的可能性，此乃研究者進行本研究最重要之研究動機。其次，面對目前常態編班的教學環境，教師能否協助不同能力學童找到契合其認知的表徵方式以學習分數，則是激發研究者亟於從事本研究之第二個動機。復次，雖然國外已有若干利用多元表徵促進兒童學習分數的研究，但是國內對此則尚未有系統的研究。況且，將多元表徵加入分數單位概念對於學童數概念及分數基模發展的研究，目前尚付諸闕如，此亦是本研究的第三個動機。

第二節 研究目的

本研究旨在探討分數多元表徵課程對於國小學童「分數」學習成效的影響，基於上述之問題背景及研究動機，本研究採用 Behr 等人(1983)提出的「表徵系統互動模式」，並參酌 Steffe（2002）、Olive（1999, 2001a, 2001b, 2002）及 Tzur (1995)等學者提出的分數基模，以及兒童心中所擁有「單位」的觀點予以綜合後，設計出「分數多元表徵課程」，繼而進行「分數多元表徵課程」教學實驗，據以探討其實施成效。

茲將本研究的具體研究目的臚列如下：

一、設計適合國小四年級學童之分數多元表徵課程。

二、探討分數多元表徵課程對學童分數解題表現的影響。

三、探究分數多元表徵課程教學實驗後，實驗組學童數概念之變化情形。

四、探究分數多元表徵課程教學實驗後，實驗組學童分數基模之變化情形。

第三節　名詞釋義

茲將本研究之重要名詞，分別以概念性定義和操作性定義說明如下：

壹、分數多元表徵課程

本研究在「分數」意義界定，主要係根據 Kieren（1989）所指「部分與整體的關係」。所謂「表徵」，根據 Bruner（1966）的觀點，是人類學習事物的運思材料，包括動作表徵、形像表徵和符號表徵等三類。而「多元表徵」係指 Behr 等人(1983)在 Bruner 表徵理論的基礎上，所提出在數學學習宜交互運用的五種表徵方式。該五種表徵包括「真實情境」、「口語」、「圖像」、「書寫符號」及「操作」，其中「真實情境」屬於問題的情境，「口語」、「圖像」、「書寫符號」及「操作」則屬於對問題的「再次呈現」(re-present)。

所以，本研究的「分數多元表徵課程」即根據上述理論及教學建議編製而成，其中包括六個單元：等分割與組成、單位量、分數的加減、比較大小、等值分數及電腦輔助教學等，所需教學時間為 16 節課，每節 40 分鐘。

貳、國小學童

本研究的「國小學童」係指九十三學年度在學的國小四年級學童。在本研究中抽取高雄市某一所國小四年級的兩個班級，以隨機分派的方式將一班(31 人)作為實驗組，另一班(27 人)作為控制組。

參、學習成效

本研究所指的「學習成效」包括量化和質性兩部分。在量化部分係指解題表現，質性部分則指數概念的發展及分數基模的變化。

一、解題表現

係指樣本在研究者編製的「分數問題測驗甲卷」和「分數問題測驗乙卷」的得分，包括「等分割與組成」、「單位量」、「分數比較」、「等值分數」、「合成與分解」及「遞迴分割」等解題表現。得分越高者代表其分數解題表現越佳；反之，得分越低，則表示其解題表現越差。

二、數概念

所謂的「數概念」係依據甯自強(1998)的觀點：「數概念是由 1 概念的聯合再加以聚合而成的集聚單位。」而在本研究所指涉的有三部份，第一部份是學童從解題活動中所展現的「整數部分整體關係」、「整數二階單位化聚」、「分數詞概念」、「分數部分整體關係」及「等值分數概念」。

三、分數基模

本研究參酌 Olive 與 Steffe (2002)、Tzur (1995)等學者所提出有關分數基模的相關概念，設計分數問題組(如附錄 1)做為訪談的依據。在教學實驗前後進行半結構性訪談，利用紮根理論(grounded theory)處理資料的方式，再將學者們提出有關分數基模做詮釋參照，綜合整理之後列出「等分割基模」、「分數迭代基模」及「遞迴分割基模」等三項分數基模。

第四節　研究範圍與限制

基於上述的研究動機與目的，茲將本研究之範圍與限制說明如下：

壹、研究變項

本研究受限於人力，在主題上僅以國小分數課程中「等分割與組成」、「單位量」、「分數比較」、「等值分數」、「合成與分解」及「遞迴分割」為探討主題，其他諸如「分數乘法」、「分數除法」、

「比」、「分數的四則運算」並不在本研究探討的範圍。此外，在變項選擇方面，依據 Kilpatrick（1975）對於解題變項的分類，影響解題的因素有很多，但本研究的自變項只針對「受試變項」(不同分數認知階段、實驗教學)及「作業變項」(問題結構)。因此，其他可能影響解題的因素，並不在本研究探討範圍。

貳、研究樣本

本研究以 58 位學生做為研究樣本，所有的研究結果僅適於此 58 位學生，不宜推論至其他學童。尤其，在探討學童基模變化情形的部分，僅從實驗組學生接受前測後依成績分成低中高三組，再與原班級導師商量後，挑選出口語表達較流利的學生各 3 名，合計 9 名，以探究其數概念及分數基模變化情形。所呈現之結果因囿於樣本過少，所以僅做研究對象的描述，不做其他推論。

參、研究時間

本研究所採行的實驗課程僅 16 節課，晤談的時間則在一學期內完成，所以無法以更縱貫性的觀點來探討實驗課程對學童數概念及基模的影響。

另外，為了避免原班級分數單元教學可能造成實驗的干擾，所以採取實驗教學後 3 週(21 天)便進行延宕測驗。所以，是否能在更久的未來持續保留任何的教學效果，並不在本研究探討的範圍。

肆、教學情境

為了順應原來班級的教學，且避免新的教室座位安排讓學生產生不適應而影響實驗結果，實驗組採取原班級分組座位的方式教學，控制組則採取直排座位的方式教學。不同的座位安排可能會影響教學決定及學習成效，然本研究對此並不加以操弄，所以可能會影響些許內在效度。

第二章　文獻探討

本章分為五節，首先闡述數學知識習得的理論基礎；其次，梳理近年來數學教育家基於認知心理學觀點所提出兒童分數概念發展的論述。然後藉由九年一貫能力指標課程地圖及市售教材分數單元的分析，瞭解分數主題在現行國小數學課程裡縱向的發展和橫面的連結關係。繼而，探討國小分數的意義及相關研究。最後，依據文獻探討的結果，勾勒本研究實驗課程—多元表徵課程的設計理念及特色。

第一節　數學知識習得的理論基礎

本節首先從心理學的角度出發闡述人類學習數學知識的重要心理機制。其次，再深入探討各家學者提出關於表徵對數學學習與解題的關係。最後，整理過去學者們對「單位」在「分數」裡的意涵的相關文獻，藉以瞭解其在數概念發展的重要性。

壹、 數學知識的習得

「知識」到底為何？如何獲得「知識」？是學者們長久以來不斷爭論的焦點，經驗主義者認為知識是來自經驗，先天論(nativists)者認為知識建立在大腦與生俱來的特質上(Solo, 1998)。這些爭論迄今尚無定論，von Glasersfeld（1995）則從另

一個角度論述人類獲得知識的關鍵，他強調不管知識如何被定義，個體除了以本身經驗為基礎進行建構之外別無他法。與其說此一論述並不否定知識先驗存在的事實，毋寧說它是更強調個體對知識掌握的主觀性。個體獲得知識的歷程和基模的建立與改變息息相關，茲就心理學的觀點，分述基模、表徵與數學知識學習之間的關係如下：

一、基模在數學知識習得所扮演的角色

基模(scheme)本義為形式(form)、形狀(shape)或圖式(figure)（Marshall, 1995）。剛開始時是生物學領域的詞彙，後來 Piaget 將它由生物領域引進心理學研究領域，並主張人類自出生後不久，就會運用他與生俱來的一些基本行為模式來對環境做出反應，而這些基本模式即是「認知結構」，也稱為「基模」。Piaget 將基模視為人類吸收知識的基本架構，隨著基模的改變，認知發展或智力發展也產生改變。Piaget 也認為當環境讓個體的基模產生某些限制，個體會傾向於主動改變，此種改變的心理歷程即為「適應」(adaptation)。個體主動採取適應的原因是為了減低新情境所造成的不安，而適應所產生的兩種互補的心理歷程，一為同化(assimilation)，一為調適(accommodation)。前者指新事物可以納入既有基模，若既有基模仍堪用，則新事物便被同化。後者指既有基模無法直接同化新事物，因此主動做出基模調整或修改。

針對同化和調適在數學解題上的詮釋，甯自強(1993d)曾以兒童解題活動為例做出說明。他主張兒童要先在解題情境中經驗到新而有效的解題類型，始能在面對下一個新解題情境時根據先前所形成的經驗類型和新的情境要素進行比對。若是決定進行原有類型的活動，則稱之為「同化」。若是活動的結果是令他感到意外驚喜的，則原本僅適用的情境類型得以擴張，適用範圍也更廣，此稱為「調適」。由此可知，甯氏對調適的定義主要有兩個要點，即「有效」及「意外驚喜」。Tzur（2003）對於「有效」在數學知識調適的重要性和甯自強的看法雷同，認為數學是學習者從學習活動與活動效果間獲得動態的關係。亦即，基模和活動效果之間存在著動態的辯證關係。至於甯自強所強調的另一個重點「意外驚喜」，則宜將它視為是個體因嘗試而獲得成功後所產生高峰經驗，是下一次解決類似問題的起點。

von Glasersfeld（1995）指出基模由三個部分所構成：一為對特定情境的辨認；二為和該情境連結的特定活動、期望；三為此活動能展現根據先前經驗所產生的特定結果。Sáenz-Ludlow（1994）採用其觀點並進一步認為，新的基模雖是因應環境而生，但是最重要的還是得靠練習、重複使用，將之應用到不同的情境，基模才能受到鞏固並且獲得保留。因此，數學基模的形成應該具備解題的情境、從事解題的活動、結果，而且重複使用方能形成。

二、表徵在數學知識習得所扮演的角色

Bruner（1966）將表徵的發展分為三個階段，依序為動作表徵(enactive representation)、形像表徵(iconic representation)和符號表徵(symbolic representation)。他認為人類能透過知覺，將外在環境轉換為內在心理事件，而此轉換的過程稱為「認知表徵」或「知識表徵」(張春興，1999)。就認知心理學的觀點而言，「表徵」(representation)有兩種解釋，第一種是指某種東西的信號，包括內容和形式；第二種則是指知識的組織方式(彭聃齡、張必隱，2000)。對表徵的闡述及應用，美國數學教師協會(NCTM, 2000）也在《學校數學教學與評量的原則與標準》中指出，表徵既是「過程」(process)又是「結果」(product)，它就是擷取數學概念或關係的動作，並建構其本身的形式。蔣治邦(1994)亦認為表徵是用某一種型式，將事物或想法重新表現出來以達到溝通的目的，待其能充分掌握意義後，它方能成為運思的材料。易言之，「溝通工具」和「運思活動材料」是表徵的功能(蔣治邦，1997)。Kaput（1987）認為表徵在功能上代表著兩個世界，一個是所表徵出來的世界(the representing world)，另一個則是被表徵的世界(the represented world)。

上述 Bruner、彭聃齡、張必隱、NCTM、蔣治邦、Kaput 等對於表徵不同的詮釋其實頗為一致，均將表徵分成個體之外及個體之內的兩個層次，對外的層次旨在和外界溝通，重點在形式，至於對內的層次則是運思的材料，重點在將訊息加工處理。所

以，不管指的是內容形式、知識的組織方式或運思活動材料，都是由個體的認知建構而成；外人欲瞭解其內在所擁有知識的組織方式，唯有從表徵內容和形式做判斷。Nelissen 與 Tomic（1998）則強調內在表徵和外在表徵可以透過對話以增進表徵的反省。所以，「對話」有助於內外在表徵的辨證與提昇，而「反省」則是辨證與提昇的關鍵。

von Glasersfeld（1995）認為兒童將他們所參與的活動，透過心理的表徵而建構他們對活動內容的運思。因此，欲探討兒童的分數基模，應該從他所做的分數表徵著手，以了解其表徵的內容和形式。唯，同樣的概念可能展現出不同的表徵，亦即不同的基模型態，例如：「$\frac{1}{2}$塊 pizza」在圖像和文字表徵的形式皆不同，但皆代表內容為「把一塊 pizza 分成兩等份，其中的一等份」。由上述的例子可知，同一概念的不同表徵有些儘管在形式上不同，但在數學的抽象意義上是一致的。在某一範圍眾多表徵所指向的數學意義可能相同，但不應忽略同一意義下不同表徵間所隱含的衝突性。表徵間的衝突是危機也是轉機，當個體展現不一致的表徵甚至衝突時，可能代表著對該概念並沒有清楚的掌握。若個體覺知到不同表徵之間的衝突，進一步主動採取適應，則因衝突所造成的不安便能減少，該基模也因此擴充功能。簡而言之，表徵間的衝突可能導致個體基模重組或修改。

貳、 多元表徵與數學學習及解題的關係

一、表徵在九年一貫課程數學領域學習的角色

近年來，中外的數學教育對於表徵格外重視。成人們常將表徵的多重意義視為理所當然，但對學童而言必須經由參與數學活動而發展或分化出不同的表徵意義(蔣治邦，1994)。Kaput（1987）亦指出，長久以來標準的數學課程中，低估表徵系統的角色。而 Moss 與 Case (1999)則提醒教師在教學時若誤用了表徵將致使兒童混淆整數和有理數的概念。因此，老師在進行教學過程中使用表徵不得不慎，不僅要善用表徵且不能誤用。美國數學教師協會則明確的建議 k-12 的數學教學，應該讓學生要能做到以下幾件事：

> 創造並使用表徵以組織、記錄和溝通數學想法；在數學表徵間進行選擇、應用及轉譯以進行解題；使用表徵以便將物理、社會和數學現象模式化及進行詮釋。（NCTM, 2000:67）

該協會主張在學生學習數學的過程，表徵是支持其瞭解數學概念和關係所必要之元素，而且必須讓學生將其所瞭解內容或對數學的論證透過適當的表徵與他人進行溝通。重視兒童在數學學習歷程中的表徵方式及期待其能適切的應用表徵等數學教學的目標不是只有在國外才受到重視，國內 2000 年所頒布的九年一貫課程暫行綱要數學領域的能力指標(教育部，2000)即有多項提到表徵，例如：「數與量」第一條能力指標(N-1-1)即提到「能初步掌握非負整數數詞序列的規律，並能以具體的量、聲音、圖像、數字，進行說、讀、聽、寫、做的活動，表徵 2000 以內的數。」；

2003 年新修訂九年一貫課程綱要在「實施要點」中亦提到「培養學生觀察問題…以數學的方式，將問題表徵為數學問題再加以解決」及「發展對問題解答之不同檢查策略，進而理解問題中各數學表徵的關係。」；在「連結」主題的指標(C-S-02)明列「能選擇使用合適的數學表徵。」(教育部，2003)。由上述九年一貫課程的暫行綱要及正式綱要可以窺知，表徵被視為是學習數學所應該具備的重要能力之一。而做為教學者，不只要多鼓勵學生利用不同的表徵理解數學概念，更希望學生們可以在內蘊化所學的數學概念後，選擇合適的表徵做數學性的溝通或解題。

二、多元表徵的心理學基礎

中外數學教育對數學不同表徵的重視相當一致，其背後所支撐的理論和認知心理學的蔚然成風有關，其中 Paivio 提出「雙代碼理論」(dual-code theory)（Paivio, 1991）為利用多元表徵促進學習效果提出了直接而有力的理論依據。該理論主張人類利用形像的(imagined)、及語言的(verbal)兩種代碼表徵訊息。形像系統的代碼專門處理非語言性物件的知覺訊息，能夠產生心像，亦即是一種類比代碼(analogue code)；而語言系統的代碼則專門處理語言訊息並產生言說，亦即是符號代碼(symbolic code)，透過規定對於某事物提出說明。此兩種代碼是人類處理訊息的主要模式，二者相互獨立卻有部分相互連結，而且雖不必然和諧對應存在，但若同時利用兩種代碼表徵訊息，其解碼、組

織、強化、擷取等表現會優於只有單一代碼。以一個蛋糕切成四等份，其中的一份稱為 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕為例，形碼是一個蛋糕被做成四等分割，而取其中一個扇形。意碼則是對於「$\frac{1}{4}$」這個數學符號定義的了解---把一個物體進行四等分割後，其中一份和整體關係的記法。從圓四等分割的形像可以類比到蘋果的四等分割、長條蜂蜜蛋糕的四等分割...等等。如此，便能將「四分之一」的形碼和意碼緊密的結合，易於將此知識貯存於長期記憶中。此即，以雙代碼理論為基礎的多元表徵促進分數學習的應用實例。

三、多元表徵在數學學習及解題的相關理論

(一)Bruner 的表徵理論

Bruner (1966)認為透過「動作表徵」、「形像表徵」及「符號表徵」等三種表徵的方式，兒童可以從過去的經驗提取保留下來的經驗模型，以認識當前的刺激或將當前的刺激收納至過去的經驗模型。動作表徵指靠動作認識外界的刺激，以動作、操弄等方式對於外界環境的認識，尤其當某種知識很難藉由文字、語言、圖表進行教學時通常需藉由動作表徵為之，例如：單位分數內容物多寡的問題，若能經由實際的做數活動應能讓學生更清楚瞭解。形像表徵則以記憶中的心像做為運思的材料，它是以經濟有效的方式管理知覺組織，將它有系統的納入過去經驗模型，例

如：兒童利用畫圖學習等分概念。符號表徵則指以抽象的文字符號進行運思，例如：較年長的兒童可以將分數符號作為運思的工具學習分數。事實上，符號本身是一種人為的、抽象的、規約化的文化產物，若欲流暢的使用符號得須先經過社會化學習。

基於前述，教導兒童學習數學，應該針對不同的學習素材或不同的學習階段適時善用動作、形像和符號三種不同的表徵，以其較有利的表徵方式學習，將有助於學習成效的提昇。例如：教導三年級學生「分數是由單位分數複製而成」的概念，可以透過對整體的等分割，找出單位分量，透過單位分量和指定分數所代表量做比對以經驗該概念。隨之，利用分數板、圖形的講解提昇學習的層次，最後再以文字、符號、語言的方式進行表徵以達學習的抽象層次。

(二)Janvier 的轉譯過程理論

數學的抽象性來自於大量使用符號，致使學習者難以清楚掌握符號的意義。Janvier（1987a）即指出：在數學教育界裡對於使用符號的轉譯過程(translation processes)，顯然是被忽視的。所謂的轉譯過程指的是心理過程，也就是從某一種表徵模式轉譯至另一種表徵模式，例如：從方程式轉譯為圖表。他認為表徵結合了三種成份：符號(書寫)、真實物件(real objects)及心像（Janvier, 1987b:68）。此外，他更進一步舉學習「笛卡兒座標圖」(Cartesian graph)為例，詳列出「情境、語言描述」、「表」、「圖」及「公式」

等四個表徵的變項，再架構出一個 4×4 變項轉譯關係如表 2-1。

表 2-1　座標圖表徵轉譯關係

到 從	情境，語言描述	表	圖	公式
情境，語言描述		測量	繪圖	模型化
表	閱讀		標圖	適配化
圖	詮釋	解讀		曲線適配
公式	參數察覺	計算	繪圖	

資料來源：*Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p.28), by C. Janvier, 1987a, NY: LEA.

表 2-1 可知，由「表」轉譯到「情境，語言描述」主要是靠「閱讀」；由「圖」轉譯到「情境，語言描述」主要是靠「詮釋」；由公式轉譯到「情境，語言描述」則靠「參數察覺」(parameter recognition)。由「情境，語言描述」轉譯為「表」仰賴「測量」；由「圖」轉譯為「表」仰賴「解讀」(reading off)；由「公式」轉譯為「表」仰賴「計算」。從「情境，語言描述」轉譯至「圖」乃透過「繪圖」(sketching)；從「表」轉譯至「圖」乃透過「標圖」(plotting)；從「公式」轉譯至「圖」則透過「繪圖」。最後，由「情境，語言描述」透過「模型化」(modeling)轉譯為「公式」；由「表」透過「適配化」(fitting)轉譯為「公式」；由「圖」透過「曲線適配化」(curve fitting)轉譯為「公式」。Janvier（1987a）所提出的多種表徵中特別強調「語言、文字」在整個表徵轉譯過程中扮演核心的角色，假使無法充分瞭解它便無法順利進行轉譯。

由以上可以得知，「情境，語言描述」、「表」、「圖」及「公

式」是靜態的表徵形式，然而透過「閱讀」、「測量」、「模型化」…等等動態表徵的轉譯，可以進行表徵之間的互換。所以，若要教導學生瞭解數學問題且進行解題，教學者應該對於問題的屬性進行分析並結合學習者的經驗，以便引導其察覺起始狀態和目標狀態之間的差異，再使用合適的表徵解題。多提供不同層面的問題，使學習者有運用不同表徵轉譯的機會方能達到精熟。

(三)Lesh 等人的表徵系統互動模式及其在有理數的研究與應用

Lesh, Post 與 Behr（1987）認為所謂的表徵是指外在的、可觀察的具體物，其中代表著學生的內在概念。Lesh 等人(1987)及 Behr 等人(1983)在 Bruner 表徵理論的基礎上，將形像表徵分為動態的操作具體物及靜態的圖像；符號表徵則分為口語和書寫符號，主張這些模式之間是具有互動性而非直線關係如圖 2-1：

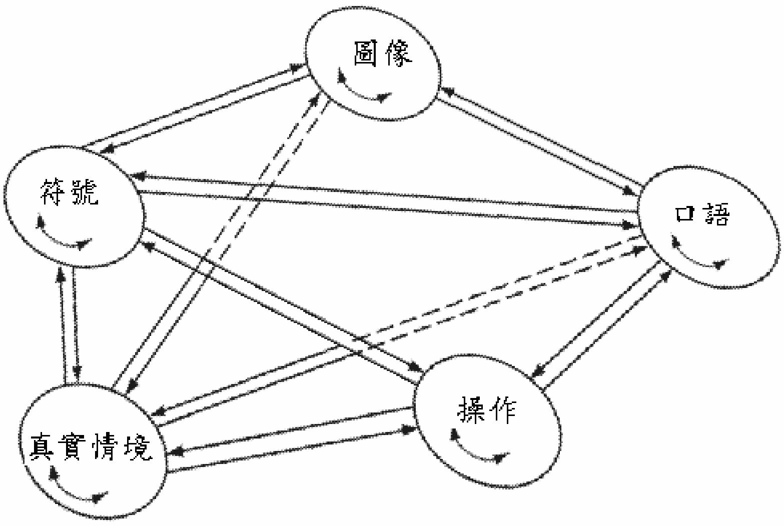


圖 2-1　表徵系統的互動模式

資料來源：Rational number concepts (p.102), by M. Behr, R. Lesh, T. Post, & E. Silver, 1983, in R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, NY: Academic.

Lesh 等人(1987)指出，「真實情境」(real world situation)提供一般性的脈絡以詮釋或解決具有相同或類似情境的問題；利用分數條或古氏積木(cuisenaire rods)等「操作具體物」(manipulate aids)可以看到元素和整體間的關係；「圖像」(pictures)則可以內化為「心像」(images)。「語言」則如同 Janvier（1987a）所認為在整個表徵系統中具有核心的地位。「書寫符號」(written symbols)則為數學學習的重心所在。由圖 2-1 可以看出，表徵系統互動模式在「書寫符號」、「圖像」及「操弄具體物」等三種表徵確實是植基於 Bruner（1966）的三種表徵理論，再另外增加「口語」與「真實情境」。然雖衍生自 Bruner 的表徵理論，但其間觀點並非完全

一致，縱然兩者所使用的名詞相同，其真正所指的功能可能完全不同。蔣治邦(1994)即認為，Bruner 的表徵是指運思材料屬於個體，不必然要和外界溝通；而 Behr 等人的表徵則是以溝通為目的，有文化規約的意涵。因此，當吾人肯定小學數學教育對裡教學者與學習者間的互動是至為最要的，則 Behr 等人的表徵模式顯然更適用於小學的數學課室中的運作。

將 Behr 等人(1983)利用表徵系統互動模式架構出有理數課程方案(Rational Number Project Curriculum，以下簡稱 RNP) 有別於一般商業性出版商所出版的分數課程。依據 Cramer 與 Post（1995）的看法，RNP 課程反應出四項基本信念：1.兒童學習有理數的最佳方式是主動參與多重具體模式的學習活動；2.物理性的輔助物只是獲取分數概念其中的一部分而已，其他尚有口語、圖像、符號等亦具同等重要性；3.應該提供學生間及師生間針對數學觀念對話的機會；4.分數課程應將發展概念知識的優先性置於學習符號及算則之前。由此可知，強調表徵系統互動模式的 RNP 課程非常重視概念的發展，不急於教導符號及算則。此外，藉著提供多元表徵的學習活動讓兒童主動參與，藉由不同表徵的轉化與轉譯掌握分數概念。

上述對有理數課程教學的信念，充分展現在課程設計之中，例如：RNP 的實驗課程裡利用圓形分數圖著色、折紙、籌碼、古氏積木、數線等物理性的具體物做為學習的起點，再延伸至符號運算的表達(Behr 等人, 1984; Cramer & Post, 1995; Cramer, Post

& delMas, 2002)。Cramer, Post 與 delMas（2002）在其所設計的RNP 課程實驗裡將操作具體物模式優先於其他種的表徵模式，且在所有的操作具體物模式中將「圓形分數板」的操作活動列為第一。利用圓形分數板學習分數比線段圖及長方形更適合的原因是圓形的「部分」和「全體」的單位有明顯的不同，而所有的「部分」具有高度的同質性。

Davydov 與 Tsvetkovich（1991）認為物件「部分」的同質性相當重要，有助於澄清分數的本質，而圓形在從圓心進行等分割後一個被分割的所有部分從視覺上可以看出每一部分均具同質具有此項優點。但是 Moss 與 Case（1999）則認為「圓形分數板」在發展分數概念時有其限制，因為如果只有用分數板兒童只要計數「幾塊」便可以，所以很難跳脫「部分-整體」模式。Hannula（2003）亦認為若是學生無法超越「部分-整體」的思考，則學生很難將分數概念應用到數線上。唯研究者則認為，能否跨越「部分-整體」的思考與教師的布題有關，而不是具體物表徵的問題。如果教學者每次都是出現一個完整的圓，做若干部分的等分，再要求學習者說出所代表的分數便可能造成Moss 與 Case（1999）所聲稱的流弊。反之，如果只出現部分，例如：只出現$\frac{1}{4}$個圓，請學生做出$\frac{2}{4}$、$\frac{4}{4}$，甚至是 $2\frac{3}{4}$個圓，學生便能夠把$\frac{1}{4}$個圓視為一個單位(一個數)，而不致於拘泥在「部分-整體」模式之中。至於，兒童很難在數線上標分數，是因為無法掌握參考的單位，所以教學的重點應放在表徵之間的轉換，讓學生學到如何找

到適當單位。實際上,「部分-整體」模式是兒童接觸分數一個相當自然的模式,毋須刻意逃避。所以,可將圓形分數板做為分數概念引入的操作工具,但仍應提供學生不同問題類型及不同表徵活動。

表徵系統互動模式應用在課程上,可以「2 個 pizza 平分給 4 位小朋友,請問一位得到多少個?」為例,教學者可以將這個題目和平常同樂會做連結,形成所謂「真實情境」。對於年齡較小或發展較不成熟的學生,可以讓他們透過圓形分數板的操作解題,亦即利用「操弄具體物」。而對於能夠脫離動作運思,而進入心像運思的學生則可以利用自行畫圖的方式解題,亦即利用「形像表徵」。教學者,可以要求學生說明「你是怎麼做出來的?」、「你切出來的這一塊代表多少個?」等等問題,以引導學生做出「口語」的表徵。口語的表徵方式能協助兒童掌握意義、反思學習,並且提供教學者回饋,以便決定下一個教學步驟。Kieren(1988)也主張可以把兒童所說出來的分數語言,視為其對分數物件知識的理解。最後,請學生「把你做的過程和結果,用數學符號把它記下來」讓解題者記錄解題的經過,藉此達到「書寫符號」的表徵。

Lesh 等人(1987)強調此表徵系統互動模式不僅五個元素都很重要,表徵之間的轉譯和同一種表徵之內的轉化亦同等重要。換言之,不只構成的元素重要,元素與元素間的動態關係亦至為重要。Behr 等人(1983)亦主張各種表徵模式之間的轉換要能夠順

利，除非是在給定的情境下已經有充分的瞭解，否則將會產生困難。根據 Lesh 等人(1987)從四到八年級學生參加 NAEP 測驗的表現所做研究發現：學生對於文字題的瞭解上有嚴重的困難，且在模型、語言及操作上都有同樣的問題存在。由此也可得知，大部分的學生在表徵之間的轉譯具有相當的困難。基於此，他們對於什麼叫做瞭解「$\frac{1}{3}$」這個分數有以下幾個規準：(1)可以知道它是代表不同表徵；(2)可以在給定的表徵內做彈性的操弄；(3)可以從某一個表徵系統轉譯到其他的表徵系統(Lesh, 1987:36)。他們也認為好的解題者通常傾向於會彈性運用相關的表徵，而在整個解題過程中可以精確的轉換到最方便的表徵以進行解題。另外，Hart（1985）曾研究三位七年級學生的解題，發現妨礙學生形成有效表徵的因素有四：1.缺乏經驗；2.題目中加入沒有必要的限制；3.缺乏後設認知技巧；4.受到信念負面的影響。由此可見，身為一位教學者必須要能培養學生在不同表徵系統間做靈活的轉譯，更要注意可能妨礙學生表徵轉譯的因素，避免加入無謂的限制，讓學生能靈活應用表徵轉譯，方能進行有效的教學。

表徵系統互動模式的五種表徵雖然都是可以讓外人察覺，但蔣治邦(1994)認為圖像和符號的運思是內隱活動，在評估時需要透過「再次呈現」才能溝通。換言之，這兩種表徵都必須在教學者的要求下，學習者才可能利用再表現的方式呈現出來。至於，站在認知發展及教學效率的原則上，正常課室教學時並不需要針對每一個解題活動都做到五種表徵均要呈現，唯若是教學者欲對

學習者之內隱運思進行形成性評量或診斷性評量，則要求其解題過程中多運用幾種表徵方式應是可接受之範圍。

國內 82 年版的教材因為強調分數的原始意義是「等分割及再合成其數份的活動」，所以將分數啟蒙教學的「說、讀、聽、寫、做」五種表徵如圖 2-2 所示。

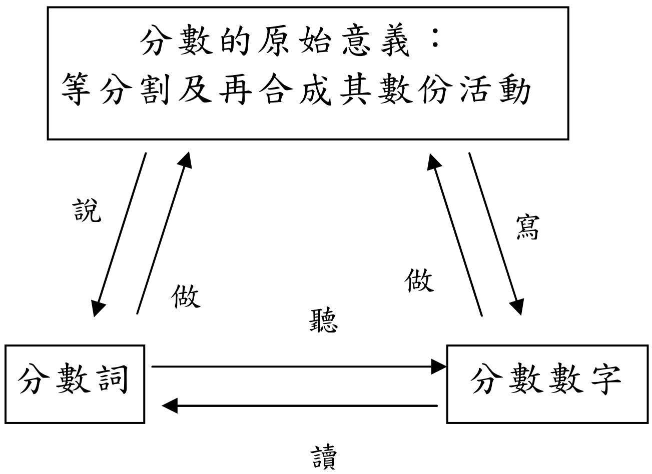


圖 2-2 說讀聽寫做五種表徵在學習分數之應用簡圖

資料來源：**國小數學教材分析—分數的數概念與運算**(頁 23)，陳竹村、林淑君、陳俊瑜，2001，台北：國立教育研究院。

圖 2-2 旨在闡述分數認識活動的幾個相關概念，希冀藉由說、讀、聽、寫、做等不同的表徵活動，讓學生表徵分數數詞及分數數字，最終的目標則在建立分數是「等分割及再合成其數份的活動」的概念。所以，82 年版本教材所主張的「說、讀、聽、寫、做」和 Behr 等人(1983)所提出的五種表徵具有相同的旨趣，

皆在運用多種表徵協助兒童理解數學概念。 而 Behr 等人(1983)的模式不僅說明了人類學習時各種表徵的互動情形，而且突顯問題情境(真實情境)的重要性，揭示研究兒童如何進行分數學習或解題時的切入點。

(四)表徵系統互動模式在分數學習的實徵研究

在實驗研究方面，Taber (2001)採用 Lesh 等人所提出的五種表徵方式的教學策略，針對 22 位五年級學生進行 4 週的分數乘法教學，結果發現學生可以藉由兩次分割的操作促進對分數乘法意義的瞭解。

在調查研究方面，Marcou 與 Gagatsis （2002）亦曾以 Behr 等人(1983)的表徵系統，針對 104 位五年級學生(約 10 歲)在學習等值分數但尚未學習異分母加減前施予 80 分鐘的測驗，目的在瞭解何種表徵對學生學習等值分數及分數加法較有效，以及多種表徵間的轉換是否有較有效的形式利於學生學習。他們的研究有幾項重要的發現：學生在各種表徵間彈性的轉換上表現並不好，亦無法從多種表徵間看到其關係；學生無法利用圖像、書寫符號和口語等不同的表徵對同一概念進行表徵，他們會認為那是代表不同的概念；只要知道公式，學生在掌握書寫符號表徵是最有效，在進行加法時掌握圖像表徵最有效，而掌握口語是最沒有效率的；將圖像轉換書寫符號表徵比將口語轉換成圖像表徵有效。最後，他們建議老師在教分數時先從圖像表徵著手，再轉換到書寫符號表徵，最後再到口語表徵；應該盡可能的多用不同的表

徵，學生才能對於分數做深入的瞭解。所以 Marcou 與 Gagatsis 兩人的研究不只提供表徵互動系統在學習分數上的實徵研究，而且各種表徵間轉換關係的探討也值得本研究加以重視。特別值得注意的是，因為該研究的樣本是五年級學生，所以兩人建議教學者以圖像方式切入，而不是從操作具體物開始。

至於國內過去針對分數表徵進行實徵的研究較少，而且主要是以行動研究的方式探討分數教學中運用多元表徵的成效。曾靖雯(2003)即以行動研究方式針對三年級分數單元進行教學歷程及成效的探討，其研究發現「在教學中多嘗試各種表徵間轉換的經驗，對於分數概念的穩固有幫助」。另外，張熙明(2004)亦採用行動研究的方式探討五年級學生在接受分數表徵教學後表徵迷思概念的改變情形，結果發現教學後學生的迷思概念有顯著改變，且對於分數比較、分數詞意義及等值分數概念等均有進步，但低程度的學習效果仍不佳。

綜合上述實驗研究、調查研究及行動研究的結果，運用多元表徵學習分數能夠達到提昇的效果，但是對於不同的對象，或是不同的表徵能力卻有不同的助益程度。所以，研究對象的因素會影響到利用多元表徵進行分數教學的效果。

參、單位在數概念發展的重要性

「單位」的概念在兒童學習數概念扮演相當重要的角色，也是數概念提昇的主要關鍵。以印度–阿拉伯計數系統為例，單位

的發展在最初以「1」為基礎，再發展以「10」為單位，爾後才陸續發展出多單位系統。兒童在日常生活中對於描述單位的詞並不陌生，很早就會可以分辨一片、一包、一塊、一盒，皆在自然數的情況下描述對象。由於生活情境使用的限制，在有限的生活經驗上尚不需面對計數多個的問題。隨著生活經驗的擴充，加法累加已漸漸不敷使用，乘法的學習因應而生。對於乘法的主要概念有學者主張是「重複累加」(repeated addition)(Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985)，但 Steffe（1988）則認為以同數累加的觀念學習乘法，無助於瞭解學生如何能發展出集聚單位及如何使用它。1993 年部編版的教材，即捨棄同數累加的觀點，改以「單位轉換」貫穿「數」的主題。

「單位轉換」觀點在詮釋分數學習時特別有用，尤其是理解分數乘以分數的情境，同數累加的觀點在解釋上有其困難。更有甚者，Kieren （1988）和 Behr, Harel, Post 與 Lesh（1992）均認為若是學習分數只教學生「分成 m 份，其中的 n 份，就是 $\frac{n}{m}$」的解釋將導致無法全面瞭解分數，甚至妨礙分數概念的發展。因此，他們都建議將 $\frac{n}{m}$ 視為 n 個 $\frac{1}{m}$ 的合成。亦即利用單位轉換將非單位分數視為是單位分數複製後所形成的倍數，如此才有益於真正瞭解分數概念，且不致於妨礙日後學習分數的乘法和除法。此外，在實徵方面，Watanabe (1995)研究四個二年級學生對分數意義的理解也發現，兒童是否能瞭解分數意義和他是否能進行單位間的調節有很密切的關係。

一、Steffe 對「單位」的分類

Steffe（1988）曾經將「單位」分為四類：計數單位、集聚單位、測量單位及單位的單位(units of units)，並且認為整數的加減乘除等皆和這四種單位的形成(formation)和再形成(reformation)有關。計數單位是指個體用來計數物件的單位，例如：數一堆東西可以一個一個數或二個二個數等，此時「1」或「2」便是計數單位。集聚單位是指由單位所形成的單位，例如：1 個「5」是由 5 個「1」組合而成的單位。測量單位是指可以拿來測量另一個數量的單位，例如：把「2」當作測量單位以測量「10」，10 便是「2」此測量單位的 5 倍。單位的單位是指由二階以上單位所構成的單位，例如：把「10」視為 2 個「5」、10 個「1」所形成的單位。

二、Behr 等人對「單位」的分類

Behr 等人(1992)曾以 x 是 y 的 $\frac{a}{b}$ 及 y＝$\frac{c}{b}$(c>b)的問題探討五年級學生對於單位、單位的部分和單位的倍數等有關單位概念形成的問題，並從而瞭解學生們對單位的概念是否具有彈性。該研究將學生的反應結果分為五類：

1. **單位分數的分解及合成**：學生剛開始時將一個給定的分數分解為 $\frac{1}{n}$ 形式的單位分數，再利用單位分數迭代成單位全體(unit whole)。

2. **單位分量分解及合成**：學生分解一個給定的單位分量成為

對應分子的數目，再把所有的單位分量合成單位全體。

3. **單位分數未依單位分量分解**：受試者沒有覺察到單位分量可以組成單位全體。

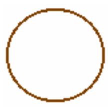
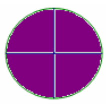
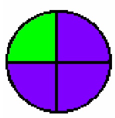
4. **把給定的分量當作是一個單位**：受試者將給定的單位分量當作是單位全體。

5. **把給定的分量當作是單位分數或單位分量。**

上述反應只有持第一類和第二類概念者能正確解題，而第一類又比第二類更為圓熟；第三、四、五類則無法正確解題。另外，他們也發現利用一個全體的分量重構整體，比將一個整體進行等分割得到一個特定的單位分量還要困難(Behr 等人, 1992, 1993)。以分量重構整體是目前國內教科書較少採用的方式，未來在進行分數課程設計時實不宜忽視此重要的一環。

Behr 等人(1992, 1993)不但強調單位在分數教學的重要性，也分別依據離散量和連續量的情境發展符號及圖形說明各種不同的單位，8 種基本情形整理如表 2-2：

表 2-2　計數單位符號及圖像

<table>
<tr><th></th><th>單　　　位　　　符　　　號　　　及　　　圖　　　像</th></tr>
<tr><td rowspan="5">離散量</td><td>1.(○○○○○○○○)
說明：一個以 8 個物件形成的單位，記作 1(8-unit)</td></tr>
<tr><td>2.(○○/○○/○○/○○)
說明：一個以 8 個物件形成的單位被分成 4 等分。</td></tr>
<tr><td>3.((○○)(○○)(○○)(○○))
說明：每一個部分被單位化成一個具有 2 個物件的單位，而且形成一個「單位的單位」，記作($\frac{1}{4}$(4(2-units)s-unit))</td></tr>
<tr><td>4.((●●)(●●)(●●)(●●))
說明：每兩個形成的單位是($\frac{1}{4}$(4(2-units)s-unit))可能被再單位化成三階單位，即「單位的單位的單位」，記做($\frac{1}{4}$(4(2-units)s-unit)-unit)，此時每兩個形成的單位又成為另一種特別的($\frac{1}{4}$-unit)</td></tr>
<tr><td>5.((●●)(●●)(●●)(●●))
說明：代表 3 個($\frac{1}{4}$(4(2-units)s-unit)-unit)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">連續量</td><td>6
說明：代表一個單位，記作 1(1-unit)</td></tr>
<tr><td>7.
說明：每一個部分可以概念化成$\frac{1}{4}$(1-unit)</td></tr>
<tr><td>8.
說明：三個部分是 3($\frac{1}{4}$-unit)s</td></tr>
</table>

資料來源：Rational number, ratio and proportion (pp.102-103), by M. Behr, G. Harel, T. Post, & R. Lesh, 1992, in D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* NY: Macmillan.

表 2-2 很清楚的將不同量的情境下各種不同單位的情況列出，雖然頗為複雜不適合直接全盤移植做為國小階段大團體教學，卻可以用色筆加以塗色配合口語說明，做為瞭解分數單位概念的方法。

三、甯自強對分數單位的主張

甯自強(1997a)主張整數是兩階單位的概念，而分數則是三階單位的概念。他認為兒童在進行分數運作時，若只以單位量或單位分量兩者的一種單位來運作，並無困難。但是如果需要考慮到獨立於其他單位的同時運作則需待其「部分—整體運思」的成熟。他進一步指出，分數內容中的兩種單位是由單位分量單位所構成，所以分數單位是一個由單位分量單位所構成的單位「們」形成的新單位，也就是三階層的單位。

由上述國內外學者對單位的論述，可知數學內涵上「單位」的意義極其複雜，可以從不同的角度切入，但核心概念是以何者為相對的「1」(整體)，當以「1」合成若干個之後形成一個可以運作的新「1」則稱為集聚單位。當把「1」等分成若干個之後所得到可運作的新「1」則被稱為單位分數，它可以代表一個新的集聚單位還原原來的「1」。就一般性的觀點分析，現今分數教材中的計數單位，同樣也可以發現它包含三階層單位。第一階，只有一個明顯單位，另一個單位則不明顯。例如「m 顆中的 n 顆，

n 顆是佔全部的 n/m」；第二階含蓋兩個明顯的單位，例如「一個蔥油餅分成 m 份，其中的 n 份是佔 n/m 個」；第三階則包含兩個明顯的單位，且之間包含一個不明顯的單位(份)，例如「一包彈珠有 24 顆，則 $\frac{2}{6}$ 包有多少顆？」。兒童若要把內多型的分數學好，甚至發展到等值分數則不但「部分-整體」關係要非常清楚，而且要熟練「單位的化聚」才能發展出巢狀分數。也只有在巢狀分數的層次下，兒童才算真正懂得「等值分數」。

第二節　分數概念發展階段的認知觀點

Kieren（1988）主張數學教育工作者宜釐清人類是如何學到數學知識，或說明何種數學知識可以被人們習得。他曾明確的指出，構成數學知識的機制共有五個面向：結構性、心像、心理、語言使用及數學等五種不同的機制，而這五個機制彼此相互連結，相輔相成。由此可知，數學知識不只是具有結構性，且涉及心理認知層面，甚至包括使用語言做為表達溝通。以下主要以學童學習分數的心理機制層面為梳理文獻的主軸，並將之做為本研究之參考理論架構。

壹、從解題材料應用分析兒童不同層次的分數基模

兒童在解分數問題時所運用的材料不一，本節採用荷蘭學者

Streefland (1991)所發展的真實數學教育(Realistic Mathematics Education,簡稱 RME)所提出的基模做為分類依據。然而在介紹分數基模之前，先就 Streefland 所倡導的數學教育觀念做一梳理。

Streefland (1991) 認為數學教學的幾股潮流：結構式取向、機械式取向、實用性結構主義、實在取向及實證取向。結構式取向學習理論，將數學視為認知獲得，它是一種有次序的、封閉的及演繹的系統，教學和學習都受到系統的形塑。機械化取向的數學認為最後的結果早已給定，重視最後算則的水平，並不重視情境脈絡。實用的結構主義認為數學之所以能提昇，是因為有「應用」的時候，此亦是促進數學垂直發展的原因。「垂直的數學化」(vertical mathematization)強調數學系統內進階的發展，其過程可透過實物表徵的方式達成。實在取向則強調數學教育並非要學生對於複製的數學系統產生洞察，而是要培養其建構出屬於自己的數學系統。最後，實證取向強調小學生要利用具體操作學習數學，而且重視水平的數學化。「水平的數學化」(horizontal mathematization)是指利用適當的數學工具，將所學到的數學脈絡擴展到其他同一層次的數學概念。

Streefland (1991) 認為傳統分數教學的缺點在於忽略學生零碎及非正式知識庫，而只注意精確的、規則取向的教學，在教學方法上則只重視「視覺模式」(vision model)。他主張利用真實

情境教導兒童學習數學，在有關分數的研究裡列舉出五項進步指標：1.概念獲得和自然數的困惑；2.基模化的進步；3.模式、圖形運用或基模的使用具彈性；4.將問題形成心像的能力；5.在符號的層次上，學生自己建構或出產的情形。此五項指標具有階層性，越後面層次越高，代表兒童可使用抽象符號解題。五項指標中的「基模化的進步」係依據兒童所表現出的基模化發展情形而劃分，計可分為三個層次。

第一層次(具體層次)：此層次，在數學資源的使用上主要是仰賴具體的物件，兒童會利用圖解的方式解題。

第二層次：此層次，兒童除了會利用圖解外，也會利用比值表(ratio table)以比較分數的大小。在畫圖解時，和上一層次不同的是可以畫得更為簡略。雖然學生偶爾還會採取前一層次的解法，但是對第二層次的方法已經很熟練，由於基模的提昇，因此可較不費力的解題。此外，第一層次以畫座位表的方法精簡為第二層次的畫樹狀圖，此法讓學生有機會反複的應用「對分」(halving)和「加倍」(doubling)。至於如何再從比值表做精簡，可能得從表的長度做判斷，使用的表越短代表越精簡。

第三層次：此層次，擁有正式規則的一般特質，例如：系統性的運用最小公倍數的方法，比較不同分母的分數及

不同比值配對的大小。Streefland 認為此層次為該研究中的最高階。達到此層次，縱然剛開始仍會使用圖解，不過最後會完全消失，最終則可以抽象化，脫離脈絡。

由以上三個層次可知，Streefland 主要以兒童在解題時所使用解題策略的特點而加以區分，不同的策略隸屬於不同的層次。Streefland 認為分數教學若只局限在視覺模式是不足的，應該加入真實情境。Davydov 與 Tsvetkovich (1991)也堅信只用分數板、積木等視覺模式的教學難以發展分數的「測量」概念。分數概念的培養要藉由真實情境「脈絡化」(contextualization)，經由解題後的自我反思(self-reflection)從解題活動類型中抽取概念，最後逐漸達到不拘任何問題情境均可以解出類似的分數問題，亦即達成概念的「去脈絡化」(decontextualization)。

貳、從解題基模的觀點區分兒童分數發展基模

兒童在學習分數之初必須仰賴對於整數單位的調節，其中應用 Piaget 基模調適觀念以解析兒童分數基模發展的研究近年紛紛出爐。本節即以 Steffe (1988, 1992, 2002, 2004)、Olive (1999, 2001a, 2001b, 2002, 2003)、Sánenz-Ludlow (1994, 1995)、Tzur (1995)及甯自強(1993d, 1997a, 1997b)等人藉由心像、心理及語言的使用探討兒童的分數知識的結構機制為主要探討對象。以下分別說明之。

一、Steffe 整數分數基模模型

分數的發展在整數之後。Steffe, von Glasersfeld, Richards 與 Cobb (1983）將兒童整數的發展分成四種數列，而所謂的「數列」是一種「抽象單位項數列」(a sequence of abstract unit items)，其中包含了計數活動的記錄(Steffe, 2002)。Steffe (1994)認為數的加法性和乘法性的運思都牽涉到數列的發展。分數則是延續整數發展的一種數概念，因此以下將先梳理四種整數的數列，再整理其有關分數基模的分類。需特別提出的是，Steffe 認為整數的第四種數列(外顯巢狀數列)和分數的發展特別有關。

(一)前數數基模(pre-numerical counting schemes)

具此基模的兒童會利用手「指」作數數，但尚無法做固定的數數，即第一次和第二次所數的可能不一樣。有些物件可能會數兩次，動作和口語可能無法一致。此時的兒童是依賴知覺及形象的數數者。

(二)初始數列(an initial number sequence，簡稱 INS)

在剛進入初始數列的兒童，數詞對他而言只不過是計數動作所相對的一串數列，這個數列所包含的並不是一個單位(Steffe, 1994)。從他所產生之計數活動記錄來看，他所運思的計數活動是一個一分開的，而非運思在一段數的截割(segment)之上。例如：兒童數一堆 10 個彈珠，當他數到 7 的時候請他停下來，此

時這個 7 對他而言只是一個別的標號，而不是把它看成他已經「數了 7 個」。到了後期，不只靠看得見的物體形象數數，且能夠產生心像對那些看不見的(被刻意遮住)物件做數數。此時，數列代表的是一個包含以「1」為單位的單位，即集聚單位。因此假如物件一直往上加，他也可以從先前數的往上數數(亦即進入累進性合成運思)。但是此階段兒童無法處理一個「語詞項」(lexical item)，只能靠在情境中做出指定的數。此外，雖然可以做到兩個兩個一數的計數物件，但是尚無法察覺到底數了多少個 2。

(三)內隱巢狀數列(a tacitly-nested number sequence，簡稱 TNS)

TNS 比 INS 進步的地方有兩項重要的指標，其一是可以把語詞項當作是做出來的集聚單位；其二是 TNS 是一種「可逆溯的計數基模」(reversible counting scheme)，亦即既是計數的結果同時也是在相同計數情節中的計數情境。以向兒童詢問「有 12 顆彈珠(未出現可操弄實物)再多 15 顆彈珠是多少顆彈珠？」為例。兒童會把 15 視為一個單位，即不再 13 (1)、14(2)…一個一個往上數，且可以兩個或五個一數數數，知道自己數了多少個 2，多少個 5。要能保留以兩個(或五個)一數的軌跡涉及到 TNS 中調節兩個層次的單位，即一個是以 1 為單位，另一個是以 2 為單位。當兒童擁為內隱巢狀數才有可能發生乘法性基模，在初始

數列時則不可能發生。

(四)外顯巢狀數列(an explicitly-nested sequence，簡稱 ENS)

ENS 是由 TNS 再內蘊化而來。當兒童具有 ENS 時可以產生 1 的可複製單位，因為它是可以複製的，也就是它可以從數列中脫嵌，而以複製的方式形成另一個從 1 脫嵌出來的相同拷備之新單位。Steffe（2002）明確的指出，將一個單位項進行迭代(iterating)及某一個部分從整體中脫嵌而出，是外顯巢狀數列的兩個主要的運思特徵。例如：1 重複五次可以產生一個 5，而 5 可以被分割成 5 個 1。依此而論，可複製單位是可逆溯運思的結果，藉由活動中重複的運用此基模而建立。就分數來說，例如：兒童要知道$\frac{5}{6}$盒是$\frac{1}{6}$盒連續複製五次，才會得到 5 個$\frac{1}{6}$盒，亦即$\frac{5}{6}$盒。

二、 Steffe 和 Olive 發展的分數基模模型

Olive 與 Steffe（2002）合作，利用 Java 語言所寫的電腦模擬程式(TIMA 及 Java Bar 5)進行臨床教學晤談，在前述 Steffe 的理論基礎上又延伸出五種兒童可能的分數基模。此一取向的理論認為構成分數概念有兩個主要的運思:「分割」(partition)與「迭代」(iteration)（Tzur, 2003），由此切入，可以瞭解兒童的分數基模。Olive 與 Steffe（2002）、Steffe (2004)將兒童從外顯巢

狀數列到「分數連結數列」(fractional connected number sequence)之間可能產生的運思方式及基模型態繪製如圖 2-3。

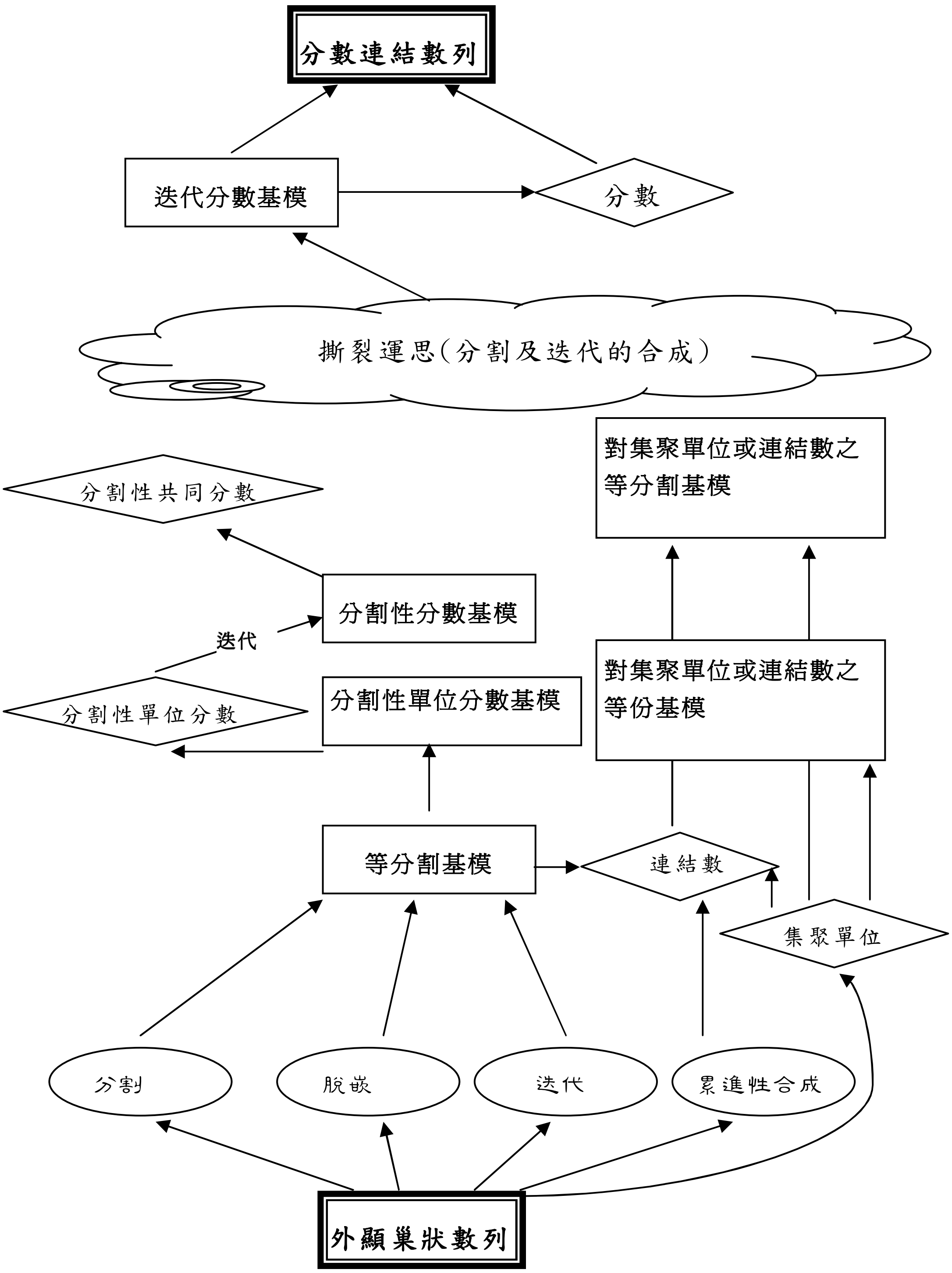
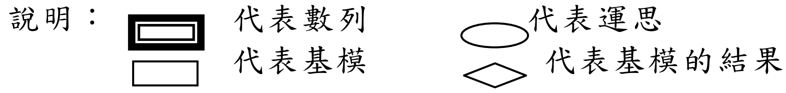


圖 2-3　由外顯巢狀數到分數連結數的基模變化



資料來源：”The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe”, by J. Olive & L. P. Steffe, 2002, *Journal of Mathematical Behavior, 20, p.* 436.

在圖 2-3 所呈現可能的基模主要有「等分割基模」(equi-partition scheme)、「分割性單位分數基模」(partitive unit fractional scheme)、「分割性分數基模」(partitive fractional scheme)、「迭代分數基模」(iterative fractional scheme)及「等份基模」(equi-portioning scheme)等五種。所謂「等分割基模」係指兒童能將一個物件利用預期基模進行相等分割。「分割性單位分數基模」則指具有將整體等分後得到基本單位分數的基模，例如：一包餅乾 18 塊分給 9 人，得到$\frac{1}{9}$包餅乾。所謂「分割性分數基模」是指可以結合單位分數以形成一個整體的集聚部分，但此集聚部分小於等於甚至是大於整體。「迭代分數基模」是指可以將一個分數進行迭代做出另一個分數，例如：把$\frac{4}{5}$條積木連續迭代 4 次得到$\frac{16}{5}$條積木。「等份基模」係指能知道等分後的每一個分量和整體量之間所形成份都一樣多。例如，把一盒糖果 36 顆，分給 9 個人。兒童能做出每一個人都分到 4 顆，而且知道這 4 顆是$\frac{4}{36}$盒也就是一份，而且有 9 個一份，每一份都相等。不過 Olive 與 Steffe（2002）也強調整個分數的發展並不是到此為止，就他們所研究的個案到五年級結束前可以發展分數乘法，此時被稱之為「組合分數」(分數的分數)。以下就分數的加法和乘法有關的基模做一介紹。

(一)迭代分數基模

迭代分數基模(the iterative fractional scheme)和分數

的加法有關。而迭代分數基模是由外顯巢狀數列(ENS)發展而來，所使用的單位是可以複製的，且可做二階單位的調節，例如：兒童能夠把$\frac{1}{4}$當做是一個可複製的單位，將$\frac{1}{4}$複製 3 次，合起來是$\frac{3}{4}$。在此階段中，必須調節以$\frac{1}{4}$為單位和以$\frac{3}{4}$為單位，即$\frac{3}{4}$這個單位是由 3 個$\frac{1}{4}$為單位所合成的。

(二)共同分割分數基模

共同分割分數基模(the common partitioning fractional scheme)是解決異分母加減的關鍵，它是繼上述迭代分數基模而發展的基模。其主要的特色是可調節三階的單位，例如：一盒糖果 24 顆，$\frac{6}{8}$盒是 18 顆，18 顆和$\frac{18}{24}$盒一樣；$\frac{3}{4}$盒也是 18 顆也和$\frac{18}{24}$盒一樣。所以，這 18 顆可以是將原始單位量(24 顆)做不同的等分割後形成的，同時$\frac{6}{8}$(或$\frac{3}{4}$)也是一個具有的三階概念的分數。

(三)分數集聚基模

分數集聚基模(the fraction composition scheme)的發展導致分數乘法概念的出現，它的特色是透過分配策略、可重複性

等分割及可逆性等分割而形成，擁有此基模的兒童可以將任何分數視為是其它分數的分數，例如：$\frac{6}{12}$條蛋糕，可以是$\frac{3}{4}$條蛋糕做三等分割之後再取其中二等分的最後結果。換言之，$\frac{6}{12}$條蛋糕是$\frac{3}{4}$條蛋糕的$\frac{2}{3}$倍。

(四)測量分數基模

測量分數基模(the measurement fractional scheme)的發展導致分數除法概念的出現。要擁有此基模的兒童必需要把分數當作是可以相互比較的量，再藉由交叉等分割(cross-partitioning)的運思成就此一基模。

(五)算術的有理數

算術有理數(the rational numbers of arithmetic)可以導致分數除法的圓熟發展，兒童要到達算術的有理數運思必須要找到兩個分數的共測單位，再利用整數的除法做出分數，例如：$\frac{1}{2}$是$\frac{2}{5}$的多少倍？兒童必須找到兩者的共測單位是$\frac{1}{10}$，繼而將$\frac{1}{2}$視為是$\frac{5}{10}$、$\frac{2}{5}$則成為$\frac{4}{10}$，最後再處理 $5\div4=\frac{5}{4}$。擁有算數有理數基

模的兒童，已經可以圓熟的解決分數乘除的問題。

三、 Sáenz-Ludlow 分數基模模型

Sáenz-Ludlow（1994, 1995）推測部分化(parting)和整體化(wholing)似乎是兒童發展分數意義時重要的心理運思，並根據實驗的結果將兒童的分數基模分為三類：

(一)測量性的部分-整體基模(the metric part-whole scheme)

1.連續量情境

此基模是在衍生分數量之前，以一個部分測量整體的結果。從自然數的經驗建立「部分到整體」(part-to-whole)及「整體到部分」(whole-to-part)雙向關係。

2.離散量情境

修正從連續量情境得到的基模，利用比較單位分數的內容物而決定分數之間的大小關係，也藉此調節自然數單位和分數單位之間的關係。從等分割活動中個體得知，整體是單一部分的倍數，亦即覺知到所謂「整體」是依靠部分構成的實體(a part-dependent entity, part-to-whole relation)，隨後再覺察到「部分」是和仰賴整體存在的相對實體(a whole-dependent entity, whole-to-part relation)。「部分到整體」(part-to-whole)是內嵌於把整體視為部分的倍數的構念當中，亦即把整體視為一個集聚單位，它內嵌了一種乘法性關係。「整體到部分」(whole-to-part)關係則內嵌於部分相對於整體的分數量。另外，在離散量情境下兒童似乎有一預期基模，可以將整體進行等分割並且窮盡它。

(二)多重分割調節基模(the multiple-partitioning coordinating scheme)

擁有此基模的兒童能夠比較分數大小，且因不必涉及內容物，在整體未知情況下運作分數的合成。可以從整體未知的情況下衍生出等值分數，並且利用單位分數複製的策略比較分數的大小。成功發現$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$和$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{7}$和$\frac{1}{14}$之間的關係，是基於來自調節同一個整體不同等分割，此時保留整體的完整。

(三)部分分割調節基模(the part-partitioning coordinating scheme)

具備此基模的兒童可以將第一次分割後的部分當作是一個整體進行一個內嵌於原來基準單位量的新分割。此時由於能夠掌握整體和部分之間的乘法性關係，所以可以瞭解單位分數內容物為多個個物的分數，也可以做出等值分數，並能解決分數乘以分數的問題。

四、 Tzur 所發展之分數基模

Tzur (1995)曾利用 51 個教學情節透過電腦及師生間的互動探討兩個學生的分數基模發展，歷經了個案由四年級升到五年級的時間。藉由教師布下具有挑戰性的分數問題後學生的解題，學生在迭代和遞迴分割的運思基礎上建立了五種分數基模，並就其發展繪圖如圖 2-4，其說明如下：

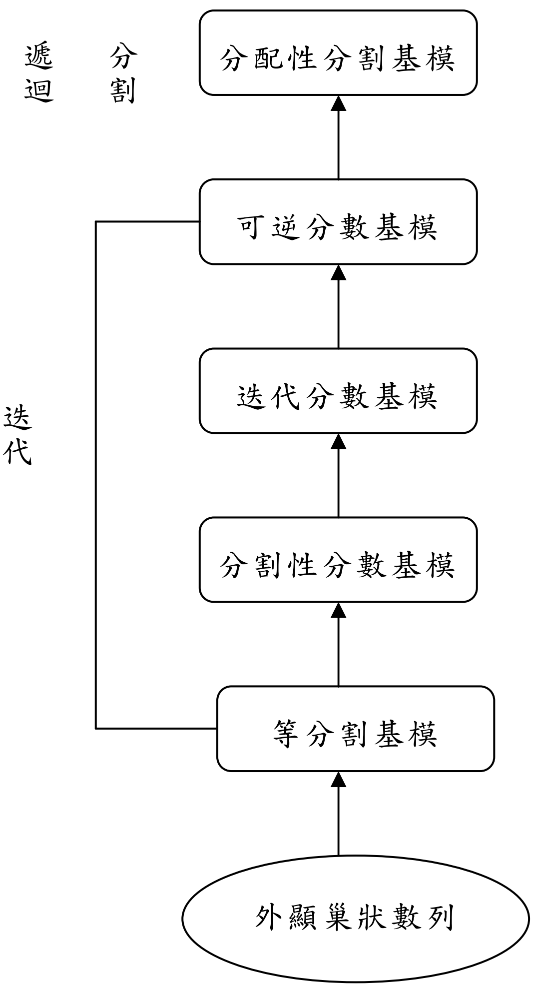


圖 2-4 由外顯巢狀數列至分配性分割基模發展圖

資料來源：*Interaction and children's fraction learning* (p. 292), by R. Tzur, 1995, Unpublished doctoral dissertation of the University of Georgia.

(一)等分割基模

擁有等分割基模(the equi-partitioning scheme)的兒童，能夠知道一個整體被打破成特定數目的相等部分，而且可以利用分解活動以產生部分。更進一步，如果給予兒童任意一個部分，他可以根據此部分製做出相對它的整體。

(二)分割性分數基模

兒童擁有分割性分數基模(the partitive fraction scheme)的特徵是可以調節分割後的單位，可以說出等分割活動所產生出來部分的相對之標準分數詞。其次，若給兒童一支「四分之一條」的數棒，它可以利用對整體量迭代 4 次的方式說明它是「四分之一條」。因為此時兒童可以將標準分詞和分割後的單位連結起來，所以，部分分數基模可以說是初始的分數基模(an initial fraction scheme)。

(三)迭代分數基模

在迭代分數基模(the iterative fraction scheme)的層次，兒童對於部分整體的關係重新建構出新的概念，重新將分割後單位當作是可迭次的分數單位。此時，不僅可以做出原來的單位量，也可以做出假分數。而此基模相當於 Sáenz-Ludlow (1994)所提的「測量性部分-整體基模」。

(四)可逆分數基模(the reversible scheme)

具有可逆分數基模的兒童，可以利用其逆運思產出一個集聚

單位分數，例如可以從$\frac{7}{10}$找到$\frac{1}{10}$，以做出其他以 10 為分母的分數，其中亦包括假分數。

(五)分配性分割基模

要具備分配性分割基模(the distributive partitioning scheme)的兒童能夠進行兩步驟的分割，而且能將分割後的部分進行多步驟的遞迴。亦即，將一單位量做第一次分割之後，利用其中一個部分，再進行第二次分割，而且能夠楚的知道第一次分割的部分和原來單位量的關係，及第二次分割和第一次分割部分的關係與原來單位量的關係。

五、 甯自強五階分數詞模型

甯自強(1993d, 1997a, 1997b)及 Ning (1992)以「部分整體概念」及「子分割基模」(subdividing schemes)為主題，探究對兒童分數詞概念運思方式，畫分出五個階段:「分數前置概念」、「起始單位分數」、「加法性分數」、「巢狀分數」和「有理數概念」。以下就和本研究較相關之「起始單位分數」、「加法性分數」和「巢狀分數」分述之。

(一)分數前置概念

處於分數前置概念的兒童雖已具有數概念與分割活動，但其數概念只是序列性合成運思，而分割後亦未能將子分割單位數值化，因此，此層次的兒童並未具有分數概念，故稱之為分數概念

的前身。舉例而言，兒童會將一個蛋糕成分四份，但是如果問每一份是多少「個」蛋糕，此階段的兒童可能直接就回答「1 個」。混淆「個」和「份」單位的不同，兒童在這階段所顯現的特徵還包括：

1. 在連續量情境下，傾向於利用直覺做判斷，將一物撕裂使成為一個撕得的部分和一撕剩下的部分，所以並不能做到真正的「等分」。
2. 只有部分而缺乏部分與整體的概念。如兒童可以知道將一個餅切成三份後拿出一份是三份中的一份。但是如果問兒童將拿出的這一份再放回去，那麼全部是多少時，兒童則會回答四份。
3. 兒童無法使用不同分數詞去表示不同分割情境的意義，例如：一個蛋糕平分成四份時，他不會說那是「$\frac{1}{4}$個蛋糕」。

(二)起始單位分數(initial unit fraction)

當兒童能夠將整數的累進性合成運思運用到分數情境時，他們便可以將分子內嵌到分母之中，此時分數詞對他而言是一種「內嵌並置關係」。由於分子尚未能脫嵌，單位分數並非真正成為可以複製及做累積的單位，所以兒童也無法進行單位分數的累積活動，例如：老師布下「一個 pizza 切成 8 片，小明拿了 1 片，小莉拿了 3 片，兩人合起來拿了多少個 pizza？」類似的題目，

而且要求他用數學符號表示時，往往做出來的答案是：$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{16}$。因為，對兒童而言，分子分母只是並置內嵌的關係，知道「8片中的1片，和8片中的3片，兩個8片合起來是16片，1片和3片合起來是4片，答案是$\frac{4}{16}$個」。

此階段兒童主要的認知特徵為：分子和分母的部分整體關係不明顯；單位分數無法被複製累積。

(三)加法性分數

當兒童可以將整數的「部分--全體運思」引進分數情境中，分子可以自分母脫嵌，且單位分數變成可以複製及累積的真正「單位」。同時對於非單位分數，也可以視為是由單位分數複製累積而來。以前述同一題目為例，兒童開始知道1片就是一個$\frac{1}{8}$，3片是3個$\frac{1}{8}$，1個$\frac{1}{8}$加3個$\frac{1}{8}$就是4個$\frac{1}{8}$，也就是$\frac{4}{8}$個pizza。

此外，甯自強(1997a, 1997b)指出，加法性分數在性質上是一種「單向」的部分--整體關係，此階段兒童所顯現的特徵為：

1. 能夠瞭解單位分數內容為單一個物離散量及連續量之同分母分數合成、分解及比較問題。
2. 對於單位分數內容物為多數個離散量的同分母分數問題尚有困難。
3. 對於帶分數和假分數的互換常會混淆。
4. 處理等值分數有困難。

除上述特徵外，陳靜姿(1997)在甯自強的研究基礎上，針對四年級兒童的等值分數概念所做的研究也發現，持有「加法性分數」概念的兒童具有七種主要的特徵：(1)幾分之幾可以當成一個分量；(2)分裂量與分裂數成反比；(3)分數可以是分數單位；(4)把分數當成一個函數關係；(5)分母就是代表將一個整體分割成幾份；(6)參考點迷失；(7)將分子、分母中較大的數除以較小的數所得的商代表分數值。

(四)巢狀分數

當兒童可以將整數的測量運思引進分數情境，便開始能理解單位分數內容物為多個之部分與整體的關係，並察覺等值分數情形。此時兒童所顯現的特徵為：

1. 具有雙向的部分整體運思。
2. 可以利用單位分數的再次分割，察覺等值分數。但是，因為缺乏彈性思考的緣故，對於非以再次等分單位分數而產生的等值分數，則無法判定，尚未能真正具備等值的分數概念。
3. 具有分數乘法的概念。

(五)有理數概念

所謂的有理數是兩個部分全體的重組，此時的兒童不僅具有部分--全體的雙向運思，更能以分數作為測量的單位。此時兒童

所顯現的特徵為：

1. 已經具有彈性思考的能力，能將不同分母的分數經由等分割活動加以比較。

2. 能理解等值分數的概念。

經由上述文獻的梳理可以發現，Olive 與 Steffe (2002)、Steffe (2004)對於基模發展的觀點和 Sáenz-Ludlow (1994; 1995)及 Tzur (1995)有部分是相同的，茲整理如表 2-3：

表 2-3 基模類型比較表

學者	Olive 與 Steffe (2002)、Steffe (2004)	Sáenz-Ludlow (1994;1995)	Tzur (1995)	發展層次
分數基模的類型	算術有理數基模			高
	測量分數基模			
	分數集聚基模	部分分割調節基模	分配性分數基模	
	共同分割基模	多重分割調節基模	可逆分數基模	
	迭代分數基模	測量性的部分-整體基模	迭代分數基模	
	分割性分數基模		分割性分數基模	
	分割性單位分數基模 VS. 等份基模			
	等分割基模		等分割基模	低

另外，由於數列的發展和分數詞概念的發展是瞭解分數基模發展脈絡的關鍵，所以將 Steffe (1994)以及甯自強(1993d, 1997a, 1997b)對於分數發展階段有關的區分及重要特徵比較如表 2-4，以瞭解兒童由整數進到分數的發展順序。

表 2-4　分數認知發展階段比較表

Steffe與Olive		甯自強	
數列名稱	特徵	分數階段名稱	特徵
前數數基模	1. 利用手指指的動作計數，可能同一個物件指兩次。 2. 尚無法做固定數數。 3. 手指和口說可能無法配合。 4. 若把要數的物件蓋住，無法利用心像數數。 5. 利用感官和圖像數數。	尚未有分數概念	
（一）起始數列	1. 進入累進性合成運思。 2. 可以 2 個、2 個一數，但不曉得數了幾個 2。	（一）分數前置概念	1. 利用直覺做判斷，不能做到真正的「等分」。 2. 只有部分而缺乏部分與整體的概念，如兒童可以知道是三份中的一份，但是如果將這一份再放回去，問兒童全部是多少時，兒童會回答四份。 3. 兒童無法使用不同分數詞去表示不同分割情境的意義。
（二）內隱巢狀數列	1. 不管是 2 個一數或 5 個一數，均可以保留數多少個的軌跡。 2. 只能在活動中調節 2 個單位。 3. 可以從活動中開始啟動整數的乘法性基模。	（二）起始單位分數	**1. 分子和分母的部分整體關係不明顯。** **2. 單位分數無法被複製累積。**
（三）外顯巢狀數列	1. 可以有抽象的乘法性基模。 2. 可以產生可以迭代的單位。 3. 可以進行部分整體的推理。 4. 單位具可逆性(1 個 5 也就是 5 個 1）。 5. 可以做 3 階單位的調節，但無法符號化。 **6. 出現迭代分數基模**	（三）加法性分數	**1. 能夠瞭解單位分數內容為單一個物離散量及連續量之同分母分數合成、分解及比較問題。** **2. 對於單位分數內容物為多數個離散量的同分母分數問題尚有困難。** **3. 對於帶分數和假分數的互換常會混淆。** **4. 處理等值分數有困難。**

（續後頁）

（接前頁）

（四）概化數列	1. 可以開始建立指數結構。 2. 可以很清楚的展現出位值關係，並且外推到更高位數。 3. 可以找到兩個數的最小公倍數。 4. 可以找到兩個分數的共同分母。 5. 可以進行異分母分數的加減。 6. 具共同等分割分數基。 7. 具分數集聚基模。	（四）巢狀分數	1. 具有雙向的部分整體運思。 2. 可以利用單位分數的再次分割，察覺等值分數的情形。但是，尚未能真正具備等值的分數概念。 3. 具有分數乘法的概念。
（五）算術有理數	1. 具有單位分數集聚基模，建立一個單位分數的單位分數。 2. 可以利用分數集聚基模找到一個單位的分數的分數倍(如$\frac{3}{5}$盒的$\frac{1}{4}$倍) 3. 將分數視為一個測量單位。(如知道 3/4 是多少個 1/8 構成) 4 擁有分數的共測單位，所以可以進行分數的簡化及瞭解任何分數可以由其他分數構成。 5. 測量分數基模	（五）有理數	1. 已經具有彈性思考的能力，能將不同分母的分數經由等分割活動加以比較。 2. 具有等值分數概念。

從表 2-4 可知，Steffe 和 Olive 以及甯自強等人對於兒童分數發展的見解雖相近卻不盡相同，而他們所提出的也只是一種假設，這些「經驗模型」需要更多的實徵基礎。尤其，不同文化脈絡下的兒童是否也具有類似的發展，殊值重視。所以本研究採取 Steffe、Olive、Sáenz-Ludlow、Tzur 和甯自強等人所採取的認知結構發展的觀點，探討兒童的解題表現，一方面以學者們已構築

的經驗模型解析兒童分數基模，另方面瞭解其在不同文化脈絡下的適用性。另外，Tzur（1999）的研究也歸納出兒童重組分數概念的三條路線：將整體進行等分割、對部分進行遞迴等分割，單位的重新建構。此三條路線涉及到 Steffe、Olive、Tzur 和甯自強等人所強調「單位」基模的調整，所以可以納入編製實驗課程的考量。

第三節 分數教材呈現在小學數學課程的順序

國民小學數學領域教材在「數」方面以整數、分數和小數三個部分的知識為主要學習的素材，但是各國在安排教材的先後順序上有所不同。我國、美國及以色列都依照「整數-分數-小數」的順序教學，而法國則是按照「整數-小數-分數」的順位。在美國和以色列，分數的教學大約比小數提早一年實施；法國則反之，分數比小數晚一年教學(Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989)。在我國，大部分的教科書版本在二下引入分數，直到三下才教小數，兩者之間大約相差一個學期。依據 Resnick 等人(1989)的研究，分數教材和其他主題安排的先後會產生學生對於分數迷思概念的不同，若先教整數和小數再教分數，則小數的某些思考法則會被移用到分數之中，反之亦然。就教材安排的順序，我國學生分數的迷思概念可能大部分來自整數

而非小數。以下就分數教材在現行課程中的相對關係及課程地位進行分析。

壹、分數教材與其他教材的關係

分數的學習是繼整數之後。以目前小學的教材為例，必須先教導學生整數平分後，才引入$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$等單位分數的學習。此時分數的存在形式主要是「部分在整體中」(part-in-whole)，迨學習至假分數時兒童所必須具備的運思則成為「整體的部分」(part-of-whole)。不論是「部分在整體中」或「整體的部分」都需要藉助於整數的思考。然而，當學習進入分數加法時，分母和分子各自相加便成為中外普遍的分數迷思概念(呂玉琴，1991;林碧珍，1990；陳瑞發，2003；詹婉華，2003；Olive, 2001)，Streefland (1993)稱其為「自然數的干擾」(N-distractor)。而 Behr 等人(1984)、Streefland (1993)以及 Lamon (1996)均將此現象解釋為整數妨礙分數學習。然而，部分學者則不同意此種觀點，認為在掌握單位的抽象化上必須藉由兒童從整數的經驗中遷移到分數的情境，所以分數需藉助於整數運思的純熟(Hunting, Davis & Pearn, 1997; Ning, 1992; Olive, 1999, 2001; Sáenz-Ludlow, 1994)。兒童會將分母和分子各自相加是因為對他而言，單位分數只是數運思的結果，還不是可以被單位化的量(Olive, 2001)。另外，設使在整數情境無法同時掌握兩個單位及三個單位，便無法提升到巢狀數列，影響到未來等值分數、分數乘除的表現。

本研究對整數和分數之間關係所持的觀點和 Steffe 等人相同，即將視為兩者和諧的發展觀。因為人類的學習是連續的，也是經驗不斷的改造，整數的單位和分數單位在形式上雖不同，但在本質意義上後者是前者的延續。兒童之所以產生「自然數的困惑」是尚未將整數的舊知識經驗重組成功，亦即其單位基模還未經過適應重組及內蘊化。若能經由老師的協助和社會互動的歷程，兒童便有機會進行基模重整，以便讓分數單位和整數單位產生聯結。

貳、「九年一貫課程暫行綱要」中分數、整數和小數間的關係

因為本研究主要的研究對象為五年級學童，其乃接受 2001 年(民國九十年)所頒訂的「九年一貫暫行綱要」所編製的各家教科書的教學。茲將暫行綱要中有關分數的能力指標及與其相關連的整數及小數的能力指標繪如圖 2-5 所示：

整數　分數　小數

第一階段

N-1-1 能初步掌握非負整數數詞序列的規律，並能以具體的量、聲音、圖像、數字，進行說、讀、聽、寫、做的活動，表徵 2000 以內的數。

N-1-3 能理解加法、減法的意義，解決生活中有關三位數以內的加、減法問題，並運用電算器加以檢驗。

N-1-4 能透過累加活動連接倍的語言，理解乘法的意義並解決生活中簡單(積≦100)的整數倍問題(例如：單位數≦12，單位量≦15)。

N-1-5 能用具體分的活動，理解除法意義並解決生活中有關除法的問題。

N-1-7 在等分好、整體 1 能明顯出現之具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能以真分數(分母在 20 以內)描述內容物爲單一個物的幾份，並能延伸真分數的意義，進行同分母真分數的合成、分解活動(和<1)。

N-1-8 在一個整體 1 被明確十等分的具體生活情境中(包含離散量、連續量)，能以一位小數描述其中的幾分，並能進行一位小數的合成、分解活動(和及被減數<1)。

第二階段

N-2-5 在等分好、整體 1 能明顯出現之具體情境中，能以真分數來描述單位分數內容物爲多個個物的幾份，進行同分母真分數的合成、分解活動，並理解等值

N-2-7 能以二位小數描述具體的量，並解決二位小數的合成、分解及簡單整數倍問題。

N-2-6 在具體情境中，能以假分數或帶分數描述具體的量，並能解決分數的合成、分解以及簡單整數倍的問題。

N-2-10 能認識各種量的普遍單位，應用在生活中的實測和估測活動，並培養出量感(普遍單位：千米、毫米、公升、毫公升、時、分、秒)。

N-2-12 能知道同類量中二階單位之間的關係及使用二階單位作描述，並利用此關係作整數化聚。

N-2-19 能利用等分好的線段上，做出一條簡單的整數數線，並能進一步延伸至簡單的分數和小數的數線。

N-2-18 能用時間的長短，描述一物體在固定距離內的運動速率；能用距離，描述一物體在固定時間內的運動速率。

(續後頁)

(接上頁)

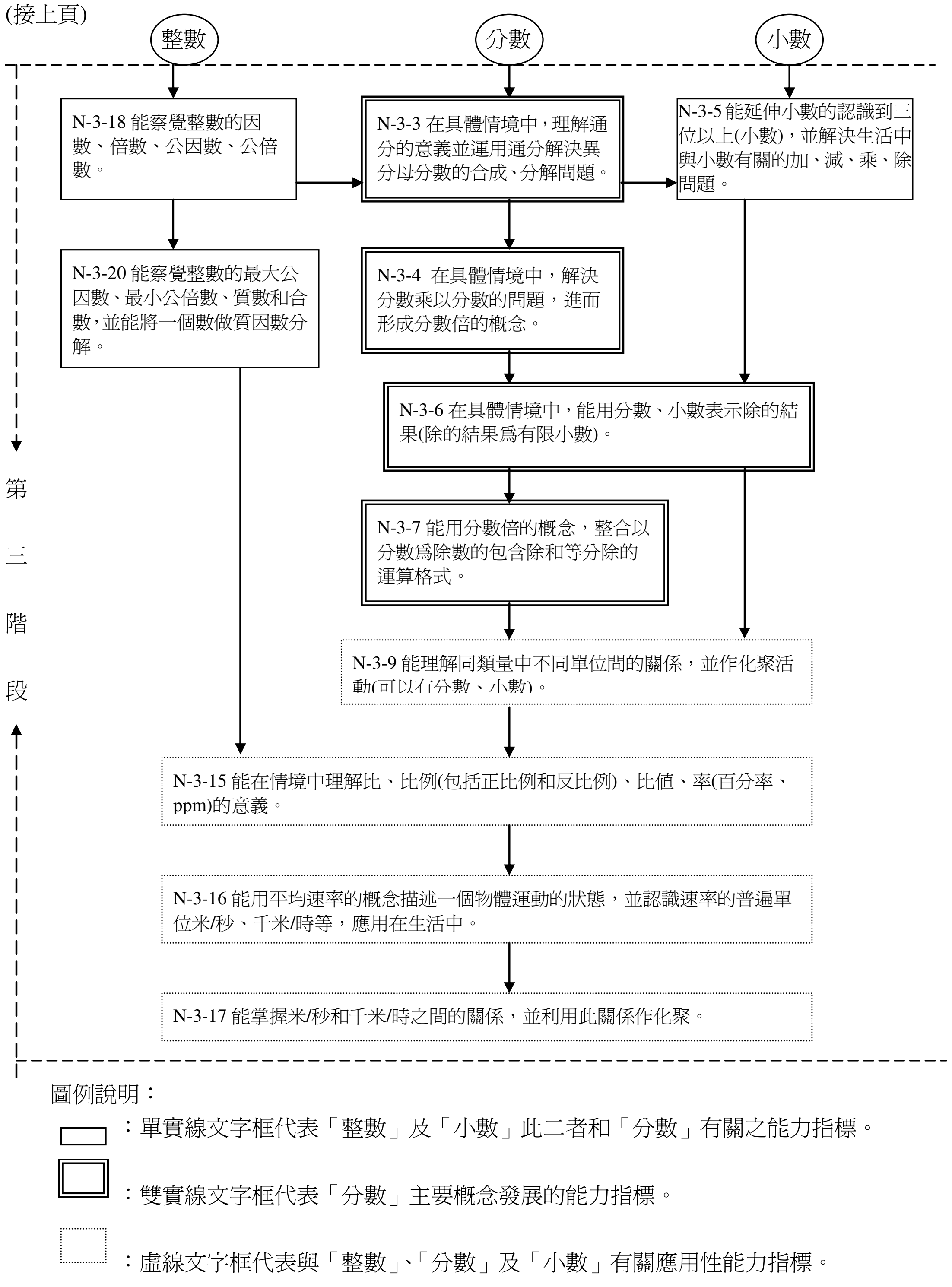


圖 2-5　九年一貫課程暫行綱要整數、分數及小數能力指標關係圖

由圖 2-5 可知，2001 年(民國九十年)正式實施的暫行綱要

第一階段的規畫是整數在具備完成具體分的能力(N-1-5)後即引入單位分數內容物為單一個物的真分數(N-1-7)，而一位小數(N-1-7)能力的培養則是利用分數$\frac{1}{10}$的觀念啟蒙，並且延伸為一位小數的合成與分解。

第二階段分數學習欲培養之能力包括能處理真分數單位分數的內容物為多個個物的合成分解問題、理解等值分數(N-2-5)，且在具有真分數的基礎後再拓展到假分數和帶分數，再引進分數整數倍的概念(N-2-6)。和第二階段配合所欲培養的小數能力則以二位小數的合成、分解及簡單整數倍的問題(N-2-7)為主。另外，利用數線教材(N-2-19)使學生有機會統整整數、分數及小數教材。

第三階段的分數要求學生必須要有處理異分母分數合成、分解問題的能力(N-3-3)，再學習處理分數乘(N-3-4)及除(N-3-7)的問題。然而，在異分母分數合成分解教材之前必須安排整數的因數、倍數、公因數和公倍數(N-3-18、N-3-20)等前置能力的培養。小數的部分則以分數的加減乘除為基礎，學習三位小數及小數的四則運算。

參、市售教科書分數教學單元分析

自從教科書開放之後，各家廠商依照能力指標編訂課程再送教育部審訂。各版本教科書是根據「一綱多本」的原則編訂，所以教材的鋪陳順序並不一致，不過對於每個學習階段的內容大致

上大同小異，甚至在分數問題的布題情境考量也多有類似的安排。陳竹村等人(2001)即將國小分數教材的問題情境區分成「基準單位量是連續量」、「基準單位量是離散量」及「基準單位量是全部」等三種，而「基準單位量是未知而不能進行具體等分割活動的問題」則未列入國小分數教材範圍。對於學生解決分數問題來說，除了上述基準單位量是否已知具有著重大的決定因素外，當離散量問題情境情還涉及到單位分數的內容物是單一個物、多個內容物或不是整數個等三種情況時，也有不同的難易程度。一般而言，單位分數內容物為多個及非整數個的問題對兒童較為困難，常會有將分母的數碼直接視為單位量的數目，分子的數碼視為單位分量的數目。通常都會將單位分數為多個內容物的教材安排在四年級下學期及五上學期；單位分數為非整數個的教材則安排在五年級下學期。

本研究上述根據文獻對教材內容加以區隔之外，為更瞭解本研究樣本的學習經驗，就其過往所採用康軒版教材(康軒出版社，2004)及目前(四年級下學期)有關分數教材單元分析如表2-5：

表 2-5　教科書分數教學單元分析表

冊別、單元及版本	主要教學活動	主要學習概念	表徵向度				
			真實情境	操作	圖像	口語	書寫符號
二下第七單元【康軒版】	活動一： 在連續量(草莓派及長形蛋糕)的情境下，進行四等分圓形草莓派、八等分長形蛋糕；分數命名	等分、單位分數認識	✓	✓	✓	✓	✓(只有介紹)
	活動二： 三等分、六等分、五等分、七等分及九等分彩帶；以1個白色小積木對於不同整體量(不同色的積木)之分數命名	不同等分割情況下單位分數認識	✓	✓		✓	
	活動三： 進行兩個單位(片/包、枝/盒、個/盒)離散量單位分數認識	涉及兩個單位單位分數認識	✓			✓	
三上第八單元【康軒版】	活動一： 以摺國旗及桌墊認識四分之三；	非單位分數之真分數的認識	✓	✓	✓	✓	✓
	活動二： 在連續量(披薩及牛奶)與離散量(鳳梨酥和檸檬)情境下認識真分數	在不同情境下認識真分數	✓		✓	✓	✓(引入分數的記法)
	活動三： 等分彩帶進行不同真分量認識；不同單位分量的比較	連續量情境進建立分數數詞序列；分數比較大小	✓	✓		✓	

（續後頁）

（接前頁）

冊別、單元及版本	主要教學活動	主要學習概念	表徵向度				
			真實情境	操作	圖像	口語	書寫符號
三下第五單元【康軒版】	活動一： 利用連續量(紙軸)及離散量(圖釘)進行和小於 1 的真分數合成	利用單位分數累積進行真分數的合成	✓			✓	✓
	活動二： 利用連續量(鋁箔紙)和離散量(蛋)情境，進行被減數小於 1 的真分數減法。	真分數的分解與減法	✓	✓		✓	✓
	活動三： 在連續量(蛋糕及果汁)及離散量(鉛筆)的情境下解題。	真分數的加減應用	✓			✓	✓
	活動四： 在離散量(造型蠟燭)的情境下學習單位分數內容物為多個個物	內容物為多個個物的單位分數	✓	✓		✓	✓
四上第五單元【康軒版】	活動一： 在連續量情境(蛋糕圖卡)下認識假分數及帶分數，並認識其記法。	認識假分數及帶分數	✓		✓	✓	✓
	活動二： 在連續量情境(圓形分數圖)下，學習整數與假分數、假分數及帶分數的互換。	整數與假分數、假分數與帶分數互換	✓		✓	✓	✓
	活動三： 在離散量情境(口香糖、白色積木)下，學習整數與假分數、假分數及帶分數的互換。	認識分數的數線	✓		✓	✓	✓

（續後頁）

（接前頁）

冊別、單元及版本	主要教學活動	主要學習概念	表徵向度				
			真實情境	操作	圖像	口語符號	書寫符號
	活動四： 辨別假分數、帶分數	從書寫符號中辨別假分數與帶分數				✓	✓
	活動五： 透過長度概念，進行假分數和帶分數的互換。	假分數和帶分數的互換	✓	✓		✓	✓
	活動六： 在離散量情境建立內多之分量數詞序列，並進行做數活動。	內多分量之數詞序列、做數	✓	✓		✓	✓

由以上康軒版的教材分析，可以發現其所涵蓋分數意義的範圍包含「部分與整體」及「子集與全集合」兩種，這兩者其實可以歸併為一類，即 Kieren (1988)所稱的「部分與整體關係」。另外從教材活動設計的方式可以發現至少有下列五項不足之處：

（一）缺乏由分量或單位分數重構單位全體的活動。Behr 等人(1992)依實驗的結果發現，重構整體比由整體進行等分割困難。由於缺乏學習經驗，所以學生很難在此部分獲得良好的發展。

(二)雖已盡量涵蓋多元表徵，但是假定表徵之間具和諧一致，不同表徵之間關係有待進一步釐清。

(三)以確認給定的材料(操作或圖像)進行學習，較缺乏由學習者自發性對問題進行表徵，所以當面臨不同的解題情境時可能產生困難。

(四)對於不同程度的學生表徵方式假定相同，未闡明學生與表徵之間交互作用的情形。

(五)在教導數線單元中未強調參考單位量的確認，可能導致學生只仰賴已給定的表徵即可填出正確答案。

本研究則就以上五項不足之處另外設計「分數多元表徵課程」進行實驗教學，進而探討其成效。

第四節　分數意義及相關研究

分數學習困難的原因之一是其本身的子結構過於複雜，造成學童學習的紊亂。本節將分兩小節，首先整理過去國內外文獻，針對「分數的意義」加以探討，其次梳理有關兒童學習分數的相關研究，以釐清分數研究的範圍，並將過往研究做為比較之參考依據。

壹、分數的意義及相關概念

分數的英文是”fraction”，源自於拉丁字”frangere”(張平東，2002)，其概念則起源於「分」，是用來處理不滿一個單位量的量數值化的問題(甯自強，1995)。亦即，當一個不滿一個單位量的量，需要被原單位量予以測量並加以描述(數值化)時，就產生了分數的問題，並發展出分數的概念(謝堅、蔣治邦、林昭珍與吳

淑娟，2001）。Piaget, Inhelder 與 Szeminska（1960）認為兒童要學習分數必須要能掌握以下七個分數的特質：

一、整體是可以分割的，它可能是由許多可分離的元素組合而成。

二、分數是指定部分(相對於整體)的數目。

三、分數的等分必須耗盡(exhaustive)。

四、整體被分割成部分的數目和分割次數之間有固定的關係。

五、算術表示的分數意寓著所分割的每一份都相等。

六、子分割(subdivision)是一種運思，除了本身代表一個並置的分數之外，亦隱含著另一層的巢狀關係。

七、子分割後的部分總和等於原來全體，即必須具保留概念。

以上所提的七個分數的特質是兒童要擁有分數概念所不可或缺的。雖然 Piaget 的實驗主要是以連續量的情境呈現，但是這些分數的特質在離散量情境中依然成立，例如：學童在等分離散量情境單位分數內容物為多個時，就常常出現有未分盡的情況發生(王淵智，2001)。

至於分數的範圍和其所含的子概念在各學者間的看法有一些不同。文獻中常常將分數(fraction number)和有理數(rational number)併置討論並不特別去做區分，實際上分數所含蓋的範圍較小，有理數的範圍較大。Olive（2001）、甯自強(1995)均指出，有理數是分數的等價集所構成的等價類。就國小的教材分析，把

它限定在「分數」應該較為適切，但由於分數包含在有理數中，故討論時有時將它並置使用。此外，幾個常和分數混雜的名詞諸如「速率」(rates)、「比值」(ratio)和「商」(quotients)之間也有所區別，Lesh, Post 與 Behr（1988）曾對此四個詞以其是屬於單純的某一種量(外延或內涵)、配對量的關係或配對量運算的執行等三個判準做出以下的區分：

1.分數是外延量的特例；告訴吾人單一物件的大小，例如：$\frac{3}{4}$個蔥油餅。

2.速率是外延量；它可以用「每一」這個單位詞再行辨別，例如：颱風的速率「每一小時 150 公里」。

3.比值是二個有序配對量的關係(可能是外延量、內涵量或向量的形式)

4.商是結合二個量的二元運算(可能是外延量、內涵量或向量形式)。

上述的區別可以澄清四個詞之間的特徵，至於分數意義的定義，陳竹村等人(2001)整理了依據 1993 年(民國 82 年)課程標準所編的國小數學科教學指引中分數的意義，計歸為：「部分與全體的比較」、「除法的活動」、「算子」、「小數的另一種記法」、「比」、「測量及透過等分割活動及合成活動來實施，來確定一個量與一個基準單位量的數值關係的指標」等六種，此歸類和 Kieren（1988）的看法大致雷同。「部分和整體的關係」是國小分數啟蒙課程主要的活動類型，透過此比較瞭解分數詞乃是部分和包含

它的整體比較的表示法。到高年級，在未整除且要「全部分完」的情況下，讓學生瞭解到分數可以是除法活動。而在分數的乘除法中，透過單位數為分數的情況，學習分數可以當作運算子(operator)。另外，在中年級學習小數時，便以分數$\frac{1}{10}$做為分數小數連結的關鍵，所以分數也成為小數的另一種記法。在高年級以分數所表示的比值，來描述前後項比的關係。最後，利用和量做結合的情境問題，將以某一量(基準量)去度量化另一個量(比較量)，求出兩個量之間的關係。

此外，Kieren (1988)對於分數的子概念結構應該包含四個部分，即測量、商、比值及乘法性運算子(multiplicative operator)。他特別強調學習者想要對分數能有通盤的認識並不容易，因為不僅要把個別的子概念弄懂，而且要瞭解子概念彼此的關係，如此才能將”$\frac{a}{b}$”這個的數學符號和其他的四個面向做深刻的連結。

由上述各家學者的論述可得知，關於分數的意義(或子概念)有多種不同的解釋。由於本研究所要求的作業為兒童解加法性問題及分數乘以整數兩類問題為主，考量學生之學習經驗，故採取Kieren所指出「部分與整體」的意義為主，其他如「商」、「比值」、「運算子」等等不在本研究的探討範圍。

對於一般分數教學常利用四種模式或概念：區域模式、集合概念、線段模式及離散模式(張平東，2002；Millsaps & Reed, 1998)。區域模式的教學常利用圓形圖及長方形表示，由於長方

形的等分割可能涉及等積異形的問題，所以一般而言較不適合做為分數的啟蒙教材。但是，Olive（2002, 2003）所發展出 Java Bar 程式，在限定分割方式的情況下對長方形單位量進行任意份數的分割，是促進等分割、單位分數迭代等的好媒材。至於圓形圖只要利用對折的方式，能夠解決 2、4、8 等簡單偶數等分割的問題，學童較容易做出「等分」，所以較適合在剛引入分數概念時使用。圓形圖在進行奇數等分割或非連續對折等分割的操弄並不容易，故也有其一定的限制。利用集合概念教導分數，是離散量分數的自然形式，教學的重點應該讓兒童能夠掌握「全集合」及等分割之後的合成的「子集合」。線段圖則適合在兒童已經有整數線段圖的基礎及清楚掌握分數的單位量後再引入，其在比較分數的大小、等值分數教學及尋找共測分數時有其優勢。此外，LeFevre（1984）也曾提醒從事有理數教學的老師，在利用不同表徵材料詮釋有理數時亦應把其真正共同的屬性給呈現出來以便學生進行統整，否則學生對於有理數的認識將止於零碎的印象。

在分數課程的編製上，Rowan, Payne 與 Towsley（1993）認為 K-4 年級的分數之發展順序如下：

1.分享及相等大小：瞭解分數就是分享(sharing)，強調「公平」及「大小相同」。

2.部分和整體：利用精準的單位詞描述部分和整體。

3.比較：由分母相等開始，再到同分子，最後瞭解異分母分

數的大小。

4.等值分數、估計及比較。

5.分數符號教導。

以上五點中的前四項對發展實驗課程具有相當的啟發性。從整個發展順序可以看出強調概念的瞭解，先用口說而不急著引入符號的記法，待學生充分了解其意義後才開始教導分數書寫符號。然而，本研究所要研究的對象為四年級學生，就國內教材的編寫早在二年級下學期即引入分數的記法。所以，分數符號已是研究對象所早已接觸的表徵方式。研究者唯有透過解題限制及口頭引導方能突破學生使用的慣性。

貳、兒童學習分數的相關研究

Rowan 等人（1993）指出，在教分數和小數時最重要的就是在計算之前就要很謹慎的教導完整的概念。否則，學生將流於形式上的模仿、表面的計算。而過去以兒童學習分數為主題的研究文獻頗多，主要有兩類，第一類為概念錯誤類型描述，第二類是心理結構(基模)推測。

以下將兩類的研究結果或發現整理如下：

一、概念描述與實徵研究

由於分數所涉及的子概念相當多，所以專家學者的論述或研究也相對的多樣化，在此僅列舉等分概念、單位量、簡單分數、

分數比較大小及等值分數等五項，其餘未能納入上述分類但和本研究有所關連者列為「其他」一項。

(一)等分概念方面

Piaget 等人(1960)曾提供 3 至 7 歲不同年齡兒童黏土，要求他們將它分成兩等分和三等分，結果兒童們均感困難。隨後改為用圓形、長方形和正方形的紙，並提供剪刀和紙筆再進行等分，結果兒童可以進行四等分、五等分及六等分。Piaget 將兒童進行等分割實驗的結果分成以下三個階段：

第一階段：在進行等分割時仍有實質的困難，出現未完全分盡或大小不同的情況，尤其是進行三等分割時容易出現混淆切割數(切兩刀得三塊)和等分數。

第二階段：分成兩個子階段。第一個子階段，兒童能夠對小面積的、規則的形狀進行等分割，但對於面積大的、不規則的圖形要進行餘量再分則有所困難，例如：會把一個大的分出三塊小的，其餘的留下不管，或是做兩次對分，然後取三塊，剩下一塊不管。在不同圖形的表現上，要對長方形三等分割比正方形容易，而正方形又比圓形容易些。在部分與整體的認知上，此子階段的兒童不認為所有部分的總和必須等於原來的整體。在第二個子階段的兒童，對於二等分不再有任何困難，對於三等分問題已逐漸熟悉，但對五等分仍有困難。對於部分和整體的關係利用直觀的方式相信部分的總和和原來整體一樣多，而非利用運思(operationally)的方式。因此，此子階段的兒童具有部分與整體的

保留概念。

第三階段：分成兩個子階段。第一個子階段，可以利用預期基模執行三等分割，對於整體能夠藉由運思而得到保留，認為部分的總和及整體之間是必然的關係。第二個子階段，預期基模可以擴展到五等分割及六等分割。

從 Piaget 等人(1960)的實驗有三項主要的啟示。首先，等分概念是兒童學習分數最基本的概念之一，對一個物件等分必須遵循「分盡」和「公平」的原則。在第一階段的兒童由於沒有部分和整體的保留概念，所以無法進行正確的等分。其次，就圖形分割的難易而論，長方形分割最為容易，正方形次之，圓形進行分割(尤其是三等分)最難。復次，當兒童可以發展出預期基模，便可以由三等分、五等分、六等分等等向更多分割發展。

兒童進行等分的策略，依據 Pothier 與 Sawada（1983）的研究區分成五個階段依序為：分享(sharing)、算則對分(algorithmic halving)、偶數等分(evenness)、奇數等分(oddness)及合數等分。上述的五個策略是兒童進行等分從易到難所發展出來。

就國內實徵研究結果顯示，有為數不少的國小兒童缺乏等分概念(王淵智，2001；呂玉琴，1991；林碧珍，1990；陳瑞發，2003；詹婉華，2003；湯錦雲，2002)。其中缺乏等分概念的兒童常從比較容易分割的部分著手，把其餘未等分的部分在某一分量上進行分割活動，例如：將一個圓進行五等分割，兒童常先畫四等分後再從其中的一等分再對分。此種犯錯的現象與 Piaget

等人(1960)所做的實驗是一致的。

(二)單位量概念方面

研究發現兒童常常忽略單位量，並且自行假設單位量(王淵智，2001；林碧珍，1990；陳瑞發，2003；黃馨緯，1995；詹婉華，2003；湯錦雲，2002；劉世能，2002)，或者直接將總量視為單位量(詹婉華，2003)。這種情況尤其在面對單位分數內容物為多個個物時犯錯的機會特別大(王淵智，2001)，兒童傾向於直接將分母數視為單位量個數。由於辨認單位量有困難，突顯出其分子和分母之間的部分整體關係不明顯，且有可能是內嵌並置關係，所以這類兒童大致在起始單位分數階段，而尚未進入加法性分數階段。

(三)簡單分數概念

陳瑞發(2003)與劉世能(2002)將簡單分數定義在「部分/全部」、「子集/集合」的分數意義下，以真分數的內容物個數恰好等於分子數值的分數。兩人的研究均發現兒童解這類問題是容易的。但陳瑞發(2003)更發現，兒童在處理$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$的簡單分數問題會受分子和分母的影響。

(四)分數比較大小

呂玉琴(1991)、Behr 等人(1984)和 Hunting（1986）發現兒童在處理分數比大小時會運用自然數的規則做過度類推，Resnick 等人(1989)則稱之為誤用了整數知識。Behr 等人（1984）探討四年級學生在分數比較大小時發現兒童所用的策略有以下

幾種：

1. 同分子問題

(1)有效策略：導致兒童有效解決同分子比較大小問題的策略有四種。第一種，同時比較分母和分子，當分母越大時代表其值越小。第二種，只比較分母，分母越大其值越小。第三種，自行找到參照點(reference point)進行比較。第四種，利用畫圖或是操作具體物進行比較。

(2)無效策略：兒童容易採用「以整數主宰的思維」(whole number dominance)而導致無法有效解決問題，例如：$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$這兩個分數，由於 4 大於 3，所以推斷$\frac{1}{4}$大於$\frac{1}{3}$。

2. 同分母問題

(1)有效策略：導致兒童有效解決同分母比較大小問題的策略有四種。第一種，同時比較分母和分子，當分母一樣，分子越大時其值越大。第二種，自行找參照點進行比較。第三種，利用畫圖或是操作具體物進行比較。第四種，利用整數的觀念只比較分子大小。

(2)無效策略：把分子和分母的關係顛倒，例如：$\frac{7}{15}$和$\frac{4}{15}$這兩個分數把它解釋成：全部分成 4 塊，比分成 7 塊大。

3.異分母分數問題

(1)有效策略：導致兒童有效解決同分子比較大小問題的策略有三種。第一種，應用比的概念解題，例如：$\frac{3}{4}$和$\frac{6}{7}$比較大小時，如果兩者一樣大，3 的兩倍變成 6，4 的兩倍應該變成 8，由於題目分母 7 小於 8，可見$\frac{6}{7}$比較大。第二種，自行找參照點進行比較。第三種，利用畫圖或是操作具體物進行比較。

(2)無效策略：兒童採用三種錯誤的策略導致其無法有效的解題。第一種，誤用加法的觀念，例如：$\frac{2}{3}$和$\frac{4}{5}$比較大小，由於$\frac{2}{3}$的分子分母各加 2 可以得到$\frac{4}{5}$，所以誤認為兩者一樣大。第二種，採用不完整的比例關係，例如：$\frac{4}{9}$和$\frac{8}{18}$比較時，8 除以 4 等於 2，而 9 加 2 才等於 11，所以這兩個分數不相等。第三種，和同分子問題相同採用「以整數主宰的思維」而導致無法有效解決問題。

(五)等值分數

在 1993 年版和 2000 年版九年一貫課程暫行綱要把等值分數放在國小五年級教學，但是在 2003 年新頒訂的九年一貫課程綱要裡卻將等值分數列為國小四年級的教學重點(4-n-08 能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來簡單分數與小數的互換)。因此，雖然本研究所採用的年段目前仍以「暫行綱要」

為課程編製的主要準繩，然而為顧及目前已在國小四五六年級實施暫行綱要與正式綱要之間的落差銜補的現況，所以本研究也將等值分數和簡單的異分母比較納至研究的範圍之內。其實在國外，將等值分數放在國小四年級教學仍不乏先例，例如：美國的小四即教等值分數。在 1997 年的 NAEP 測驗，全美有 42%的四年級學生可以針對給定的分數挑對其等值的分數，但是卻只有 18%的學生可以正確的將長方形塗上正確的陰影部分以做為給定分數的等值分數(Cramer, Post, & delMas, 2002)。王淵智與張獻中(2004)針對 148 名國小五年級學生學習銜接課程的成效調查，依圖形的複雜度不同，學生根據等值分數圖形表徵轉換至文字符號表徵的答對率介於 85%～69%之間。另外，劉世能(2002)針對 394 位國小五六年級學生的調查研究顯示：在等值分數概念表現上，約有 2.6% ~27.1% 的學童在處理連續量或離散量等值分數問題時，均出現受分母或分子控制的情形，用以判斷分數值所表示的具體量。而，詹婉華(2003)的研究則歸納出國小高年級的兒童仍未具細分並組合的能力，所以等值分數的學習成效不佳。

(六)其他

陳瑞發(2003)發現低年級學童在等分及簡單分數概念的連續量情境表現，較離散量情境為佳。另外，詹婉華(2003)指出，學童在三個分數子概念上共同的錯誤是「受題目訊息的影響」，其中包括：題目中的數字、分數符號、分數符號的自然數、圖形、語詞(一半)及題目的文句敘述。另外，Hannula（2003）調查五

年級和七年級學生的分數數線概念，透過訪談發現學生所犯的錯誤大致有以下 3 種：(1)把$\frac{3}{4}$視為 3.4；(2)$\frac{3}{4}$不是一個數；(3)在數線上找到任意 4 段再標出其中的 3 段。

Hannula（2003）所發現的上述 (1) 和 (3) 的錯誤，和王淵智(2001)的研究所發現的錯誤類型具有一致性。而更值得注意的是，Hannula（2003）的研究結論也指出，作業如果是例行性問題，則性別間的差異不明顯；而當作業夠難時，學生答對的情形會有性別的差異。所以，性別差異的問題仍舊是一個必須小心處理的議題。

二、分數心理結構推測

張日齊(2003)以甯自強(Ning, 1992)所發展的分數認知階段為基礎，驗證小學生分數詞的發展，發現四年級的學童已具備加法分數的概念，能做單位分數內容物為單一的問題；但是只有10%的五年級學童達到巢狀數概念階段，可以解單位分數內容物為多個的問題。此外，三年級沒辦法等分，也無法處理等值分數和假分數的問題。

Tzur（2003）從「等分」和「迭代」的觀點針對兩位四年級的學生設計相關的分數課程進行教學實驗，發現可以增進學生「可逆分數概念」(the reversible fraction conception)。所謂的「可逆分數概念」是指學生知道「$\frac{3}{4}$是 3 個$\frac{1}{4}$所合成」及「3 個$\frac{1}{4}$是$\frac{3}{4}$」

的雙向關係。「可逆分數概念」之所以重要，則是因為它是進一步產生分數乘法性概念的基礎。

第五節　分數多元表徵課程的設計理念與特色

由本章前述各節的探討得知，「基模」是人類學習任何知識的主要基礎，透過不同的「表徵」途徑可以促進基模的發展。「單位概念」是影響分數學習的重要關鍵，不同分數認知階段有其不同的特色，其基模的功能也不同。本節主要依據本研究的目的，及本章前述各節的理論與文獻探討，闡述本研究「分數多元表徵實驗課程」之設計理念及特色。

壹、 分數多元表徵課程的設計理念

本研究之分數多元表徵課程主要植基於兩個重要的理念，茲分述如下：

一、將認知心理學理論應用於課程設計

自從認知心理學復甦之後，在學者專家們歷經多年的努力下，對於人類如何學習及如何有效學習，業已有相當豐碩的研究成果，其中有關基模的功能與演化及內外表徵的相關理論，均對人類學習的本質有著重大的啟示。

從實務的經驗層面及文獻探討的理論層面來看，都顯示出

國小分數課程教學的不易。因此，本研究嘗試將認知心理學有關表徵與基模的理論應用到分數課程的設計上，希望能突破現有教學的困境，更展望能提供未來編製分數課程的一些參考依據。

二、以多元表徵方式促進分數的學習

認知心理學的相關研究成果豐碩，本研究擷取「表徵」方面的理論及成果做為架構實驗課程的主軸。睽諸數學教育家 Behr 等人(1983)所主張利用「表徵系統互動模式」促進學習數學的觀點，不僅符合了認知心理學家 Paivio (1991)所提出人類學習的「雙代碼理論」，而且具有實徵研究的支持。因此，本研究的目標之一是將「表徵系統互動模式」落實於分數課程設計中，期能提昇學童分數的學習成效。

貳、分數多元表徵課程的特色

本研究在上述設計理念的引導下所設計的「分數多元表徵課程」，在內容及執行上有其不同於市售教材之特色。茲說明如下：

一、多元表徵融入課程

（一） 注重學習主體的表徵方式

市售教材在設計上較少顧及學生的表徵方式，除非有經驗的教學者才有可能在教學的不同階段採用適切的教學表徵。然而，成人的表徵方式和兒童的表徵方式畢竟不同。所以，在本研究的實驗課程裡，特別重視學習個體自主性的表徵，藉此順勢引導其學習。

（二） 重視不同表徵之間的連結

市售教材雖然也含蓋不少多元表徵的成份，但是對於表徵之間的連結並不夠重視，甚至缺乏對表徵間統整的設計。易言之，假定所有表徵和諧一致的發展是一般市售教材的通象。惟，從文獻(王淵智, 2001; Marcou & Gagatsis, 2002)得知，兒童所持有的分數表徵有不同步的現象。唯有把表徵間的衝突引出，學生才有機會進一步的統整所學知識，進而把正確的分數知識貯存至長期記憶中。學生有了正確的分數知識，才能正確的處理未來有關分數問題的解題。基於此，本研究的實驗課程不但重視各種不同分數表徵的連結，更重視表徵之間可能潛藏的衝突。

（三） 目標導向的課程設計

本研究所設計的「分數多元表徵課程」係參酌 Barton 與 Heidema (2002)所提出的六個數學學習的假定，包括：(1)學習應該是目標導向；(2)讓新知識和舊知識做連結；(3)將所獲得的訊息加以組織；(4)學習是認知結構和後設認知結構的習得；(5)學習具有階段性卻非線性；(6)學習受到認知發展的影響。基於學習應該是目標導向的有意義活動，每一個實驗課程在教學之前都事先宣告每一節課的學習重點，讓學生瞭解學習的目標。其次，重視後設認知結構的發展，除了上課中多利用機會讓學生發表「如何解」外，更重視「為何」、解題前的計畫及課後的省思，俾讓學生慢慢培養後設認知監控。最後，由於學習受到認知發展的影響，所以在教材安排上除了由易而難、由簡到繁外，對超出「可

能發展區」(ZPD)的材料(如：兩數相除的商、比值及運算子)將不列入實驗課程。

二、以強調「單位」促進分數學習

（一） 以整數的單位學習為基點，漸進至分數單位的學習

雖然有學者指出，分數的學習受到整數的干擾(Streefland, 1993)。但，本研究傾向於採用 Hunting, Davis 與 Pearn (1997)、Ning (1992)、Olive (1999, 2001)及 Sáenz-Ludlow (1994)等多位學者的看法，認為整數學習的提昇可以正面的影響分數的學習。從文獻(Behr 等人, 1992; 甯自強，1997a) 得知「單位」概念影響分數的學習甚鉅，因此本研究實驗課程乃從整數的單位著手，讓兒童熟悉不同單位之間的關係，再引導至分數單位的學習。

（二） 利用擬題活動促進理解並培養問題基模

教學是否具有成效，可以從學生的「再次呈現」(re-present)得到映證的線索，而擬題(problem posing)則是再表現的其中一種方式。從擬題可以讓學生清楚「已知」和「目標」之間的關係(梁淑坤，1994)，更由於它是非常「個人化」的，所以能讓教學者觀察到每一個學生內心中對所學內容的持有情形。再者，藉由擬題活動對「目標」的擬訂，可以加強學生對問題的感覺。本課程的擬題活動是提供部分的情境資料(例如：一袋球有 3 組，每組 2 顆)，請學生擬出不同的數學問題。當學生能夠掌握擬題的意義之後，再限制其擬出不同的問題(例如：答案為整數的問題及答案為分數的問題)。當學生欲擬出不同答案的數學問題時，便會

去思索何種問題才能夠切合限制，才能規範未來的答題者回答某種類型的答案。而此種擬題活動的特點在於，學生由習於做一個被動的解題者成為一個主動的布題者，且由於解題和布題的雙向轉換，得以培養其不同類型的問題基模。當學生的問題基模能夠確立，則未來面對不同的數學問題，便能夠採用適宜的解題策略進行解題，而不致於徒有一堆解題工具，但卻不知使用何種是好。由於擬題活動對於學習數學甚有幫助，所以本研究實驗課程將擬題活動納為課程重點，亦是有別於市售教材的特色之一。

（三） 強調參考單位量學習分數數線

從文獻(黃馨緯，1995；Hannula, 2003)得知，學生之所以無法將分數數線學好，主要的關鍵在於無法掌握參考單位量。因此，在本研究實驗課程裡，特別將單位、等分割融入分數數線的課程，以便讓學生重視不同的單位量、不同的等分割其所相對應的分數位置。再者，從文獻(Pothier & Sawada, 1983)探討得知，合數等分對兒童最為困難，須建立在奇數等分之上。偶數等分又比奇數等分較為容易些。此也提醒研究者，在編製等分課程時須循序漸進，尤其對於程度較低的兒童宜從較簡單的偶數等分入手。

三、師生共同承擔學習的任務

（一） 教師是布題者亦是構築鷹架者

教師是教室中引導學生學習最重要的角色。國內自 1993 年

數學教育改革以降，強調教師的功能由「解題示範者」走向「布題者」的角色。所以，在本研究實驗課程的執行面上，教學者主要擔任布題的角色，根據學生的學習表現在不同的階段布出適切的問題引導學習。此外，當學生無法完整、成功解決由教學者所布的問題時，布題者必須具有相當的敏感度，找到學生的認知狀態，再搭建適當的鷹架以利其向上攀昇。由於不同程度的學生可能在不同的表徵活動上有其不同的優勢，所以教學者也適時發掘學生的學習專長給予表現機會，以便讓所有的學生都能增長解題的自信心。

所以，實驗課程的實施特別重視教學者的角色，以布題、鷹架相輔為用，提昇解題自信，最終企盼促進學童分數認知發展。

（二） 學生是解題者亦是提問者

相對於教學者的角色，實驗課程中的學生是解題者，主動的負起學習任務，而非被動的等待答案的提供。此外，透過發表、討論，所有實驗課程中學生都是提問者，可以將自己的想法、作法與他人互動溝通，甚至適度的挑戰其他人的想法。課堂提問除了可以增加數學意義的溝通，亦讓教學者得以有機會聆聽不同學生的想法，藉以增進對兒童認知的掌握。所以，實驗課程的教學過程中強調所有的學生都是解題者，更是提問者，以期每一位學生都能專心投入所學。本研究所設計的課程，其適用範圍並不希望只是針對少數學生，所以全班參與各個學習活動是基本的要求。

第三章　研究設計與實施

本研究旨在探討分數多元表徵課程對於國小兒童「分數」問題解題表現的影響，主要採用實驗法進行研究。首先設計「分數多元表徵課程」，接著進行教學實驗，最後探討國小四年級學童接受教學實驗後，在分數問題解題表現、數概念和分數基模等方面的改變情形。茲將本研究的研究設計、研究問題與研究假設、研究對象、實驗課程的編製與實施、研究工具及研究程序等分述如下。

第一節　研究設計

壹、實驗設計

本研究在參酌多元表徵及分數學習的相關理論和研究後，編製「分數多元表徵課程」做為實驗教學之主要教材。研究設計為考量可行性及未來的推廣性，係從某一所小學中隨機挑選出兩個班級，並隨機分派其中一班為「實驗組」，另一班為「控制組」，兩組學生皆依原班級編制接受教學而不重新編班，是以「準實驗研究」(quasi-experiment research)之「不等組前後測」(pretest-posttest nonequivalent group design)(郭生玉，1999)為主要研究設計。

實驗組及控制組接受有關分數的教學時數相同，兩組均由研究者擔任教學，惟在教材的使用上實驗組學生採用研究者編製之

「分數多元表徵課程」，控制組學生則採用一般出版商所設計的教材(南一版教科書)。另外，在教學方法上不管是實驗組或是控制組，在上課時皆依學生前一次數學科期中考表現進行異質分組，並採用合作學習法進行教學，以減少因為不同的教學法所帶來非實驗目標之效應。

此外，為避免由於實驗組及控制組同時皆由研究者擔任教學，而受研究者心向影響造成「實驗者效應」，研究者特別商請兩班原有教師做觀察者，觀察研究者教學時是否呈現的用語、肢體語言等足以暗示學習者的訊息，以做為反省批判的資訊。而研究者亦透過研究者札記的撰寫，對兩班不同組別的教學提出反省。本研究設計如表 3-1 所示：

表 3-1　本研究之實驗設計

組別	前測	實驗處理	後測	延宕測驗
實驗組	01	X	03	05
控制組	02		04	06

01、 02：代表前測。在實驗處理之前對實驗組和控制組分別實施「分數問題測驗甲卷」前測，以瞭解兩組在實驗前之差異情形。

X：代表實驗處理，亦即實驗組接受研究者自編之「分數多元表徵課程」教學。

03、04：代表後測。實驗組接受「分數多元表徵課程」實驗教學之後馬上和控制組分別實施「分數問題測驗乙卷」做為後測。

05、06：代表延宕測驗。在實驗教學結束後三週，以「分數問題測驗甲卷」對實驗組和控制組分別施測，以瞭解實驗教學效果之保留情形。

貳、研究變項

依據前述之實驗設計，茲將本研究之研究變項說明如下：

一、自變項---教學課程

實驗組採用「分數多元表徵課程」進行教學，而控制組則採用南一版本數學教科書(四下)進行教學。

二、依變項

(一)分數問題解題表現

1. 分數問題解題表現的立即效果：係以實驗組與控制組在「分數問題測驗乙卷」上的得分為指標。
2. 分數問題解題表現的保留效果：係以實驗組和控制組在「分數問題測驗甲卷」上的得分為指標。

(二)數概念

1. 整數數概念：指個案在接受訪談時所做的反應所歸納出「部分--整體關係」及「二階單位化聚」兩種整數概念。
2. 分數數概念：指個案在接受訪談時所做的反應所歸納出「分數數詞」及「等值分數」兩種分數概念。

(三)分數基模

係以訪談實驗組 9 位學童的基模變化為代表。基模型態的主要判別依據係根據學童在解題時所採用的分割、迭代及單位化的特徵以做為區別。

三、控制變項

(一)年級及班級

本研究為控制不同年級所接受之實驗教學前先備經驗可能不同，因此實驗組和控制組均選定四年級。同時，為盡量減少學

校區位所可能因「文化資本」造成的差距，兩組樣本皆選自同一學校。以隨機抽樣的方式選定實驗組班級及控制組班級。由於該校的四年級是以班群方式進行教學，同一學群的老師有較多的時間互相溝通教學上所發現的困難及因應之道，因此原班級教學的差異性較小。所以，本研究所挑選的研究樣本來自同一學校、同一年級、同一學群。

(二)教學時間

本研究為控制兩組學生可能因教學時間不同而造成學習效果的差異，故兩班的教學均以 16 節課為實施期程。

(三)教學方式

本研究為控制兩組學生可能因教學方式不同而造成學習效果的差異，故主要的授課方式為教師佈題、個人解題、小組討論(或講授)、發表、質疑、澄清及形成共識。

(四)教師

本研究為避免兩組學生可能因教學者不同而造成學習效果的差異，故兩班的教學均由研究者擔任。

(五)統計控制

本研究為避免兩組學生在實驗處理之前就已經存在分數解題能力的差異，故兩組在實驗教學進行之前即施予「分數問題測驗甲卷」的前測，並將前測結果作為進行後測共變數分析時共變數之用。另外，為了避免推理能力對數學學習成效的影響，本研究亦將兩組之「瑞文氏非文字推理測驗」的成績做為共變量以

進行控制。而延宕測驗共變數分析則採用後測總分及「瑞文氏非文字推理測驗」的成績做為共變量進行控制。

第二節　研究問題與研究假設

茲根據第一章所提出之研究目的，提出本研究所欲探討的研究問題，以及為回應研究問題所擬定之研究假設。以下分述之：

壹、研究問題

根據第一章所述之研究目的，以及第二章的理論與文獻探討，本研究擬探討的問題如下：

一、實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，其「分數問題解題表現」之立即效果是否顯著的比控制組為佳？

二、 實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後三週，其「分數問題解題表現」之保留效果是否顯著的比控制組為佳？

三、實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，其數概念的發展是否與教學前有顯著的不同？

四、實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，其分數基模的發展是否與教學前有顯著的不同？

貳、研究假設

為解答上述問題，研究者提出下列研究假設加以考驗：

假設一：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，其分數問題解題表現的立即效果顯著的比控制組為佳。

1-1：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，在「等分割與組成」的解題表現，顯著的比控制組佳。

1-2：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，在「單位量」的解題表現，顯著的比控制組佳。

1-3：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，在「分數比較」的解題表現，顯著的比控制組佳。

1-4：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，在「等值分數」的解題表現，顯著的比控制組佳。

1-5：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，在「合成與分解」的解題表現，顯著的比控制組佳。

1-6：實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後，在「遞迴分割」的解題表現，顯著的比控制組佳。

假設二：接受「分數多元表徵課程」教學後的實驗組，其分數問題解題表現的保留效果顯著的比控制組佳。

2-1：實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在「等分割與組成」解題表現的保留效果，顯著的比控制

組為佳。

2-2：實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在「單位量」解題表現的保留效果，顯著的比控制組佳。

2-3：實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在「分數比較」解題表現的保留效果，顯著的比控制組佳。

2-4：實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在「等值分數」解題表現的保留效果，顯著的比控制組佳。

2-5：實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在「合成與分解」解題表現的保留效果，顯著的比控制組佳。

2-6：實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在「遞迴分割」解題表現的保留效果，顯著的比控制組佳。

假設三：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其數概念的發展，顯著的比教學前佳。

3-1：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其二階單位的化聚概念，顯著的比教學前佳。

3-2：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其分數詞概念，顯著的比教學前佳。

3-3：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其分數部分整體關係概念，顯著的比教學前佳。

3-4：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其

等值分數概念，顯著的比教學前佳。

假設四：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其分數基模的發展，顯著的比教學前佳。

4-1：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其等分割基模，顯著的比教學前佳。

4-2：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其分數迭代基模，顯著的比教學前佳。

4-3：實驗組個案接受「分數多元表徵課程」教學後，其遞迴分割基模，顯著的比教學前佳。

第三節 研究對象

本研究之樣本選自高雄市一所國小四年級兩個班級的學童，兩班人數分別為 31 及 27 人，共計 58 人。以隨機分派的方式將其中一班分派為實驗組，另一班則分派為控制組，實驗組接受「分數多元表徵課程」之實驗處理，控制組則採用南一版本教科書(南一出版社，2003；2004；2005)進行分數教學。兩班皆由研究者擔任課程教學。茲將本實驗研究樣本人數分配情形列如表 3-2：

表 3-2 研究樣本人數統計表

組　別	男　生	女　生	合　計
實驗組	16	15	31
控制組	15	12	27
合　計	31	28	58

其次，為瞭解實驗組學生接受「分數多元表徵課程」教學後數概念及分數基模之變化情形，根據實驗組學生在「分數問題測驗甲卷」的答題成績由低至高排序，以 33%和 66%做為決斷點區分出低分組、中分組和高分組。再與原班級導師討論，挑選出口語表達能力流暢者各 3 位做為晤談的對象，以瞭解其數概念及分數基模的發展情形。9 位個案代號、性別、瑞文氏推理測驗成績及前測成績如表 3-3 所示：

表 3-3 訪談個案代號及基本資料

組別	代號	性別	瑞文氏非文字推理測驗成績	前測得分
高分組	H1	女	49	43.00
	H2	男	39	38.50
	H3	男	41	44.50
中分組	M1	女	33	22.50
	M2	女	33	21.50
	M3	男	45	19.50
低分組	L1	男	36	18.50
	L2	女	29	18.50
	L3	女	33	16.50

由表 3-3 得知依九位個案前測得分可以分成三組，高分組和中分組的得分差距較為明顯，低分組和中分組的得分差距則較小。

第四節 課程的編製與實施

本節主要在說明本研究在歷經文獻探討後所得到的分數課程編製理念，進一步具體化成為「分數多元表徵課程」之編製依據、主要內容及實施方式。

壹、實驗課程編製的依據及內容

一、課程編製依據

根據本研究第二章的文獻探討與分析目前市售教科書版本的內容後，發現目前市售教材科書版本有五項主要的缺點：1. 缺乏分量或單位分數重構單位全體的活動；2. 未說明不同表徵之間關係；3. 以確認給定的材料(操作或圖像)進行學習，較缺乏由學習者自發性對問題進行表徵；4. 對於不同程度的學生表徵方式假定相同；5. 在教導數線單元中未強調參考單位量的確認等等，分別加以改進，以求提昇學生學習分數的效果。

研究者認為，改進之道可以 Behr 等人(1983)所提出的「表徵系統互動模式」為主軸，在每一單元內融入五種表徵，以便讓學童能夠從各種不同的表徵學習分數，並熟悉表徵與表徵之間的關係，以求其彼此的諧和一致。其次，綜合性的採納 Olive 與 Steffe (2002)、Behr 等人(1992)、Steffe (1988)及甯自強(1997a, 1997b)等人對於整數、分數「單位」的觀點，在課程中特別強調「單位」的學習。簡言之，實驗課程強調不同表徵間的互動，且突顯單位在分數課程中的重要地位。

二、課程內容

本研究所設計的教學單元和市售教材相較之下有諸多不同。例如，將整數的單位和分數的單位放在同一單元中做有機連貫的學習，不但合乎學者們認為兩者相輔相成的看法，而且符合九年一貫課程中「連結」主題的要求。另外，提供一段紙條並給予一個真分數數詞要求重構整體的設計，非但是國內以往分數教材所罕有者，亦是以連續量素材引入尋找單位量的突破。因為，這種以「部分」重構「整體」的教材，在以往大概被界定為六年級時「分數的除法」的教學內容。但本研究基於分數基模發展的相關文獻(Tzur, 1995)認為，固然要求兒童列出除式求解適合放在較高年級的教材，但是如果提供具體的表徵物，只要求學生解題不必列出標準算式，則可以在四年級即讓其經驗此類問題。況且，以部分重構整體，將有助於兒童將部分視為是一個集聚單位。是故，實驗課程將以部分重構整體的問題類型，納入課程設計範圍。

據以上的理論背景，研究者編製適合國小四年級學童學習的分數課程共包括六個主要單元：「等分割與組成」、「單位量」、「分數加減」、「比較大小」、「等值分數」及「電腦輔助教學」等，教學單元名稱及實施節數如表 3-4 所示：

表 3-4　分數多元表徵課程教學單元名稱及節數

主要教學單元	節數	主要問題類型
1.等分割及組成	4 節	1.面積模式：長方形、正方形、圓形、三角形 2.離散量模式且單位分數內容物為單一 3.離散量模式且單位分數內容物多個
2.單位量	6 節	1.離散量情境找單位量 2.連續量情境找單位量 3.在連續量情境下利用單位分量集聚為給定分量。 4.在離散量情境下利用單位分量集聚為給定分量。 5.分數數線
3.分數的加減	2 節	1.連續量：同分母真分數、假分數及帶分數的合成與分解 2.離散量(內單)：同分母真分數、假分數及帶分數的合成與分解 3.離散量(內多)：同分母真分數、假分數及帶分數的合成與分解
4.比較大小	1 節	1.同分母分數大小比較 2.異分母同分子 3.異分母異分子(分子分母差有規則)
5.等值分數	2 節	1.離散量情境下的等值分數 2.連續量情境下的等值分數
6.電腦輔助教學	1 節	分數做數、等值分數
合計	16 節	

第一單元「等分割及組成」共四節課，主要在於複習並澄清學童的等分割概念及分數數詞概念。從第二章的文獻探討及前測結果發現研究對象對於等分割的概念模糊不清，常常忽略「公平」及「耗盡」兩個重要的原則，而且分數詞的概念相當紊亂。然而，目前市售教材對於動手操作等分割的份量稍嫌不足，偏重在「檢查等分割」更甚於「執行等分割」。因此，實驗課程以連續量的等分割為開端，利用兩節課讓學童親自運用操作表徵進行等分割學習。質言之，利用長方形、正方形、圓形、三角形等圖形布下

符合學生生活經驗的問題，請學生進行分割活動，再帶領討論分割的結果「公不公平」及「有沒有全部分完」，以重新建立其等分割概念，最後再要求學生說出分數詞、寫下分數符號。第三節和第四節則以類似的布題活動及解題活動應用在「單位分數內容物為單一個物」及「單位分數內容物為多個個物」的離散量情境，最主要強調動手做(操作表徵)、給予適當名稱(口語)、寫下正確的分數(書寫符號)及從圖形確認分數名稱(圖像表徵)。

第二單元「單位量」單元共六節課，主要在於突顯「單位」在分數上的重要性。從第二章文獻及前測訪談結果發現，為數不少的學生其分數詞的概念非常混淆，常常將不同的單位予以並置，造成分數理解上的困難。因此，本實驗課程的「單位量」單元特別從整數單位的認識開始著手，利用 POWER POINT 將不同的單位予以圖像化，如圖 3-1：

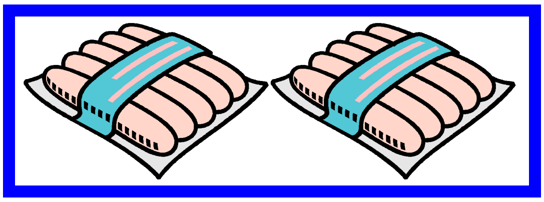


圖 3-1　單位量教材

讓兒童先自行對於圖像中的單位予以命名，例如：「一條熱狗」、「一包熱狗」及「一袋熱狗」。然後，引導學生發現同樣都是「一」但是其所代表的意義之間的差異，再找出不同的「一」所構成的階層關係，並利用有關「單位」變化的問題(如附錄 2)引導學生重視不同單位。最後，再利用學習單進行擬題活動，擬出一個解

答為整數的問題，另一個解答為分數的問題，藉以確立學生的單位概念與問題基模。從學生的作品 (附錄 3) 得知，學生過去缺乏擬題的經驗，所以所擬出的問題相當簡短，而且常會忽略掉需要利用分數解答的問題。至於單位量第三、四節的課程內容主要以「單位分量」作為單位，製作出單位量或其他的單位分量。學生利用動手操作紙條(或積木)的方式，找到單位量，再複製出單位量。第五節的教學重點則在於變換不同的單位量，找適當的分數詞。課程的設計以操作七巧板為主，利用不同形狀的板塊，研究者布以不同的問題，要求學生利用比對的方式，找到彼此之間的關係，進而找到不同顏色間的倍數關係，以加強單位量概念。第六節則以分數數線的學習為主，利用操作繩子的方式為起點，轉換到數線圖，讓兒童明瞭不同的單位量內做不同的等分割後每一等份所代表相對的分數。

第三單元「分數加減」兩節課，主要在以前面的單位概念做為基礎，進行分數合成與分解的解題。第一節課開始進行時，利用分數板的操作、說明，著重複習其「整數」、「真分數」、「假分數」、「帶分數」概念的釐清與關係的建立。第二節課則讓學生解決有關同分母分數合成與分解問題，主要的問題型態亦涉及三種(真分數、假分數和帶分數)不同的分數類別。

第四單元「分數比較」單元一節，以分數板進行同分母及異分母分數比較大小的認識開始。隨後，將分數的數值擴大(例如：

$\frac{49}{50}$、$\frac{59}{60}$及$\frac{69}{70}$)，並以研究者設計之 Flash 圖像進行教學，讓兒童先推想分數的大小順序，再從程式所呈現的圖像驗證推理結果。最後，在沒有任何圖像的輔助下，進行抽象的推理思考。

第五單元「等值分數」兩節，第一節利用離散量情境布題，要求兒童操作積木，以比較兩個等值分數，試圖從分數所代表內容物數量的相等，建立兩個不同分數之間等值的關係。第二節，以連續量為主，利用摺紙及研究者設計之 POWER POINT 動畫，讓兒童知曉$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$及$\frac{4}{8}$之間其實代表著相同的分量，而這些不同名稱卻都代表著相同分量的分數就叫做「等值分數」。在本單元結束前，並利用摺紙的方式進行「$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$哪一個大？相差多少？」的解題，藉以讓兒童明瞭等值分數在處理異分母加減的地位。

第六單元「電腦輔助教學」一節課，原本欲以 Olive (2004) 所設計的 Java Bar 5 做為教學媒材，但由於適用的平台不符(適合 Windows 2000 及 98，不適合 XP)，遂改以王淵智、吳佳娟、賀天俊與許慈恩(2005)所設計「分數 E 擊棒」資訊融入分數教學方案中部分單元的素材做為主要素材，讓學生利用電腦進行分數做數及等值分數的學習。

至於控制組所使用的課程，係依據南一出版社(2003；2004；2005)所編製的教材為主，所使用的節數和實驗組相同均為 16

節，主要的教學單元及內容如表 3-5 所示：

表 3-5 控制組教學節數、單元及活動內容

節數	課本冊別及單元	主要活動及教學重點
第 1 節	第五冊第七單元	活動一：分成一樣多。(平分概念)
	第五冊第七單元	活動二：分裝和平分。(理解包含除、等分除)
第 2 節	第五冊第七單元	活動四：平分大餅。(分母 3、5 的單位分數和真分數，說、寫、讀。)
	第五冊第七單元	活動五：平分大餅和彩帶。(10 以內真分數數詞序列)
第 3 節	第五冊第七單元	活動六：離散量之平分。(10 以內真分數、內單)
	第五冊第七單元	活動七：練習七
第 4 節	第五冊第七單元	檢討上節所做練習七。
	第六冊第四單元	活動二：分披薩。(讀分母 12 以下的真分數)
第 5 節	第六冊第四單元	活動三：分紙條。(做出分母為 16 以下的真分數)
	第六冊第四單元	活動四：建立分母為 12、16、20 的分數數詞序列
第 6 節	第六冊第四單元	活動五：認識離散量的真分數。
	第六冊第四單元	活動六：吃披薩。(依照給定的真分數塗顏色)
第 7 節	第六冊第四單元	練習四及檢討。
第 8 節	第七冊第十單元	活動一：認識多個個物的單位分數
	第七冊第十單元	活動二：認識多個個物的真分數
第 9 節	第七冊第十單元	活動三：數線圖
第 10 節	第七冊第十單元	活動四：同分母真分數的合成、分解
第 11 節	第七冊第十單元	活動四：同分母真分數的合成、分解
	第七冊第十單元	練習十
第 12 節	第七冊第十單元	檢討練習十。
	第八冊第十單元	活動一：認識假分數及假分數的命名
第 13 節	第八冊第十單元	活動二：認識帶分數及帶分數的命名。
	第八冊第十單元	活動三：假分數和帶分數的相互關係。
第 14 節	第八冊第十單元	活動四：在數線上標出真分數、假分數或帶分數。
第 15 節	第八冊第十單元	活動六：同分母真分數的加法運算。 活動七：同分母假分數、帶分數的加法運算。
第 16 節	第十冊第一單元	活動一：等值分數

貳、實驗課程的實施

實驗組和控制組的課程實施皆彈性採用老師布題、師生共同布題、學生個別解題、擬題、發表、質疑、澄清及辯證等程序。

實驗組的主要教學活動設計分為六個單元，其中以「等分割與組成」單元為例，如附錄4。此了單元設計之外，於每單元適時編製學習單，提供學生做上課的教材或練習。

實驗組和控制組實際上課時數相同，兩組皆利用導師時間及彈性課程(或綜合課程)的時間上課。兩班的導師都隨堂在教室中。當教學完畢後，研究者會向原班導師敘述上課情形及心得，並聽取原班導師意見，以更瞭解學生的學習狀況。

第五節 研究工具

本研究所採用的研究工具包括「分數問題測驗甲卷」、「分數問題測驗乙卷」及「瑞文氏非文字推理測驗」，茲分別詳述如下：

壹、分數問題測驗甲卷、乙卷

一、測驗編製的依據

本測驗係研究者依據小學二至四年級現行課程綱要為藍本，參酌 Steffe (2002)、Olive (2001a, 2001b, 2002, 2003) 之分數基模相關研究所發展而成。測驗之問題情境分為基準單位量為連續量、離散量及無具體情境等三大類，其中離散量又分為單位分數內容物為單一及多個個物兩種情況。

現行2000年頒布的九年一貫課程暫行綱要，國小四年級的分數能力指標只學到同分母分數的加減。然，有部分版本在四年

級下學期加入異分母分數加減做為前置經驗，因此本研究亦將異分母加減問題列為測驗的試題。此外，依據 2003 年頒布的九年一貫課程綱要明列四年級要學會等值分數，所以等值分數概念亦納為本測驗內容。

二、測驗的編製過程

正式測驗的形成係歷經兩階段的預試始完成：

第一階段，研究者先擬訂雙向細目表編製試卷。編製完成後請 3 位具有多年教學經驗的國小老師提供意見，並讓 3 位國小四年級學生試作，以修改題意不清或不適切的題目。接著，請兩位指導教授審閱並提供修改意見。最後，完成第一階段預試試題共 48 題。

第二階段預試試題的編製係依據第一階段預試結果篩選出部分題目，並據以發展成「分數問題測驗甲卷」和「分數問題測驗乙卷」。在編製完成後，仍請兩位指導教授審閱並提供修改意見。兩份測驗各有 29 題，其中有 19 題為相同結構問題，其餘 10 題為「定錨試題」(吳裕益，2004)，以做為兩份測驗所有題目之單參數 IRT 估計。

茲將預試的樣本及項目分析的結果依序說明如下：

(一)預試樣本

1.第一階段預試樣本

第一階段預試於 2004 年 9 月上旬實施，選取高雄市兩所學

校四年級 139 位學童(男生 75 人，女生 64 人)做為預試樣本。

2.第二階段預試樣本

第二階段預試於 2004 年 10 月中旬實施，選取高雄市兩所學校四年級共 6 班，有效樣本 221 人。以班為單位，採取「定錨測驗不等組設計」(吳裕益，2004；Hambleton & Swaminathan, 1985)，將 6 個班級以隨機分派的方式將每 3 個班歸為同一組，一組接受「分數問題測驗甲卷」，另一組則接受「分數問題測驗乙卷」。

(二)預試之項目分析

1. 第一階段項目分析

第一階段以 48 題測驗題目進行預試，將預試樣本的答題結果建立原始資料，再利用吳裕益(2004)所撰寫之 SPSSWIN 程式進行項目分析。

2. 第二階段項目分析

(1)傳統難度及鑑別度分析

研究者將本階段預試所蒐集之學生答題資料建立原始資料檔後，利用 Bilog 3.0 試題分析軟體進行項目分析，傳統難度及鑑別度(Pearson 積差相關)如表 3-6 所示。

表 3-6 分數問題測驗預試之項目分析摘要表

題　號	分數問題測驗甲卷		分數問題測驗乙卷		備　註
	難度指數	鑑別度 (Pearson 積差相關)	難度指數	鑑別度 (Pearson 積差相關)	
第 1 題甲	0.89	0.30	0.89	0.30	共同試題
第 1 題乙	0.74	0.47	0.74	0.47	共同試題
第 2 題	0.28	0.52	0.19	0.24	
第 3 題甲	0.52	0.60	0.56	0.40	
第 3 題乙	0.59	0.56	0.58	0.43	
第 4 題	0.92	0.21	0.92	0.24	
第 5 題	0.73	0.63	0.59	0.51	
第 6 題	0.25	0.49	0.25	0.49	共同試題
第 7 題	0.55	0.52	0.37	0.53	
第 8 題甲	0.55	0.66	0.38	0.63	
第 8 題乙	0.37	0.60	0.35	0.70	
第 9 題甲	0.53	0.58	0.53	0.58	共同試題
第 9 題乙	0.46	0.54	0.46	0.54	共同試題
第 10 題甲	0.45	0.62	0.45	0.62	共同試題
第 10 題乙	0.46	0.60	0.42	0.52	
第 10 題丙	0.67	-0.12	0.62	-0.22	刪除
第 11 題	0.10	0.35	0.10	0.35	共同試題
第 12 題甲	0.53	0.65	0.30	0.65	
第 12 題乙	0.43	0.66	0.26	0.59	
第 12 題丙	0.23	0.45	0.27	0.67	
第 13 題		0.94		0.73	
第 14 題		0.58		0.72	甲 15 乙 14 同
第 15 題		0.72		0.83	
第 16 題		0.37		0.47	
第 17 題	0.77	0.49	0.77	0.49	共同試題
第 18 題		0.57		0.50	
第 19 題甲		0.32		0.32	共同試題
第 19 題乙		0.58		0.58	共同試題
第 20 題	0.44	0.50	0.44	0.50	共同試題
平均	0.51	0.54	0.47	0.52	

由表 3-4 可以得知，甲、乙兩卷的二元計分題難度介於.10～.92 之間，平均難度為.51 及.47，屬中等難度。

郭生玉(1997)、陳英豪與吳裕益(1994)均指出，題目平均難度愈接近.50 為最佳，因為鑑別力和信度都會因此而愈高。所以，本研究兩個測驗工具的難度堪稱良好。

鑑別度方面，「第 10 題丙」的問題呈現與總分負相關，顯示低分組答對的情形比高分組佳的異常現象，應予刪除外，其餘鑑

別度皆介於.21～.94 之間，整體鑑別度分別為.54 及.52。

吳裕益(1992)指出當鑑別度介於.30～.39 之間為良好試題，介於.40 以上可以算是優良試題。所以就甲、乙兩卷的內容觀之，此兩份測驗在剔除鑑別度不良題目後，具有良好之鑑別度。

(2)試題反應理論(IRT)分析

就 IRT 單參數估計結果分析，整體而言，乙卷稍難於甲卷。兩份試卷的參數估計詳細情形如表 3-7 所示。

表 3-7 第二階段預試單參數估計摘要表

題號	甲卷單參數估計值	乙卷單參數估計值	備註
第 1 題甲	-1.69	-1.69	共同試題
第 1 題乙	-0.58	-0.58	共同試題
第 2 題	0.52	1.57	
第 3 題甲	0.00	-0.25	
第 3 題乙	-0.13	-0.29	
第 4 題	-1.60	-1.84	
第 5 題	-0.38	-0.28	
第 6 題	0.68	0.68	共同試題
第 7 題	-0.06	0.29	
第 8 題甲	-0.04	0.18	
第 8 題乙	0.28	0.20	
第 9 題甲	-0.06	-0.06	共同試題
第 9 題乙	0.10	0.10	共同試題
第 10 題甲	0.10	0.10	共同試題
第 10 題乙	0.14	0.14	
第 10 題丙	-0.09	-0.07	刪除
第 11 題	1.35	1.35	共同試題
第 12 題甲	-0.02	0.28	
第 12 題乙	0.17	0.44	
第 12 題丙	0.87	0.34	
第 13 題	0.14	0.26	
第 14 題	-1.30	0.51	甲 15 乙 14 同
第 15 題	0.51	0.32	
第 16 題	2.35	2.01	
第 17 題	-0.55	-0.55	共同試題
第 18 題	1.52	1.93	
第 19 題甲	2.96	2.96	共同試題
第 19 題乙	1.11	1.11	共同試題
第 20 題	0.14	0.14	共同試題
平均	0.23	0.33	

二、正式測驗的內容、計分與信效度

（一）正式測驗的內容

依據兩階段的預試結果得到甲卷、乙卷兩式正式測驗(如附錄5、6)，每式測驗包括28個問題，題目依據由易到難及答題性質(二元計分及多元計分)原則排列。題目之雙向細目表如表3-8所示。

表3-8　正式測驗雙向細目表

主要概念 情境	等分割與組成	單位量	分數比較	等值分數	合成分解	連續子分割	合計分數
連續量	(1)甲 (1)乙 (2) (3)甲 (3)乙	(6) (7) (8)甲 (8)乙 (13)		(12)甲 (12)乙 (12)丙	(16)＊	(14) (19) ＊ (20)甲＊ (20)乙＊	48
離散量情境單位分數內容物為單一個物	(4)						2
離散量情境單位分數內容物為多個個物	(5)	(9)甲 (9)乙		(15)*	(17)＊ (18)＊		21
無具體情境			(10)甲 (10)乙 (11)				6
合計分數	14	14	6	11	15	17	77

註：「*」多元計分題

由表3-8得知，甲乙兩個測驗二元計分題共有21題，包括：(1)甲、(1)乙、(2)、(3)甲、(3)乙、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)甲、(8)乙、(9)甲、(9)乙、(10)甲、(10)乙、(11)、(12)甲、(12)乙、(12)丙、(13)及(14)。多元計分題共有7題，包括：(15)、(16)、(17)、(18)、(19)、(20)甲、(20)乙。其中，(20)甲和(20)

乙係為兩量相比較，在分數的意義上並非「部分整體」，而本研究採用的理由是將它視為「學習遷移題」，期望透過此兩題瞭解學生在學習的既有基礎上，對於不同類型的問題，能否運用習得的知識解決新問題。所以，雖然兩個題目明顯比其他題目較難，但是仍將它列為測驗的範圍。

（二）正式測驗的計分

二元計分題，每題答對得 2 分、答錯得 0 分；多元計分題最高 5 分，最低 0 分，兩項合計最高 77 分。

多元計分題的評分工作主要由研究者及另兩位具有多年實施紙筆實作評量經驗的國小老師進行，取兩位評分者所評分數的平均值代表該題分數。當兩位評分者對同一個問題的評分差距超過 2 分時，則交由第 3 位評分者複評。評分者所使用的評分規準如表 3-9 所示：

表 3-9　分數問題測驗多元計分規準

得分	評分規準
5 分	解題正確，所陳述的理由(包括繪圖或說明)充分。
4 分	解題正確，但所陳述的理由不完全充分或有些小瑕疵。
3 分	解題方向正確或僅呈現部分正確解題。
2 分	未完全正確解題，但理由說明或推理有部分正確。
1 分	由文字或圖畫明顯看得出嘗試回答。
0 分	完全空白，未作答；或毫無章法亂演算。

（三）正式測驗的信度

本研究所採用兩份測驗之信度係以內部一致性係數

(Cronbach's α)做為主要依據。兩份測驗經前述預試刪除不適當題目後，兩份測驗的內部一致性如表 3-10 所示：

表 3-10　研究工具的信度係數

測驗卷別	二元計分量表	多元計分量表	整體量表
甲卷	.87	.68	.88
乙卷	.86	.79	.87

由表 3-10 可知，甲卷二元計分量表的內部一致性係數(Cronbach's α)為.87，多元計分量表則為.68，整體量表為.88。乙卷二元計分量表的內部一致性係數(Cronbach's α)為.86，多元計分量表則為.79，整體量表為.87。

依據洪碧霞(1992)的看法，一般的成就測驗如果信度達到.90以上算是「優」，而.80 到.90 之間為「良」。所以就整體量表觀之，兩個量表之信度堪稱良好。

（四）正式測驗的效度

效度方面，主要採取內容效度(content validity)及建構效度(construct validity)二種方式。在內容效度層面，除依雙向細目表編製試卷，再請四位具有相當分數教學經驗的國小老師做試題初步的審閱，並委請兩位指導教授及另一位具數學學習心理學專長的教授依據試題的內容及向度做審查。在建構效度層面，採用結構方程模式(structural equation model)軟體 AMOS 5.0 版分別對於甲卷、乙卷兩卷進行驗證性因素分析檢驗。檢驗的各項指標及理想的評鑑結果則依陳正昌、程炳林、陳新豐與劉子鍵(2005)所列

如表 3-11。

表 3-11　驗證性因素分析模式適配度評鑑表

評　　鑑　　標　　準		理想的評鑑結果
基本適配指標	負的誤差變異？	沒有
	參數間相關的絕對值未太接近 1？	是
	因素負荷量介於 0.5-0.95 之間？	是
整體模式適配標準	X^2 值未顯著？	是
	GFI 指數大於.09？	是
	AGFI 指數大於.09？	是
	NFI 指數大於 0.9？	是
	CFI 指數大於 0.9?	是

修改自：**多變量分析方法-統計軟體應用**(頁 440)，陳正昌、程炳林、陳新豐與劉子鍵, 2005，台北：五南。

依據上述的評鑑標準，本研究測驗工具甲卷和乙卷模式適合度分析結果如下：

1.基本適配度

(1)甲卷基本適配度

由表 3-12 可知 R^2 均小於 1，殘差變異均大於 0，即所有參數估計值並沒有負的誤差變異。就標準化迴歸估計值(因素負荷量)來看，除「遞迴分割」一項外稍低於.50 外，其餘皆大於.50。顯示理論模式與實際資料之間的基本適配度尚佳，其因素結構圖如附錄 7。

表 3-12 甲卷驗證性因素分析模式之基本適配度

因素與量表名稱	未標準化		標準化		標準化殘
	λ估計值	T 值	迴歸估計值	R^2	差變異
等分割與組成→分數解題	1.00		.71	.51	1.52
單位量→分數解題	1.30	7.10 ***	.77	.60	1.81
分數比較→分數解題	.50	5.47 ***	.56	.32	.84
等值分數→分數解題	1.38	6.95 ***	.77	.58	2.14
分數合成與分解→分數解題	.96	5.05***	.55	.30	3.43
遞迴分割→分數解題	1.03	4.68 ***	.50	.25	5.13

***p<.001 (n＝115)

(2)乙卷之基本適配度

由表 3-13 可知 R^2 均小於 1，殘差變異均大於 0，即所有參數估計值並沒有負的誤差變異。就標準化迴歸估計值(因素負荷量)來看，所有的因素皆大於.50。顯示理論模式與實際資料之間的基本適配度頗佳，其因素結構圖如附錄 8。

表 3-13 乙卷驗證性因素分析模式之基本適配度

因素與量表名稱	未標準化		標準化		標準化殘
	λ估計值	T 值	迴歸估計值	R^2	差變異
等分割與組成→分數解題	1.00		.57	.40	1.96
單位量→分數解題	1.58	5.35 ***	.74	.60	1.96
分數比較→分數解題	.55	4.03 ***	.50	.64	.83
等值分數→分數解題	1.90	5.59 ***	.80	.25	1.92
分數合成與分解→分數解題	2.44	5.67***	.77	.55	3.82
遞迴分割→分數解題	1.51	4.90 ***	.63	.33	3.24

***p<.001 (n＝106)

2.整體適配度

(1)甲卷之整體適配度

就表 3-14 分析，雖然 X^2＝19.97，p<.00 值達到顯著，表示理論模式之共變數矩陣和實際觀察資料之共變數矩陣相等的假設須拒絕，但是由於 X^2 值常會受到樣本人數而波動，所以除了以 X^2 值檢定外，仍需考量其他指標(陳正昌等人，2005)，例如「NFI」及「CFI」二者係指理論模式和基準線模式的增值適配度；「GFI」及「AGFI」二者係指理論模式所能解釋的變異與共變的量。上述四個指數皆介於 0 和 1 之間，越接近 1 代表理論模式之整體適配度越佳。因此，依據此項標準衡量，甲卷之整體適配度尚佳。

表 3-14　甲卷驗證性因素分析模式之整體適配度

	X^2	Df	P 值	NFI	CFI	GFI	AGFI
本研究模式	19.97	9	.02	.97	.99	.98	.88
獨立模式	213.85	15	.00	.00	.00	.53	.34

(2)乙卷之整體適配度

就表 3-15 分析，雖然 X^2＝20.62，p<.00 值達到顯著，表示理論模式之共變數矩陣和實際觀察資料之共變數矩陣相等的假設須拒絕，但在參酌「NFI」、「CFI」、「GFI」、「AGFI」四項指標後發現乙卷之整體適配度尚佳。

表 3-15 乙卷驗證性因素分析模式之整體適配度

	X^2	Df	p 值	NFI	CFI	GFI	AGFI
本研究模式	20.62	9	.01	.91	.95	.94	.86
獨立模式	228.03	15	.00	.00	.00	.49	.28

貳、瑞文氏非文字推理測驗

「瑞文氏非文字推理測驗」(簡稱 SPM)係由黃堅厚(1990)修訂並重訂常模，屬於團體測驗，適用於評估國小四至六年級兒童的推理能力，並藉以推斷智能發展程度。SPM 有五個題組，每組 12 題，共 60 題，每答對一題給一分，全對 60 分。所需的測驗時間約四十分鐘完成。信度方面，以 31～41 人施測，間隔四週重測信度為.53～.92；折半信度為.50～.93。在同時效度方面，與數學學業成績的相關介於.38～.78 之間。

第六節　研究程序

本研究歷經二年始完成，茲將整個研究程序繪圖如圖 3-2，並分別說明如下：

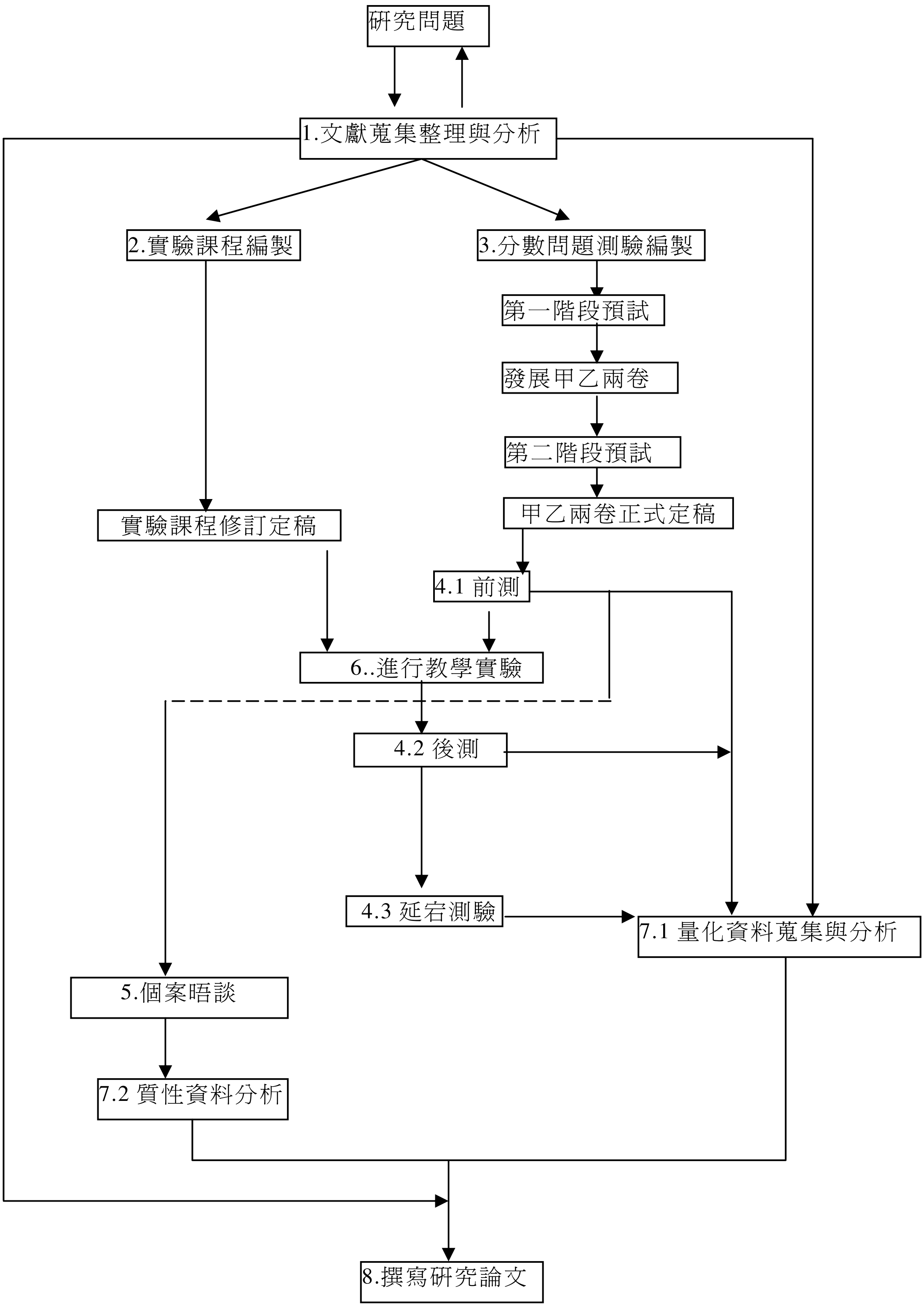

研究問題
1.文獻蒐集整理與分析
2.實驗課程編製
3.分數問題測驗編製
第一階段預試
發展甲乙兩卷
第二階段預試
實驗課程修訂定稿
甲乙兩卷正式定稿
4.1 前測
6..進行教學實驗
4.2 後測
4.3 延宕測驗
7.1 量化資料蒐集與分析
5.個案晤談
7.2 質性資料分析
8.撰寫研究論文

圖 3-2　研究流程圖

壹、文獻蒐集整理與分析

本研究在選擇研究問題之後，即開始著手相關文獻的蒐集整理與分析，藉以界定研究的焦點，確立研究問題。

貳、實驗課程編製

研究者參酌國內九年一貫課程綱要、各版本教科書及國外分數之相關文獻後，以強調多元表徵為主軸，設計「分數多元表徵課程」，做為實驗教學的教材。

參、分數問題測驗編製

研究者在仔細研讀文獻後，開始著手研究工具(分數問題測驗甲卷及乙卷)的編製。在編製過程中，商請基層教師、學者提供意見進行修改，並進行二個階段的預試，從學生答題的反應及統計分析的結果(項目分析、內部一致性及建構效度)做進一步的修改，直至完成「分數問題測驗甲卷」和「分數問題測驗乙卷」兩份測驗工具的定稿。

肆、實施測驗

由於本研究採取不等組前後測實驗設計，所以實驗組和控制組皆在實驗課程教學之前先做前測(分數問題測驗甲卷)，待實驗組進行實驗教學完畢之後，兩組學生再施予第一次後測(分數問題測驗乙卷)。最後，在實驗教學結束三週之後，兩組學生再次

接受延宕測驗(分數問題測驗甲卷)。

伍、個案晤談

為避免實驗教學對於受訪個案的影響，晤談部分的實施則在前測後，就實驗組的成績將學生分成低中高三組，再從各組中挑選 3 位學童做為晤談的個案。9 位個案分別於教學實驗前和教學實驗後，依據預擬之訪談問題進行半結構性晤談。

陸、進行教學實驗

待教學前晤談完成之後，實驗組開始依研究者自編之多元表徵分數課程進行為期 16 節的教學實驗。在教學的過程中，一方面利用錄影器材將整個教學過程攝錄後，做為教學者研究改進的依據；另方面，邀請原班導師觀看教學過程，並與之討論學生上課表現，以利掌握學生的學習狀況。

柒、資料蒐集與分析

本研究所蒐集的資料有量化資料及質性資料兩種。量化資料係指在實驗前後依據「分數問題測驗甲卷」和「分數問題測驗乙卷」所得到的解題表現資料；質性資料係指透過晤談所蒐集到的有關學生數概念及分數基模的資料。

一、量化資料

本研究將從「分數問題測驗甲卷」和「分數問測驗乙卷」前

後測中，依據答題狀況評分，除計算各分量表之得分外，亦將各題得分加總後計算分量表得分及總分。利用統計軟體 SPSSWIN 12.0 進行分析，並以單因子單變量共變數分析(one-way ANCOVA)及單因子多變量共變數分析(one-way MANCOVA)考驗研究假設一和研究假設二。

在進行共變數分析之前，先進行「組內迴歸係數同質性考驗」(林清山，1994)，以確定是否違反斜率同質性假定。在未違反該假定的前提下，方進一步進行共變數分析。另外，本研究所涉及之所有統計考驗之第一類型犯錯機率訂為.05(α =.05)。

二、質性資料

質性資料主要針對 9 位學童接受研究者晤談時，和研究者的對話及解題表現做為蒐集對象。研究者採一對一的方式對受訪個案進行晤談，訪談的問題如附錄 1，重點在於瞭解學生對於數的概念及分數基模的變化情形。每位個案在教學前及教學後均接受一次以上的晤談，每次晤談的時間在 30 至 60 分鐘之間。晤談的過程利用攝影機及錄音機同步收集影像及聲音的內容，以做為轉譯為原案(protocol)的依據。待每位個案的晤談記錄轉譯後(如附錄 9 至 14)，再針對其內容把所有的對話及解題行為予以分類編碼。最後，根據類別做跨個案的整合性分析。訪談記錄所呈現的代碼及符號所代表之意義如表 3-16 所示：

表 3-16 訪談記錄符號說明表

符　號	說　　　明
L1～H3	代表接受訪談個案之代號。
A	代表接受教學實驗前之訪談。
B	代表接受教學實驗後之訪談。
001～nnn	代表訪談原案之流水號。
R	代表研究者。
(　　)	說明所做之動作，或註明停頓時間。
……..	代表部分刪節訪談內容。

為了增加本研究的內在效度，所以本研究利用三角校正(triangulation)以提昇效度，具體而言，採用研究方法及資料兩種三角校正的方法。易言之，利用量的研究方法和質性研究方法做相互校正；紙筆測驗內容和訪談內容做相互校正。

捌、撰寫研究論文

最後，統整量化分析與質性資料，且在文獻的相互檢證下撰寫研究結果，並依據研究結果歸納成結論，對教育行政機關、國小數學教學及教育學術研究做出具體建議。

第四章　研究結果的分析與討論

本研究旨在探討「多元表徵分數課程」對於國小四年級學童分數學習成效的影響。依據此目的，本章分成四節依序闡述「分數解題表現的立即效果之分析比較」、「分數解題表現的保留效果之分析比較」、「實驗組個案數概念之分析比較」及「實驗組個案分數基模之分析比較」，以呈現實驗教學前後所蒐集到的量化資料及質性資料分析結果，再與過去相關理論及實徵研究做比較討論。最後，依據研究結果回應本研究所提出之研究假設。

第一節　分數解題表現的立即效果之分析比較

本研究為探究分數多元表徵課程對學童分數解題表現的影響，特選取國小四年級學童為實驗教學對象，採用不等組前後測設計，進行教學實驗。本節針對兩組學生在「分數問題測驗乙卷」總量表和分量表得分，分別進行單因子單變量共變數分析及單因子多變量共變數分析，據以考驗本研究所提出之研究假設一。

壹、接受不同課程教學處理後，實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」上的整體表現之比較

為探究教學實驗對學童分數解題表現的整體影響，茲依據調查統計結果，首先呈現描述統計資料，以瞭解兩組之間在前後測

及延宕測驗得分的集中及分散情形。其次，將前測(分數問題測驗甲卷)總量表的得分和瑞文氏黑白非文字推理測驗的成績做為共變量，後測(分數問題測驗乙卷)總量表得分做為依變項，先考驗是否符合統計之同質性假定，再進行單因子單變量共變數分析，俾瞭解兩組學生後測整體表現之差異。其統計結果如表 4-1、表 4-2 和表 4-3：

表 4-1　實驗組和控制組學生在「分數問題測驗」總量表及分量表的前測、後測及延宕測驗得分之描述統計表

組別＼測驗		等分割與組成		單位量		分數比較		等值分數		合成與分解		遞迴分割		總量表	
		M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD
實驗組	前測	8.00	3.46	4.71	4.15	2.13	1.02	3.56	3.65	5.29	2.54	3.55	1.89	27.69	13.31
	後測	9.68	3.19	5.94	4.43	2.77	2.11	4.21	3.51	6.56	3.84	5.02	3.17	34.50	15.55
	延宕	9.35	3.55	7.35	4.30	2.32	1.05	5.79	4.07	7.44	3.14	3.48	1.75	36.42	14.92
控制組	前測	7.48	3.26	4.44	4.05	2.07	1.04	3.06	3.17	4.46	3.39	3.28	1.88	25.13	12.71
	後測	9.26	4.01	4.74	4.23	2.22	1.95	4.46	4.39	3.50	3.74	4.26	3.76	28.59	18.13
	延宕	8.59	3.46	6.15	5.38	2.67	1.47	4.43	3.21	4.52	3.03	2.52	1.56	29.39	11.91

註：實驗組　n＝31；控制組 n＝27

表 4-2 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」總量表之共變數分析 Levene 誤差變異同質性檢定

變異來源	自由度	F 值	顯著性
後測總量表得分	1	.40	.53
誤差	56		

表 4-3 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」總量表之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方	F 值	顯著性
組間	1	196.85	2.13	.15
組內	54	92.37		
總和	55			

結果分析：

一、 由表 4-1 兩組得分描述統計得知，實驗組在前測總量表的平均得分為 27.69，控制組的平均得分則為 25.13，兩者相差 2.56。顯示，兩組學生在教學之前在分數問題解題表現有些微的不同。再就後測總量表得分來看，實驗組平均得分為 34.50，控制組的平均得分則為 28.59，兩者相差 5.91 分。可見，兩組學生在後測總量表的得分和前測相較，有拉大彼此差距的現象(5.91>2.56)。

二、 再由表 4-2 Levene 誤差變異同質性檢定可知，將前測總量表得分和瑞文氏非文字推理測驗成績做為共變量，後測成績做為依變量時，並未違反單因子單變量共變數分析的統計假定($F_{(1,56)}$＝.40, $p>.05$)。

三、 最後由表 4-3 單因子共變數分析摘要表得知，實驗組和控制組之間，雖然後測平均得分的差距，比前測平均得分的差距大，但仍未達統計上的顯著水準($F_{(1,54)}$＝2.13, $p>.05$)。

貳、接受不同課程教學處理後，實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」分量表上表現之比較

為探究教學實驗對學童在分數解題表現各分量表的影響，首先，將前測總量表的得分和瑞文氏非文字推理測驗的成績做為共變量，後測各分量表的得分做為依變項，先後進行各組共變數矩陣同質性考驗及誤差異變同質性考驗，以確認是否反違統計假定。最後，進行單因子多變量共變數分析，俾瞭解兩組學生在後測各分量表解題表現之差異。其統計結果如下表 4-4、表 4-5 和表 4-6：

表 4-4 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」各分量表上得分之單因子多變量共變數分析之 Box 共變數矩陣同質性檢定

Box's M 檢定	F 值	自由度 1	自由度 2	顯著性.
29.77	1.25	21	11058.90	.20

表 4-5 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」各分量表得分之單因子多變量共變數分析之 Levene 誤差變異同質性檢定

變異來源	F 值	自由度 1	自由度 2	顯著性
等分割與組成	0.09	1	56	.76
單位量	0.01	1	56	.93
分數比較	0.80	1	56	.37
等值分數	0.14	1	56	.71
合成與分解	0.00	1	56	.96
遞迴分割	1.72	1	56	.20

表 4-6 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」各分量表得分之單因子多變量共變數分析摘要表

變異來源	自由度	多變量共變數 Wilks' Λ	單變量共變數					
			等分割	單位量	分數比較	等值分數	合成分解	遞迴分割
組間	1	.74*	.00	.97	1.08	1.30	8.80*	6.30
組內	54							
總和	58							

*p<.05

結果分析：

一、 由表 4-4 之 Box 檢定得知，兩組之間以前測各分量表的得分和瑞文氏非文字推理測驗的成績做為共變量，其所構成的共變數矩陣可視為相等，並未違反多變量共變數分析迴歸係數相同之假定($F_{(21,11058.90)}$ ＝1.25, $p>.05$)。

二、 再由表 4-5 之 Levene 檢定得知，六個依變項在兩組之間的誤差變異 F 值介於 0.00～1.72 之間($p>.05$)，可視為同質，並未違反多變量共變數分析之變異數同質性假定。

三、 最後由表 4-6 各分量表之共變數分析摘要表得知，從多變量共變數來看，組別之間在六個分量表得分達到顯著差異(λ＝.74，$p<.05$)。顯示，以六個分量表整體而言實驗組的平均得分顯著高於控制組。繼之，再從單變量共變數分析得知，實驗組與控制組在「合成與分解」 分量表的得分有顯著的差異($F_{(1, 54)}$＝8.80, $p<.05$)，其中實驗組顯著的較控制組佳。

參、本節之綜合討論

一、由本節分量表的統計分析得知，實驗組和控制組兩者在後測的得分只有在「合成與分解」分量表一項達到統計上的顯著差異。因此，本研究的「研究假設 1-1」至「研究假設 1-6」等六個研究假設，只有「研究假設 1-5」:「實驗組學生接受『分數多元表徵課程』教學後，在『合成與分解』的解題表現，顯著的比控制組佳。」獲得支持。其餘五個研究則未獲支持。

二、實驗組學生在「合成與分解」分量表解題表現之所以顯著高於控制組學生，可能的原因有二：其一，實驗教學所使用的布題方式有助於學生理解題意，增進了解題正確的機率；其二，實驗組教學對於分數合成分解的概念可以讓學生學習得更紮實，減少犯下如呂玉琴(1991)及湯錦雲(2002)所指出「分子加分子、分母加分母」，亦即 Streefland (1991; 1993)所謂「自然數的干擾」的錯誤情形。

三、 從本研究獲得實驗組和控制組間的整體解題表現未達顯著差異的結果來看，顯示只有部分的結果與 Behr 等人(1983)主張充分利用表徵系統有助於學生學習數學的論點相符合。再就本研究前後測各分量表進步情形分析，在「等分割與組成」和「合成分解」兩個分量表的進步較多，相對的「分數比較」和「等值分數」兩個分量表的進步則較小。所以，多元表徵課程對於促進分數學習

的效果可能依向度的不同，而在效果的突顯方面有所差異。

四、 就等值分數和遞迴分割分量表而言，實驗組和控制組學生的得分都偏低。其中，等值分數的部分依據美國全國測驗的結果(NAEP, 1997)也發現，只有不到兩成的學生可以答對畫等值分數圖形的問題。另外，Marcou 與 Gagatsis (2002)針對五年級的學生所做的研究結果也顯示，學生確實對於掌握等值分數的概念普遍感到困難。但是，張熙明(2004)以行動研究卻發現學生對於等值分數迷思概念的表徵是可以有效改變提昇等值分數的概念，而本研究則顯示等值分數的學習效果並未和控制組之間達到顯著差異。其中的可能的原因是本研究以四年級學生為樣本，在身心成熟狀態上比張熙明(2004)所使用的五年級樣本更為稚嫩，所以學習等值分數的學習效果較不理想。另外，Marcou 與 Gagatsis (2002)的研究也指出，如果學生只知道公式，那麼在書寫符號方面可能會最有效。然而，這種學習成效並不見得真的瞭解等值的概念，只是計算技巧的熟練。在本研究之「分數多元表徵課程」以強調理解為主，不強調公式背誦，可能因此在短時間內較難在紙筆測驗上看到分數顯著的提昇。至於，遞迴等分割部分，可能對於現階段的四年級還是難以理解。將留至質性訪談結果分析時一併討論。

第二節 分數解題表現的保留效果之分析比較

本研究為進一步探究分數多元表徵課程在分數解題表現的保留效果，乃針對教學實驗結束3週後實驗組和控制組在延宕測驗中總量表及6個分量表的解題表現進行比較分析，據以更進一步瞭解兩組之間的差異。

壹、接受不同課程教學處理後，實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」上整體表現的保留效果之比較

在進行共變數分析之前，先進行相關的統計假定考驗。然而基於考量到表4-7所呈現前測總分、後測總分、瑞文氏非文字推理測驗成績和延宕測驗各分量表之間相關情形，為了提昇整個研究的效度，所以在共變量的選擇上主要依據兩個指標性判準：其一，前測總分和後測總分之間的相關係數高達.82($p<.001$)；其二，整體而言後測總分和延宕測驗各分量表間的相關，比前測和延宕測驗各分量表之間的相關高。所以，本研究只採用後測總分及瑞文氏非文字測驗成績做為延宕測驗的共變量。因為，依據Stevens (1992)的觀點「當共變量之間有高度相關(.80)時，對效度的增加無甚大作用」，所以建議採用共變數分析的研究要選擇共變量時之間的相關要低，而和依變項間的相關要高。故，本研究採用其觀點進行分數解題表現保留效果統計考驗時，選擇共變量以進行統計調整的依據。

表 4-7 延宕測驗各分量表、前後測總分及瑞文氏測驗之積差相關係數統計表

	等分割與組成	單位量	分數比較	等值分數	合成與分解	遞迴分割	前測總分	後測總分	瑞文氏測驗
等分割與組成	1.00	0.72**	0.38**	0.52**	0.44**	0.55**	0.76**	0.71**	0.54**
單位量		1.00	0.27*	0.63**	0.58**	0.59**	0.78**	0.82**	0.61**
分數比較			1.00	0.19	0.25	0.17	0.34*	0.36*	0.27*
等值分數				1.00	0.61**	0.65**	0.69**	0.76**	0.56**
合成與分解					1.00	0.62**	0.58**	0.64**	0.38**
遞迴分割						1.00	0.63**	0.73**	0.51**
前測總分							1.00	0.82**	0.62**
後測總分								1.00	0.58**
瑞文氏測驗									1.00

**p<.001 *p<.05

根據上述共變量的選擇，為探究教學實驗的整體保留效果，首先以後測總量表的得分和瑞文氏非文字推理測驗的成績做為共變量，延宕測驗總量表得分做為依變項，先考驗是否符合統計之同質性假定。其次，再進行單因子單變量共變數分析，俾瞭解兩組學生延宕測驗整體表現之差異。其統計結果如表 4-8 和表 4-9：

表 4-8 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」總量表的共變數分析之 Levene 誤差變異同質性檢定

變異來源	自由度	F 值	顯著性
延宕測驗總量表得分	1	.00	.93
誤差	56		

表 4-9　實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」總量表之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方	F 值	顯著性
組間	1	135.63	3.44	.07
誤內	54	39.41		
總和	55			

結果分析：

一、 由表 4-8 Levene 誤差變異同質性檢定可以得知，將後測總量表得分和瑞文氏非文字推理測驗成績做為共變量，延宕測驗成績做為依變量時，並未違反單因子單變量共變數分析的統計假定($F_{(1,56)}$＝.00, p>.05)。

二、 表 4-9 單因子共變數分析摘要表得知，實驗組和控制組之間延宕測驗平均得分的差距，雖然比後測平均得分的差距大，但仍未達統計上顯著差異水準($F_{(1,54)}$＝3.44, p>.05)。

貳、接受不同課程教學處理後，實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」上分量表表現的保留效果之比較

為探究教學實驗對延宕測驗各分量表解題表現的影響，首先將後測總量表的得分和瑞文氏非文字推理測驗的成績做為共變量，延宕測驗 6 個分量表的得分做為依變項，先後進行各組共變數矩陣同質性考驗及誤差變異同質性考驗，以確認是否違統計假定。分析的結果從表 4-10 六個分量表誤差變異同質性考驗可以

發現：「遞迴分割量表」違反統計假定(p<.05)。因此，本研究在進行單因子多變量共變數分析時僅以前五個量表進行分析，以此做為瞭解兩組學生延宕測驗五個分量表解題表現差異的依據。其統計結果如下：

表 4-10 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」各分量表得分的保留效果之單因子多變量共變數分析之 Levene 誤差變異同質性檢定

變異來源	F 值	自由度 1	自由度 2	顯著性
等分割與組成	0.07	1	56	.80
單位量	3.70	1	56	.06
分數比較	1.27	1	56	.26
等值分數	0.65	1	56	.42
合成與分解	2.68	1	56	.11
遞迴分割	5.09	1	56	.03*

*p<.05

表 4-11 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」各分量表得分的保留效果之單因子多變量 共變數分析之 Box 共變數矩陣同質性檢定

Box's M 檢定	F 值	自由度 1	自由度 2	顯著性.
17.37	1.05	15	12093.74	0.40

表 4-12 實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」各分量表得分的保留效果之單因子多變量共變數分析摘要表

變異來源	自由度	多變量共變數	單變量共變數					
		Wilks' Λ	等分割與組成	單位量	分數比較	等值分數	合成與分解	（遞迴分割）
組間	1	.81*	.03	.03	2.4	0.88	8.48*	(3.57)
組內	54							
總和	58							

*p<.05

結果分析：

一、由表 4-11 之 Box 檢定得知，兩組之間以後測總量表得分和瑞文氏非文字推理測驗的成績做為共變量，其所構成的共變數矩陣可視為相等，並未違反多變量共變數分析迴歸係數相同之假定($F_{(15,12093.74)}=1.25$, $p>.05$)。

二、由表 4-12 各分量表之共變數分析摘要表得知，從多變量共變數來看，組別之間在五個分量表得分達到顯著差異($\lambda=.81$，$p<.05$)。顯示，六個分量表中至少有一個分量表是實驗組的平均得分顯著高於控制組。繼之，再以單變共變數分析得知，實驗組與控制組在「合成與分解」 分量表的得分有顯著差異($F_{(1,54)}=8.48$, $p<.05$)，其中實驗組顯著的較控制組為佳。

參、本節之綜合討論

一、 由本節分量表的統計分析得知，實驗組和控制組兩者在延宕測驗的前五個分量表的得分只有在「合成與分解」分量表一項達到統計上的顯著差異。因此，本研究「研究假設 2-1」至「研究假設 2-5」等五個研究假設，只有「研究假設 2-5」:「實驗組與控制組學生，經教學結束後三週，在『合成與分解』解題表現的保留效果，顯著的比控制組佳。」獲得支持。其餘四個假設則未獲支持。另外，「遞迴分割」分量表的得分，雖然違反統計考驗的

假定，但除了可以從表 4-1 描述統計表看到兩組的得分差異不大，亦參考其 F 值不高的情形判斷，故「研究假設 2-6」亦未獲支持。

二、 雖然在延宕測驗總量表和分量表的分析都顯示實驗組和控制組之間的差異極微，除了「合成與分解」分量表達到顯著差異外，其餘均未達顯著差異。但是從表 4-1 的描述統計中可以看出，兩組在延宕測驗總量表的得分差距已增加到 7.03，比後測差距 5.91 大。而且，總量表考驗之 F 值的顯著性已接近.05。此跡象顯示，兩組之間的差距有越來越擴大的趨勢。此外，學習需要經過時間沈澱和自我反思，而「反思」也是實驗教材所強調的重點。「立即效果」雖無法一時充分呈現效果，然而在經過 3 週時間有「遺忘」因素加入後，實驗組所保留的學習效果或許有所減損，但仍絕大部分比控制組的得分高。本研究推測，假如測驗間隔的時間再適度增長(例如 4 週或 5 週)，或許兩組之間的差異變更加突顯。

三、從測驗工具因素層面分析，後測所執行的「分數問題測驗乙卷」在難度上的確比「分數問題甲卷」還要難一些，所以兩組表現的差異可能被壓縮，不易達到統計上的顯著。

四、實驗組學生在延宕測驗「合成與分解」分量表解題表現之所以顯著高於控制組學生，在此提供更加有力的證據說明，強調單位的多元表徵課程，對於提昇「合成與分解」

解題表現有顯著的效果。本研究的此項結果與 Behr 等人(1984)主張「運用不同的表徵可以促進分數學習的結果」之觀點，只有部分相符，可能的原因是多元表徵實驗課程對於分數學習裡不同的概念其促進的效果有快慢的差別。以延宕測驗和前測的比較分析，在「單位量」及「合成分解」的進步較多,「分數比較」及「遞迴分割」的進步較少。

五、由於不同能力的學生在不同組別(實驗組及控制組)的增益情形在本研究中並未探討，因此無法得知「能力」與「組別」之間是否具有交互作用。不過，本研究未討論此一向度的主要原因在於：統計上不管是立即效果或保留效果的共變數分析都違反了統計考驗的假定----變異數同質性。由於本研究對於測驗得分的計算採用古典測驗理論(X＝T＋E)，而非較新的 IRT 測驗理論。所以，未來的研究若能採用 Dimitrov 與 Rumrill (2003)所建議的，應用 IRT 單參數模式(Rasch Model)於「線性對數模式」(Linar Logistic Model for Chang, 簡稱 LLMC)，或許可以從另外的角度切入瞭解能力和組別之間的關係。

第三節　實驗組個案數概念之分析比較

本節旨在描述由實驗組挑選出代表低中高三組的 9 位個案在教學實驗前以及教學實驗後所擁有數概念的發展情形，藉以瞭解教學實驗的實施對實驗組個案數概念的影響。而所採用的資料乃蒐集自紙筆測驗前測、延宕測驗、教學前以及教學後的訪談記錄，經歸類整理比較之後分成「整數概念發展」及「分數概念發展」二個小節加以闡述。

首先，為瞭解整個教學前後 9 位個案的數概念發展的整體型態，將個案在教學前及教學後，解答訪談與數概念有關問題，成功與失敗的情形整理繪製如表 4-13 所示。其次，再依序加以進一步說明，最後再進行分析討論。

表 4-13　教學前、後個案數概念變化比較表

	教學實驗前		教學實驗後	
	成功	失敗	成功	失敗
整數部份—整體關係	L1、L2、L3 M1、M2、M3、H1、H2、H3		L1、L2、L3 M1、M2、M3、H1、H2、H3	
整數二階化聚（低階單位到高階單位）	L1、M3、H3	L2、L3、M1、M2、H1、H2	L1、L2、L3、M1、M3、H2、H3	M2、H1
整數二階化聚（高階單位到低階單位）	M1、M3、H3	L1、L2、L3、M2、H1、H2	L1、L2、L3、M1、M3、H1、H2、H3	M2
分數詞概念（問題甲 1 乙）	L1、M1、H1、H3	L2、L3、M2、M3、H2	L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	L1
分數詞概念（三人分一條繩子）	L1、M1、M2、H1、H2、H3	L2、L3	L3、H1、H2、H3、M1、M2、M3、	L1、L2
分數詞概念（紙筆內單圈選）	L1、L2、L3 M1、M2、H1、H3	H2	L1、L2、L3 M1、M2、H1、H2、H3	

（續後頁）

（接前頁）

分數詞概念（已知內單推未見部份）	L1、、H1、H3	L3、L2＊、M1、M2、M3、H2	L3、H1、H3	L2、M1
分數詞概念（已知內多推未見部份）			L1、M2、M3、H2	
分數詞概念（紙筆內多圈選）	M2、M3、H1、H2、H3	L1、L2、L3、M1	L2、L3、M1、M2、M3、H1 H2、H3	L1、L3
分數詞概念（內多做數訪談）	H1、H2、H3、M1、M2、M3	L1、L2、L3、M2(寫)	L2、M2、M3、H1、H2、H3	L3
分數部分整體關係（問題 9 甲）	H1、H2、H3	L1、L2、L3、M1、M2、M3、	L1、M1、M3、H1、H3	L2、L3、M2、H2
分數部分整體關係（總數已知）	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3		L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	
分數部分整體關係（總數未知）	H1、H2、H3	L1、L2、L3、M1、M2、M3	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	
等值分數概念（問題甲第 12A）	H1、H3	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H2	M3、H1、H3	L1、L2、L3、M1、M2、H2
等值分數概念（問題甲第 12B）		L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	M3、H1、H3	L1、L2、L3、M1、M2、H2
等值分數概念（問題甲第 12C）		L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	H1、H3	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H2
等值分數概念（問題甲第 15）	H1、H2	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H3	L2、M3、H1、H2、H3	L1、L3、M1、M2、

壹、整數概念的發展

本研究為瞭解兒童整數「部分—整體關係」，在佈題時採用提供整體數目及提供部份可見物件，要求學童說出另一個未見部份物件數量的問題，再根據其回答情況判別關係掌握是否良好。例如，以口語布題：「一包花片有 20 顆，5 顆放在布外面，其餘的放在布裡面，請問布裡面有多少顆花片？」，並配合實物

呈現，再請個案說出答案及說明，以探究其「部分—整體」關係瞭解程度。

其次，本研究採用 Sáenz-Ludlow (1994)的觀點，藉由自然數單位讓兒童去感受分數單位，所以特別利用不同單位之間化聚的問題使其感受單位的轉換及相互之階層關係。具體言之，是以「糖葫蘆」由「顆變串」及「串變顆」的問題探討個案之「由高階單位化成低階單位」及「由低階單位聚成高階單位」的單位階層化聚關係。

一、 整數部分整體關係的發展

（一）以減法算則輕易回答「部分--整體」關係的教學前表現

經由教學前的訪談發現，不論低中高組學生對於整數的部分整體關係相當嫻熟。低分組可以利用算則抽象解題，中分組解題速度比低分組快，高分組相較之下最為迅速。

1.利用減法算則的低分組

由訪談內容得知三位低分組的個案，在知道整體及一個部分後，均可以正確算出另一個部分的數目。三位個案在解題過程，既未藉助點數也未進行默數，而是透過純熟的減法進行抽象思考，解決未具體呈現的另一部分數量。此反應出三者均能掌握整數的「部分—整體」關係。以 L3 為例，他很快地利用減法算出正確答案(L3A004)。

L3A001　R：第一個問題要來請教你。我拿一包花片，把五顆放在外面，其他的放在布裡面。現在知道這包花片原來有二十顆，布裡面有多少顆花片？

L3A002　L3：十五顆。

L3A003　R：你是怎麼知道的？

L3A004　L3：二十顆減掉五顆，等於十五顆。

2.輕易解題的中分組

三位中分組個案均能掌握整數的「部分—整體」關係，其作法和低分組相同而且解題的速度更快，只有 M1 在剛開始訪談可能過於緊張誤會題意，經過澄清題意後也和 M2、M3 一樣能夠輕易的解出布裡面有「十五顆」(M1A008)。以 M1 為例，訪談記錄如下：

M1A007　R：100 個花片？那如果是這樣子的話，我說這些花片是從一包裡面倒出來的，妳怎麼會認爲它有 100 個？是 5 乘以 20。我說那包花片裡面只有 20 顆。全部都倒出來了哦！5 顆放外面，我現在知道全部有 20 顆。全部 20 顆的意思是說這邊跟這邊合起來是 20 顆，那布底下有多少顆？

M1A008　M1：那這裡面有 15 顆。

3.迅速回答的高分組

高分組三位個案在訪談時，都以極迅速的速度回答有關整體扣掉部分所剩下部分的問題，顯示三個案對整數的部分整體關係掌握的相當良好。以 H2 為例，很迅速的算出正確的答案，並且將解題的過程說得相當清楚。

H2A001　R：布外面的花片和裡面的花片總共 20 顆，請問布題裡面有多少顆花片？

H2A002　H2：17。

H2A003　R：你是怎麼知道的？
H2A004　H2：抹布裡面我還不知道，但外面已經 3 顆了，所以用 20 減掉 3。

(二)掌握「部分—整體」關係更為嫻熟的教學後表現

三組個案在教學實驗後的訪談，和教學前的問題相同，都在檢驗其簡單的整數「部分—整體」關係。從訪談的資料發現，9 位個案的正確率和教學前相同，全部都正確解答問題。而且，三組個案都在研究者剛問完問題後，馬上就說出解答，並且可以將想法做出合宜的解釋。以 L2 為例，不但可以立即回答，而且能清楚的說明單位間的關係，其訪談原案如下：

L2B001　R：這是五顆花片，這五顆花片是從一包花片裡面拿出來的，那其它的藏在布裡面，有五顆放在外面讓你看到，其它的放在布裡面。請問這一包花片有二十顆，那布裡面有多少顆？
L2B002　L2：十五。
L2B003　R：十五顆？好，你是怎麼知道的？
L2B004　L2：我就用二十把這裡減掉。
L2B005　R：二十減掉五？那個二十是什麼？
L2B006　L2：一包有二十顆。

(三)教學前後個案「部分--整體關係」之比較與討論：

1. 從上述三組個案的表現分析，不論程度低中高程度在前測時都具備同階整數的部分整體關係，此也意味學童學習同階單位分數的可能性是存在的。亦即，三組學童具備學習分數的先備基本概念。而在後測的表現看得出，不但正確度和前測一樣，而且解題更迅速，此意味著 9 位個案在整數同階單位的「部分—整體」關係相當成熟，可以進行

分解的抽象思考，是進入分數學習有利的基礎。

2. 對照甯自強(1993a)對於兒童數概念發展的看法，本研究在後測的 9 位個案，不但可以將「5」內嵌在 20 之內，也可以脫嵌之後不破壞整體，對於「一包」、「20 顆」和「5 顆」之間的關係都能夠清楚的掌握。顯示，教學實驗後有比教學實驗之前更精熟的現象。

二、 整數二階單位化聚的發展

本小節採取「由低階單位到高階單位」、「由高階單位到低階單位」兩個方向探討個案對整數二階單位化聚的能力。資料蒐集來自於，要求學童解決兩類有關「糖葫蘆」的問題。第一類布題「糖葫蘆 4 顆串成一串，全部有 40 顆，有 4 顆放在布外面，請問布裡面有多少串糖葫蘆？」，此題在瞭解個案由低階單位聚合成高階單位的能力。第二類布題「糖葫蘆 5 顆串成一串，全部有 8 串，有 5 顆放在布外面，請問布裡面有多少顆糖葫蘆？」，此題在瞭解個案由高階單位化為低階單位的能力。

(一)只善於處理同階分解的教學前表現

所謂的「低階單位到高階單位」是指由「顆」聚合成「串」，在教學實驗前的訪談顯現出三組個案各有其特色：低分組有只能處理同一階層單位的傾向；中分組則普遍對單位的階層混淆；高分組則有部分忽略了整體中有部分已被獨立出來。

1. 單一階層觀的低分組

此組只有L1可以成功解題，能先將48顆減掉布外面的3顆得到45顆，再透過以3顆串為一串的方式將45顆聚合成15串(L1A024)。另外，L2只能將原來的48顆減掉布外的3顆，得到45顆(L2A048)，卻不能繼續將45顆以3顆當做是一個單位重新聚合。當研究者提醒他，並要求將原來的答案集聚成高階單位時個案表示無法解題，所以顯然只能做同階層單位的分解。(L2A058)。最後，L3的解題方式其實和L2相似都只能做同階單位的分解，所以把所有的單位都只看成一種單位(串)，再做相減以得到他所認為的答案(L3A014)，顯然亦是將不同的單位視為同一單位，所以無法成功解題。

個案L1

L1A016 L1：45串....45顆.....15串。

....

L1A024 L1：因爲48先拿出來3個，等於45，45再除以3等於15。

個案L2

L2A048 L2：四十五。

....

L2A053 R：四十五單位是什麼？
L2A054 L2：顆。
L2A055 R：對，它應該是有多少串？
L2A056 L2：裡面嗎？
L2A057 R：對，是的。
L2A058 L2：(十五秒)不知道怎麼算。

個案L3

L3A014 L3：四十七。
L3A015 R：爲什麼是四十七？
L3A016 L3：因爲四十八再減掉一串就是四十七。

L3A017　R：四十七的單位是什麼？
L3A018　L3：串。
L3A019　R：你說外面這個是多少串？
L3A020　L3：一串。
L3A021　R：裡面呢？
L3A022　L3：四十七串。

2. 階層混淆的中分組

中分組個案有混淆單位的現象，在解低階單位聚合成高階單位時，除了 M3 能正確回答之外，M1 和 M2 顯得有所困難。M1 在回答「全部是 48 顆，布外面是 3 顆成一串時，布裡面有多少串？」仍無法瞭解題意而用 48 乘以 3 解題(M1A028)。當研究者將全部的總數變小(9 顆)，M1 雖會算 3 乘以 3 是 9，但卻混淆了 3 串和 3 顆，遂回答「一串」(M1A036)。M2 則將 48 顆直接減 3 顆，回答「45 串」(M2A034)。所以 M2 的情形和低分組的兩位解題失敗的個案犯呈現相同的解題方式。

個案 M1

M1A025　R：不是，我說全部有 48 個，全部就是裡面跟外面合起來有 48 個糖葫蘆，那如果 3 顆串成一串，裡面有多少串？
M1A026　M1：裡面……一百……一百……(算)一百四十顆的糖葫蘆。
M1A027　R：妳是怎麼算出來的？
M1A028　M1：48 去乘以 3。
M1A029　R：48 去乘以 3？其實現在再換一個題目，總共有 9 顆，如果像這樣子 3 顆串成一串，裡面應該有多少串？

……………………………………

M1A034　M1：9……9 顆……3 乘以……3 要……3 顆……老師說裡面有多少？
M1A035　R：我說外面加裡面總共有 9 顆糖葫蘆，9 顆，那裡面應該有多少串？

M1A036 M1：一串。
M1A037 R：一串？妳怎麼知道的？
M1A038 M1：因爲這樣一串就是有 3 顆的糖葫蘆，這裡面也有一串糖葫蘆，這樣子就有 9 顆糖葫蘆。

個案 M2

M2A031 R：我再把題目說一遍，全部有 48 個貢丸，外面五個，其他的放在布裡面，三個把它串成一串，布底下有多少串貢丸？
M2A032 M2：啊….想不起來耶！(雙手摸自己的頭)
M2A033 R：慢慢想沒關係。
M2A034 M2：四十五串貢丸……..不會耶(停 10 秒)…很難喔！

3. 忽略部分的高分組

高分組個案在處理由低階單位聚合成高階單位，只有 H3 釐清布底下的串數，並將之扣除以求得正確的答案。H1 和 H2 都只能算出全部的串數，卻忘了要減掉布外面的一串。以 H1 為例，他能夠算出全部的 21 顆可以聚合成 7 串，即馬上回答布下有七串(H1A048)。

個案 H3

H3A011 R：現在我把這三顆串在一起叫做一串糖葫蘆，知道布裡面和布外面總共有四十八顆糖葫蘆，請問布底下有多少串糖胡蘆？
H3A012 H3：幾顆啊？
H3A013 R：四十八。
H3A014 H3：十五。
H3A015 R：爲什麼知道十五？
H3A016 H3：四十八減三等於四十五，四十五除以三等於十五。

個案 H1

H1A047 R：現在我的糖葫蘆全部有 21 顆(布外面有 1 串)，三顆要串成一串，布底下有多少串？
H1A048 H1：7 串。

（二）熟練於二階聚合的教學後表現

9 位個案在教學後的訪談表現，只有高分組 H1(H1B034)和中分組的 M2 和教學前的訪談一樣，無法成功解題，其餘的個案均能正確的解題，兩位個案失敗的主要關鍵在於----忘記減掉布外面的一串。

個案 H1

H1B025　R：六分之五串，好，再來。新題目，現在是五顆五顆串在一起，這樣是一串，那知道裡面跟外面合起來，用一顆一顆算，總共有四十顆，那外面這樣子串成一串的話，裡面應該有多少串？
H1B026　H1：八串。
H1B027　R：八串嗎？裡面跟外面合起來是四十顆哦！
H1B028　H1：八串。
H1B029　R：八串，好，爲什麼妳會知道是八串？
H1B030　H1：因爲八乘以五。
H1B031　R：八乘以五，那個是什麼？
H1B032　H1：因爲總共有四十顆，然後四十除以五。
H1B033　R：等於八。這八是外面還是裡面的？
H1B034　H1：裡面的。

從教學實驗後的訪談發現，除了解題成功的人數有所進步之外，仔細分析正確解題者所使用的策略又可發現有兩種不同的取向：其一，高分組 H2 和 H3 運用「先除後減」的策略，先把總顆數除以每串顆數算出總串數，再減掉外面的串數(例如 H2)；其二，中低分組則使用「先減再累加」或「先減再乘」的策略，把總顆數先減掉外面顆數，再利用加法或乘法算出裡面的串數(例如 M3)。

個案 H2

H2B029　R：再來換成糖葫蘆的題目。如果外面這五顆串成一串叫做一串糖葫蘆，現在知道裡面和外面總共有 40 顆糖葫蘆，請問布裡面應該有多少串？

H2B030　H2：七串。

H2B031　R：你怎麼知道？

H2B032　H2：因爲有四十顆，五顆串成一串，先除以五等於八，總共有八串。它是要問裡面，外面已經有一串了，所以八去減一。

個案 M3

M3B019　R：糖葫蘆的題目。五顆串成一串，現在知道布裡面和布外面總共有三十顆，除了布外面的這五顆之外，裡面有多少串？

M3B020　M3：五串。

M3B021　R：你怎麼知道五串。

M3B022　M3：五五二十五。

（三）教學前錯誤頻仍的「高階單位到低階單位」表現

所謂的「高階單位到低階單位」是指由「串」化成「顆」，在教學前的訪談則顯現出三組個案在策略的使用及犯錯的類型上均可歸納其類型。低分組所使用的解題策略以加法和乘法為主，且有混淆單位的現象；中分組則以乘法策略為主，大部分個案均能成功解題，但心算部分容易出錯；高分組除了能成功解題外，運算較其他兩者快，但偶有心算出錯的現象。

1.使用加乘且混淆單位的低分組

L1 混淆了兩階的單位(L1A034)，先把 17 串當作 17 顆後減掉 4 顆得到 13 顆，再將 4 顆當作集聚單位，利用乘法性思維(L1A042)累積到 13 顆，所以答案是 3 串又多 1 顆。其次，L2 亦混淆了「顆」和「串」兩個不同階層的單位(L2A062)，但是和

L1 不同的是在進行第一階單位分解後，利用手指頭協助點數以加法性思維進行集聚單位的複製累加(L2A080)。最後，L3 的解題和 L2 幾乎相同，在解題的最後步驟混淆了「總數」(16 顆)和「累加次數」(4 次)。由此可知，低分組對於不同單位極易混淆。

個案 L1

L1A033　R：如果我的糖葫蘆是四顆串在一起叫一串。現在知道全部有 17 串，就是除了這一串之外其餘的把它放到布裡面(四顆放在布外面)。請問布底下有幾串？

L1A034　L1：13….三串又剩下一個。

……………………………………………

1AA041　R：爲什麼？

L1A042　L1：因爲 4 乘以 3 等於 12，剩下一個就不能了。

……………………………………………

L1A045　R：裡面有多少顆？

L1A046　L1：13 顆。

L1A047　R：爲什麼？

L1A048　L1：因爲 4 乘以 3 等於 12，再加一等於 13。

個案 L2

L2A059　R：糖葫蘆四顆串成一串，我知道外面的和布裡面的合起來總共有十七串，布底下應該有多少串？

L2A060　L2：十三(立刻回答)。

L2A061　R：你怎麼會知道？

L2A062　L2：我把十七個，把四個拿掉的時候就是十三。

L2A063　R：可是我現在的「十七」是指「十七串」，答案一樣嗎？

……………………………………………

L2A075　R：你是怎麼知道的？

……………………………………………

L2A080　L2：它有十七個，我就用手比，用四個串成一個就比一個、四個串成一個就比一個。

……………………………………………

L2A084　L2：….四次，二個。總共有四串，再多兩顆。

個案 L3

L3A041 R：我買了 17 串的糖葫蘆，把一串放在外面讓你看到，其他的放在布裡面不讓你看到。布裡面是多少串？
L3A042 L3：十六串(立刻回答)。
L3A043 R：有多少顆？
…………………………………………………
L3A046 L3：(停頓 55 秒)16。
L3A047 R：你是怎麼道的？
L3A048 L3：有四顆糖葫蘆，一直算算到十六。
L3A049 R：一串一串算？
L3A050 L3：嗯。

2.乘法思維的中分組

中分組在解由高階單位到低階的問題較容易成功，但在「化」的過程裡如果數字較大，則心算較容易犯錯。其中 M1 可以正確解出由串算顆的問題(M1A062)，M2 知道裡面有 16 串，但卻運用 17 乘以 4 的方法求數量，在此解題過程裡犯了兩個錯誤：第一個是未減掉布外面的數量，另一個是心算結果是「17 乘以 4 得 28 顆」(M2A072)。M3 則是可以先把外面的一串先排除掉，知道布裡面有七串，再以乘法「七、三、二十一」(M3A012)正確的算出裡面有二十一顆糖葫蘆。

個案 M1

M1A061 R：現在再回到這個題目。這裡是四顆變成一串糖葫蘆，那我現在知道全部有三串，那布底下應該有多少顆？
M1A062 M1：多少顆？好。有八顆。
M1A063 R：妳怎麼知道的？
M1A064 M1：它說布裡和外面的一共有 3 串，然後一串糖葫蘆有 4 顆，這裡面有 2 串，所以等於 8 顆。

個案 M2

M2A069 R：但是我剛剛講全部有十七串。外面和裡面合起

來有十七串，裡面有多少串？
M2A070 M2：十六。
M2A071 R：裡面有多少顆？
M2A072 M2：二十八。
M2A073 R：怎麼知道？
M2A074 M2：乘的。
M2A075 R：怎麼乘？
M2A076 M2：十七乘以四。

個案 M3

M3A009 R：這裡是我的糖葫蘆，我把它串起來是一串(指布外面的 3 顆成一串)，但是現在全部有八串，就是布蓋著的和布外面的總共有八串。請問你，布裡面有多少顆糖葫蘆，顆喔！
M3A010 M3：二十一。
M3A011 R：你怎麼知道？
M3A012 M3：因爲總共有八串，一串在外面，七串在裡面，七、三、二十一。

3. 心算偶爾出錯的高分組

高分組個案在解由高階單位化成低階單位問題所表現出的運算能力比前兩組佳，但也只有 H3 能將布外面的部分予以減掉，其餘兩者傾向於忽略布外面已有的糖葫蘆。以 H2 為例，雖能夠很快的計算出全部的顆數，但卻認為布底下有「六十八顆」(正確答案應為 64 顆)。

個案 H2

H2A025 R：我把四顆串成一串（在布外面），裡面和外面的合起來有十七串，請問布底下有多少顆？

H2A026 H2：六十八顆。
H2A027 R：你怎麼知道的？
H2A028 H2：因爲一串它是四顆，布裡面有十七串，所以用四乘以十七。

(四)教學後由高階單位到低階單位的表現明顯進步

在「高階單位化低階單位」的題目，三組學生在前測時有「階層混淆」、「忘記減部份」及「心算易錯」的缺陷，但在後測已都具有明顯的進步。例如，在教學前解題失敗的 H1，教學後便能採用「先減後乘」的策略，很快地將總串數減掉外面的一串，再將剩餘的串數乘以每一串顆數(H1B018)。中分組的 M3 和高分組的採行策略一樣(M3B028)。至於，L1 則採用「先乘再減」的策略，把總串數乘以每一串的顆數，先將算出總顆數，再減掉外面的顆數(L1B038)。甚至，即使像 M2 雖然聽錯題目(把二十串聽成二十顆)以致於無法成功解題，但從其解題說明亦可知對於由高階單位化低單位的題目亦能用累加的策略算出給定的顆數(20顆)，再用心算倒退一串，答四串(M2B040)。

個案 H1

H1B015　R：接下來是一個新題目，糖葫蘆的題目。現在糖葫蘆是四顆串在一起，這個叫做一串，串在一起。那現在知道裡面跟外面合起來總共有六串，那裡面應該是多少顆？
H1B016　H1：二十顆。
H1B017　R：為什麼妳知道是二十顆？
H1B018　H1：因為總共有六串，一串有四顆，五乘以四。
H1B019　R：五乘以四，那個五是什麼？
H1B020　H1：裡面還有五串。

個案 M3

M3B023　R：五五二十五，你先把裡面的算出來，總共等於三十。再來一個題目，有一些糖葫蘆把它串成一串，像這樣一樣，那現在知道說全部總共有八串，布裡面和布外面有八串，請問布裡面有多少顆？現在問你顆。
M3B024　M3：...顆。

M3B025　R：你怎麼知道有 25 顆？
M3B026 M3：35 顆。
M3B027　R：你是說 35 顆？對不起。你怎麼知道 35 顆？
M3B028 M3：因爲全部有八串，扣掉裡面一串，然後五乘以七等於 35。

個案 L1

L1B035　R：糖葫蘆五顆串成一串。布外面和布裡面合起來有七串，請問布裡面應該有多少顆？
L1B036 L1：三十顆。
L1B037　R：R：你怎麼知道？
L1B038 L1：因爲它串成七串了，五乘以七等於三十五，再減掉五等於三十。

個案 M2

M2B035　R：一串糖葫蘆有四顆，外面的糖葫蘆和裡面的加起來有二十串，請問布裡面有多少顆？
M2B036 M2：有四串。
M2B037　R：你怎麼知道？
M2B038 M2：數顆的。
M2B039　R：怎麼數？
M2B040 M2：一串四顆啊，再加四、再加四…五串有二十顆。

(五)二階單位化聚之綜合討論

1. 由教學前三組個案在解決「由低階單位聚成高階單位」問題的表現可以發現，不論程度為何對於由低階單位聚合成高階單位的問題都存在有一些困難，只有三之一的個案可以成功解題。低中低分組傾向於會混淆兩個單位，以致用不同的單位做加減。高分組的困難則在算出全部應有的高階單位數目時，忽略另有部分在布外面。中低程度的兒童只熟悉在同一階單位的合成分解問題(有時通通看成串，有時通通看成顆)，對於含有二階單位的問題則容易混淆單位。

2. 當問題是由高階單位化成低階單位時較為容易，若從低階單位聚為高階單位則較困難。又，就成功解題者所採用的策略來看，可以表理成表 4-14 所示。從表中也可以得知，在解「由低階到高階」問題時，高分組採用較有效率的策略；在解「由高階到低階」問題時，高分組和中分組都可以採用較有效率的策略，致使減少計算過程中發生錯誤的機會。

表 4-14 教學後個案二階化聚所採行的策略

	由低階到高階	由高階到低階
高分組	先除後減	先減後乘
中分組	先減再乘	先減後乘
低分組	先減再累加	先乘後減

3. 在教學之前多位個案對於整數的二階單位的化聚無法充分瞭解，而在教學之後有了很大的進步。推測其可能的原因有二：其一是成熟因素造成；其二，也是更重要的是實驗課程裡面強調單位之間的辨識和轉換，所以促進學童單位之間化聚關係的掌握。

4. 甯自強(1993b)指出，處理兩階單位及其化聚是部分整體運思時期的重要特性。所以就本研究的訪談結果分析，9 位個案對於二階化聚的雙向關係在教學前顯得一片混亂，在教學之後進步很大，而且在解題效率上也提昇。而這也蘊含著，個案對於具有兩階計數單位的分數，可能在教學後會比教學前來得進步，此一推測，將再下一小節做

說明。

貳、分數概念的發展

本小節將運用紙筆前測、延宕測驗及教學實驗前、後所做的訪談資料做為分析的依據，探討學童的分數詞、分數部分整體關係及等值分數概念的發展，以瞭解教學實驗對實驗組學生分數概念發展的影響。

一、 分數詞概念的發展

分數詞概念的探討，係以個案回答紙筆前測及延宕測驗「分數問題甲卷」第一題之問題乙(一條巧克力有 18 塊，平分給 3 位小朋友，每位小朋友可以得到多少條？)、第四題（提供一盤水果軟糖 8 顆，請兒童圈出$\frac{1}{8}$盤。)及第五題(提供一盒牛奶糖 18 顆，請兒童圈出$\frac{1}{3}$盒。)答題情形為其中一項資料來源。另外，利用訪談蒐集更進一步資料，訪談的問題類型包括「已度量化連續量情境」及「離散量情境」兩種問題，離散量情境的問題又可以分成「內單型問題」及「內多型問題」。具體言之，連續量情境下的問題，研究者則要求個案回答「一條繩子平分給三人，每人可以得到多少條？」；離散量情境則「單位分數內容物為單一，但部分未呈現」請個案說出未呈現部分數量及分數詞；以及「內容物多個，整體具體呈現」要求做出給定分數的數量，並加以說明。

(一)教學前個案的分數詞發展

1.單純並置的低分組

(1)已度量化連續量情境

依據低分組在紙筆前測的答題結果發現，低分組個案難於已度量化連續量的情境下形成正確的分數詞。當前測問題呈現一條巧克力連在一起有 18 塊，平分給三人之後每人可以得到多少條巧克力？只有 L1 能夠正確的指出每位小朋友可以得到「$\frac{6}{18}$條」；L2 則寫「6 條」；L3 則寫「$\frac{1}{18}$條」，可見 L2 以內容物數量回答問題，L3 則將內容物與份數並置。在訪談的部分三位個案只有 L1 可以正確的說出每人可以得到「三分之一(條)」；L2 則因為不會等分給定的線段而未回答；L3 則在等分線段之後，取線的上下部分稱之為「二分之一條」(L3A086)。值得一提的是 L3，其訪談時圖像表徵及口語表徵具有一致的傾向，但均屬分數詞的迷思概念。

L3A085　R：一位小朋友，我也可以說他得到多少條？
L3A086　L3：兩分之一條。
L3A087　R：怎麼寫？能不能寫在這邊？你認爲一位小朋友可以得到多少條？
L3A088　L3：(在紙上寫下$\frac{1}{2}$)

(2)離散量情境

A.內單型問題

在紙筆前測三位學童均能圈出正確的數量(1 顆)。在訪談時，L1(L1A162)和 L2(L2A086)都知道布外面如果有一顆，是佔「五分之一盒」時，均能推算出布裡面有四顆；L3 卻認為布裡面有五顆，因為五分之一就是「5」在外面，「1」在裡面(L3A070)。可見 L3 的分數詞屬於兩個獨立數量的單純並置，分子未內嵌在分母之中。另外，如果要求個案把裡面的四顆以分數詞說成是「多少盒時」，L2 則無法回答。

個案 L1

L1A161 R：五分之四是多少顆花片？
L1A162 L1：四顆。
L1A163 R：你剛剛講裡面有五顆，現在講四顆，你認爲是幾顆？
L1A164 L1：四顆。

個案 L2

L2A085 R：我有一盒糖果，把裡面的一顆拿出來讓你看到，其他的藏在布底下不讓你看。現在這一顆可以說是五分之一盒，你曉不曉得布裡面有多少顆糖果？
2A086 L2：四顆(立刻回答)。
L2A087 R：你怎麼知道？
L2A088 L2：因爲五分之一盒嘛，就是裡面的其中一個，應該全部加起來有五顆，所以裡面有四個。
L2A089 R：這一盒糖果應該有多少顆？
L2A090 L2：五顆。
L2A091 R：布裡面我可以說它是多少盒？
L2A092 L2：(搖頭)。
L2A093 R：不知道？布裡面有多少顆？
L2A094 L2：四顆。
L2A095 R：我可以說它是多少盒？
L2A096 L2：這個我不會。

個案 L3

L3A067　R：我有一盒糖果全部把它拿出來，有一顆在布外面被你看到，其他的藏在布底下不讓你看。現在知道這一顆糖果也可以說它是五分之一盒，你曉不曉得布底下有幾顆？
L3A068　L3：五顆。
L3A069　R：你是怎麼知道的？
L3A070　L3：因爲五分之一嘛，五在裡面，一在外面。

B.內多型問題

在紙筆前測「分數問題測驗甲」之三位學童均未能圈出正確的數量(3顆)，L1和L3都只圈出1顆。至於教學前訪談問題的解題，L1在利用24顆積木做「四分之三包」時，把分母當作是每一份中所含的數量，分子則為份數(L1A186)；L2表示不會做「四分之一包」(L2A180)，且以兩個做一堆，做成兩堆後將它視為「二分之一」的分母，剩下的做一堆視為分子(L2A184)；L3則是不管整體是多少，先拿出和分母一樣多的數量，再從其中拿出部份做為分子(L3A178)。

個案L1

L1A183　R：這裡是一包積木(24顆)要請你拿出四分之三包積木，你會怎麼拿？
L1A184　L1：(將四顆排成一列，共排成三列)。
L1A185　R：你怎麼知道這是四分之三包？
L1A186　L1：這裡有四顆，有三個。

個案L2

L2A179　R：好，現在我把它加進四個，變成一包有十二個，要請你拿出四分之一包。
L2A180　L2：不會。
L2A181　R：要請你拿出二分之一包，你會不會？做做看。
L2A182　L2：(先拿兩個做一堆、再拿兩個做一堆、其餘的是一堆)
L2A183　R：哪邊是二分之一包？

L2A184 L2：這兩個是一堆、這兩個是一堆(手指兩堆兩個的)，剩下的是一堆。

個案 L3

L3A173 R：這裡是一包積木(24 顆)，想要請你拿出四分之三包積木，你會怎麼拿？

L3A174 L3：(拿出整堆積木中移出三顆。)

L3A175 R：請你拿出六之四包積木，你會怎麼拿？

L3A176 L3：(拿出整堆積木中先拿出六顆，再從中移出四顆。)

L3A177 R：你是怎麼做的？

L3A178 L3：六分之四包，就是一包有六顆，拿出四顆，就是六分之四。

2. 能內嵌但無法脫嵌的中分組

(1)已度量化連續量情境

中分組在紙筆前測「問題甲」第 1 題部分，三位中分組個案只有 M1 能夠正確的指出每位小朋友可以得到「$\frac{6}{18}$條」；M2 則寫「$\frac{9}{18}$塊」；M3 則寫「$\frac{3}{18}$條」。探究其可能的原因，M2 缺乏明確線索難以推測，但是 M3 則可能將內容物個數和等份數做不當的並置。至於，在回答「一條繩子平分給三(六)人，每人可以得到多少條？」三人均可以正確的說出「三分之一條」或「六分之一條」。可知，在以線段做為連續量情境，中分組可形成正確的分數詞。

(2)離散量情境

A. 內單型問題

在紙筆前測，三位中分組學童均能圈出正確的數量(1 顆)。

至於教學前訪談，M1 成功回答「布外面一顆，是五分之一包，布裡面有多少顆？」之後，研究者繼續追問「布裡面的叫做多少包」時回答「四分之一包糖果」(M1A098)，在思考過程中失去了整體，無法擁有正確的分數詞概念。M2 則認為「布外面一顆是五分之一盒」，布裡面有「五分之六盒」(M2A098)。M3 在面對這類問題時則直接表示「不知道」(M3A088)。以 M1、M2 表現可以看出，中分組傾向將分子內嵌於分母中，但一旦脫離之後會有破壞整體的現象。

個案 M1

M1A094 M1：哦，那就是五分之……一顆……這樣子是……這樣子是四……這裡不算嗎？
M1A095 R：對，不算。
M1A096 M1：那就是四分之一包糖果。
M1A097 R：爲什麼妳會知道四分之一包？
M1A098 M1：因爲這個不算，然後它有四顆糖果，然後拿一顆就是四分之一包糖果。

個案 M2

M2A097 R：我再把它講一遍，我把一盒全部倒出來，除了這一顆讓你看到之外，其他的都放在布裡面。現在知道這一顆叫做五分之一盒，裡面會有多少顆糖果？
M2A098 M2：五分之六。
M2A099 R：五分之六盒？
M2A100 M2：(點頭)
M2A101 R：爲什麼你知道五分之六盒？
M2A102 M2：加的。因爲裡面有五盒，加這一盒。

個案 M3

M3A083 R：如果現在知道露出來的這一顆巧克力是五分之一包，那我怎麼知道沒有露出來的是多少顆？
M3A084 M3：……
M3A085 R：有沒有辦法知道布蓋著是多少顆？
M3A086 M3：(搖頭)

M3A087　R：不懂還是不知道？
M3A088 M3：不知道。

B.內多型問題

三位中分組的 M2 和 M3 均能正確圈出一盒糖果 18 顆，三分之一盒是是 6 顆，惟獨 M1 圈出 1 顆。可知，M2 和 M3 能了解內多情境下單位分數內容物的個數，但 M1 則仍停留在「三個裡面的一個」的分數詞概念。在訪談做數方面，M2 會將 24 顆平分給 6 人，但卻認為每人得到的是「四分之一」(M2A180)，然而在要求寫下分數符號時，卻寫成 $\frac{4}{1}$(M2A188)。寫完之後隨即修改原來口語說的「四分之一」，將它最後確定更改為「一分之四」(M2A198)。

M2A175　R：這個叫做一包巧克力(拿出二十四顆積木放在桌上)要把它平分給六位小朋友，你會怎麼做？
M2A176 M2：六位…(先兩顆、兩顆拿出，分成六堆，每一堆再分一顆，分完一輪後再分一顆)，好了。
M2A177　R：第一個小朋友得到多少顆？
M2A178 M2：四顆。
M2A179　R：我可以說他是拿到多少包的巧克力？
M2A180 M2：耶，怎麼說。四分之一。
M2A181　R：爲什麼你知道是四分之一？
M2A182 M2：因爲一個人可以得到四分的其中一份，咦，一個人可以分到四份啦，..一就是一個人，四就是四份。
M2A183　R：所以你認爲四分之一就是「四份」、「一個人」，那個一是指一個人。如果讓你寫成數學符號，你會怎麼寫？
M2A184 M2：數學符號喔？
M2A185　R：分數的符號啊。你會怎麼寫？
M2A186 M2：應該是一分之四吧(註：寫完後再唸出)。
M2A187　R：是四分之一，還是一分之四？

M2A188 M2：一分之四(寫下$\frac{4}{1}$)。
M2A189 R：解釋一下，你的一分之四跟剛剛的一不一樣？
M2A190 M2：顛倒。一是一個人，一個人可以分到四顆。
M2A191 R：所以叫做「一分之四包」嗎？
M2A192 M2：顆！
M2A193 R：如果我問「包」呢？
M2A194 M2：也可以這樣講啦，這是一個包(手指全部積木)，一個人可以分到四顆。
M2A195 R：所以呢？
M2A196 M2：所以是一又四分之一。
M2A197 R：一又四分之一，會不會跟你現在寫的那個不太一樣？
M2A198 M2：咦，一分之四啦！

3.在具體物件呈現下均能正確解題的高分組

(1)已度量化連續量情境

在紙筆前測「問題甲」部分，H1 和 H3 能夠正確的指出每位小朋友可以得到「$\frac{6}{18}$條」；H2 則寫「$\frac{1}{6}$條」。訪談時高分組的個案都能在將繩子三等份後正確的說出每人得到的是「三分之一條」，顯示其具有正確的分數詞概念。以 H1 為例，能說出一個人得到「三分之一條」、二個人得到「三分之二條」、三個人得到「三分之三條」(H1A120)。

H1A113 R：(拿出三個花片，代表三位小朋友)這個小朋友得到多少條？
H1A114 H1：三分之一條。
H1A115 R：這個小朋友呢(指另一個花片)？
H1A116 H1：三分之一條。
H1A117 R：這兩個小朋友呢？
H1A118 H1：三分之二條。
H1A119 R：這三個小朋友呢？
H1A120 H1：三分之三條。

(2)離散量情境

A.內單型問題

在紙筆前測，H1 和 H3 均能圈出正確的數量(1 顆)，H2 則可能不瞭解題意把全部 8 顆都圈起來。至於教學前訪談，H1 和 H3 均能說出正確的分數詞，唯有 H2 認為布外面的一顆如果是「$\frac{1}{5}$包」那麼布裡面就是「5 包」，也就是「五分之五盒」(H2A038)。

H2A036　H2：因爲這一顆是五分之一，表示裡面一定有五份。
H2A037　R：所以裡面的這一些是佔多少盒？
H2A038　H2：五分之五。

B.內多型問題

在紙筆前測三位高分組個案均能正確圈出正確的數量。在訪談的部分，三位個案亦都能夠將具體的積木依照要求分成若干份，並說出正確的分數詞，其中 H2 則可以把「6 顆」看成一袋，每一袋稱為「四分之一包」(H2A062)。

H2A059　R：我們再做下一個題目。這裡是一包糖果(24 顆)，想六顆放在一個小袋子，請問可以分做多少袋？
H2A060　H2：(把它分成四堆)四袋。
H2A061　R：這一袋是佔多少包？
H2A062　H2：四分之一包。

(二)教學後個案的分數詞發展

由於 9 位個案在教學後所呈現的分數詞發展「同質性大於異質性」，所以此部分不分低中高組論述，只採用「連續量情境」和「離散量情境」整合性的報告。

1.連續量情境

在紙筆延宕測驗第 1 題的回答，9 位個案除了 L1 寫「$\frac{1}{6}$條」是錯誤的之外，其餘的八位個案都正確的回答此題，其中很明顯的中低分組的五位個案答「$\frac{6}{18}$條」，高分組的三位個案則都回答「$\frac{1}{3}$條」。在此中低分組的分數詞表現出已能將適當的單位加以並置，且可以將分子內嵌到整體之中，至於高分組所表現的則是分數詞概念不但正確，而且產生質變，有了更進一步提昇(其涉及等值分數的部份留待下一小節做更深入的討論)。反觀 L1 在前測時低分組只有他答對，可是在延宕測驗時所有個案只有他答錯，唯細考其回答，前測答「$\frac{6}{18}$條」，延宕測驗則答「$\frac{1}{6}$條」，造成不同答案的可能原因是 L1 的分數詞已有朝向高分組一樣產生質變的態勢，能把所分到的六塊看成一份，只是未能將總數的單位也做轉化而採取了不當的並置。所以，整體而言，在教學實驗之後三組個案在延宕測驗所表現出的分數詞概念有顯著的進步。

其次，後測的訪談和前測一樣，要求個案回答「一條繩子平分給三人，每人可以得到多少條？」結果中分組和高分組的六位個案及低分組的 L3 等七人均能正確的回答「三分之一條」，而低

分組的 L1 和 L2 則答錯，其中值得一提的是 L1，從回答可以得知他嘗試著形成「份」的單位，但是無法將「12 公分」和「1 份」做良好的調節(L1B092)，亦即無法將 12 公分視為「三份」後再與一份做適當的並置。由此結果和前測相較，L1 的答錯並不意味是退步的訊息，而可能是在做進一步基模整合之前的混淆現象。此現象，也許只是短暫的浮現，待個案重新調整後或許會有新的進步出現。然而，本研究由於時間上的限制，並未對此推測做進一步的驗證。

$\boxed{\text{個案 L1}}$

L1B075 R：有一條蜂蜜蛋糕長成這樣子(指 12 公分的線段)，請你把它平分給三位小朋友，請問你會怎麼做？
L1B076 L1：(向研究者要尺，量出總長後每三公分做一記號)分成三份。
L1B077 R：這一份可以說是多少條？
L1B078 L1：三分之一條。
L1B079 R：這裡呢？
L1B080 L1：三分之二。
L1B081 R：這裡呢？
L1B082 L1：十二分之一。
L1B083 R：我有點聽不懂，這裡是三分之一、三分之二，十二分之一。再整理一遍吧。
L1B084 L1：十二分之一。
L1B085 R：這裡呢？
L1B086 L1：十二分之一。
L1B087 R：這裡呢？
L1B088 L1：十二分之一。
L1B089 R：這裡呢？
L1B090 L1：也是十二分之一。
L1B091 R：爲什麼你會認爲是十二分之一條？
L1B092 L1：因爲它全長有十二公分，平分成三份，每一份就是佔全部的十二分之一。

2.離散量情境

(1)內單型式問題

在紙筆延宕測驗，除了 L1 在該頁所有題目全部空白未答，可能是忘了作答以外，其餘的八位個案均能正確的圈出 1 顆。與前測相較原來做錯的 H2 已有進步。

至於教學後的訪談結果發現，L3、H1 及 H3 等三人都可以正確回答，L1、M2、M3、H2 等四人雖未解答內單問題，但在內多問題全部均答對，所以推測答錯的只有 L2 及 M1 兩人。所以整體而言，比前測的情形改善許多。

(2)內多型問題

在紙筆延宕測驗，除了 L1 該頁完全空白可能是跳頁未答外，只有 L3 畫錯，把三顆作一區隔共作了六個區隔，其餘的七位個案均正確解答該題。此與前測僅有五位個案答對的情況相較已有些許進步。甚至在訪談部分，在教學實驗前做數錯誤的 L2 和 L3，在教學實驗之後都已經能正確做出給定的分數詞所代表的數量。以 L2 為例，研究者要求從一包有 18 顆的積木拿出六分之四包，L2 可以正確的先將它分為六堆之後再拿出四堆（L2B195）並且做出完整的解釋。

L2B184　R：你先數數看這裡有多少顆積木？
L2B185　L2：十八。
L2B186　R：請你拿出六分之四包積木。
L2B187　L2：(每三顆做一堆，做成六堆)。
L2B188　R：指給我看看

L2B189 L2：這裡(指其中的四堆)。
L2B190 R：你剛剛分成幾堆？
L2B191 L2：六堆。
L2B192 R：每一堆有多少顆？
L2B193 L2：三顆。
L2B194 R：你爲什麼想把十八顆分成六堆？
L2B195 L2：因爲它是六份，所以先把十八顆分成六份，其中的四份。

(三)教學前後分數詞概念變化之討論

1. 在教學前，三組個案的情形整理如下：

(1) 在離散量內單型式的問題情境下，低分組當物件具體呈現時三位個案從做數上表現出具有正確的分數詞概念，但當有部分物件未呈現時，則有個案(L3)無法正確解題，由其說明可以得知「五分之一」對他而言是「五」和「一」的單純並置。另外，也有個案(L2)在缺乏視覺物件的情況下，無法形成正確的數詞。

在紙筆測驗呈現離散量內多型的問題情境下,三位低分組的個案在教學前均無法根據題目的條件與資訊,正確的寫出分數,此亦是個案對於內多概念相當不成熟的另一例證。

(2) 中分組的學生則是在思考過程中失去了整體，無法擁有正確的分數詞概念。而對 M2 而言，雖然也是無法正確推算出布裡面的數目，但是分數詞已能將部分內嵌到整體之中，但是卻用了錯誤的並置關係，所以當他推論布裡面有「5」而外面有「1」時，裡面的是佔「五分之六」

而非「六分之五」。至於內多情境下紙筆則驗的解題，顯示出 M1 仍停留在「三個裡面的一個」的分數詞概念。

(3) 高分組方面，在已呈現等分的情境下 H1 和 H2 可以具備正確的分數概念，但是其本質上屬於單一階層的分數詞，即「18 塊」和「6 塊」的並置關係。H3 則混淆「份」和「塊」以致於會將兩者做並置。這種混淆單位量和單位分量數詞的情況，和李曉莉(1998)的研究結果一致。

(4) 依據前述(1)～(3)結果可知，三組個案在教學前對於同一階計數單位名稱情境下的分數詞掌握得較佳。當第二階單位名稱不明顯時(通常以「全部」做為單位量的指稱)，低分組部分個案對於這種問題似乎比兩個單位(顆和盒)明顯出現時還要更容易解題。三階計數單位同時出現的情境下，有部分中分組及高分組的學生可以構成正確的分數詞。

(5) 整體的物件是否具體呈現也影響了個案的解題，當有部份物件未呈現在眼前，必須仰賴心像進行運思時，三組學生大份都感到困難，而且從中可以顯現出對於分數詞概念傾向於「單純並置」的情況。

2. 在教學後的表現，三組個案的情形整理如下：

中低分組的分數詞表現出已能將適當的單位加以並置，且可以將分子內嵌到整體之中，顯示比教學前進步。至於，高分組所表現的則是分數詞概念不但正確且產生了

更進一步的質變(其涉及等值分數的部份留待下一小節做更深入的討論)。

3. 在數概念的發展上,在教學之前低分組和中分組的部分學生利用單純並置看待分數詞,可推測其發展只處於甯自強(1997a)所聲稱的「起始單位分數」的分數詞，甚至是之前的階段。而且，多位個案犯了 Piaget (1952)所聲稱的「類」和「包含」的謬誤，進而把不當的兩個單位進行單純並置。然而在接受實驗教學之後，對於分數詞意義的瞭解，整體而言有所提昇。所以，這樣的進步也支持「分數多元表徵課程」對「分數概念」發展有顯著的助益。

4. 從表徵間互動的層面分析，發現少數個案在「操作」表徵受到「書寫符號」表徵的影響，將分數的意義看成是兩個量(一個獨立的分子，和一個獨立的分母)的單純並置，而且有的個案會因為「書寫符號」而將原本是對的「口語」表徵改成錯誤的，此現象和王淵智(2001)研究所發現的相當一致。在內多情境做數的表徵也發現，少數個案會忽視原來的單位量，而只依分母的整數數詞拿出相對的數量，再從中拿出分子的整數數詞相對的數量,此結果和王淵智(2001)、陳瑞發(2003)及劉世能(2003)等人所做的研究相同，都是自行假設單位量，也和甯自強(1993c)所談做兩次耗盡之後再拿出分子是類似的情況。惟，經過教學之後，已無個案發生此情形。

5. 劉祥通(2004)認為「利用具體操作與圖像表徵」有助於學生解題。所以若和前述量化結果做比對，實驗教學之後，實驗組學生在「合成與分解」的解題比控制組學生佳，本研究利用多元表徵課程在增進分數詞概念的理解及「合成與分解」解題進步的現象，似乎也證實劉氏的看法。
6. 從布題情境的角度分析，本研究的個案在「內單型問題」形成正確數概念的機會比「內多型問題」多。換言之，「內單型問題」對個案而言比「內多型問題」簡單。此結果和羅素貞(2002)研究結果聲稱「單位分數內容物個數不同的問題情境，對四年級兒童影響很大」不謀而合。
7. 從構成分數詞的「單位」層面分析，在離散量情境下「同一階層計數單位」的分數詞個案回答的表現最好；「同時有兩階層計數單位，但第二階不明顯時」次之；「同時有三階計數單位」時表現最難。然而，個案如果要充分的理解分數，必須能夠清楚掌握三個階層，所能做出最適當的並置。甯自強(1997a)曾經認為「分數單位是三階單位的概念」，從本研究的此項結果也說明了兒童在離散量單位分數內容物為多個個物的情境下要形成分數單位，是相當不容易的。
8. 從本研究的結果可知，兒童對於構成分數詞的單位之間如果能夠做良好的調節，將有助於分數詞概念的理解。此結果和 Watanabe (1995)對於單位調節與分數意義瞭解的研

究具有相同的發現。不過，兩者不同的是，Watanabe (1995) 只針對簡單分數(即內容物為單一)，而本研究則更進一步發現在單位分數內多情況下，單位調節對於分數詞的理解更形重要。

二、分數的部分整體關係之發展

本研究在紙筆測驗前測部分係以能否答對「分數問題甲卷」第 9 題為判準，該題呈現三顆蘋果並稱其為四分之一盤，問布蓋著是多少盤。另外在配合主題相同，但數字不同的訪談內容，以做為判斷的依據。

(一)教學前分數的部分整體關係之發展

1.缺乏分數部分整體關係的低分組

低分組 L1 答「$\frac{2}{2}$」；L2 則答「1」；L3 則答「$\frac{9}{4}$」，由此可知三位個案均尚未具備分數的部分整體關係。

訪談部分，在回答「布外面的一顆是五分之一盒，布裡面是少盒？」L1 認為是「一分之五盒」(L1A078)；L2 表示不知道布底下是多少盒的問題(L2A096)；L3 認為是「五盒」(L3A074)的答案可知其缺乏分數的部分整體關係。

個案 L2

L1A077　R：布底下是佔多少盒？
L1A078　L1：一分之五。

個案 L2

L2A093　R：不知道？布裡面有多少顆？
L2A094　L2：四顆。
L2A095　R：我可以說它是多少盒？
L2A096　L2：這個我不會。

個案 L3

L3A073　R：這一顆叫五分之一盒，布裡面的是幾盒？
L3A074　L3：四盒，不，五盒。

2.分數部分整體關係混亂的中分組

中分組在回答「分數問題測驗甲」第 9 題時，M1 答「$\frac{2}{4}$」、M2 答「$\frac{6}{4}$」，M3 則答「$\frac{2}{3}$」，是以在部分物件未呈現時，分數的部分整體關係顯得相當混亂。

在訪談部分則發現以 M2 為例，當他知道總數是二十顆，布外面有 5 顆，是佔「二十分之五包」，布裡面雖未看見但是也知道它是「二十分之十五包」。然而，當布題變為「露出 8 顆是三分之一盤，布底下有多少盤？」雖可以算出有十六顆，卻稱它為「二分之一」(M2A252)。

M2A241　R：這八顆把它放到盤子裡面。這是讓你看到的，其他是你沒有看到的被布蓋著。我說它是三分之一盤，你曉不曉得布底下有多少盤？
M2A242　M2：三分之一…不曉得。
M2A243　R：布裡面有多少顆？
M2A244　M2：應該是有超過八顆。
M2A245　R：有超過八顆，到底是幾顆？
M2A246　M2：你說這個是三分之一？
M2A247　R：外面的這些叫做三分之一盤。
M2A248　M2：裡面的應該是二分之一。
M2A249　R：單位是什麼？
M2A250　M2：包。
M2A251　R：有幾顆？

M2A252 M2：十六。

3.具分數部分整體關係的高分組

高分組的三位個案，對於「分數問題測驗甲」第 9 題的回答均能答出被布遮住的是$\frac{3}{4}$盤。另外，從訪談也顯示高分組的個案的確在分數部份整體關係的建立上相當良好。例如 H3，在告知布外面是代表九分之一包，可以得知布裡面有九分之八包(H3A112)。

H3A111 R：好，很好，再來。再來的問題是這樣子的，如果說這一個花片它代表著九分之一包，那我把一包花片放到外面……一個放到外面，其它的放到裡面，外面的這一個是九分之一包，請問布裡面有多少包？

H3A112 H3：九分之八包。

(二)教學後分數部分整體關係的發展

由於教學前中低分組所呈現的分數部分整體關係混亂的現象相差不遠，而高分組的部分整體關係則呈現較穩定、正確的現象。所以本小節依序探討「總數已知」及「總數未知」兩種不同的問題型態做探討。

從紙筆測驗和訪談的結果可以得知，當問題只有出現一個屬於部份的分數詞而沒有出現內容物時最容易答對，此大概和平常所做的題目較為相似的緣故。當題目有出現屬於部份的分數詞，而且有部分的內容物呈現時則個案犯錯的機會較大。以下分兩部

份分別討論之。

1.總數已知

在後測訪談探討總數具體已知的部份分數基模時和前測一樣，利用給予一個總量，告知部份數量由個案回答它所代表的分數，再追問剩下數量所代表的分數。由個案的訪談結果發現，9位個案在都可以正確的回答此類問題，亦即當總數已知，又知道部份分數之後，可以知道剩下的部份是代表多少，代表分數的「部份--整體關係」能夠清楚掌握。以L3為例，告知總數24顆，其中的八顆他可以知道代表「二十四分之八」(L3B018)，剩下的部份也知道它是「二十四分之十六」(L3B020)。

L3B015 R：如果一包花片有二十四顆，放八顆在外面，其餘的放在布裡面，布裡面有多少顆？
L3B016 L3：十六。
L3B017 R：剛剛這個問題，八顆放在外面，我也可以說他是多少包花片？
L3B018 L3：二十四分之八。
L3B019 R：布裡面有十六顆，也可以說多少包花片？
L3B020 L3：二十四分之十六。

2.總數未知

當受訪者無法直接利用內容物個數做「一階」分數的問答時，必須要能夠處理二階分數以上的能力才能答對。9位個案在延宕測驗第9題問題甲的回答，正確答出$\frac{3}{4}$盤的有L1、M1、M3、H1、H3等五人，答錯的則有L2、L3、M2、H2等四人，和前測相較答對的人數增加了兩人。除L3空白未答之外，其餘三人的答

案均不相同。H2答$\frac{2}{4}$，可能是用3顆減$\frac{1}{4}$盤的分子；L2則可能是算出布裡面的是9顆所以誤答為$\frac{9}{4}$；M2則答$\frac{1}{4}+3=1$。從這三人答錯的類型可以看出，單位的混淆造成無法建立適當的分數部份整體關係。

根據訪談的結果也發現9位個案在有具體物呈現，即使整體單位量的內容個數未知，雖然有人可以直接就回答未見部份數量所代表的分數。但是，像L2就必須靠算出布裡面未見的顆數，才能知道是多少包(L2B058)。在另外的題目，告知L2和媽媽分一包糖果，他得到五分之二包，問媽媽得到多少包？L2可以很快且正確的回答出「五分之三」(L2B140)。

L2B053 R：十五顆？你用猜的嗎？好。這裡有三顆花片，是從一包花片拿出來的，現在我知道這是七分之三包花片，那請問布裡面還有多少包花片？
L2B054 L2：七。
L2B055 R：七包？還是七顆？
L2B056 L2：七顆。
L2B057 R：七是哪裡來的？你怎麼知道布裡面有七顆？
L2B058 L2：布裡面應該有四顆吧!
L2B059 R：四顆，好，你是怎麼知道的？
L2B060 L2：把它加起來。
L2B061 R：把它加起來？加起來是多少？
L2B062 L2：七。
L2B063 R：加起來是七？所以你認為布裡面應該有四顆？我剛剛問你「包」，那它是多少包？
L2B064 L2：七分之三包。
L2B065 R：裡面是七分之三包？
L2B066 L2：……
L2B067 R：外面我知道是七分之三包，那裡面呢？
L2B068 L2：七分之四吧？

………………………………………………………………

L2B139　R：三分之三嗎？好，再來一個題目。如果你跟你媽媽來分糖果，你得到的是五分之二包，那你媽媽得到多少包？

L2B140　L2：五分之三。

L2B141　R：你怎麼知道？

L2B142　L2：用五分之二把五分之三加起來是五分之五，五分之五也就是一包。

L2B143　R：你是用加上去的嗎？

L2B144　L2：對。

(三)教學前後分數部分整體關係之比較與討論

1. 由三組個案教學前在分數部分整體關係表現得知，中分組和低分組的部份分數發展得非常不理想，在給定整體的其中一部分之後，無法得知另一部份代表多少，而只有高分組的個案能夠清楚的瞭解。所以，低分組和中分組對於分數之部分整體關係非常缺乏。

2. 當總數已知，則分成兩個部分的部分分數三位個案都較清楚，不夠僅限於同一計數單位的分數。但當總數未知必須靠推算時，則無法形成正確的分數的部分整體關係，此和紙筆測驗的結果是一致的。

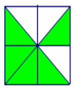
3. 在總數未知情況下，L2 在總數未知而只告知呈現數量對應的分數詞時，必須得靠推算出總數量才有辦法進行同一計數單位階層的部分整體關係。而當不出現分量的數目，直接告知一個分數詞，很快地就可以回答出剩下分數詞。質言之，內容物的呈現與否左右了低分組個案的解題行為，本研究根據研究結果推測，兒童在解分數部分整體關

係問題由易到難分別是：「一個整體分成兩個分量，未出現具體分量」、「一個整體分成兩個分量，出現一個分量及所代表的同一階計數單位的分數詞，可以推算出整體量」、「一個整體分成兩個分量，出現一個分量及所代表的不同階層計數單位的分數詞，但難以推算出整體量(例如內多型式)。

4. 由分數的部分整體關係和前一段分析的分數詞兩者的結果整合來看，決定分數部分整體關係成熟的關鍵可能還是得仰賴分數詞概念的正確建立。然而，分數詞概念的正確建立，需仰賴於兒童能將整數的單位關係做釐清，並進而採取適當的並置。

5. 從發展的角度分析，甯自強(1995，1997a)也曾經指出，兒童大約在三年級下學期開始擁有整數的部分整體運思，但卻未能將它運用於分數情境。從前述「整數的部分整體關係」和本小節「分數的部分整體關係」兩相比較，發現四年級下學期的這 9 位個案，不論程度屬於低中高，對於整數的部分整體關係掌握得相當好，已達到可以進行抽象運式的階段。然而，分數的部分整關係即使在教學實驗之後仍有數位個案仍無法建立，可見分數的部分整體運思在四年級下學期時可能對少數學生仍有困難。

三、 等值分數概念的發展

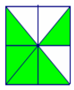
個案所持有等值分數概念的發展探究有兩個主要指標性的資料來源：其一，以紙筆前測與延宕測驗「分數問題甲」之第 12 題中三個子    題做為資料蒐集的依據。題目呈現出三個圖，要求寫出陰影部分相對的分數。其二，是第 15 題紙筆實作評量問題，在單位量相等的情境要求說明「$\frac{2}{3}$包」和「$\frac{6}{9}$包」哪一個多，以其答題反應判斷其等值分數概念。除此之外，另一個次要來源則來自訪談時案個能否確認具相同數量的二個分數詞是否一樣為準，然而此項訪談乃視個案回答問題的脈絡為之，若無法達成內多型問題者便不予以訪談此部分。

(一)教學前等值分數概念的發展

1.不具等值數概念的低分組和中分組

在第 12 題三個子題的答題上，中低分組六位個案對於第一個長條形  的陰影部分均認為是$\frac{(2)}{8}$，亦即只注意到陰影的部份有兩個區塊，而未考慮分母已被限定為 8。在第二個圖  陰影部分佔整個圖形的多少的回答方面，L1 及 M1

均答$\frac{3}{(3)}$；L2、L3 及 M2 均答$\frac{3}{(1)}$，可能的想法是：L1 只注意整體被明顯的分成三等份，而 L2 和 L3 則注意到陰影是三等份中的其中一等份。較特別的是 M3 答$\frac{3}{(4)}$，其想可能是採取分子和分母單純的並置而來。在第三個圖



陰影部分佔整個圖形的多少的回答方面，L1、L3、M2 和 M3 均答$\frac{(5)}{24}$；L2 則答$\frac{(8)}{24}$；M1 則答$\frac{24}{(24)}$。可能的想法是：L1 和 L3 只數陰影的份數，L2 則數了全部的份數，但均未考慮分母為 24。

關於第 15 題紙筆實作評量的答題，L2、L3 和 M1 都認為「$\frac{6}{9}$比較大」其原因是「因為分子比較大」；相較之下，L1 亦認為$\frac{6}{9}$大，不過是利用分子乘以分母得到積的大小做為判斷。M2 則空白未答。至於 M3，會處理「$\frac{2}{3}$是 12 塊」，但在處理「$\frac{6}{9}$」時卻只以每份是兩塊而認為$\frac{6}{9}$只代表 2 塊，所以$\frac{2}{3}$大。由此可見，六位中低分組個案都並未具備等值分數的概念。

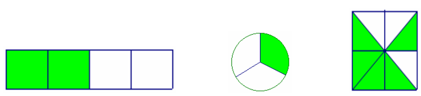
2.部分具等值概念的高分組

在第 12 題三個子題的答題,H1 和 H3 對於第一個長條形的陰影部分可以正確的答出是 $\frac{(4)}{8}$;H2 則答 $\frac{(2)}{8}$,未注意到分母為 8。

在第二個圖的回答,H1 答 $\frac{3}{(2)}$、H2 回答 $\frac{3}{(1)}$、H3 答 $\frac{3}{(12)}$,可見只有 H3 注意到陰影部份已被再分成三等份,不過卻無法算出整體單位量。第三個圖,H1 則答 $\frac{(3)}{24}$、H2 答 $\frac{(5)}{24}$、H3 空白未答,可見三位個案在複雜的圖形下仍無法具有等值概念。

第 15 題的答題,H1 和 H2 均算出兩人都是吃了十二顆(剩下六顆),所以一樣多。H3 則答錯,認為一人是 6 顆,另一人為 12 顆。

(二)教學後等值分數概念的發展

從個案對第 12 題 3 個子題  作答的結果可以發現,低分組三位個案和前測類似全部都答錯,顯示完全沒有等值的概念。中分組裡的 M3 則比前測進步,可以答對第一和第二個圖,但仍無法回答較為複雜的第三個圖。高分組的三位個案,其中的 H1 和 H3 可以全部答對三個圖已比前測進步很多。

此外,從個案對第 15 題作答的結果亦可發現,L2、M3、H1、

H2、H3 均可以正確的指出兩者具有相同的數量，比前測只有 H1 和 H2 可以答對的情況還要改善許多。以 L2 為例，分別畫出兩個分數所代表的數量，然後說明它們數量是一樣多。

另外，在訪談時當研究者問到「一包花片有 20 顆，布外面放 5 顆，這 5 顆可以稱作幾包花片？」之類的問題時，H1、H3 及 M3 三人可以回答出「四分之一包」，並且說明把 5 顆做一份。以 H3 為例，就利用除法先把總份數先算出，再做並置說出分數詞(H3B004)。

H3B003　R：外面這五顆也可以說它是多少包花片？
H3B004　H3：四分之一包。
H3B005　R：爲什麼叫做四分之一包？
H3B006　H3：因爲它有二十顆花片，其中五顆放在外面，二十除以五等於四。
H3B007　R：那個四除出來是什麼？
H3B008　H3：裡面有三份，外面有一份。所以是四分之一。

(三)教學前後等值分數概念發展的比較與討論

1.由上述三組的資料分析可知，低分組和中分組的答題型態相當一致，也都未具備等值概念。至於高分組個案，在圖形簡單及離散物件具體呈現的情況下有兩人答對，但他們都屬於訴諸內容物，換言之是看到「數量相等」，是具備等值分數概念初步特徵。甯自強(1997b)提到等值分數的比較可以有兩條途徑，一是透過分數值所指的內容物，二是透過分子和分母的比值。顯然，本研究兩位高分組學生在解紙筆測驗第 15 題，將兩個分數所代表的都是 12 顆算

出，而導致解題成功，便是經由第一種途徑獲知兩個分數一樣大。

2. 若將兩個題目做綜合性的分析，第 15 題算是具備等值概念的先備條件，因為能夠知道$\frac{2}{3}$包和$\frac{6}{9}$包代表的數量一樣多，不見得瞭解$\frac{2}{3}$和$\frac{6}{9}$是等值，所以還須參酌第 12 題的答題反應，所以大概只有 H1、H3 及 M3 三人有較強的證據說明其具有較清楚的等值概念。

3. 在等值分數的發展上，雖然在前節量化結果的分析顯示進步和控制組之間未達顯著差異。可是，從本節質性的探討卻發現個案接受實驗教學後的表現比教學前確實有所進步，只是進步得相當有限。這和 Behr 等人(1984)發現雖歷經不同的表徵學習等值分數，但學生對於兩個分數是否等值仍有許多迷思概念潛藏其中的結果是一致的。不同的是，Behr 等人認為造成等值分數概念不佳的原因是受到整數思考的影響，然而本研究則推測和其能否在內多情境形成適當的分數詞有關。易言之，學生尚未達到「巢狀分數階段」，教授等值分數並不容易。甯自強(1997b)也指出，兒童要瞭解等值分數必須要有整數的「測量數概念」。不過，從訪談中仍可以發現中分組和高分組的多位學生已經開始習慣在內多情境下用「幾份中的幾份」思考分數詞。

能以「5顆」當作一個單位，用以測度原單位量，把「20」變為是「4個5顆」，隨後將「5」轉變為「1」、「20」轉變為「4」再加以並置，而非原來在前測時所說的「二十分之五」，這是一種分數概念的質變。這也顯出教學實驗後對等值分數前置概念已逐漸建立。

3. 從題目分析，第12題之子題A和C均屬於已呈現分母，且分母是等分割數的倍數。B則屬於已呈現分子，未呈現分母，但分母為等分割數的倍數。從答對的狀況分析，A和B答對雖然比C只有多一人，但也透露出倍數關係越小時較容易掌握的訊息。過去文獻如Behr等人(1983)曾指出「單位等分段等於分母」的題目對兒童最簡單，其次分別是「分母的因數」、「分母的倍數」，最難的是「等分段數和分母無關」。本研究測驗題目之A和C屬於Behr等人(1983)所言的第三層次，唯過去文獻較缺乏系統討論「分子已知、分母未知」的情況。但就本研究結果發現，如果倍數關係不大，分母即使未知，答對的比率並不會受到太大的影響。

4. 離散量比連續量表現佳：就布題的情境分析，在第15題及訪談時都是採用離散量布題，相對的比第12題連續量的答對情形佳。此結果符合甯自強(1997b)所聲稱「教等值分數宜由單位分數內容為複數個物離散量入手」的觀點。

6. 從某些個案，針對「$\frac{2}{3}$和$\frac{6}{9}$」兩個分數的大小以分子做判斷的迷思現象和吳相儒(2001) 、陳和貴(2002)和 Behr 等人(1984)所發現的頗為一致，即兒童會「根據分子的大小來比較」，分子比較大的其所代表的值就越大，反之就越小。

第四節　實驗組個案分數基模之分析比較

本節共分成三小節，分別描繪三組個案在教學實驗前和教學實驗後在「等分割」、「迭代」及「遞迴分割」等三種基模的發展情形，以瞭解分數多元表徵課程教學實驗對分數基模發展的影響。

首先，為瞭解整個教學前後 9 位個案的分數基模發展的整體型態，將個案在教學前及教學後，解答訪談與分數基模有關問題，成功與失敗的情形整理繪製如表 4-15 所示。其次，再依序加以進一步說明，最後再進行分析討論。

表 4-15　教學前、後個案基模發展比較表

	教學實驗前		教學實驗後	
	成功	失敗	成功	失敗
等分割基模(連續量)	M1、M3、H1、H3、	L1、L2、L3、M2、H2	L1、L3、M1、、M2、M3、H1、H2、H3	L2
等分割基模(離散量)	M1、M2、H1、H2、H3	L1、L2、L3	M1、M2、H1、H2、H3	L3
等分割後之並置基模(2 階)	M1、M3、H1、H2、H3	L1、L2、L3、M2、	L2、M2、M3、H1、H2、H3	L3
等分割基模的再精緻化			M1、H1、H3	L1、L2、L3、M2、M3、H2
分數迭代基模(內單)	L2、M1、H1、H3	L1、L3、M2、M3、H2	L1、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	L2
分數迭代基模(內多：問題甲7、訪談)	H2、H3	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1	L1、L3、M1、M2(紙)、M3、H1、H2、H3	L2、L3(紙)、M2、
非單位分量做新分量			L1、M1、M2、H2	L2、M2
遞迴分割基模(圖具體呈現)	L3、M1、M3、H1、H2、H3	L1、L2、M2	L3、M1、M3、H1、H2、H3	L1、L2、M2
遞迴分割基模(四人分二分之一)			H1、M3	L1、L2、L3、M1、M2、H2、H3
遞迴分割基模(七人分三段)		L1、L2、L3、M1、M2、M3、H1、H2、H3	H1	L1、L2、L3、M1、M2、M3、H2、H3

註：斜線部分代表前測未探討。

壹、等分割基模(the equi-partition scheme)

本研究在訪談部分係利用線段及積木分別表示連續量及離散量情境下的分割問題情境。在後測的訪談和前測相同，由研究者提供一條 12 公分的線段，請 9 位個案將它平分給三人。離散量部分則直接要求個案出指定的分數詞所代表的數量，但在教學實驗後的訪談逕以內多型分數做數進行探究分數詞，此部分已於前節說明，本節不再贅述。

然而，為了探究個案等分割是否能夠進一步調適以讓基模更

精進，後測還針對部分個案加了兩類的題目。第一類，例如提供一條 12 公分的線段，告知它代表「三分之四條」請個案做出「一條」；第二類，例如提供 16 顆積木，告知它代表「三分之四包」請個案做出「一包」。個案若要能正確的解決前述兩種類型的題目首先把需將給予的數量根據分子的份數進行等分割，這和先前的經驗利用分母的數量進行等分割再做數有很大的不同，是以先前的基模無法直接應用在此情境之中，必須得將原有等分割的基模做提昇之後才可能解決此兩類問題。

一、教學前等分割基模的發展

(一)連續量情境

1.以直觀分割為主的低分組

由晤談反應得知，L1 利用視覺即將線段分為三段(L1A082)，且確信此種分法是公平的。顯然，對於「等分」的條件認定較為寬鬆，認為只要「數目」相同，「量」不必相等也可以視為「等分」。

L2 雖然有「分」的初步概念，知道一條繩子要分給三個人，但是對於如何做到「平分」卻無法完成(L2A100)，且認為「平分以後」會有剩下(L2A106)。所以，對於「耗盡」的原則隱約知道，但卻無法做到。

L3 則和 L1 的情況類似(L3A080)，皆以直觀方式進行平分，但是最大的差別是 L3 認為分完之後每人可以得到二分之一條

(L3A086)。其所謂的二分之一，根據手指的內容是指線段的上下被分成兩分(L3A082)。由此可知 L3 在稱呼線段所表徵的分數時有所困難，將「線」做為切割上下兩部分的依據，把平面分為上下各一半。而這兩個「一半」似乎合於先前「二分之一」的基模，遂以此稱之。

個案 L1

L1A079　R：我現在畫的是一條巧克力棒(12 公分的線段)，要把它平分給三個人，你會怎麼分？

……………………………………

L1A082　L1：(在未使用尺的情況下，用綠色筆將它畫上兩個記號)

個案 L2

L2A099　R：如果要把這一條繩子分剪給這三位小朋友，你會怎麼分？

L2A100　L2：可是會有剩。剪的時候會有剩。

…………………………………………………

L2A106　L2：平分就是說，要把這條繩子分給這三位小朋友。..這個我不會。

個案 L3

L3A079　R：我有一條繩子在這邊(畫下 12 公分的線)，每一個花片代表一位小朋友(共三位)，想請你分分看怎麼平分給這三位小朋友，你會怎麼做？你可以畫畫看。

L3A080　L3：(未使用旁邊的直尺，直接用筆畫下兩個記號)

L3A081　R：這個小朋友會得到哪裡？

L3A082　L3：(指第一段線的上下兩部分)

……………………………………

L3A086　L3：二分之一條。

2.利用工具做等分的中分組

中分組的三個個案在進行一條繩子平分給三個人時，均主動

表示必須運用尺量量看，均能把一條 12 公分長的線平分成三段。唯，M2 認為一條繩子要剪「三下」(M2A136)才能夠進行三等分，是對於切割數的迷思。

M2A131 R：全部有三段，可以得到四段。這個小朋友可以得到多少段？
M2A132 M2：四段。
M2A133 R：第二個小朋友可以得到多少段？
M2A134 M2：四段。
M2A135 R：如果你用剪刀要剪幾下？
M2A136 M2：三下。

3.利用工具迅速等分的高分組

高分組在進行「一條繩子平分給三個人」時，H1 和 H3 都迅速地拿尺進行精確的等分。唯，H2 雖然也用尺量，但是卻出現第一段和第二段都畫 3.5、第三段 3 公分，並留下一段 2 公分(H2A048)。顯見，對於線段的等分基模無法有效建立。

H2A045 R：這一條繩子要分給三位小朋友你會怎麼分？
H2A046 H2：把這一條繩子切三份。
H2A047 R：你會怎麼做？做做看。
H2A048 H2：(用尺量 3.5 公分做第一個記號、第二個 3.5 公分再做一記號、再隔 3 公分再做一記號，末端留下 2 公分)。

(二)離散量情境

離散量的等分割有單位分數內容物是單一個物及多個個物兩種情形。內單型的分數，分母即整體量的數目，分子即被指示量的數目，一般而言對兒童較為簡單。內多型的分數由於涉及到到三階單位的集聚，所以兒童普遍感到較難。

1. 等分正確但並置不正確的低分組

三位個案對於將具體的離散物進行不管是包含除(L1A134；L2A114)；或是等分除(L1A110；L2A126)的平分活動都能成功解題，亦均瞭解在整數時兩種不同的單位。但是在將等分的結果轉換單位利用分數呈現時則顯露出若干迷思。其餘，在正確等分之後卻運用了錯誤的單位並置關係，以致於無法形成正確的分數概念部分已如前節所述。

個案 L1

L1A109　R：如果這是一包糖果(18 顆)，要平分給六位小朋友(用六個花片代表六人)，你會怎麼分？

………………………………

L1A114　L1：不是，不是，是三顆。

…………………………………

L1A133　R：好。現在要把這一包糖果，每六顆放做一盤，你會怎麼分？

…………………………………

L1A138　L1：四盤。

L1A139　R：用盤做爲單位，這一盤是佔全部的多少？

L1A140　L1：六分之一盤。

個案 L2

L2A113　R：另外一個問題。如果我有一包白色巧克力(24 顆積木)，想要六顆放做一盤，可以放多少盤？你可以做做看嗎？

L2A114　L2：(數六顆，把它放做一堆，共做了四堆)四盤。

…………………………

L2A117　R：我原來說它是一包，那麼這個部分(手指 L2 所分出來一盤的積木)，我可以說它是多少包？

L2A118　L2：四分之六包。

個案 L3

L2A123　R：再換一個題目，同樣是這一包巧克力想要平分給六位小朋友，你會怎麼做？

L2A124　L2：(一顆一顆的分)

L2A125　R：每一個小朋友得到的是多少顆？

L2A126 L2：四顆。
L3A127 R：如果全部是四盤，這一盤佔全部的多少？
L3A128 L3：四分之六。

2.等分正確但部分並置有誤的中分組

中分組三位個案，M1 可以將二十四顆巧克力平分給六人後每人得到四顆，即得到二十四分之四包(M1A149)；M2 亦能做上述的等分，唯對他而言每一個人得到四顆，是得到「一分之四」(正確答案應為「六分之一」)，四是指「四份」、一是指「一個人」，隨後又利用符號記成「$\frac{4}{1}$」(M2A188)。M3 則可以把一包巧克力 24 顆，6 顆分做一盤後，正確的說出每一盤是「四分之一包」(M3A130)。

個案 M1

M1A143 R：好，再來的題目是這樣子的。我這裡是從一包巧克力拿出來的，這是一包巧克力，請妳把它分給六位小朋友，妳會怎麼分？
M1A144 M1：(一顆一顆分)每人都分到四顆。
M1A145 R：每人都分到四顆？
M1A146 M1：嗯。
M1A147 R：那每一個人得到多少包？
M1A148 M1：多少包，我看一下，得到二十四分之四包。
M1A149 R：二十四分之四包，妳怎麼知道的？

個案 M2

M2A182 M2：因爲一個人可以得到四分的其中一份，咦，一個人可以分到四份啦，..一就是一個人，四就是四份。
M2A183 R：所以你認爲四分之一就是「四份」、「一個人」，那個一是指一個人。如果讓你寫成數學符號，你會怎麼寫？
M2A184 M2：數學符號喔？

M2A185　R：分數的符號啊。你會怎麼寫？
M2A186 M2：應該是一分之四吧(寫完後再唸出)。
M2A187　R：是四分之一，還是一分之四？
M2A188 M2：一分之四(寫下$\frac{4}{1}$)。

個案 M3

M3A121　R：這裡有 24 顆巧克力，想要把它 6 顆分作一盤，那你會怎麼做？
M3A122 M3：(排 4 顆一份)
M3A123　R：那這一盤是佔全部的多少包？
M3A124 M3：……排錯了。
M3A125　R：哦，排錯了，要 6 顆一盤。
M3A126 M3：(排 6 顆一份)
M3A127　R：好，那這一盤是多少包？
M3A128 M3：四分之一。

3.具內多等分基模的高分組

三位高分組個案對於離散量不管是包含除或等分除的等分都能夠順利做正確的等分。例如要求 H1 從一包積木(16 顆)拿出「四分之三包」時可以正確的將 16 顆先四等分(每堆 4 顆)，再移出其中的 三堆(12 顆)(H1A226)。

H1A217　R：怎麼寫？把它寫下來。好，很好。接下來，這個是一包積木(16 顆)，老師想請你拿出四分之三包積木，你會怎麼做？
H1A218 H1：四分之三包？
H1A219　R：四分之三包。好，你爲什麼會這麼做？
H1A220 H1：因爲四乘以四等於十六。
H1A221　R：四乘以四等於十六，然後呢？
H1A222 H1：然後它是四分之三包。
H1A223　R：四分之三包在哪裡呢？
H1A224 H1：在這裡。
H1A225　R：哦，這邊叫做四分之三包。四分之三包有多少個積木？
H1A226 H1：十二個。

二、教學後等分割基模的發展

由於 9 位個案在教學後所呈現的等分割基模發展，同質性大於異質性，所以此部分只採用「連續量情境」和「離散量情境」，而不再如教學實驗前一樣，區分「低分組」、「中分組」及「高分組」分別論述。

(一)連續量情境

結果發現除了 L2 認為要每四公分切一刀，共需切三刀(L2B223)，混淆切割數及切割份數外，其他的八位個案都能利用工具(尺)進行精確的三等分割，而且說出每一段所代表正確的分數詞(三分之一條)。

L2B222 R：一條繩子要分給三個人，要切幾刀？
L2B223 L2：三。
L2B224 R：哪三刀用手指指看。
L2B225 L2：(手指線中間的兩個記號)。
L2B226 R：左邊第一段繩子，也可以說是多少條繩子？
L2B227 L2：四分之一。

(二)離散量情境

教學實驗後的訪談和前測訪談以提供若干積木，要求個案做出給定分數詞所代表的數量，從其中一方面可以看到對於「分數詞」概念的掌握(前一節已討論)，另方面也可以從其中看到個案如何進行離散量內多型問題的等分割。

從個案做數的過程可以發現，原來在前測無法進行內容物多個且做適當並置的 L2、M2，在後測的做數已可以正確的將總數進行等分割找出一份，然後再拿出適當的份數。以 M2 為例，

可以從一包積木 18 顆裡面先兩顆、兩顆分一堆，共放了六堆，然後把剩下的再分到六堆裡面，最後拿五堆出來(M2B168)。從其解題的過程可以發現，M2 有一個預期基模，先約做每堆可能的數量，所以先兩顆、兩顆的放，最後再分一次一顆的積木以達到「平分」。

M2B165　**R**：數數看這裡有多少顆？
M2B166　**M2**：六、九、十二、十八，剛好我的座號。
M2B167　**R**：請你拿出六分之五包。
M2B168　**M2**：(把二顆、二顆放一堆，放了六堆之後每堆再加一顆，再拿五堆到前面)。
M2B169　**R**：你把每堆放三顆，總共有六堆，拿了五堆，這個叫六分之五？
M2B170　**M2**：嗯(點頭)。

(三)教學後等分割基模的再精緻化

等分割的再精緻化的探討係利用「這是代表 $\frac{4}{3}$ 條蛋糕，請你做出一條蛋糕。」的問題要求個案解題。從 9 位個案的反應得知，只有 M1、H1 及 H3 等 3 人可以正確解題，顯示他們能夠把一個比單位量多的數量做等分割，再重新合成找到原有單位量。以 H1 為例，可以把給定的量分做四等份再重新拿出三等份(H1B136)。在此顯示，三位個案比其他個案之等分割基模的功能較為擴展且更為精緻。

H1B127　**R**：所以妳是用六分之三、六分之三算的，好。如果從這裡到這裡(指 12 公分的線段)，我知道它叫做三分之四條積木，或者是蜂蜜蛋糕，那妳曉不曉得一條長怎樣？
H1B128　**H1**：(用尺量完後平分成三段做三個記號，再往右延伸一段)
H1B129　**R**：一條積木在哪裡？

H1B130 H1：(手指全部)
H1B131 R：從哪裡到哪裡？
H1B132 H1：(指端點到末端)
H1B133 R：爲什麼這個是一條積木？
H1B134 H1：因爲這裡是四分之三……
H1B135 R：哦，不是，我講的是三分之四條……
H1B136 H1：(擦掉原有的，用尺量完後平分成四段，做三個記號)
H1B137 R：一條在哪裡？
H1B138 H1：這裡到這裡(手指第一段到第三段)。
H1B139 R：這裡到這裡，爲什麼妳知道這裡是一條積木？
H1B140 H1：因爲這裡是三分之四條，這邊就是一條。

三、教學前後等分割基模發展之比較與討論

（一） 等分割基模係指對一個單位量進行等分的動作或運思，其

在耗盡及公平的基礎上確認每一個分割量的內容是相等的。

(二) 教學前後等分割基模的變化

1.教學實驗前：

三位低分組個案所呈現出兩種不同的等分問題，有兩位對於等分割概念中的「公平」原則未能清楚掌握，另一位則是對於「耗盡」原則隱約瞭解。在離散量，M1 的等分概念較清楚，M2 則會將子分割的對象任意更動，所以後者並未具備良好之等分割基模。至於，M3 不但等分概念清楚，而且將等分結果做適當的並置。

2. 教學實驗後：

與前測相較，9 位個案對於等分割所應包含的「公平」

及「耗盡」的概念均能夠掌握清楚，所以有相當大的進步。離散量的等分割表現也比教學前進步。更難得的是，有三位個案可以將一個比單位量大的分量做等分割，再合成單位量，顯示有比其他個案之等分割基模的功能較為擴展且更為精緻。此結果和 Tzur (1995)發現在等分割基模的基礎上，兒童可將整體同時分解(decomposition)及重組(recomposition)的研究結果是一致的。整體而言，九個案在教學後等分割基模的表現確實有比前測進步的跡象。

（三） 等分割基模和能力有關，卻非絕對。

從不同能力組別的等分割基模發展分析，連續量方面，低分組利用直觀進行等分割；高分組雖然有兩人可以很迅速的利用工具做精確的等分割，卻也有一人所等分的既未「公平」也未「耗盡」；相較之下，中分組的個案雖然等分的動作較慢，但卻表現得最好。因此，等分割基模的成熟和能力組別似乎有關聯，但卻也不是絕對的關係。但是如果是在離散量問題加入「內單」和「內多」不同情境，則，低分組和中分組的等分基模相似，都只會做第一階計數單位內的等分割，即能解內單型的問題；只有高分組能夠在內多的情境下擁有正確的等分割基模。

(四)從等分割的方式分析，低分組的進步相當明顯，在教學實驗前低分組傾向只用直觀分出大約的量，此和劉

世能(2003)的研究結果一致。而且沒有窮盡被分割物，或是混淆切割數和等分數，此現象即 Piaget 等人(1960)提出等分割發展在第一階段可能犯下的錯誤。經過教學之後，學生都能使用工具做精細的分割，且把被分割物分盡，並能說出正確的分數詞，確實是有所進步。

(五)從進行等分割的策略分析，本研究個案所呈現的方式和李曉莉(1998)的研究結果一致。在離散量情境，低分組傾向於發牌策略(dealing)，中高分組則傾向於先發放再遞增。而在連續量的情境下，特別是教學後訪談因為有度量工具的協助所以大都是以全部的量除以欲分的份數，即利用算則計算。

貳、分數迭代基模

分數迭代基模是指兒童能以給定的分數(量)形成單位，再透過複製而得到指定分數(量)，能夠進行迭代表示該給定的分數(量)是內嵌於整體之中，且可以脫嵌存在。此基模的產生，也是讓兒童掌握由「 部分」推衍至「整體」的重要關鍵，也是未來學習分數除法的先備條件。本研究在探討此部分時，係以一段線段及一些花片分別代表連續量及離散量中的某一分量，接著請個案以此做為基礎，做出或算出給定的新分量。

一、教學前分數迭代基模的發展

(一)內單情境下的分數迭代基模

本研究以「一條積木鋸下某一段，可以稱為 1/m，要求做出 n/m」的問題探離散量的情境下的分數迭代基模。

1.易受分數符號影響的低分組

從訪談得知，低分組的 L2 可具備了由單位分數累積成其他分數迭代基模。L3 則受到分數詞概念的影響無法具備良好的分數迭代基模。

由 L2 的反應可以得知，其分數迭代基模發展得相當良好，可以從給定的五分之一做出其他的分數(L2A144；L2A146)，甚至能利用迭代累積的方式做出假分數(五分之七條)(L2A152)。但對於「五分之五條」和「一條」卻沒有具備適當之連絡，會做出前者卻不會做出後者。這現象歸因於分數詞概念間的連繫而非分數迭代基模的發展。

當同樣的條件給予 L3 時，他無法用給予的一段積木複製累積成四段，以做成「五分之四條」(L3A144)，亦即顯示其未具備分數迭代基模並未能將給定的分量視為一個可以運作的單位。究其原因是因為分數對他而言純粹是一階單位的並置關係，所以才會將「四段」和「五段」積木一起並置當做是五分之四條，而非將原有的一段(五分之一條)重複再做三次生成「四個五分之一條」。從所表徵的形式來看(L3A144；L3A152)，顯然受到數學符

號「$\frac{4}{5}$」及「$\frac{2}{5}$」的影響，在此也顯示「操作」和「書寫符號」兩種表徵的微妙關係。

個案 L2

L2A139 R：好。再一個問題，我有一條長的積木，把它鋸成像這樣一顆一顆，現在知道這一顆積木叫做五分之一條積木，你會不會做五分之二條、五分之四條積木？

……………………………

L2A144 L2：(拿了第二顆積木放在原來一顆的下面)。

L2A145 R：五分之四條積木，你會不會？

L2A146 L2：(拿了二顆積木放在原來那二顆的旁邊，並把它們接成一排)。

…………………………………………

L2A149 R：如果是一條，你會怎麼做？

L2A150 L2：不知道。

…………………………………………

L2A155 R：五分之五條你會不會？怎麼做？

L2A156 L2：(把原來七個積木拿掉二個，剩下五個)。

個案 L3

L3A143 R：有一條積木，我把它鋸下來，你現在看到的這一個叫做五分之一條的積木(指一顆積木)，你有沒有辦法做出五分之四條？五分之四條會長成怎麼樣？

L3A144 L3：(五顆排成一排，下面以四顆排成一排。)

……………………………………

L3A151 R：你會不會做五分之二？

L3A152 L3：(把右邊的四顆再分離成兩顆、兩顆)。

2.成敗參半的中分組

M1 在給定五分之一條的數量後，可以正確的複製出五分之二、五分之四及五分之八(M1A186)。M2 則認為五分之二就是有兩排五個積木連在一起(M2A226)、五分之四就是有四排五個積木

(M2A236)。M3 則是在提供「十二分之一盤」(1 顆)的情況下，無法正確做出「十二分之四盤」(M3A209)。由訪談得知，M2 受到分數詞概念的影響，未能具備有正確的分數迭代基模，而 M1 則可以具備分數迭代基模。

個案 M1

M1A175 R：好，再來，我有一條積木，然後鋸一鋸之後，就只剩下這麼一顆了，然後我要請妳把它做出……對不起，這一顆叫做五分之一條積木，然後我要請妳做出五分之二條積木，妳會不會做？
M1A176 M1：好。(再拿一顆出來)這樣子。
M1A177 R：這樣子叫做？
M1A178 M1：五分之二條。
M1A179 R：五分之二條積木？好。五分之四條呢？
M1A180 M1：(再拿兩顆積木出來)這樣。
M1A181 R：要不要把它接在一起？
M1A182 M1：好。(把所有的積木接在一起)
M1A183 R：好，五分之四條積木。那五分之八條積木呢？
M1A184 M1：(再拿出四顆接在原來的旁邊)好了，就這樣。
M1A185 R：好，很好，那妳排了幾個？
M1A186 M1：我排了 8 個。
M1A187 R：剛剛五分之四條妳排了幾個？
M1A188 M1：四個。

個案 M2

M2A225 R：這裡有一條一積木，是你沒有看到的，把它剧一段下來，這一個白色積木是五分之一條積木，你會不會做出五分之二條、五分之四條、五分之五條。
M2A226 M2：五分之一條….好了(上下分別排出五個積木連在一塊)。
M2A227 R：哪裡是五分之二指一下。
M2A228 M2：這裡(用食指和姆指指上下兩排由五顆構成的積木)。
M2A229 R：爲什麼你會認爲這是五分之二條積木？
M2A230 M2：因爲一份應該有五顆。
M2A231 R：一份有五顆。
M2A232 M2：的其中的一份。

M2A233　R：的其中的什麼？
M2A234 M2：二份。
M2A235　R：那麼五分之四條呢？
M2A236 M2(在剛剛的上下兩排，又再加上兩排同樣也是由五個積木連成一排)
M2A237　R：好，說明一下。
M2A238 M2：五分之四條，一份應該有五顆，所以要四排。

個案 M3

M3A208　R：不知道，好，沒關係。如果這個(一顆)叫做十二分之一盤，你會不會做十二分之四盤？
M3A209 M3：(未答)
M3A210　R：怎麼做？
M3A211 M3：(未答)

3.大部分成功的高分組

高分組的H1和H3都能就給定的一線段(代表單位分數的量)做出給定的分數，只有 H2 無法做出(H2A058)。

H2A053　R：另外一個問題。有一條繩子從這裡延伸到這邊，有多長我不知道，可是我知道這是平分給六位小朋友之後，其中一位小朋友得到的。你會不會把那一條原來的繩子畫出來？
H2A054 H2：應該是可以啊！
H2A055　R：你會怎麼做？
H2A056 H2：(停頓約二分鐘)。
H2A057　R：想到了嗎？
H2A058 H2：還是沒有。

(二)內多情境下的分數迭代基模

本研究在紙筆測驗前測部分係以能否答對「分數問題甲卷」第 7 題為判斷依據，該題提供 4 顆串珠做為七分之二條，要求其畫出七分之七條。

1.未具分數迭代基模的低分組和中分組

低分組 L1 空白未答；L2 則將原有的串珠各切一半；L3 則加畫了四顆串珠，由此可知三位均未具備離散量內多情境下的分數迭代基模。

中分組的 M1 多加了三顆、M3 未答、M2 則多畫了六串，每串四顆。由此可知，M1 的想法是把每一顆視為「$\frac{1}{7}$」、M2 是把每一串視為「$\frac{1}{7}$」故均未具單位分數內容物為多個的分數迭代基模。

2.大部分答對的高分組

三位高分組，H2 和 H3 都能正確的再畫出十顆串珠，只有 H1 加上三顆串珠。顯示，H2 和 H3 能從給定的數量找到正確的單位分數，然後再進行迭代，最後找到$\frac{7}{7}$所對應的數量。

二、教學後的分數迭代基模的發展

分數迭代基模的後測有三種類型的題目，第一類給予內單型態的單位分量，要求做出單位量或其他非單位分量；第二類給予內多型態的單位分量要求做出單位量；第三類給予非單位分量要求做出其他分量。上述的第一類和第二類的題目和教學前的訪談問題相類似，第三類的題目則在進一步探求是否個案能夠將任何一個非單位分量的分數視為集聚單位以迭代出新的分量。故，以下針對此三種類型加以探討實驗教學後個案分數迭代基模的變

化。

(一)內單(連續量型)單位分量迭代單位量

在此部份的討論，將已度量化的連續量(例如一段 3 公分的線)視為內單型問題。從個案訪談的結果可發現 9 位個案中有八位個案可以成功解題，只有 L2 解題失敗。就三組個案的整體表現與其前測相較，接受實驗後比教學實驗之前有很大的進步。成功解題者，例如 L3 可以利用給定的五分之一條繩子，做出一條繩子(L3B112)。解題失敗的 L2 則是將代表四分之一的 3 公分線段加上一公分，認為它就是四分之四也就是一條(L2B241)，顯然是混淆份數與內容物。

個案 L3

L3B111 R：有一條繩子有多長我不知道，只知道剪掉後你看到的這一段(三公分)叫做五分之一條繩子，請問那條繩子原來有多長，你能不能做做看？
L3B112 L3：(以尺延伸四段，每段三公分，並在段與段之間做記號。)

個案 L2

L2B238 R：有一條繩子有多長不知道，知道剪斷後剩下這裡(3 公分)可以稱為四分之一條繩子，你會不會畫出一條繩子？
L2B239 L2：(向右延伸一公分)好了。
L2B240 R：你畫了什麼？
L2B241 L2：原本有三公分，我再畫一公分，四分之四就代表一條。

(二)內多單位分量迭代單位量

從個案訪談的結果可發現 9 位個案中有七位可以成功解題，只有 L2 及 M2 解題失敗。就三組個案的整體表現與其前測相

較，接受實驗後比教學實驗之前有明顯的進步。成功解題者，例如 M1 可以利用被稱為「五分之四條積木」的 12 顆積木，先找出五分之一是三顆積木後再多排一排(3 顆)以做出一條積木(M1B224)。解題失敗的 L2 則是將代表五分之二條的 4 顆積木再加進 3 顆，認為它就是五分之五條也就是一條(L2B322)，顯然是混淆份數與內容物。

個案 M1

M1B221　R：好，很好，再來。這裡(12 顆積木排成一排)是從一條積木把它鋸下來。我知道這裡叫做五分之四條積木。
M1B222　M1：五分之四條。
M1B223　R：那妳知不知道一條是長得怎樣？可以幫我排排看嗎？這是五分之四條，那一條積木長成怎樣？
M1B224　M1：(先把 12 顆分做四排，每排三顆，然後再從研究者的準備的其他積木拿 3 顆加進去)這樣。
M1B225　R：哦，妳多了一排進去，所以這叫做五分之……
M1B226　M1：五分之五條。

個案 L2

L2B315　R：這裡是四顆積木，是從一條積木鋸下來的，知道它也可以叫做五分之二條積木….
……………………
L2B320　L2：因爲這是五分之二嘛，再拿出五分之二，就等於四。
L2B321　R：你會不會拿出一條積木？
L2B322　L2：再拿出三顆。(指原來的五分之二條外再拿三顆)
L2B323　R：爲什麼？
L2B324　L2：因爲我覺得五分之五是一條，所以再拿三顆。

然而，除了上述訪談的內容之外，從 9 位個案對於延宕紙筆測驗第 7 題的回答也發現了某些和訪談不一樣的現象。除了 L1

是整頁未作答不予討論外，L3 無法由$\frac{2}{7}$條串珠做出$\frac{7}{7}$，卻可以答對訪談的題目；而 M2 的表現則剛好相反，答對訪談卻做錯紙筆測驗。造成此現象可能的原因是紙筆測驗是半具體物呈現，相較於訪談時用具體可操作的物呈的表徵有所不同，數學程度較低的可以解有具體物件的問題，程度較高一點則對半具體物較熟悉。

(三)非單位分量迭代新分量

從接受此類問題的六位個案訪談的結果可發現有四位可以成功解題，只有 L2 和 M2 在製作假分數時失敗，當要求 L2 製作以一個真分量製作新真分量時是可以成功解題的。成功解題者，例如 H2 可以利用被稱為「八分之二包積木」的 6 顆積木，直接加 6 顆的方式做出「八分之四包」(H2B024)及「八分之六包」(H2B028)，所以「八分之之二」對他而言是一個可以運作的單位。另外，同樣是屬於解題成的 M1，不但可以將給定的非單位分量($\frac{2}{5}$條)，而且可以將該非單位分量還原成單位分量($\frac{1}{5}$條)，繼而透過 2 次迭代再加上單位分量求得原來的基準單位量(M1B162)。進行迭代至於 L2 則是只能利用「五分之二」做出「五分之四」(L2B318)而無法做出「五分之五」(一條)(如前述)。所以 L2 所顯現的是可以把「五分之二」做為一個運作單位，但是由於缺乏把「五分之二」分割成兩個「五分之一」所以無法做出奇數的「5」，只能利用 2 的倍數進行迭代。此外，利用假分數(量)迭代出原來

的基準單位量顯然比由真分數(量)迭代基準單位量困難。例如，M3 在告知該條繩子為三分之四條要求做畫出一條時，表示不知道如何畫(M3B102)。

個案 H2

H2B021 R：好，很好。如果同樣是這六顆，它叫做八分之二包，請問八分之四包應該是多少顆？
H2B022 H2：十二顆。
H2B023 R：你是怎麼知道？怎麼這麼快？
H2B024 H2：因爲六顆就是八分之二包，那另外的八分之二也是六顆，合起來就是八分之四，就六加六等於十二。
H2B025 R：如果八分之六包呢？
H2B026 H2：十八顆。
H2B027 R：怎麼知道？
H2B028 H2：八分之四等於十二顆，再去加六等於十八顆。

個案 M1

M1B162 M1：6 公分……這樣子……五分之……再畫 6 公分……到這兒應該是五分之四……然後再畫 3 公分……(畫)好，五分之五。
M1B163 R：所以我看妳又先做了一個 6 公分的，本來妳量出前面的那一段紅的是 6 公分，那妳又做了一個 6 公分的，所以在上面寫了五分之四，就代表五分之四，從這邊延伸到那邊的，後來又做了一個 3 公分的，3 公分是？
M1B164 M1：是五分之一條。

個案 L2

L2B315 R：這裡是四顆積木，是從一條積木鋸下來的，知道它也可以叫做五分之二條積木，你會不會做出五分之四條積木？
L2B316 L2：這是五分之四(多拿四顆)。
L2B317 R：你又多拿了幾顆？
L2B318 L2：四顆。
L2B319 R：你怎麼知道要拿四顆？
L2B320 L2：因爲這是五分之二嘛，再拿出五分之二，就等於四。

個案 M3

M3B099 R：有一段繩子，我也可以稱它三分之四條繩子，三分之四條，它有沒有比一條多？

M3B100 M3：有。

M3B101 R：好，那這是 2、3 個人的繩子合起來的，那這邊三分之四條繩子是長成這樣，那你會不會畫一條繩子有多長？

M3B102 M3：不知道。

三、教學前後分數迭代基模發展之比較與討論

（一）教學實驗前，從三組個案在連續量的表現來看，低分組的學童大部分沒有分數迭代基模，無法從給定的數量做出要求的數量，而且有的個案有受到數學符號影響的表現。而中分組，狀況雖然比低分組佳，但有一位個案誤解分數詞的意義而無法迭代出正確的分數。高分組的兩位個案均呈現具有良好分數迭代基模的現象，仍有一位在這種物件未全部具體呈現的情況下無法做出迭代的推理。

（二）分數迭代基模的發展在本研究中相當明顯，在教學之前多位個案無法由給定的分量製作出指定分量。然而，在經過教學之後幾乎所有的個案都可以成功的解題。不過，從個案的表現也發現有兩個瓶頸，第一，當要求迭代出假分數時，對假分缺乏概念的學生便無法解題。第二，當迭代的次數並非給定數量的整數倍，需求先將給定數量予以等分割時，等分割基模尚未擴

充功能的個案無法解此類問題。所以，突破此瓶頸尚須加強假分數意義的認識，並提供從假分數找真分數的經驗，培養其逆向運思。

（三）等分割基模和分數迭代基模是學習分數時非常重要的兩個基模。等分割基模的產生來自於「分」，當學童學會分東西之後，遵循「公平」和「耗盡」兩個原則對一個「一單位」的物件進行平分。在累積充分「分」的經驗後，等分割基模才能確立。反觀，分數迭代基模源自於「合」，當學童學會把同類的物件合在一起，並給賦予新物件新的名稱時分數迭代基模才能確立。

(四)從本段結果和上一段有關等分割基模的結果發現，有些學童不見得能做正確的等分割，卻能在告知一個單位分量之後，利用迭代的方式製作出新的分量。由此可以說明在以單位分量合成新分量的解題要求下，等分割和迭代兩個基模可以平行發展而不悖。惟，當所給定的是一個非單位分量(數)，要求作出非整數倍的分量(數)時，分數迭代基模就得仰賴等分割基模的再精緻化才能解題。例如，給予$\frac{2}{7}$包的數量，要求做出$\frac{7}{7}$包。學童便須利用等分割基模將$\frac{2}{7}$包做分割以找到$\frac{1}{7}$

包，然後再將$\frac{2}{7}$做 3 倍迭代再加上$\frac{1}{7}$包，或直接利用$\frac{1}{7}$包直接迭代 7 次，最後合成$\frac{7}{7}$包。上述由非單位分量製作基準單位量的歷程和 Steffe (2004)的研究一致，兒童必須具有如何做出$\frac{2}{7}$包的逆運思之後，才能找到適當的$\frac{1}{7}$包，再做出七次迭代以還原基準單位量--「1 包」。

（五）就本研究結果和 Tzur (1995)的比較，從一個假分數的情境下找到單位分量，然後進行迭代以建構出單位量並非易事，需要將基本的分數迭代基模的功能擴充，兩者的結果可說相當一致。但是，如果題目所給定的是真分數(量)，則大部分的兒童均可以迭代出原單位量，由此亦可知以「部分重構整體」的解題活動，在有具體物的情況下即便是四年級的兒童有能力解決此類問題。所以，研究者認為此部分教材適合放在四年級階段，讓兒童經驗找單位量，以做為未來分數除法的先備經驗。

參、遞迴分割基模 (recursive partition scheme)

本研究在紙筆測驗前測部分係以能否答對「分數問題甲卷」第 14 題為判準。在前測訪談部分則以「七個人平分已經被三等份的一條蛋糕」的問題瞭解學童能否在等分下做等分並給予正確的分數詞，做為是否具備遞迴分割基模的依據。

一、教學前遞迴分割的發展

(一)大部份失敗的低分組

低分組三位個案，在紙筆測驗上 L1 答「0.1 條」、L2 答「$\frac{1}{9}$ 條」，只有 L3 正確寫出「$\frac{1}{18}$」條。在訪談部分，低分組之 L1 和 L3 為例，都無法進行正確的等分及敘說正確的分數詞，兩人均表示沒有辦法再平分(L1A194；L3A188)。比較紙筆和訪談之間的表現，在具體等分好的情況之下 L3 可以答對，但未等分的情境下則無法完成。所以，L3 只具備遞迴分割基模基本條件，實際上尚未發展完成。

個案 L1

L1A191　R：可是現在問題來了，當小朋友都到他家時發現包括他自己總共是七個人想要平分這一段蛋糕，你有沒有辦法幫他做做看？把你想法說出來。

L1A192　L1：(用手在每一段上面做兩次手勢，從第一段點數九次)會多出來。多出兩塊。

L1A193　R：有沒有辦法平分？

L1A194　L1：沒有。

個案 L3

L3A186 L3：(在每一小段再做分一次，並調整原來的標記，
形成每一段分成三小段，共九小段)會有多。
L3A187 R：你認爲分一分會有多，所以不能分給其七位小
朋友嗎？
L3A188 L3：不能。

(二)具初步遞迴分割基模的中分組

中分組三位個案,在紙筆測驗上 M1 和 M3 都能正確寫出「$\frac{1}{18}$」條，只有 M2 寫「$\frac{1}{5}$」。在訪談部分，低分組之 M1 和 M3 為例，都無法進行正確的等分及敘說正確的分數詞,兩人均表示沒有辦法再平分。比較紙筆和訪談之間的表現,在具體等分好的情況之下 M1 和 M3 可以答對，但未等分的情境下則無法完成。所以,M1 及 M3 只具備遞迴分割基模基本條件，實際上尚未發展完成。

(三)具備遞迴分割基礎的高分組

高分組的三位個案在紙筆前測都能正確的寫出陰影部份代表「$\frac{1}{18}$」條。但是在訪談問題的表現下卻都無法進行三等份後再平分給七人的問題，甚至連 H1 因無法做出適當的等分而有「多出來可以下次吃」(H1A274)顛覆原本在等分割基模所建立「耗盡」的原則。

H1A270 H1：每一條都切成三份。
H1A271 R：每一段都切成三份。

H1A272 H1：然後全部就是九份，然後有七個，還剩兩顆，如果一段分成兩份的話，全部就只有六份而已，就不夠。
H1A273 R：嗯。
H1A274 H1：所以多出來可以下次吃。

二、教學後遞迴分割的發展

遞迴分割基模的探討除了延用前測時以紙筆測驗 14 題及訪談時利用「一條已平分成三段的蛋糕要分給七人，該如何分？每個人可以得到多少條？」的問題之外，另外再加上告知個案「你得到二分之一條，再把它和其他三位小朋友平友平分，每人可以得到多少條？」的問題。整體而言，所有 9 位個案在經過實驗教學之後的表現與教學前幾乎差不多，在紙筆測驗上完全沒有差異，訪談時也只有 H1 和 M3 有所進步。

以在其他問題表現頗佳的 H3 為例，盡管是獲得研究者的一些引導，仍無法解決 7 人分一條(切成 3 段)蛋糕的問題(H3B158)。受訪的 9 位個案，只有 H1 可以完全答對這三個問題，但是對於「七人此外，在紙筆測驗或關於「二分之一條再平分成四等份的問題」只有 M3 可以答對(M3B294)，其他答錯的個案都認為是四分之一條，原因是未考慮被分割的新單位量是「二分之一條」。由此可見，整個實驗教學在遞迴分割的建立上仍成效有限。

個案 H1

H1B087 R：如果說要開慶生會，這是一條蜂蜜蛋糕，然後師傅送來的時候已經切兩刀了，那是把這條蜂蜜蛋糕切成幾段？這每一段是多少條蛋糕？

H1B088 H1：三分之一條。
H1B089 R：然後現在就是有七位小朋友要來分，每一個人可以分到多少條？妳會怎麼做？
H1B090 H1：(畫)(每一段七等份)
H1B091 R：好，那每一個小朋友他可以得到多少條？妳可以把一個小朋友的先把它塗出來。
H1B092 H1：(在第一段中塗出三小段)
H1B093 R：好，那這個小朋友的是得到多少條？
H1B094 H1：一份分成七份，然後他得了三份。
H1B095 R：二十一份他得了多少條？用分數來表示。
H1B096 H1：二十一分之三條。

個案 H2

H3B141 R：(畫一條十二公分的線)這個題目不用尺，說說看，嘗試著去畫畫看。生日宴會，做蛋糕的師傅送蛋糕來，送來的時候已經切了兩刀平分成三段，每一段是多少條？
H3B142 H3：三分之一條。
H3B143 R：你和你的同學總共有七位小朋友，這七位小朋友想要平分這一條蛋糕。切的地方不能再切了。你要怎麼分才能平分？
H3B144 H3：(停十秒)不知道。
H3B145 R：先請問你，如果有一個東西要平分給七個人，請問要切幾等分才夠？
H3B146 H3：切幾刀喔，切七等份。
H3B147 R：如果要切比七等份可不可以？
H3B148 H3：可以。
H3B149 R：要切幾等分？
H3B150 H3：十四等份。
H3B151 R：要比十四等份多可不可以？
H3B152 H3：可以。
H3B153 R：怎麼切？
H3B154 H3：切二十八等份。
H3B155 R：要比二十八份多呢呢？
H3B156 H3：三十五。
H3B157 R：回到這個題目，你會怎麼做？
H3B158 H3：不知道。

個案 M3

M3B289 R：如果這裡是我帶來的一條蜂蜜蛋糕，從這邊到這邊。把它切成兩等份之後，這一段給你。你得到多少條蜂蜜蛋糕？

M3B290 M3：二分之一。
M3B291 R：二分之一，單位是什麼？
M3B292 M3：條。
M3B293 R：你帶回教室之後跟其他三位小朋友一起平分，包括你總共有四個。請問每一個小朋友得到多少條蜂蜜蛋糕？
M3B294 M3：(停十秒)八分之一條。
M3B295 R：你怎麼知道的？
M3B296 M3：因爲我也把這邊切成四份(指另一個二分之一條)。

三、教學前後遞迴分割發展之比較與討論

(一)教學前，由三組個案遞迴等分割的表現來看，低分組幾乎不具遞迴分割基模；中分組有部分個案稍微具備基本概念；高分組則能夠在已等分的情境下才具備此基模，因此也屬於只能擁有基本遞迴分割基模的表現。

(二)對於三個有關遞迴分割的訪談問題，以第三個問題「一條已平分成三段的蛋糕要分給七人，該如何分？每個人可以得到多少條？」個案回答的情況最差，可能的原因是它涉及要能調節兩個整數之間的關係(3 段、7 人)；其次，必須將部分(三分之一條)再進行等分，最後再把某一段做七等份後，其他段也要做七等份，最後再把每人所得到的和原來的基準單位量相比較，所以特別困難。

(三)本研究的樣本在測驗卷中對有關於遞迴分割基模之解題表現得分偏低，而且在訪談部分只有兩位個案(H1 和 M3)可以正確回答出 3 個問題中的 2 個以上(含)，顯示樣本在遞迴分割基模的表現欠佳。參酌 Tzur (1995)的研究結果，

其個案亦在五年級時才展現出遞迴分割基模的解題行為。因此，本研究推測遞迴分割基模可能已超越一般四年級兒童的「可能發展區」(ZPD)。Tzur (1995)亦發現在迭代基模和遞迴分割基模之間有一道鴻溝(gap)必須跨越，因為後者必須對「部分」再加以分割。

第五章 主要發現、結論與建議

本研究強調學童學習分數時必須注重多元化表徵之間的聯結及瞭解分數詞意涵中各個單位的重要性，據此研究者自編「多元表徵分數課程」以有別於一般的市售教材，並採用不等組前後測設計的準實驗研究法，由高雄市市郊的某一所國民小學四年級中抽取實驗組和控制組各一班進行實驗教學。經過為時 16 節(每節 40 分鐘)的教學，利用自編研究工具 (「分數問題測驗甲卷」和「分數問題測驗乙卷」) 及訪談問題組，探究實驗課程對學童在分數解題表現上的成效，以及實驗課程對學童數概念及分數基模發展之影響。

本章將第四章研究結果進一步整理為主要發現，再歸納成研究結論，並依據結論提出具體建議，以提供國小數學教學、課程綱要編修單位及未來教育學術研究之參考。

第一節　主要發現

針對本研究之目的，歸納各項文獻資料和研究結果，獲得下列幾項主要發現，包括「分數多元表徵課程設計與實踐」、「分數解題表現」、「數概念的發展」及「分數基模的發展」等四個方面加以論述。

壹、 分數多元表徵課程設計與實踐方面

首先，在課程的設計方面，主要以認知心理學有關表徵的理論及數學教育有關學習數學的表徵理論做為基礎據以編製分數教學實驗課程。藉由文獻(Behr 等人 1992, 1993；Steffe, 1992)得知「單位」概念在整個數概念發展上佔有相當重要的角色，特別是在學習分數時，由於「分數單位」所涉及的是三階單位的概念(甯自強，1997a)，所以在多元表徵課程中特別突顯單位概念的教學。另外，為加強學生對於分數問題的辨認並瞭解學習效果，在教學實驗課程中特別採用「擬題」(梁淑坤，1994)活動促進學生對分數問題的理解。就整個課程的設計核心精神而言，符合 Paivio (1991)雙代碼理論的觀點，在課程中採用不同的代碼促進學習效果，藉由不同的表徵方式讓學習者利用多種不同的代碼強化學習。

其次，就課程的實踐方面而言，學生參與實驗課程的表現出主動投入、積極的學習。此由課程結束後實驗組學童所寫的「學習回顧」(附錄 15)可知，縱然單位量單元裡的「數線」主題，被認為是感到較難以學習者。但是整體而言，學童主觀上對分數多元表徵課程的感受多表肯定。也有部分學生，對於實驗課程採用「真實情境」且非例行性問題感到興緻盎然，其切身的感受是「難，但是很有趣。」由於，本研究的分數多元表徵課程設計時，多採用切合學生程度的非例行性問題，所以能吸引更多的學生樂於挑戰問題。

自從 Behr 等人(1983)主張採用五種不同的表徵系統互動模式在數學習中的重要性，利用不同的表徵促進學習的觀念在數學教育界普遍被接受，甚至 NCTM (2000)及國內九年一貫課程綱要(教育部，2000、2003)都採用其觀點，進一步形成對數學教師教學要求或建議。當採用不同的表徵方式進行教學或學習儼然成為一種常識之後，更突顯出針對多元表徵促進學習效果的實徵研究著實缺乏。本研究正是從事此方面實徵研究的一種嘗試，若就實踐層面而言，分數多元表徵課程相當具實踐的可行性。

貳、 分數解題表現方面

此部分包括學生的解題表現立即效果及保留校果，並且分別依據整體測驗表現及分量表測驗表現兩方面提出主要之發現。

一、學生的分數解題表現之立即效果，大部分不因課程教學處理之不同而有顯著差異，只有少部分會因為課程教學處理之不同而有顯著差異。

就學生在整體測驗表現而言，發現實驗組與控制組學生在「分數問題測驗乙卷」解題表現的立即效果上，未有顯著的差異存在。至於分量表表現，發現接受「多元表徵分數課程」教學的實驗組學生與接受「一般市售教材」教學的控制組學生，在「等分割與組成」、「單位量」、「分數比較」、「等值分數」和「遞迴分割」解題表現的立即效果，並無顯著差異存在。除此之外，接受「多元表徵分數課程」教學的實組學生與接受「一般市售教材」

教學的控制組學生，在「合成與分解」解題表現的立即效果上，有顯著差異存在。其中，實驗組的表現較控制組為佳。

二、學生的分數解題表現之保留效果，大部分不因課程教學處理之不同而有顯著差異，只有少部分會因課程教學處理之不同而有顯著差異。

就整體測驗而言，發現實驗組與控制組學生在「分數問題測驗甲卷」表現的保留效果上，未有顯著差異。至於分量表方面，首先發現接受「多元表徵分數課程」教學的實驗組學生與接受「一般市售教材」教學的控制組學生，在「等分割與組成」、「單位量」、「分數比較」、「等值分數」和「遞迴分割」解題表現的保留效果上，並無顯著差異存在。另外也發現，接受「多元表徵分數課程」教學的實組學生與接受「一般市售教材」教學的控制組學生，在「合成與分解」解題表現的保留效果上，有顯著差異存在。其中，實驗組的表現較控制組為佳。

由上述實驗組和控制組在分數解題表現的量化比較可以得知，接受多元表徵分數課程的學生，只有在少部分分數學習的向度上顯著的優於控制組。惟，就整個得分的情況及不同學習效果評量(立即和延宕)都可以發現實驗組學生還是較具有潛力。所以，雖然量化統計考驗的結果只有部分符應 Behr 等人(1983)的主張，但是實驗組整體成效確實有朝向更好的方向發展，只是未達

到統計上的顯著。

參、 數概念的發展方面

就數學知識的發展及數學學習的順序而言，整數的出現均在分數之前，因此學者對於學生學習分數時所產生的部分迷思概念有不同的歸因。Behr 等人(1984)、Streefland (1993)及 Lamon (1996)較傾向「干擾說」，即整數的學習干擾分數的學習；而 Ning (1992)、Olive (1999)和 Sáenz-Ludlow (1994)等多位學者則傾向採用「發展說」，即分數發展的純熟立基於整數發展的純熟。從本研究對數概念的發展層面探討，研究結果和「發展說」較為一致。質言之，經由分數單位的掌握及單位間化聚的熟稔，可以明顯的提昇分數詞概念的認知層次。以下就三方面說明主要發現，依序為「分數詞」、「分數部份整體關係」及「等值分數」。

一、分數詞概念的發展

實驗課程將整數和分數的學習整合，有助於學童從掌握整數二階單位的化聚，熟悉單位之間的關係，進而對分數詞所涉及之單位概念有較清楚的掌握。而且，從個案的解題過程可以發現，不同能力的個案其解題策略亦有不同，能力較高者所使用的解題策略較為有效率。

從教學前訪談的過程中，研究者發現學童分數詞意義相當混亂，常常將不同且不適當的單位進行並置，推測其主要的原因是

整數單位概念的發展影響分數詞概念的發展，也由於對分數詞意義的混淆或誤解，終導致影響後續分數問題的解題。例如，本研究中分組和低分組個案在教學前訪談所表現出的便是幾乎混淆了分數詞中應有的單位。不當的單位並置源自於單位概念的薄弱，學童常無法清晰的辨別單位與單位間的不同。但是，經由教學實驗後發現，實驗組的個案漸漸能理解單位的不同，熟練二階單位化聚，進而提昇其分數詞概念的理解。

依據甯自強(1997a, 1997b)對於兒童分數詞認知的分類，在教學之前低分組學生和中分組的學生大部分只處於「分數前置概念」及「起始單位分數」的階段，高分組則多處於「加法性分數」階段。經過教學實驗之後，低分組和中分組的學生已多數提昇至「加法性分數」層次，而高分組的少數學生也可以達到「巢狀分數」的階段。

二、分數的「部分整體關係」的發展

本研究於實驗課程教學後訪談時發現，個案在「總數已知」和「總數未知」的表現上，明顯的比教學之前為佳。但是，對於紙筆測驗部分整體關係相關試題的解題成效則進步有限，9 位個案中仍有 4 位個案無法正確解題。顯見，書寫符號表徵和口語表徵之間仍有落差，此現象和 Marcou 與 Gagatsis (2002)的調查研究結果顯示相符，即不同表徵之間的轉換有不同的難易程度，要將口語表徵轉換成書寫表徵仍存在不少困難，需要更多的時間蘊

釀和更充分的學習經驗。

三、等值分數概念的發展

本研究雖然運用不同的表徵方式，設計教具操作課程及電腦輔助教學程式，企圖建立學童之等值分數概念，但是根據測驗及訪談的結果都顯示成效有限。可能的原因是學童只是「經驗」到等值分數的存在，尚未達到「察覺」階段，更遑論「理解」及「內蘊化」。依據甯自強(1997b)的觀點，兒童在巢狀分數階段可以察覺等值分數的存在，但要瞭解等值分數則必須等到具備有理數概念。根據本研究的實驗結果則顯示，少數四年級學童程度較高者可以達到巢狀分數階段，而中程度和低程度者雖歷經教學實驗的提昇仍難以達到該階段。反觀，教育部(2003)所頒布的九年一貫課程綱要中明訂在四年級要能「理解等值分數」(4-n-08)，若參照甯自強(1997b)的說法及本研究的結果，可能要讓學生達成此能力指標並不容易。

肆、 分數基模的發展方面

研究者主要參考 Tzur (1995)的研究，採下列三方面呈現本研究在分數基模發展上的主要發現。

一、等分割基模的精進

本研究結果發現，接受「分數多元表徵課程」教學的實驗組個案，不管在連續量或離散量情境的等分割基模方面都有普遍的

提昇，只有低分組極少數的個案仍無法完全達到。兒童在分割活動中最常忽略的是「公平」和「耗盡」兩個原則，在分割的過程如同甯自強(1993c)所言，在兒童眼中，「窮盡」和「公平」並不是理所當然的事。然而，經過教學實驗後絕大多數的兒童已能掌握此兩項等分割活動必要的原則。本研究從訪談中也發現低分組學童在教學前幾乎都不具有等分割基模，迨教學後的低分組已有三分之二的個案可以具備。

在等分割基模的再精緻化方面，仍有半數以上的個案尚未達到。依據 Steffe (2002)的觀點，兒童必須將「撕裂運思」(splitting operation)運用到該情境中方能順利解題，而所謂的撕裂運思則是「分割」和「迭代」的一種合成，而且兩者是同時執行而非序列性。因此，若要能將等分割基模再精緻化，需要等待撕裂運思的成熟。就本研究而言，四年級學童大致可以掌握等分割基模，但是由於缺乏撕裂運思的進一步同化，以致無法把等分割基模再進一步精緻化。

二、分數迭代基模的建立

本研究所指的分數迭代基模涉及了 Saenz-Ludlow (1994, 1995)所稱「部分到整體」及「整體到部分」兩種運思，亦即其所言「測量性的部分-整體基模」(metric part-whole scheme)。同時，亦是 Tzur (1995)所稱之「迭代分數基模」和「可逆分數基模」兩類。而本研究對於兒童在解題歷程所呈現的分數迭代基模

類型和 Tzur (1995)所發現的一致之處在於兒童會從給定分量中找出單位分量再進行迭代，而不同處在於本研究發現部分兒童會利用較簡潔的方式同時運作非單位分量及單位分量以形成要求的分量。換言之，兒童可以同時掌握兩個集聚單位同時進行迭代。

本研究結果發現，擁有分數迭代基模的個案在教學前只有少數，但是在經過教學實驗之後已有大部分的個案可以純熟的具備此基模。有將近一半的個案可以在非單位分量的情境下，直接複製該分量以完成研究者所要求的分量，或是透過與等分割基模的結合找到單位分量，繼而製作出所要求的基準單位量，甚至做出比基準單位量還要大的分量。建立迭代分數的基礎在於能把分數單位看成一個單位，並進一步的將它做為是一個可以運作的單位。Olive 與 Steffe (2002)認為兒童能夠做出比基準單位量大的分量，且能瞭解其理由者，係修改其原來的「分割性分數基模」(partitive fractional scheme)而來。

根據本研究顯示兒童的迭代分數基模有四個主要的階段。第一個階段，當兒童對分數詞概念有初步認識之後，即可藉由整數的單位觀念將分數單位視為一個單位進行加法性的累積，主要累積的範圍在真分數，也就是 Olive 與 Steffe (2002)所指「部分在整體中」(part-in-whole)的概念。第二階段是建立$\frac{n}{n}$與「1」的連結，蓋會製作$\frac{n}{n}$但卻不見得知道也就是做出整體「1」，因為此二

者在其心中並原非相等的。第三階段是做出比整體「1」大的分量(數)，此必須藉由「1」轉換為$\frac{n}{n}$，然後算出再加多少個，例如，$\frac{7}{5}$就是$\frac{5}{5}$再加 2 個$\frac{1}{5}$。此時兒童便擁有 Olive 與 Steffe (2002)所指「整體的部分」(part-of-whole)的概念。而第四個階段是利用前一階段的逆運思，例如將$\frac{7}{5}$分解成 7 個$\frac{1}{5}$透過 5 次迭代或是直接將$\frac{7}{5}$減掉 2 次$\frac{1}{5}$的迭代得到原來的基準單位量。所以，迭代基模可以說是兒童學習假分數及分數分解合成一個重要的基模。

三、遞迴分割基模待萌發

以往學者對於遞迴分割基模有不同的名稱，Sáenz-Ludlow (1994)將它稱為「多重等分割調節基模」(the multiple-partition coordinating scheme)　，而 Tzur (1995)則稱之為「分配性分割基模」(the distributive partitioning scheme)，在本研究中則因其由遞迴分割運思而來遂以遞迴分割基模名之。由本研究發現，即使在接受教學實驗之後，受訪的個案普遍無法調節分割量與分割份數之間的關係，而且最常犯的錯誤是分割之後失去原有單位量，甚至連程度較高者亦犯同樣的錯誤，顯見教學實驗後四年級學童的遞迴分割基模尚待萌發。

就成功達到遞迴分割基模的個案解題歷程觀之，和 Tzur (1995)所發現的結果頗為一致，兒童藉由對原基準單位量二次分割得到分量後，透過心像運作的方式重新將該分量和原單位量比較，最後再給予適當的分數詞名稱。其次，Tzur (1995)亦認為遞迴分割涉及了部分整體中的乘法關係的存在，從本研究中亦發現兒童並非逐一累加分量以建構和原單位量之間的關係，而是運用了乘法性思維建立兩者關係。

本研究提供三項作業以觸發兒童遞迴分割基模的發展，發現當呈現基準單位量及分割後分量的圖像表徵時，經過實驗教學後多數兒童可以產生遞迴分割思維。相較之下，只告知基準單位量及預備等分成幾人份，每人可以得到多少時，只有極少數兒童能夠回答。由受訪兒童表現來看，雖都可以進行兩步驟的分割(操作或心像)，但是缺乏將分割後的分量和原基準單位量比較的基模(遞迴)。然而，最困難的作業是給予兩個互質的分割數(一條蛋糕先切三段，再分給七個人)，此現象所顯示的是兒童無法以操作或心像的方式進行第二步驟的分割活動，終導致無法建立分量和基準單位量的關係。由此可見，遞迴分割和等分割具有密不可分的關係，而且是在等分割基模能夠進一步同化後才可能產生遞迴分割基模。

第二節　結論

本節根據前節所述之主要發現，綜合歸納成本研究之結論，以作為提出建議之依據。茲分述如下：

壹、分數多元表徵課程具體可行且學童接受度高

本研究發現，分數多元表徵課程與一般市售教材相較，在編製上非但具體可行，而且深受學童的歡迎。依據學生的主觀認知，認為在認知層面和情意層面都有正面的學習功效。

貳、分數多元表徵課程增進學童「合成與分解」的解題表現

本研究發現，實驗組在接受強調單位概念及多元化表徵活動的「分數多元表徵課程」教學實驗之後，不管是在立即效果或保留效果的分數「合成與分解」分量表之解題表現上，都較使用市售教材的控制為佳。本研究之結論是：「分數多元表徵課程」對學童在分數的「合成與分解」之解題表現有所助益。

參、分數多元表徵課程對學童分數概念的發展有促進效果

本研究發現，實驗組個案在接受教學實驗前後的訪談中所展現出數概念的成熟度有所不同。在教學之前，個案對於整數二階化聚不夠成熟，所以常會犯錯；待實驗教學之後，掌握二階化聚的能力有明顯提昇。另外，在教學之前，個案對於分數詞概念多

有以「單純並置」或「並置混亂」的現象；待實驗教學之後，除了較能採用適當的單位進行並置外，也多能提升到「內嵌並置」、「脫嵌」的層次。至於，分數部分整體關係的確立，在教學之後也有明顯的進步。最後，在建立等值分數概念的成效上雖然有限，但已較未接受教學實驗前略顯進步。本研究結論是：「分數多元表徵課程」對於學童數概念的發展有促進的效果。

肆、分數多元表徵課程對學童分數基模的發展有提昇作用

本研究發現，實驗組個案在接受教學實驗前後所展現出分數基模的成熟度有所不同。分數多元表徵課程除了對於遞迴分割基模的發展較不明顯外，對於等分割及分數迭代基模等兩類基模的發展有所提昇。

在等分割基模方面，教學前個案對於等分割基模尚不成熟，常常忽略「公平」和「耗盡」的原則，所以無法建立正確的等分基模。待實驗教學之後，個案已不再僅藉由直觀做任意的分割，還會注意到分割的公平性及是否有剩下，顯示其等分割基模比教學前有所進步。其次，在分數迭代基模方面，教學前多數個案無法依據給定的分量製作出指定的分量，原因在於缺乏分數迭代基模；惟當教學實驗之後，絕大多數的個案已能依照題目要求製作出指定的分量。最後，在遞迴分割基模的發展方面進步空間極微。

第三節　建議

本研究旨在探討分數多元表徵課程對國小四年級學童分數解題表現、數概念及分數基模的影響，經分析歸納獲得上述之重要結論。據此，本研究提出以下三方面的具體建議，以作為國小數學教學、國小數學領域課程綱要編修單位和未來進一步研究之參考。

壹、對國小數學教學的建議

以下從教材編製、教學實施及學習輔導等三方面分別提出建議如下：

一、教材編製方面

本研究發現，採用強調單位概念及多元化表徵的實驗課程對於學童分數的解題、數概念的發展及分數基模的發展都有或多或少的效益。因此，建議未來在設計國小分數相關課程時，也要特別從學童「單位概念」著手，藉由多元表徵活動讓學童知道不同單位的差異，並引導選擇適當的單位做並置形成正確的分數詞。此外，也要注意教材中不同分數表徵間的互動關係，表徵之間若能連結得越好，則分數的學習成效就會越佳。

本研究發現，四年級學童學習數線教材仍有所困難，其中的癥結在於無法明確的掌握參考單位量。因此，此部分的教材可能必須延後學習，待兒童分數基準單位量概念確立之後再透過與整數間的連結才引入。

此外，陳竹村等人(2001)及 Kieren (1989)曾將分數的意義分成「部份與整體」、「商」、「運算子」、「小數的另一種記法」、「比值」及「數線上一點」等。而本研究所涉及的主要以「部份與整體」為主，另外也在局部採用「數線上一點」及「兩量比較」，從學童表現的結果顯示，「部分與整體」的教材最容易掌握，「數線上一點」則具有一定的難度，「兩量比較」最為困難。而此結果和目前九年一貫課程的編排順序頗為一致，即先學「部分與整體」，再學「數線上一點」最後學「兩量的比較」。不過，研究者建議無論是學習「數線上一點」或「兩量的比較」，都必須將「以何者為參考單位」做為教材舖陳的重點。

二、教學實施方面

從本研究教學過程中發現，分數教學若不能增加學生「說」的機會，便無法瞭解兒童心中所想的分數世界；所以，即使從紙筆測驗發現其錯誤所在，亦無從協助起。所以，建議教師在教學時應用多提供「口語表徵」與其他表徵連結的機會，讓學生說出自己的想法。如此，教學者才能清楚的確定學生是否真正了解，進而找到糾正迷思概念的方向。

Piaget 等人(1960)曾提出兒童學習分數時必須掌握的七個分數特質，其中「耗盡」和「每一份都相等」兩項特質是兒童在學習分數啟蒙教材時最容易忽略的，建議老師宜透過：「這樣分有沒有全部都分完？」及「每一個人拿到的有沒有一樣多(公平)？」

兩個問話，以便讓兒童反省分割後的結果。

另外，對於從事補救教學者，本研究建議從兒童等分割的基模開始診斷，其次要特別重視兒童在不同問題情境中所持有的分數詞的意義。由本研究的發現，可知當兒童的分數詞概念是混淆時，無法進行分數問題的解題，所以與其不斷訓練其分數解題技巧，不如從分數詞概念從根救起，進行補救教學。

三、學習輔導方面

從本研究發現，兒童學習分數最困難的是分數詞意義的瞭解及提昇。對兒童而言，「幾個中的幾個」屬於同一計數單位的分數詞是最容入手的分數意義。其後，必須培養其對不同單位量詞的敏感性，以區別整體單位量及分量的量詞，而透過整數二階單位雙向化聚則可以更確立單位量與分量之間的關係。待兒童可以解決具體物件均呈現的問題之後，可以透過口語表徵、操作表徵及文字表徵的連結，將部分物件設計為無法看見的部分，促使兒童產生心像以便提昇層次。隨後，再利用操作表徵以進行利用單位分量迭代單位量的活動，則兒童便能更清楚掌握分數單位，且有利於分數合成分解的問題解決。

至於單位分數內容物為多個的問題，是未來學習等值分數的基礎，宜透過離散物件的等分割活動建立兒童「份」的觀念，並聯絡單位分數的學習以成就出單位分數內容物為多個的概念。惟此部分在國內目前的教材較缺少「操作表徵」的等分割活動，或

許是都假定學童都已熟悉等分割的緣故。如果，兒童缺乏從實作中看到每一份都相等、每一份都一樣多後再和書寫符號表徵做聯絡，則兒童難免會僵固在以分母做為單位量為主導的想法。

遞迴分割基模是未來學習分數乘法的基礎，然而目前國內的教材對此較外重視。未來除了教師可以自編教材補充市售教材之不足外，最好還是透過實地的操作表徵以進行學習。蓋因遞迴等分割所涉及的是兩次分割，和先前一次分割是不同的經驗。待其有初步認識之後，可以嘗試不同分割數及不呈現具體物及圖像的解題活動，協助其思考向上提昇。

貳、對國小數學領域課程綱要編修單位的建議

目前國內數學教材的編製主要以教育部頒訂的「九年一貫課程暫行綱要」及「九年一貫課程綱要」為準繩，從本研究所整理的整數、分數和小數的關係中可發現，分數的能力指標對於分數「單位」的重要性似乎有被忽略的現象，且只揭櫫用不同的表徵方式學習數學，並未提醒教師或教材編製廠商重視不同表徵之間的差異性。然而，從本研究的結論又可以發現這兩者對於學童學習分數至為重要。因此，建議未來分年細目的說明示例中，可以在分數能力指標中增修有關單位教學重點及不同表徵間辨證發展的例子，以供參考。

其次，在新頒布九年一貫課程綱要(教育部，2003)中明列四年級必須要能達到「理解等值分數」，但從本研究卻顯示要求四

年級學生學習等值分數有一定的困難。因此，建議教育行政機關能在綱要實施的同時，擬訂相關課程評鑑措施以瞭解綱要實施情形，並做為修訂綱要的依據。

參、對未來研究的建議

回溯本研究整個歷程，乃由研究者身為國小數學教師的立場出發，在累積多年教學經驗發現，國小兒童在學習分數時普遍產生困難。此外，在研究者擔任高雄市國小數學領域輔導員期間，在不同研習場合及多次到校諮詢服務時，現場教師幾乎都不約而同表示班上兒童在學習分數時有諸多的迷思概念出現，希望輔導團能夠協助解決。就在此種「內在需求」和「外在需求」交錯的同時，從文獻得知 Behr 等人(1983)主張五種「表徵系統互動模式」融入數學教學，而渠等更將該主張架構出具體的 RNP 課程，且在實施之後頗具成效。因此，研究者有了以該模式為主進行實驗課程編製的想法。然而，近代課程設計的潮流已摒棄僅以成人及學科知識的觀點為之，而是必須將學習者認知結構做為重要參考依據。所以，研究者重新檢視以往有關國小學童學習分數之相關文獻，發現 Steffe (2002, 2004)及其學生(Ning, 1992; Sáenz-Ludlow, 1994; Tzur, 1995)所做兒童學習分數之研究即是從認知結構的觀點加以剖析。根據上述的研究背景、需求(動機)及理論的指引後，本研究終以設計多元表徵分數課程做為探討學習成效為目標。

在實驗課程實施的過程中發現，Behr 等人(1983)所提出五種

表徵互動模式的確有其價值，而一般市售教材雖也藉由不同的表徵做為學習的入口，但是畢竟較少強調五種表徵內在的轉化及相互辨證。兩者相較，一般教材較傾於零散式學習，而參照 Behr 等人(1983)所主張而編製的課程可以較為統整式學習。惟，從過程中亦發現若兒童在未真正瞭解分數意義前就學習「符號」表徵，將因為概念混淆而無法進行更深入的學習。甚至，部分兒童會以對「符號表徵」的迷思概念置入於「圖像」及「操作」表徵當中。所以，有關表徵部分的研究結果也突顯出 Janvier (1987a, 1987b)所強調表徵之間的轉譯和表徵之內轉化，確實是數學教學重要的課題，也是未來值得再深入研究的主題。

除了上述建議未來研究針對表徵間轉譯做更深入的探討之外，關於研究對象、研究工具和統計方法有以下之建議：

一、研究對象方面

本研究挑選數學能力低、中、高程度各 3 位的個案做一系列訪談，雖在樣本上有其代表性，但是，由於人數不多，因此個案間的特色不夠明顯，較難突顯出不同程度個案之間明顯之差別。未來的研究宜透過較長時間的蒐集資料，從廣泛的樣本找到深具特色的個案進行深度的訪談。易言之，透過更長的時間蒐集各種不同能力的學生，以瞭解其在學習分數表徵的各種不同的面貌與途徑。

其次，由於本研究較著眼於實驗課程對於實驗組學生的影響，所以在訪談的實施皆以實驗組學生為對象。未來可以亦從控

制組中挑出和實驗組個案能力相當的學生進行教學前及教學後的訪談，如此更能瞭解兩種不同的課程對學生學習分數所造成的差異。

二、研究工具方面

由於本研究所採用的紙筆測驗工具較偏難，且需耗費較長時間作答，因此可能有兩項重要的影響：第一，可能造成實驗的地板效應壓縮實驗效果。第二，由於作答時間較長，以致於影響作答情緒。基於此，未來的研究宜在測驗工具上再加以改進，一方面改善題目的難度，另方面編製更具代表性的問題縮短題數，將有助於實驗的內在效度提昇。

三、統計方法方面

本研因受限於資料違反共變數分析同質性假定，所以有關於低中高等不同數學能力的三組學生，在接受實驗教學之後是否產生「能力」與「組別」間的交互作用並未加以探討。未來研究如果能夠參酌 IRT 理論進行共變數分析，或許能解決違反假定的問題，進而對研究結果有更深層的認識。

參考文獻

壹、中文資料

王淵智(2001)。**國小數學低成就學童分數表徵研究：以五個個案為例**。發表於 2001 年國民中小學數學教育革新研討會。嘉義：國立嘉義大學十二月十三日。

王淵智、吳佳娟、賀天俊與許慈恩(2005)。**分數 E 擊棒教學設計**。取自：http://www.fsps.kh.edu.tw/FS620/

王淵智與張獻中(2004)。**國小五年級實施數學課程銜接教學歷程與成效之初探**。發表於 2004 年學習．行動．反思--高雄市國教輔導團 2004 教育論壇。高雄市：高雄市政府教育局十月三日。

吳相儒(2001)。**運用國小數學科「分數」教學模組實施診斷與補救教學之研究-以四年級學童為例**。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文，未出版。

吳宏毅(2002)。**台灣北部地區國小低年級學童分數概念之研究**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

吳裕益(1992)。**傳統題目分析方法**。八十一年度教學評量研習會參考資料。台灣省政府教育廳主辦，國立台南師範學院承辦。

吳裕益(2004)。**測驗分數的等化方法**。國立高雄師範大學特殊教育學系上課講義，未出版。

呂玉琴(1991)。國小學生的分數概念：$\frac{1}{2}$vs. $\frac{1}{4}$。**國民教育，31(11,12)**，10-21。

呂玉琴(1996)。國小教師的分數知識。**台北師院學報，9，**427-460。

李端明（1994)。「分數詞」之解題活動類型：一個國小四年級兒童之個案研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版。

李曉莉(1998)。**國小二年級兒童分數概念之研究。**國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版。

林清山(1994)。**心理與教育統計學。**台北：東華書局。

林碧珍(1990)。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。**新竹師院學報，4，**295-347。

南一出版社(2003)。**數學教科書及教學指引(第五冊)。**台南：南一出版社。

南一出版社(2004)。**數學教科書及教學指引(第七冊)。**台南：南一出版社。

南一出版社(2005)。**數學教科書及教學指引(第六冊、第八冊、第十冊)。**台南：南一出版社。

洪碧霞(1992)。**傳統測驗理論信度的意義、類型與求法。**八十一年度教學評量研習會參考資料。台灣省政府教育廳主辦，國立台南師範學院承辦。

康軒出版社(2004)。**數學教科書及教學指引(2-9 冊)。**台北：康軒出版社。

教育部(2000)。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要。**台北：

教育部。

教育部(2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北：教育部。

張日齊(2003)。**由分數詞的評量看小學生分數概念的發展**。國立中正大學心理學研究所碩士論文，未出版。

張平東(2002)。**國小數學教材教法新論**。台北：五南。

張春興(1999)。**教育心理學-三化取向的理論與實踐**。台北：東華書局。

張婉華(2003)。**由分數詞的評量看小學生分數概念的發展**。國立中正大學心理學研究所碩士論文，未出版。

張熙明(2004)。**國小五年級學童分數表徵教學之研究**。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文，未出版。

梁淑坤(1994)。「擬題」的研究及其在課程的角色。**國民小學數學科新課程概說(低年級)**，152-167。台北：台灣省國民學校教師研習會。

郭生玉(1997)。**心理與教育測驗**。台北：精華書局。

郭生玉(1999)。**心理與教育研究法**。台北：精華書局。

陳正昌、程炳林、陳新豐與劉子鍵(2005)。多**變量分析方法-統計軟體應用**。台北：五南。

陳竹村、林淑君與陳俊瑜(2001)。**國小數學教材分析—分數的數概念與運算**。台北：國立教育研究院。

陳和貴(2002)。**國小五年級學童分數概念學習表現及易犯錯誤類**

型之比較研究—以屏東縣多元文化族群為例。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

陳英豪與吳裕益(1994)。**測驗與評量**。高雄：復文。

陳瑞發(2003)。**國小低年級學童分數概念之研究**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

陳靜姿(1997)。**國小四年級兒童等值分數瞭解之初探**。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版。

黃堅厚(1990)。**瑞文氏黑白非文字推理測驗**。台北：中國行為科學社。

黃馨緯(1995)。**國小高年級學童分數數線表示法瞭解之研究**。國立台中師範學院初等教育研究所碩士論文，未出版。

甯自強(1993a)。單位量的變換(一)～正整數乘除法運思的啟蒙。**教師之友，34**(1)，27-34。

甯自強(1993b)。兩步驟問題。**教師之友，34**(2)，45-49。

甯自強（1993c)。分數的啟蒙~量的子分割活動~。**教師之友，34**（3)，45-51。

甯自強(1993d)。**經驗、察覺及瞭解在課程中的意義：由根本建構主義的觀點來看**。發表於 1993 年國小數理科教育學術研討會。台東市：國立台東師範學院六月五日。

甯自強(1995)。**五個區分對數與計算教材設計的影響**。發表於 1995 年師院教授座談會。板橋國民學校教師研習會，二月十六日。

甯自強(1997a)。量的子分割(二)~真分數的引入~。**教師之友，38(4)**，33-39。

甯自強(1997b)。量的子分割(三)~等值分數的引入~。**教師之友，38(5)**，36-40。

甯自強(1998)。涂景翰的數概念。**科學教育學刊，6(3)**，255-269。

曾靖雯(2003)。**以表徵觀點看國小三年級分數教學之行動研究。**國立台東大學教育研究所碩士論文，未出版。

彭聃齡與張必隱(2000)。**認知心理學。**台北：東華書局。

游政雄(2002)。**台灣北部地區國小中年級學童分數概念之研究。**國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

湯錦雲(2002)。**國小五年級學童分數概念與運算錯誤類型之研究。**國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

詹婉華(2003)。**國小高年級學童分數概念之研究。**國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

劉世能(2002)。**台灣北部地區國小高年級學童分數概念之研究。**國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

劉祥通(2004)。**分數與比例問題解題分析—從數學提問教學的觀點。**台北：師大書苑。

蔣治邦(1994)。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。**國民小學數學科新課程概說(低年級)**，60-76。台北：台灣省國民學校教師研習會。

蔣治邦(1997)。由表徵的觀點看格式的選擇。**國民小學數學科新**

課程概說(中年級)，49-65。台北：台灣省國民學校教師研習會。

謝堅、蔣治邦、林昭珍與吳淑娟(2001)。**國小數學教材分析—小數的數概念與運算**。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。

羅素貞(2002)。**國小學童分數乘法問題之解題研究**。國立政治大學教育研究所博士論文，未出版。

貳、西文資料

Barton, M. L., & Heidema, C. (2002). *Teaching reading in mathematics.* Alexandria, VA: ASCD.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 296-333. NY: Macmillan.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis – emphasis on the operator construct. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An Integration of Research,* 13-47. NY: LEA.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes,* 91-125. NY: Academic.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(5),* 323-341.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.* MA: Havard University.

Cramer, K., & Post, T. (1995). Facilitating children's development of rational number knowledge. In D. Owens, M. Reed, & G. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of PME-NA,* 377-382. Columbus, OH: PME.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(2),* 111-144.

Davydov, V. V., & Tsvetkovich Z. H. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(1), 13-64.*

Dimitrov, D.M., & Rumrill, P. (2003). Pretest-posttest designs in rehabilitation research. *Work: A Journal of Prevention,* *Assessment, & Rehabilitation, 20(2),* 159-165.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solvin verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 3-17.

Hambleton, R. K., & Swaminathan, H. (1985). *Item Response Theory: Principles and applications.* Boston: Kluwer·Nijhoff.

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-27), 3,* 17-24. Honolulu, Hawaií .

Hart, L. C. (1985). *Factors impeding the formation of a useful representation in mathematical problem solving.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED254419)

Hunting, R. P. (1986). Rachel’s schemes for constructing fraction knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 17(1) ,* 49-66.

Hunting, R. P., Davis, G. E., & Pearn, C. A. (1997). *The role of whole number knowledge in rational number learning.* Mathematics Education Research Group of Australasia annual conference. Auckland, New Zealand.

Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching* *and learning of mathematic*s, 27-32. NY: LEA.

Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 67-71. NY: LEA.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representfation in the teaching and learning of mathematics, 19-26.* NY: LEA.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades,* 162-181. Virginia: NCTM.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(2),* 170-193.

LeFevre, P. (1984). *Rational number learning and instruction from a cognitive perspective.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED 259947)

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representation and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of* *representation in the teaching and learning of mathematics, 33-40.* NY: LEA.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades,* 93-118. Virginia: NCTM.

Marcou, A., & Gagatsis, A. (2002). Representations and learning of fractions. *The Mathematics Education into the 21st Century Project , Proceedings of the International Conferenc*e, 250-253. Italy: Palermo.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. NY: Cambridge University.

Millsaps, G. M., & Reed, M. K. (1998). *Curricula for teaching about fractions.* ERIC Digest. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 433184)

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(2),* 122-147.

NAEP (2004). *NAEP Question.*2004 年 6 月 5 日，取自 http://nces.ed.gov/nationsreportcard/itmrls/.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nelissen, J. M. C., & Tomic, W. (1998). *Representation in mathematics education.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED 428950)

Ning, T. C. (1992). *Children's meanings of fractional number words.* Unpublished doctoral dissertation of the University of Georgia.

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1(4),* 279-314.

Olive, J. (2001a). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator, 11(1),* 4-9.

Olive, J. (2001b). Connecting partitioning and iterating: A path to improper fractions. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-25), 4,* 1-8. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Olive, J. (2002). The construction of commensurate fractions. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-26), 4,* 1-8. Norwich, U.K.: University of East Anglia.

Olive, J. (2003). Nathan's strategies for simplifying and adding fraction in third grade. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-27), 3,* 421-428. Honolulu, Hawaií.

Olive, J. (2004). *Java Bar_5C program.* Adopted from: http://jwilson.coe.uga.edu/olive/welcome.html#Chinese_JavaBars. 2004/11/20.

Olive, J. & Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 413-437.

Paivio, A. (1991). *Images in mind: The evolution of a theory.* NY: Harvester Wheatsheaf.

Piaget. J. (1952). *The child's conception of number.* London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry.* NY: Norton.

Pothier, Y. & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 14(4),* 307-317.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic error：The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(1)*, 8-27.

Rowan, T. E., Payne, J. N., & Towsley, A. E. (1993). Implication of NCTM's standards for teaching fractions and decimals. In T. E. Rowan & L. J. Morrow (Eds.), *Implementing the K-8* *curriculum and evaluation standards: Readings from the arithemetic teacher,* 49-52. Virginia: NCTM.

Sáenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(1),* 50-85.

Sáenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies Mathematics, 28,* 101-132.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* New Jersey: LEA.

Smith Ш, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions,* 3-28. VA: NCTM.

Solo, R. L. (1998). *Cognitive psychology.* Boston: Allyn and Bacon.

Steffe, L. P. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades,* 119-140. NY: Academic press.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4(3),* 259-309.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of*

Mathematics, 3-40. Albany: State University of New York.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Mathematical Behavior, 20,* 267-307.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, (6)2,* 129-162.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306. NY: LEA.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy theory, and application.* NY: Praeger.

Stevens, J. (1992). *Applied multivariate statistics for the social sciences.* Hillsdale, NJ: LEA.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Boston: Kluwer Acacdmic.

Streefland, L. (1993). Fractions in realistic approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*, 289-325. NY: LEA.

Taber, S. B. (2001). *Making connection among different* *representations: The case of multiplication of fractions.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED 454053)

Tzur, R. (1995). *Interaction and children's fraction learning.* Unpublished doctoral dissertation of the University of Georgia.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promotion that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(4),* 390-416.

Tzur, R. (2003). Teacher and students' joint production of a reversible fraction conception. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-27),* 4, 315-322. Honolulu, Hawaií .

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* Washington: The Falmer.

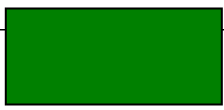
Watanabe, T. (1995). Coordinating of units and understanding of simple fraction: case studies. *Mathematics Education Research Journal, 7(2),* 160-175.

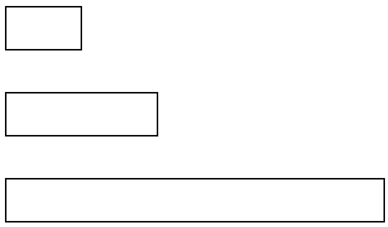
附錄 1

訪談問題組

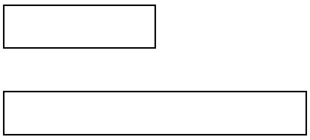
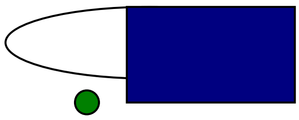
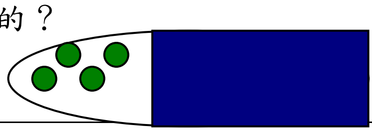
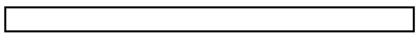
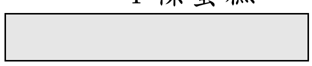
主要問題	問題焦點
問題 1： ○○○○○  這裡是一包花片拿出來的，一包有 20 顆，有一些在外面，有些在布下面。 A 請問布底下有多少顆花片？你是怎麼知道的？ B 露在外面的是多少包花片？ C 在布下的是多少包花片？ D 布底下的包數可不可以有別的稱呼？	整數部分整體關係、二階化聚、分數部分整體關係、分數詞概念、等值分數
問題 2： ○-○-○  3 顆串成一串的糖葫蘆，已知全部有 48 個糖葫蘆。 A 請問布下面是多少串？ B 外面和布下面合起來是多少串糖葫蘆？ C 如果一串為單位，把所有 X 串糖葫蘆當作是全部，外面的佔全部的多少？ D 如果串為單位，把所有 X 串糖葫蘆當作是全部，布下面的佔全部的多少？	整數部分整體關係、二階化聚、分數部分整體關係、分數詞概念、等值分數
問題 3： ○-○-○－○  4 顆串成一串的糖葫蘆，已知全部有 17 串糖葫蘆。 A 請問布下面是多少顆？ B 外面和布下面合起來是多少顆糖葫蘆？ C 如果串為單位，把所有 X 串糖葫蘆當作是全部，外面的佔全部的多少？ D 果一串為單位，把所有 X 串糖葫蘆當作是全部，布下面的佔全部的多少？	分數詞概念、迭代分數基模

主要問題	問題焦點
問題 4：	分數詞概念、迭代



○ 已知有一盒糖果把它一部分放在布下面，另外外面這一顆是$\frac{1}{5}$盒糖果。 A 布下有多少顆糖果？ B 布下的糖果是多少包？	分數基模
問題 5： 這裡有一條巧克力(由 12 公分線段表徵)，如果把它分成給 3 人，每人可以分到多少條？	相同等分割
問題 6： 這裡有一包糖果(24 顆)，如果把 6 顆分做一盤，可以分成多少盤？每盤多少顆？其中的一盤可以說是全部的多少盤？	相同等分割、分數詞概念
問題 7： 已知這一盤是一包糖果分給若干盤之後，其中一盤所分到的(8 顆)。這一盤是佔全部的$\frac{1}{3}$，請問共分了多少盤？原來一包糖果有多少顆？	迭代分數
問題 8： R：這裡分別有三組積木。  如果它們分別代表原來的$\frac{1}{5}$條，請你分別做出$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{5}{5}$、$\frac{8}{5}$、$1\frac{4}{5}$。 為什麼要這樣做？	迭代分數

主要問題	問題焦點
問題 9：	迭代分數

R：這裡分別有三組積木。  如果它們分別代表原來的 $\frac{2}{5}$ 條，請你分別做出 $\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{5}{5}$、$\frac{8}{5}$、$1\frac{4}{5}$。為什麼要這樣做？	
問題 10： 這裡是 $\frac{1}{8}$ 盤蘋果，請問 $\frac{2}{8}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{8}{8}$、$\frac{12}{8}$、$1\frac{7}{8}$ 盤蘋果有多少顆？你是怎麼知道的？ 	分數詞概念、迭代分數
問題 11： 這裡是 $\frac{2}{6}$ 盤蘋果，請問 $\frac{4}{6}$、$\frac{5}{6}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{9}{6}$、1 盤蘋果有多少顆？你是怎麼知道的？ 	分數詞概念、迭代分數
問題 12： 這裡是 $\frac{4}{3}$ 條積木請做出一條積木。你是怎麼知道的？ 	分數詞概念、迭代分數、相同等分割
問題 13： 生日派對，已知有 7 位小朋友分一條蛋糕，但是蛋糕送來時已被切 3 段。請問要如何平分？每位小朋友可以得到多少條蛋糕？	遞迴分割
問題 14： 媽媽買了 1 條蜂蜜蛋糕，大小如ㄅ圖。 1 條蛋糕  你分到二分之一條，把它帶到學校和其他三位小朋友平分，請問每一位小朋友可以吃到多少條糕？	遞迴分割

附錄 2

單位量上課學習單

一盒水蜜桃有 20 顆，<u>小明</u>吃了 2 顆，也可以說他吃了多少盒？

＊ 請找出這個題目有幾種「單位」？

＊ 這個題目要求你以什麼單位回答？

＊ 先想想，這個問題是的單位要做怎麼的變化？

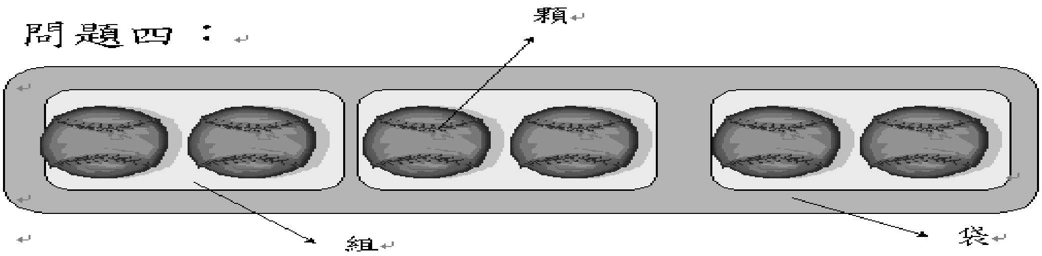
＊ 再想想，單位之間的關係是如何？

＊再用力想，回答這個問題要用整數還是分數？

附錄 3

單位量學生擬題作品

問題四：



請用上面的圖出兩個應用題給你同一組的小朋友解題。一題讓他算出整數答案，另一題讓它算出分數答案(順序可以變化)。

	學生作品
成功擬出兩種問題	請問一組有多少顆？ 請問一顆球是多少袋？
成功擬出兩種問題	一袋球有幾個？ 一組球是多少袋？
只擬出一種問題	一組有多少顆棒球？ 一袋有幾組棒球？ 少一種
只擬出一種問題	1組多球有多少顆？ 1組多球有多少顆 少一種問題

附錄 4

分分看任意門(等分割)教學設計

壹、教學目標：

1.連續量：在面積模式及線段模式的情境下練習等分實作，以瞭解等分的意義(分盡、公平)。

2.離散量：在內單型及內多型的情境下練習等分實作，以瞭解等分的意義(分盡、公平)。

3.經由實際操作等分活動，練習分數的說讀聽寫作不同表徵之間的互換。

貳、教學時間：120 分鐘(四節課)

參、教具準備：

1.為每一組準備長方形、正方形、圓形、三角形等不同形狀的紙各三張。

2.每組繩子一段(10 公分)。

3.白色積木每組 24 顆。

4.作業紙若干、無刻度尺、鉛筆、橡皮擦各六套。

5.數學札記(學習省思單)6 張

具體目標	主要教學活動或重要問話	時間	備註
	引起動機 T：今天聽說是多啦 A 夢的生日，大雄的媽媽幫它準備了一些他最愛吃的點心。小朋友你知道多啦 A 夢最喜歡吃什麼嗎？ Ss：銅鑼燒。 T：沒錯，就是銅鑼燒。你看過的銅鑼燒是什麼形狀？ Ss：圓形。	1	＊引發學生學習的興趣
1-1 連續量情境下瞭解等分的意義	教師布題 T：是的。平常大家所看到的都是圓形，但是因為今天是他的生日，所以大雄的媽媽想要給他一個驚奇，打算做出不一樣的。 來看看，媽媽到底做了哪些形狀的銅鑼燒(教師在黑板上張貼圓形、長方形、正方形及三角形等貼紙) 多啦 A 夢為了和其他人來分享他的快樂，決定邀一些朋友來參加 party。而這些朋友對於不同的銅鑼燒也有不同的喜好。多啦 A 夢便把每個人喜歡吃的形狀通通統計出來做成一個表： ╲ 圓 圓 長 正 三	6ˊ	＊教師布題

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>形
紅
豆</td><td>形
芋
頭</td><td>方
形
紅
豆</td><td>方
形
紅
豆</td><td>角
形
紅
豆</td></tr>
<tr><td>人
數</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1-2 連續量面積模式情境下操作等分割並進行分數多元表徵的互換。</td>
<td>小朋友，請你實際上切切看一個人可以得到多大？
學生解題及討論
Ss 小組進行操作。
T 挑選不同組的作品放在黑板展示。引導學生分得公不公平、有沒有全部分完。
T 引導學生進行說分數及寫分數的活動。引導學生在說分數時必須注意所用的「單位」。
綜合練習
T 在黑板上貼出不同的圖形，讓學生判斷有沒有「等分」，且用口語說出分數詞及寫下分數。</td>
<td>20ˊ

3ˊ</td>
<td>＊ 操弄輔助物
＊ 口語符號
＊個別發表及共同討論

＊表徵互換</td>
</tr>
<tr>
<td>1- 3 連續量線段模式下瞭解等分意義。

1-4 連續量線段模式下操作等分割及多元表徵互換。</td>
<td>---- 第一節完 --------
教師布題
T：有一天，有一位老父親在去世之前把他收藏多年的一條金鍊子要分給他的四個孩子。請問該怎麼分？每個孩子得到的是佔原來那條鍊子的幾分之幾？
學生解題及討論
S 操作解題後發表與討論。
T 引導學生注意是否有等分。
T 引導學生說分數詞及寫出分數。
重新布題
T：如果把剛剛大家所做的用圖(畫一條線)來表示的話，該怎麼做?請每位小朋友在你的紙上畫出來。
學生解題及討論
S 操作解題後發表與討論。
T 引導學生注意是否有等分。
T 引導學生說分數詞及寫出分數。
綜合練習
T 在黑板上貼出不同的圖形，讓學生判斷有沒有「等分」，且用口語說出分數詞及寫下分數。</td>
<td>2ˊ

10ˊ

1ˊ

5ˊ

6ˊ

6ˊ</td>
<td>＊引起動機

＊操作輔助物與口語符號、書寫符號的連結。
＊ 操作轉換為圖像表徵

＊表徵間的互換</td>
</tr>
</table>

	撰寫數學札記 --- 第二節完 ------	5ˊ	
2- 1 離散量情境下瞭解等分的意義	教師布題、問答及澄清 T：一盒蛋塔有 6 顆，分給 6 位小朋友。每一位小朋友可以得到多少顆？ Ss：每人可以得到 1 顆。 T：每人得到的這 1 顆。你知道它也可以有不同的稱呼嗎?假如我們用「盒」當作是單位，可以怎麼稱呼它？ 學生可能的答案：1 盒或 1 顆。 如果學生答 1 顆，則必須澄清強調單位不同。	2ˊ	＊教師布題 ＊澄清單位概念
2-2 離散量內多情境下操作等分割並進行分數多元表徵的互換。	教師重新布題 T：幼童軍露營當天，老師買了六盒巧克力糖要請每 3 組小朋友吃。每一盒巧克力有 24 顆。第一組有 4 位、第二組有 6 位、第三組只有 3 位。請問，這三組的每一位小朋友分到的巧克力糖有沒有一樣多？各分到多少顆？也可以說是多少盒？請你先利用各組的積木做做看看，再把答案記在紙上。	23ˊ	
	學生解題及討論 S 操作解題後發表與討論。 T 引導學生注意是否有等分。 T 引導學生說分數詞及寫出分數。 ----------第三節完-------------	20ˊ	＊ 等分割活動 ＊ 操作、口語及符號的連結
3-1 多元表徵互換練習	綜合練習 T 呈現不同的分數表徵(圖像、書寫符號、口語)要求學生以個別的方式進行五種表徵之間的互換。	10ˊ	＊五種不同表徵的連結。
	撰寫數學札記 ----------第四節完-----------		＊反省回顧及抽象化

附錄 5

分數問題測驗(甲)

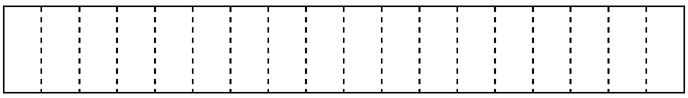
年　　班　　座號　　性別：□男　□女　姓名：

小朋友：

底下有幾個數學問題請你動動腦筋把它完成，有些題目需要畫圖或文字說明，請仔細閱讀並作答。加油！

王老師

(1)一條巧克力共有 18 塊(如下圖)。老師想把這一條巧克力平分給 3 位小朋友。



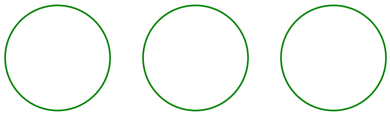
問題甲：請問每位小朋友**可以得到多少塊**？

答：

問題乙：請問每位小朋友**可以得到多少條**？

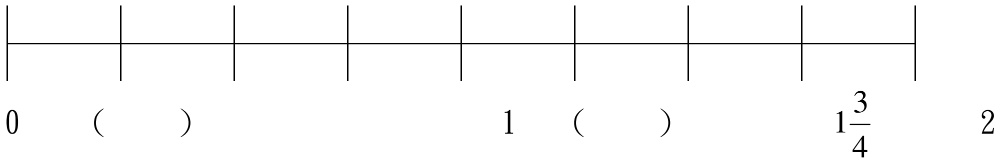
答：

(2)三個披薩平分給 4 位小朋友，請畫畫看，該怎麼分。

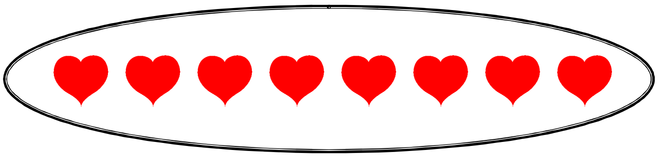


問題：每一個人可以分到**多少個披薩**？

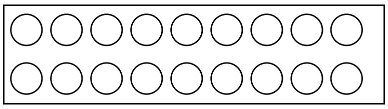
(3)請在(　　)內填入適當的分數。



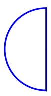
(4)下圖是一盤水果軟糖，把它平分給 8 個小朋友，請用筆圈 1 位小朋友可以得到多少顆。



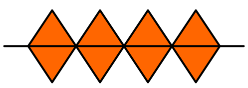
(5)下圖是**一盒**牛奶糖，請用筆塗出 $\frac{1}{3}$ **盒**牛奶糖。



(6)有一家搞怪的蔥油餅店所做的蔥油餅，**每一張都是半圓形**(如下圖)

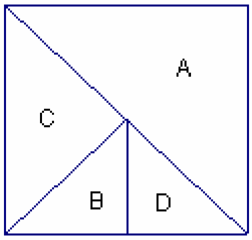
，如果從中拿走一塊像  大小的蔥油餅，那麼可以說是拿走多少張？答：(　　　　)張

(7)下圖是 $\frac{2}{7}$ 條串珠。請畫出 $\frac{7}{7}$ 條串珠。



(8)右圖是幾個圖形拚成一個正方形。其中 1 個 A 和 2 個 C 一樣大、

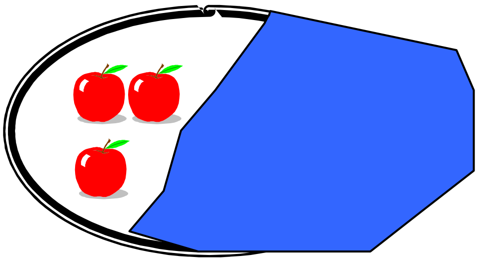
1 個 C 和 2 個 B 一樣大、B 和 D 一樣大。



問題甲：幾個 A 和 1 個 C 一樣大？

問題乙：幾個 A 和 1 個 B 一樣大？

(9) 下圖是一個盤子裡裝了一些蘋果，其中有部分被一塊布遮住了。



已知沒有遮住的那 3 顆是 $\frac{1}{4}$ 盤。

問題甲：請問被布遮住的是多少盤？
答：

問題乙：請問被布遮住的有多少顆蘋果？

答：

(10)由大排到小。

(甲) $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{9}$。

答：

(乙) $\frac{2}{5}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{2}{9}$。

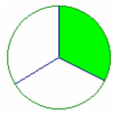
答：

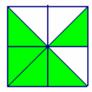
(11)請問下列哪一個分數比較接近 $\frac{1}{2}$？

Ⓐ $\frac{3}{7}$　Ⓑ $\frac{4}{9}$　Ⓒ $\frac{5}{11}$　Ⓓ $\frac{6}{13}$

答：

(12) 填填看：想一想可用什麼樣的分數來表示陰影部分佔整個圖的多少，請在括弧中寫出漏掉的分子或分母。

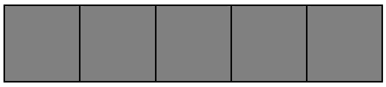




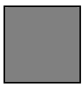
$\frac{(\quad)}{8}$　　　　$\frac{3}{(\quad)}$　　　　$\frac{(\quad)}{24}$

(13)下面兩個圖中，小莉和小美的巧克力棒。

小莉.



小美



問題：假如將小莉的巧克力棒當作是「1 條」，那麼小美所擁有的是**多少條**？(要寫出單位)

答：

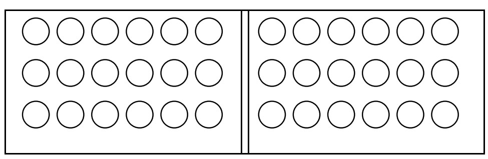
(14)請問黑色的部分是多少條積木？

(　　　　)條積木

(15)右圖是兩包牛奶糖。佩吟吃了 $\frac{2}{3}$ 包，威成吃了 $\frac{6}{9}$ 包。

請問哪一個人吃得比較多包？

為什麼？

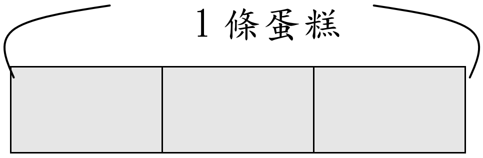


(16)冰箱裡有一個蛋糕，慧欣吃了$\frac{4}{9}$個，惠容吃了$\frac{3}{9}$個。兩人合起來吃了多少個蛋糕？請先用算式解題，並用畫圖或文字來說明。

(17)媽媽買了一箱養樂多，裡面有 24 罐。宏達喝了$\frac{3}{12}$箱，志旭喝了$\frac{4}{12}$箱。請問還剩下多少箱養樂多？請先用算式解題，並用畫圖或文字來說明。

(18)**兩條**一樣大小的蜂蜜蛋糕分給千尋和白龍每人各 1 條。千尋吃了$\frac{1}{5}$條，白龍吃了$\frac{1}{2}$條。如果把他們兩人吃的合起來，可以說吃掉多少條蛋糕？請先用算式解題，並用畫圖或文字來說明。

(19)媽媽買了 1 條蜂蜜蛋糕，大小如ㄅ圖。

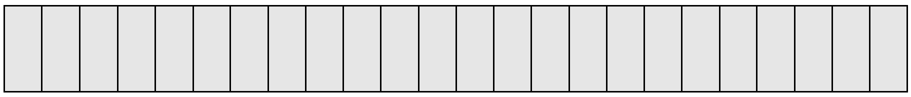
ㄅ圖


姊姊所分到的蛋糕，如ㄆ圖

ㄆ圖


姊姊又把她所分到的蛋糕切成 4 等分帶到學校吃，每一節下課吃 1 等分。請問姊姊每一節下課所吃的是**多少條蛋糕**？請用文字說明理由。

(20)下圖分別是玲玲和芳芳兩人的巧克力棒。

玲玲


芳芳


問題甲：請問芳芳的巧克力棒是玲玲的幾分之幾？為什麼？

問題乙：請問玲玲的巧克力棒的長是芳芳的多少倍？為什麼？

附錄 6

分數問題測驗(乙)

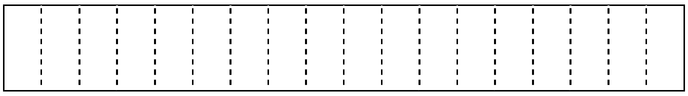
年　　班　　座號：　　性別：□男　□女　姓名：

小朋友：

底下有幾個數學問題請你動動腦筋把它完成，有些題目需要畫圖或文字說明，請仔細閱讀並作答。加油！

王老師

(1)一條巧克力共有 18 塊(如下圖)。老師想把這一條巧克力平分給 3 位小朋友。



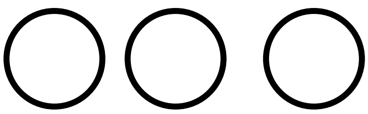
問題甲：請問每位小朋友**可以得到多少塊**？

答：

問題乙：請問每位小朋友**可以得到多少支**？

答：

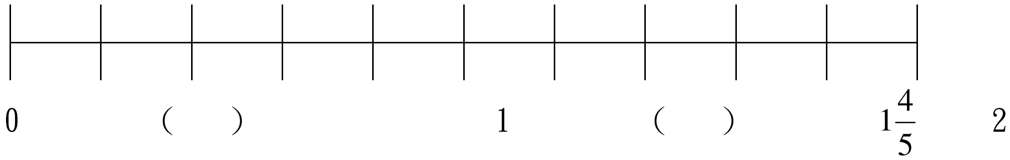
(2)桌子上有 3 個披薩，平分給 8 位小朋友，請畫畫看，該怎麼分。



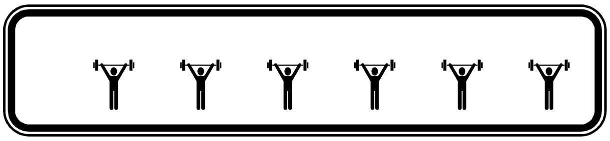
問題：每一位可以分到**多少個披薩**？

答：

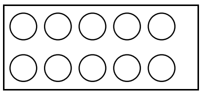
(3)請在(　　)內填入適當的分數。

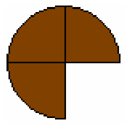


(4)下圖是一包玩具，把它平分給 6 位小朋友，請用筆圈出 1 位小朋友可以得到多少。



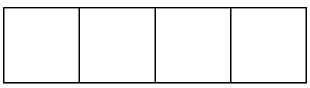
(5)右邊框框裡是一盒牛奶糖，請用筆塗出 $\frac{1}{5}$ 盒牛奶糖。



(6)如果右圖是一份蔥油餅 

請問如果從一份蔥油餅拿走一塊  大小的蔥油餅，那是拿走多少份？答：(　　　　)份

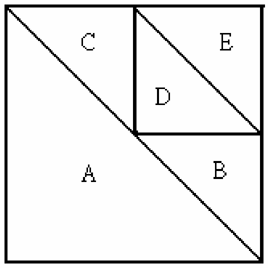
(7)學校步道進行舖地磚工程。已知下面的圖是舖了 $\frac{2}{5}$ 條步道。請畫出 $\frac{5}{5}$ **條步道。**



(8)右圖是 1 個正方形切成 5 小塊。

B、C、D、E 都一樣大，

而且 4 個合起來和 A 一樣大。

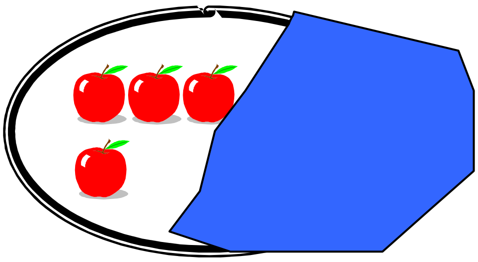


問題甲：幾個 A 和 1 個 B 一樣大？

問題乙：如果把 D、E 合起來看成一看小正方形。

幾個 A 會和這個小正方形一樣大？

(9) 下圖是一個盤子裡裝了一些蘋果，其中有部分被一塊布遮住了。



已知沒有遮住的的那 4 顆是 $\frac{1}{3}$ 盤。

問題甲：請問被布遮住的是多少盤？

答：

問題乙：請問被布遮住的有多少顆蘋果？

答：

(10) 由大排到小。。

（甲） $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{9}$。

答：

（乙） $\frac{4}{6}$、$\frac{4}{8}$、$\frac{4}{10}$。

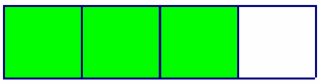
答：

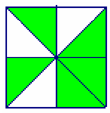
(11)請問下列哪一個分數比較接近$\frac{1}{2}$？

Ⓐ $\frac{3}{7}$　　Ⓑ $\frac{4}{9}$　　Ⓒ $\frac{5}{11}$　　Ⓓ $\frac{6}{13}$

答：

(12) 填填看：想一想可用什麼樣的分數來表示陰影部分佔整個圖的多少，請在括弧中寫出漏掉的分子或分母。

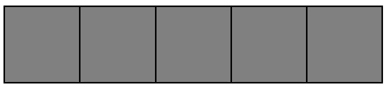




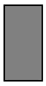
$\frac{(\quad)}{16}$　　　　$\frac{6}{(\quad)}$　　　　$\frac{(\quad)}{16}$

(13)下面兩個圖中，小莉和小美的巧克力棒。

小莉.



小美



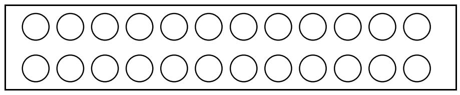
問題：假如將小莉的巧克力棒當作是「1 條」，那麼小美所擁有的是**多少條**？(要寫出單位)

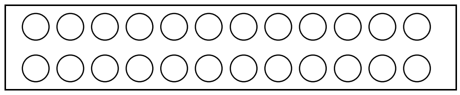
答：

(14)請問黑色的部分是多少條積木？

(　　　　　　)條積木

(15)週休二日家裡連續兩天都來了多位客人。家裡原有是**兩箱**飲料(如下圖)，星期六當天請客人喝掉$\frac{3}{4}$箱，星期日則喝掉$\frac{6}{8}$箱。請問哪一天喝得比較多箱？為什麼？





(16)媽媽買了一箱養樂多，裡面有 48 罐。宏達喝了$\frac{5}{12}$箱，志旭喝了$\frac{3}{12}$箱。請問還剩下多少箱養樂多？請先用算式解題，並用畫圖及文字來說明。

(17)爺爺買了一盒水蜜桃裡面有 12 顆。第一天吃掉$\frac{2}{6}$盒，第二天用掉$\frac{3}{6}$盒。請問還剩下多少盒水蜜桃？請先用算式解題，並用畫圖及文字來說明。

(18)**兩個**一樣大小的蔥油餅分給慧敏和宗逸每人各一個。慧敏吃了$\frac{2}{3}$個，宗逸吃了$\frac{3}{4}$個。如果把他們兩人吃的合起來，可以說吃掉多少個蔥油餅？請先用算式解題，並用畫圖或及字來說明。

(19)奶奶買了一條蜂蜜蛋糕，大小如 A 圖。

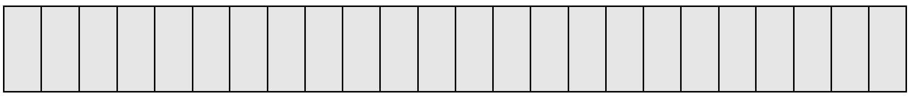
A 圖 

姊姊所分到的蛋糕，如 B 圖

B 圖 

姊姊把分到的這塊蛋糕分 3 天把它吃完。請問哥哥每天吃了**多少條蛋糕**？(請用文字說明理由)

(20)下圖分別是巧巧和乖乖兩人的巧克力棒。

巧巧 

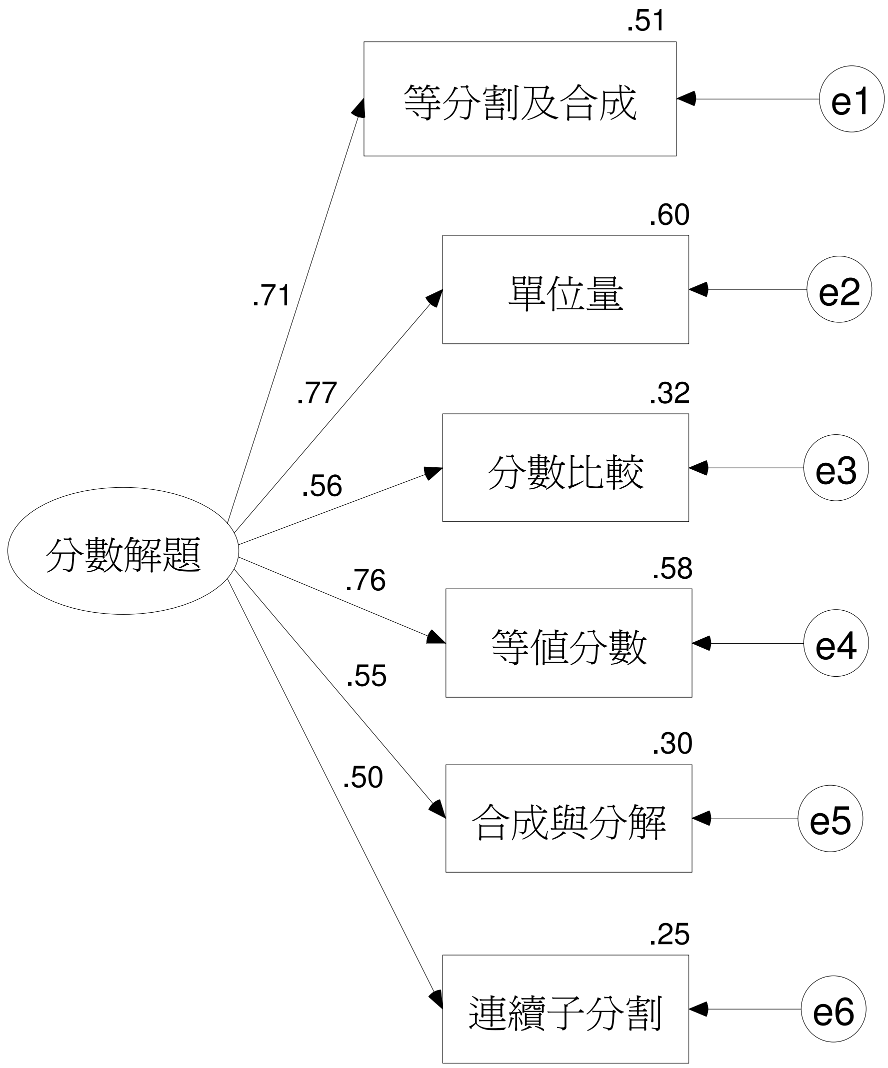
乖乖 

問題甲：請問乖乖的巧克力棒是巧巧的幾分之幾？為什麼？

問題乙：請問巧巧的巧克力棒的長是乖乖的多少倍？為什麼？

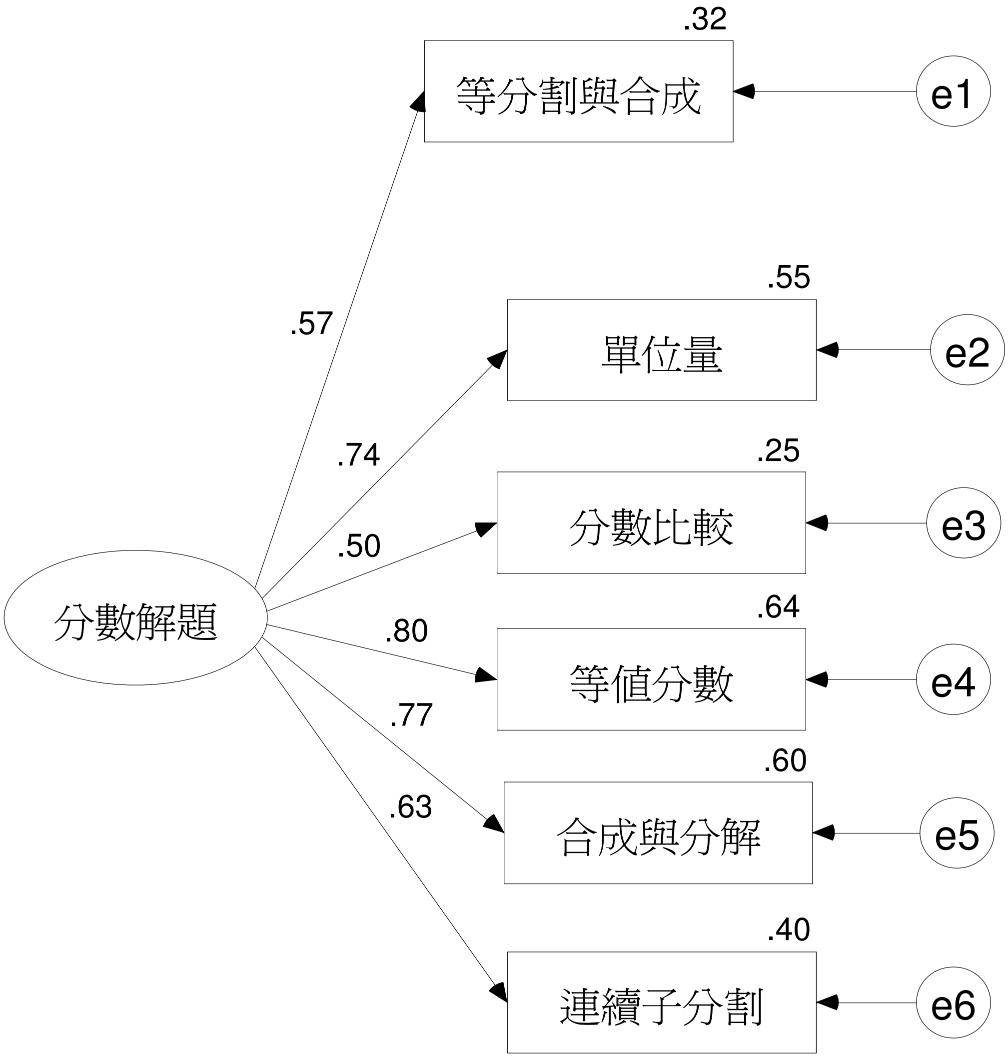
附錄 7

分數問題測驗甲卷因素結構圖



附錄 8

分數問題測驗乙卷因素結構圖



附錄 9

低分組 L1 前測訪談記錄

L1A001 R：上一次考的那一張數學(指前測)，好不好寫？
L1A002 L1：不知道。
L1A003 R：你會不會寫？
L1A004 L1：不會。
L1A005 R：如果我從一包花片，有一些藏在布裡面，剩下的放在外面(指五顆)。如果這一包有二十顆，布裡面應該有幾顆花片？
L1A006 L1：十五顆。
L1A007 R：你怎麼知道的？
L1A008 L1：因爲二十減五等於十五啊。
L1A009 R：那個五是外面的嗎？
L1A010 L1：是。
L1A011 R：一包有幾顆？
L1A012 L1：一包有二十顆。
L1A013 R：你有沒有吃過糖葫蘆？
L1A014 L1：沒有。有、有、有。
L1A015 R：現在是外面這三顆是串起來的糖葫蘆，這叫做一串。我知道全部有 48 顆糖葫蘆。除了外面的這些之外，布裡面應該有多少串？
L1A016 L1：45 串….45 顆…..15 串。
L1A017 R：15 串？你怎麼知道 15 串？
L1A018 L1：因爲 3 乘以 15 等於 45 啊。
L1A019 R：3 是什麼？
L1A020 L1：3 是一串、15 是它的乘以，三個一串，合起來有 15 串。
L1A021 R：15 是怎麼出來的？
L1A022 L1：因爲 3 個一串啊，一直疊啊，就沒有了，就知道是多少，是 15 串啊。
L1A023 R：在你還沒有疊完之前，要怎麼知道等於 15 的？因爲我的問題裡面沒有跟你講有 15 串啊。
L1A024 L1：因爲 48 先拿出來 3 個，等於 45，45 再除以 3 等於 15。
L1A025 R：嗯！好。全部有多少串？
L1A026 L1：16 串。
L1A027 R：以串來計算，外面這一串是佔全部的多少？
L1A028 L1：1….十五分之一。
L1A029 R：你爲什麼會認爲是十五分之一？
L1A030 L1：因爲那裡面有 15，再裡有一串。
L1A031 R：布裡面的是佔全部的多少？
L1A032 L1：一分之十五。

L1A033 R：如果我的糖葫蘆是四顆串在一起叫一串。現在知道全部有 17 串，就是除了這一串之外其餘的把它放到布裡面。請問布底下有幾串？

L1A034 L1：13….三串又剩下一個。

L1A035 R：我再把問題講一遍。全部有 17 串，除了放在外面這一串之外，其他的放到布裡面，布裡面有多少串？

L1A036 L1：13。

L1A037 R：13 串？

L1A038 L1：3 串。

L1A039 R：是 13 串，還是 3 串？

L1A040 L1：3 串。

L1A041 R：爲什麼？

L1A042 L1：因爲 4 乘以 3 等於 12，剩下一個就不能了。

L1A043 R：所以你覺得除了有一串一串之外，還有剩下一個的？

L1A044 L1：對啊。

L1A045 R：裡面有多少顆？

L1A046 L1：13 顆。

L1A047 R：爲什麼？

L1A048 L1：因爲 4 乘以 3 等於 12，再加一等於 13。

L1A049 R：如果把多的那一顆拿掉，裡面和外面合起來總有幾串？

L1A050 L1：四串。

L1A051 R：外面這一串佔全部的多少？

L1A052 L1：四分之一。

L1A053 R：四分之一？

L1A054 L1：三分之一。

L1A055 R：是四分之一，還是三分之一？

L1A056 L1：三分之一。

L1A057 R：你爲什麼會認爲是三分之一？

L1A058 L1：因爲這裡三份佔了一份。

L1A059 R：裡面的這一些，佔全部的多少？

L1A060 L1：一分之三。

L1A061 R：我們第一個問題談到全部有 20 顆，外面 5 顆、裡面有 15 顆。如果用一顆一顆來計算，外面這邊(指五顆)是佔全部的多少？

L1A062 L1：十五分之一。

L1A063 R：爲什麼你會認爲十五分之一。

L1A064 L1：因爲這裡有五串，再一串。

L1A065 R：爲什麼這裡有五串？

L1A066 L1：因爲 5 乘以 3 等於 15，15 再加 1 等於 15 分之 1。

L1A067 R：如果是用顆來計算，而不是用串呢？

L1A068 L1：十五分之五。

L1A069 R：我從一盒糖果裡面拿出糖果，外面只露出這一顆，其他的把它藏在布裡面，現在只知道外面這一顆是佔五分之一盒。你能不能說說看，這一盒糖果裡面有幾顆？
L1A070 L1：6 顆。
L1A071 R：爲什麼？
L1A072 L1：因爲這裡面有五，再加一顆啊。
L1A073 R：爲什麼你會認爲裡面有五顆，再加一顆？
L1A074 L1：因爲五分之一啊。
L1A075 R：你已經算出布底下是多少顆了？
L1A076 L1：嗯，五顆。
L1A077 R：布底下是佔多少盒？
L1A078 L1：一分之五。
L1A079 R：我現在畫的是一條巧克力棒(12 公分的線段)，要把它平分給三個人，你會怎麼分？
L1A080 L1：一條、一條的。
L1A081 R：你做做看好了。
L1A082 L1：(在未使用尺的情況下，用綠色筆將它畫上兩個記號)
L1A083 R：你爲什麼會這樣分？
L1A084 L1：因爲它要分成三份啊。如果分成一條的話只有兩份(註：意指切一刀得到兩份)。
L1A085 R：你是說如果綠色的畫兩條就可以分成三份？
L1A086 L1：嗯。
L1A087 R：三個人得到這樣公不公平？
L1A088 L1：公平。
L1A089 R：第二個問題。如果我知道有一條巧克力多長不太清楚，但是我知道那條巧克力平分給四個人，其中的一個人得到這樣(畫下一段 4 公分的線)。原來的那一條巧克力有多長，你能不能畫畫看？
L1A090 L1：(用尺先量原來的一段，再延長畫到 16 公分處)
L1A091 R：你爲什麼會這樣子畫？
L1A092 L1：因爲四個人啊，平分給四個人。4 乘以 4 等於 16，剛好可以平分給四個人。
L1A093 R：4 乘以 4 等於 16。第一個 4 是什麼？
L1A094 L1：一個人的，一個人先拿到的。
L1A095 R：回到剛剛第一個問題上，第一個得到多少條？
L1A096 L1：三分之一。
L1A097 R：第二個人呢？
L1A098 L1：三分之二。
L1A099 R：第二個人得到的是？
L1A100 L1：三分之二。
L1A101 R：咦，他得到三分之二條嗎？
L1A102 L1：不是。

L1A103 R：要不然呢？
L1A104 L1：三分之一條。
L1A105 R：你剛剛爲什麼說是三分之二？
L1A106 L1：因爲兩份啊。
L1A107 R：兩份是給一個人還是兩個人？
L1A108 L1：兩個人。
L1A109 R：如果這是一包糖果(18 顆)，要平分給六位小朋友(用六個花片代表六人)，你會怎麼分？
L1A110 L1：(利用一輪一次分一個分成六堆)
L1A111 R：一個人得到多少顆？
L1A112 L1：六顆。
L1A113 R：一個人喔！
L1A114 L1：不是，不是，是三顆。
L1A115 R：一個人得到？
L1A116 L1：三分之一。
L1A117 R：一包有這麼多(用手比全部的積木)，一個人得到多少包？
L1A118 L1：三分之一包。
L1A119 R：爲什麼你知道得到三分之一包？
L1A120 L1：因爲這裡三個一包，所以得到三分之一包。
L1A121 R：這個小朋友(指每排積木前的花片)得到多少包？
L1A122 L1：三分之一包。
L1A123 R：這個？
L1A124 L1：三分之一。
L1A125 R：這個？
L1A126 L1：三分之一。
L1A127 R：這個？
L1A128 L1：三分之一。
L1A129 R：這個？
L1A130 L1：三分之一。
L1A131 R：這個？
L1A132 L1：三分之一。
L1A133 R：好。現在要把這一包糖果，每六顆放做一盤，你會怎麼分？
L1A134 L1：每六盤？
L1A135 R：六顆放做一盤。
L1A136 L1：(每六顆放一堆)
L1A137 R：這樣總共幾盤？
L1A138 L1：四盤。
L1A139 R：用盤做爲單位，這一盤是佔全部的多少？
L1A140 L1：六分之一盤。
L1A141 R：那這一盤呢？
L1A142 L1：六分之一盤。

L1A143 R：爲什麼你會認爲它是佔全部的六分之一？
L1A144 L1：因爲它有六個啊，佔一盤，所以是六分之一盤。
L1A145 R：我把一包糖果拿出來，現在用盤子裝。我知道這一盤(有三個積木)是三分之一，請問被布蓋著是多少？
L1A146 L1：三盤。
L1A147 R：你怎麼知道？
L1A148 L1：因爲三分之一啊，所以有三盤。
L1A149 R：裡面有幾顆？
L1A150 L1：三顆。
L1A151 R：爲什麼你知道裡面有三顆？
L1A152 L1：因爲這裡有三顆啊(指布外面)，所以裡面也有三顆。
L1A153 R：每一盤有三顆，還是全部加起來有三顆？
L1A154 L1：不是，全部加起來是九顆。
L1A155 R：每一盤裡面有幾顆？
L1A156 L1：三顆。
L1A157 R：布外面和裡面合起來是一包花片。布外面這一顆花片代表五分之一包花片，請問布裡面有多少顆花片？
L1A158 L1：五顆。
L1A159 R：布裡面是多少包？
L1A160 L1：五分之四。
L1A161 R：五分之四是多少顆花片？
L1A162 L1：四顆。
L1A163 R：你剛剛講裡面有五顆，現在講四顆，你認爲是幾顆？
L1A164 L1：四顆。
L1A165 R：我有一包花片，拿出六顆在布外面，其他的放在布裡面。現在知道布外面的也可以稱爲五分之二包花片，請問布裡面是多少顆花片？
L1A166 L1：十二顆。
L1A167 R：你怎麼知道是十二顆？
L1A168 L1：因爲外面有六顆，所以裡面也有六顆。
L1A169 R：裡面有多少包？
L1A170 L1：也是五分之一包。
L1A171 R：我剛剛講的五分之二包是指布外面的，現在問的是布裡面有多少顆？
L1A172 L1：二十。
L1A173 R：你怎麼知道是二十？
L1A174 L1：(停約二十秒)十五片。
L1A175 R：你怎麼知道是十五？
L1A176 L1：因爲這裡是五分之二啊！(用兩個手掌各蓋住三顆)。
L1A177 R：裡面有多少包？
L1A178 L1：五分之五包。

L1A179 R：有幾顆？
L1A180 L1：十五顆。
L1A181 R：你是怎麼算出十五的？是三乘以五嗎？
L1A182 L1：對！
L1A183 R：這裡是一包積木(24 顆)要請你拿出四分之三包積木，你會怎麼拿？
L1A184 L1：(將四顆排成一列，共排成三列)。
L1A185 R：你怎麼知道這是四分之三包？
L1A186 L1：這裡有四顆，有三個。
L1A187 R：你能不能拿出六分之二包積木？
L1A188 L1：(將六顆排成一列，共排成二排)。
L1A189 R：(拿出一張紙，上面畫著一條線段，並在上面做兩個記號，表示將它分為三等分)你們家開生日 PARTY，請了一條蛋糕。送來的時候師父已經先切兩刀，這條蜂蜜蛋糕會變成幾段？
L1A190 L1：三段。
L1A191 R：可是現在問題來了，當小朋友都到他家時發現包括他自己總共是七個人想要平分這一段蛋糕，你有沒有辦法幫他做做看？把你想法說出來。
L1A192 L1：(用手在每一段上面做兩次手勢，從第一段點數九次)會多出來。多出兩塊。
L1A193 R：有沒有辦法平分？
L1A194 L1：沒有。

附錄 10

低分組 L1 後測訪談記錄

L1B001 R：這裡有幾顆花片？
L1B002 L1：六顆。
L1B003 R：第一個問題，有一包花片裡面有二十顆，我拿出一部分(指布外面)放在外面讓你看到，其他的放在布裡面，請問布裡面有多少顆？
L1B004 L1：十四顆。
L1B005 R：你怎麼知道的？
L1B006 L1：這裡有六顆，二十減六等於十四。
L1B007 R：第二個問題，外面這些花片佔了多少包？
L1B008 L1：二十分之六包。
L1B009 R：裡面的花片可以說它是多少包？
L1B010 L1：二十分之十四。
L1B011 R：另一個新問題，一包花片有多少顆我不知道，但是知道外面這六顆是佔了四分之一包，請問布裡面有多少包？
L1B012 L1：二十四。
L1B013 R：外面是四分之一包，裡面有多少包？
L1B014 L1：二十四分之三。
L1B015 R：爲什麼你會說二十四分之三？
L1B016 L1：因爲這裡有六顆，裡面說不定有二十四乘以三。
L1B017 R：所以你認爲裡面有二十四分之三包。你要不要做做看有多少顆？
L1B018 L1：全部有二十四顆。
L1B019 R：你的全部指哪裡指給我看看。
L1B020 L1：這裡面和這外面合起來的。這裡有六顆佔四分之一啊，裡面有四分之三啊，六乘以三就是十八顆。
L1B021 R：你剛剛講的和第一次跟我講的不太一樣喔！起先你跟我講裡面是二十四分之三，現在講四分之三包。
L1B022 L1：應該是四分之三包。
L1B023 R：四分之三包是多少顆？
L1B024 L1：十八顆。
L1B025 R：你是怎麼知道的？
L1B026 L1：這裡有六顆，四分之一是六顆，四分之三就等於十八顆。
L1B027 R：再一個新的問題。外面這些是佔了五分之二包，布裡面應該有多少包？
L1B028 L1：五分之三包。
L1B029 R：五分之三包是多少顆？
L1B030 L1：九顆。
L1B031 R：你怎麼知道？

L1B032 L1：五分之一就有一包、五分之二就有二包，裡面有五分之三就有三包。有三包，三乘以三等於九。(註：口誤為包)
L1B033 R：這種問題你以前不會做，現在會做。回去後有沒有問其他家人？
L1B034 L1：沒有。
L1B035 R：糖葫蘆五顆串成一串。布外面和布裡面合起來有七串，請問布裡面應該有多少顆？
L1B036 L1：三十顆。
L1B037 R：你怎麼知道？
L1B038 L1：因為它串成七串了，五乘以七等於三十五，再減掉五等於三十。
L1B039 R：為什麼要五乘以七？
L1B040 L1：因為一串裡面有五顆，七串。
L1B041 R：外面這六顆要串成一串，布裡面和布外面合起來有三十顆，請問布裡面有多少串？
L1B042 L1：四串。
L1B043 R：你怎麼知道？
L1B044 L1：因為這裡有六顆，全部有三十，三十減六等於二十四。
L1B045 R：二十四顆是多少串？
L1B046 L1：四串。
L1B047 R：這種糖葫蘆是三顆串在一起，如果用一串一串來算的話，這一串是佔全部七分之一，請問布裡面應該有多少？
L1B048 L1：十八顆。
L1B049 R：幾串？
L1B050 L1：六串。
L1B051 R：六串是佔全部的多少？
L1B052 L1：二十一分十八。
L1B053 R：有沒有別種稱呼的方式？
L1B054 L1：三分之六。
L1B055 R：為什麼是三分之六？
L1B056 L1：因為這裡有三顆啊，六乘三等於二十一，再減的話就是十八。因為有三串，有十八個，所以是三分之六。
L1B057 R：你可以寫一下三分之六嗎？
L1B058 L1：(寫下 3/6)。
L1B059 R：三分之六的單位是什麼？
L1B060 L1：包。
L1B061 R：我們沒有包，只有一串一串。
L1B062 L1：串。
L1B063 R：好啦！我們把全部一串一串合起來，放在一包裡面，這個是什麼？
L1B064 L1：三分之六串。
L1B065 R：外面這一顆花片是佔全部的八分之一包，裡面應該有多少顆？
L1B066 L1：七顆。
L1B067 R：你怎麼知道？

L1B068 L1：因爲這裡有一顆，全部有八顆，再減一顆。
L1B069 R：很好。現在外面的花片和裡面的花片合起來叫做一包，外面這邊(指八顆花片)叫做六分之二包，請問布裡面有多少顆？
L1B070 L1： 二十顆。
L1B071 R：你怎麼知道。
L1B072 L1：因爲它有六分之二，每四個就是六分之一，再乘以四的話就是二十四，再減掉二個的話，就是…….十六顆。
L1B073 R：有沒有其他的想法也可以知道裡面有十六顆？
L1B074 L1：想不出來。
L1B075 R：有一條蜂蜜蛋糕長成這樣子(指 12 公分的線段)，請你把它平分給三位小朋友，請問你會怎麼做？
L1B076 L1：(向研究者要尺，量出總長後每三公分做一記號)分成三份。
L1B077 R：這一份可以說是多少條？
L1B078 L1：三分之一條。
L1B079 R：這裡呢？
L1B080 L1：三分之二。
L1B081 R：這裡呢？
L1B082 L1：十二分之一。
L1B083 R：我有點聽不懂，這裡是三分之一、三分之二，十二分之一。再整理一遍吧。
L1B084 L1：十二分之一。
L1B085 R：這裡呢？
L1B086 L1：十二分之一。
L1B087 R：這裡呢？
L1B088 L1：十二分之一。
L1B089 R：這裡呢？
L1B090 L1：也是十二分之一。
L1B091 R：爲什麼你會認爲是十二分之一條？
L1B092 L1：因爲它全長有十二公分，平分成三份，每一份就是佔全部的十二分之一。
L1B093 R：那個一代表什麼？
L1B094 L1：其中有一個小朋友。
L1B095 R：十二代表什麼？
L1B096 L1：全長。
L1B097 R：所以你用全長和小朋友把它放在一起，把它叫作十二分之一條？
L1B098 L1：嗯！
L1B099 R:有一條蜂蜜蛋糕有多長我不知道,但是我知道這裡(指 5 公分線段)是佔四分之一條，你能不能幫我畫出一條蛋糕長成怎麼樣？
L1B100 L1：(用尺再畫出 15 公分)。
L1B101 R：你怎麼知道這樣子畫是對的？

L1B102 L1：因爲這裡有五公分(指原來的)，四段的其中一段，所以四分之一、四分之二、四分之三、四分之四啊。

L1B103 R：所以，你又接了幾公分？

L1B104 L1：十五公分。

L1B105 R：回到上面那個題目，這條蜂蜜蛋糕如果要分給三個人，你要切幾刀？

L1B106 L1：兩刀。

L1B107 R：哪裡指給我看看。

L1B108 L1：(指中間兩個記號)。

L1B109 R：再來一個問題，有一條蜂蜜蛋糕有多長我不知道，你現在所看到的是五分之三條，請你畫出一條。

L1B110 L1：(用尺畫出四公分)。

L1B111 R：你怎麼知道這樣子畫是對的？

L1B112 L1：因這裡是六公分啊，五分之三，每一段有二公分，再加二段就是四公分。

L1B113 R：這一段蜂蜜蛋糕(四公分)叫做四分之二條，請你做出四分之七條。

L1B114 L1：(用尺多加十公分)。

L1B115 R：你怎麼知道這個是四分之七？

L1B116 L1：因爲這裡是四分之二，一段有兩公分，因爲七減二等於五，再多五條，二乘以五就是十，這裡還有四，所以十加四等於十四。

L1B117 R：你講的十四是全部嗎？

L1B118 L1：十四是全部。

L1B119 R：再來。(畫一段 12 公分)我現在畫給你的這一段叫做三分之四條蜂蜜蛋糕，請問一條蛋糕你能不能畫出來？

L1B120 L1：(拿尺再畫出三公分)。

L1B121 R：我畫的是三分之四條，加上你畫的就是一條嗎？

L1B122 L1：是四分之一。

L1B123 R：你畫的是四分之一嗎？

L1B124 L1：嗯！

L1B125 R：爲什麼？

L1B126 L1：每一段有四公分，再加一小段還是四。再加一條的話就是四分之四。

L1B127 R：再加這一條就是四分之四？

L1B128 L1：嗯！

L1B129 R：爲什麼你會這樣想？爲什麼要加一條？

L1B130 L1：錯了。

L1B131 R：錯了？

L1B132 L1：(拿橡皮擦，把原來的四公分擦掉一公分)。

L1B133 R：爲什麼？

L1B134 L1：因爲每一段有三公分，三乘以四等於十二啊，再加一段就是三分之五，等於十五。

L1B135 R：三分之五為什麼等於十五？
L1B136 L1：因為這裡有十二公分，再加三公分等於十五。
L1B137 R：所以你認為全部的長是十五公分？
L1B138 L1：對。
L1B139 R：所以一條是十五公分？
L1B140 L1：(點頭)。
L1B141 R：這個不要用尺，直接說說看。(畫一條 12 公分線段，再分成三等份)開生日宴會，做蛋糕的師傅送蛋糕來，送來的時候已經把這一條蛋糕切成三段，這一段是多少條蛋糕？
L1B142 L1：三分之一條。
L1B143 R：這裡呢？
L1B144 L1：三分之一。
L1B145 R：這裡呢？
L1B146 L1：三分之一。
L1B147 R：可是現在問題來了，那天去你們家的時候全部有七位小朋友，要把這一條蛋糕平分掉，該怎麼辦？
L1B148 L1：會多出來。
L1B149 R：為什麼？它不可以有剩下。
L1B150 L1：不知道。
L1B151 R：如果三分之一條先分的話，你會不會分？
L1B152 L1：要分幾個？
L1B153 R：給七個人分。
L1B154 L1：還是算不出來。
L1B155 R：你不用實際上去切。
L1B156 L1：這一段？三分之七。
L1B157 R：我沒有問你最後的答案，你先跟我講要怎麼切？
L1B158 L1：切七段。
L1B159 R：如果是這兩段，你會怎麼切？
L1B160 L1：也是切成七段。
L1B161 R：如果再加這邊呢？
L1B162 L1：也是七段。
L1B163 R：總共切成幾段？
L1B164 L1：二十一段。
L1B165 R：每一個人可以得到多少？
L1B166 L1：得到三段。
L1B167 R：我怎麼去稱呼這三段？他是得到多少條？
L1B168 L1：七分之三條。
L1B169 R：為什麼是七分之三？
L1B170 L1：咦，七分之一、七分之一。
L1B171 R：為什麼是七分之一？
L1B172 L1：因為三乘以七等於二十一啊，其中的一段就是三。

L1B173 R：然後呢？
L1B174 L1：因爲三乘以七等於二十一，每一段都有三啊。
L1B175 R：你直接用手畫，不用用尺畫得很精細。...其中一個小朋友的畫斜線出來。
L1B176 L1：(在每一段裡面做了七等份，共二十一等份，且在最前面的三段畫上斜線)。
L1B177 R：你現在畫的和剛剛講的不太一樣喔！
L1B178 L1：很難分啊！
L1B179 R：差不多就好了。這個小朋友得到的是多少條？
L1B180 L1：二十一分之三。
L1B181 R：確定嗎？
L1B182 L1：(點頭)。
L1B183 R：再一個問題。(畫一 12 公分線段，平分成四等份)同樣是一條蜂蜜蛋糕，先切四段之後，結果那天來了五位小朋友，該怎麼分？
L1B184 L1：每段分成五份。
L1B185 R：這裡呢？
L1B186 L1：五份。
L1B187 R：全部呢？
L1B188 L1：有二十份。每位小朋友可以分到四份。
L1B189 R：是多少條？
L1B190 L1：四分之一。
L1B191 R：四分之一？
L1B192 L1：二十分之………五段。
L1B193 R：是五段？
L1B194 L1：四段。因爲每段分成五，四段二十，每位小朋友可以得到四段。不是….二十….(抓臉)
L1B195 R：慢慢想沒關係。可以重頭想。
L1B196 L1：八段。
L1B197 R：爲什麼又變八段？
L1B198 L1：因爲四除以五就不夠啊。四變成八的話就夠了。
L1B199 R：我再把題目講一遍…..。每一個小朋友得到多少條？
L1B200 L1：四分之一條。
L1B201 R：(畫上下兩條 12 公分的線，上面分成四等份、下面分成三等份)這兩條蛋糕是一樣的。上面的這裡是四分之一條，下面這裡是三分之一條。請問三分之一條和四分之一條誰多？
L1B202 L1：四分之一條多？
L1B203 R：它比較長？
L1B204 L1：都一樣長。
L1B205 R：都一樣長？
L1B206 L1：不是，三分之一。
L1B207 R：三分之一條比四分之一條長多少？

L1B208 L1：一公分。
L1B209 R：它比它多多少條？
L1B210 L1：多一條。
L1B211 R：為什麼？
L1B212 L1：其中的一小部分。
L1B213 R：其中的一小部分我要怎麼稱呼它多少條？
L1B214 L1：三分之零。
L1B215 R：怎麼知道的？
L1B216 L1：因為它根本不能分成一段啊。
L1B217 R：是不能分成一段。
L1B218 L1：二分之一條。
L1B219 R：那一小部分就可以叫做二分之一條？
L1B220 L1：一分之一。
L1B221 R：一分之一喔？
L1B222 L1：嗯！因為他是一小段。
L1B223 R：一分之一，不是等於一嗎？
L1B224 L1：想不出來。
L1B225 R：.......好。三分之四條比較多還是一條多？
L1B226 L1：一條。
L1B227 R：為什麼？
L1B228 L1：因為一條是四分之四。
L1B229 R：為什麼不可以是三分之三？
L1B230 L1：一樣多。
L1B231 R：如果老師現在所畫的叫做一條蜂蜜蛋糕(十六公分的線)，把它分成兩等份(在八公分處做記號)，其中的一份給你，你得到多少條蜂蜜蛋糕？
L1B232 L1：二分之一條。
L1B233 R：你把二分之一條帶回教室去和其他三位小朋友一起平分，包括你總共有四位小朋友要來平分你所得到的二分之一條，請問每一個小朋友可以得到多少條？
L1B234 L1：四分之一條。
L1B235 R：為什麼？
L1B236 L1：因為有四個小朋友，包括我，每一個小朋友可以得到一等份。
L1B237 R：你可不可以畫出來看看，每一個小朋友得到哪裡？
L1B238 L1：(每二公分做一記號，做了三個記號)
L1B239 R：你所畫的是四個小朋友得到的，你一個人得到的是哪裡？
L1B240 L1：這裡(手指第一小段)。
L1B241 R：這裡可以稱它為幾條？
L1B242 L1：四分之一條。
L1B243 R：如果這六顆積木是從一條積木鋸下來的，現在知道這裡知道它是四分之三條積木，一條積木有多長你能不能做做看？

L1B244 L1：好了(拿了兩顆在原來的六顆旁邊)。
L1B245 R：你是怎麼做出來的？
L1B246 L1：因爲四分之一有兩個，六個積木就有三等份，再加一個(指一份)就是等於四。
L1B247 R：所以一條總共有多少顆？
L1B248 L1：八顆。
L1B249 R：你會不會做四分之六條積木？
L1B250 L1：(拿四顆在原來八顆旁邊)。
L1B251 R：你多加了幾顆？
L1B252 L1：四顆。
L1B253 R：第一次看你加了兩顆，變成幾條？
L1B254 L1：四分之五條。
L1B255 R：第二次看你又加了兩顆，變成幾條？
L1B256 L1：四分之十二，耶，四分之六條。
L1B257 R：四分十二條和四分之六條有什麼不一樣，你爲什麼要改變？
L1B258 L1：錯了，我把十二顆積木把它拿出來。

附錄 11

中分組 M1 前測訪談記錄

M1A001 R：好，第一個問題要來問妳是說我從一包花片裡面，把那一包花片全部都倒出來，然後把這五顆放在這邊，把這五顆花片放在這裡，其餘的花片我藏在布底下，那我現在這一包花片總共有 20 顆，那知不知道布底下有多少顆花片？

M1A002 M1：……嗯……等一下……

M1A003 R：妳現在想怎麼算？

M1A004 M1：想要 20 乘以 5。

M1A005 R：為什麼要 20 乘以 5？

M1A006 M1：因為有一包 20 片，然後要先算出它這邊有多少片，就 20 乘以 5 這樣子就知道這裡面有多少。……那邊就有 100 個。

M1A007 R：100 個花片？那如果是這樣子的話，我說這些花片是從一包裡面倒出來的，妳怎麼會認為它有 100 個？是 5 乘以 20。我說那包花片裡面只有 20 顆。全部都倒出來了哦！5 顆放外面，我現在知道全部有 20 顆。全部 20 顆的意思是說這邊跟這邊合起來是 20 顆，那布底下有多少顆？

M1A008 M1：那這裡面有 15 顆。

M1A009 R：15 顆？不是 100 顆？

M1A010 M1：不是 100 顆。

M1A011 R：15 顆，好。那麼我可以說外面這 5 顆花片可以說是多少包？

M1A012 M1：用分數嗎？

M1A013 R：可以呀!

M1A014 M1：二十分之五。

M1A015 R：二十分之五包。那裡面呢？

M1A016 M1：二十分之十五包。

M1A017 R：二十分之十五包，好，很好。再來，妳有沒有吃過糖葫蘆？

M1A018 M1：沒有。

M1A019 R：有沒有看過糖葫蘆？

M1A020 M1：有。

M1A021 R：有，就紅紅的那個，串成一串的嘛!那這個糖葫蘆是這樣子，3 顆把它串成一串，叫做一串糖葫蘆，這種單獨的叫做一顆一顆，這個叫做一串，那我現在知道說外面加布裡面總共有 48 串糖葫蘆。

M1A022 M1：48 串糖葫蘆？

M1A023 R：對，48 串糖葫蘆，那裡面有多少顆糖葫蘆？……重來好了，重來好了，妳再聽一次。這裡有 3 顆糖葫蘆串成一串，然後裡面跟外面總共有 48 個……現在是 48 個，裡面有多少串？

M1A024 M1：裡面有 48 個糖葫蘆？

M1A025 R：不是，我說全部有 48 個，全部就是裡面跟外面合起來有 48 個糖葫蘆，那如果 3 顆串成一串，裡面有多少串？
M1A026 M1：裡面……一百……一百……(算)一百四十顆的糖葫蘆。
M1A027 R：妳是怎麼算出來的？
M1A028 M1：48 去乘以 3。
M1A029 R：48 去乘以 3？其實現在再換一個題目，總共有 9 顆，如果像這樣子 3 顆串成一串，裡面應該有多少串？
M1A030 M1：你說裡面有……
M1A031 R：布裡面應該有多少串？
M1A032 M1：布裡面有……串……9 顆……裡面有幾串？
M1A033 R：嗯。
M1A034 M1：9……9 顆……3 乘以……3 要……3 顆……老師說裡面有多少？
M1A035 R：我說外面加裡面總共有 9 顆糖葫蘆，9 顆，那裡面應該有多少串？
M1A036 M1：一串。
M1A037 R：一串？妳怎麼知道的？
M1A038 M1：因爲這樣一串就是有 3 顆的糖葫蘆，這裡面也有一串糖葫蘆，這樣子就有 9 顆糖葫蘆。
M1A039 R：再來一個問題是，現在我有 4 顆要變成糖葫蘆，這要變成一串糖葫蘆，那我知道總共有 5 串糖葫蘆，那麼……不對，妳剛剛說裡面有多少顆？妳剛剛說有 3 顆？
M1A040 M1：對。
M1A041 R：那本來這個外面是 3 顆的，如果用 1 顆 1 顆來算，是佔全部的多少？
M1A042 M1：9 顆……
M1A043 R：裡面跟外面叫做全部，總共佔了多少？
M1A044 M1：佔了……佔了全部……9 顆嗎？
M1A045 R：嗯。
M1A046 M1：嗯，佔了三分之九顆。
M1A047 R：佔了三分之九顆？爲什麼？
M1A048 M1：因爲有糖葫蘆，這裡有 3 顆，這裡面有 3 顆，就是佔了全部的三分之九顆。
M1A049 R：三分之九顆妳能不能把它寫下來，寫在這邊？
M1A050 M1：用寫的還是畫的？
M1A051 R：寫的，妳不是說三分之九顆嗎？來。
M1A052 M1：就是糖葫蘆……
M1A053 R：不用寫糖葫蘆，妳只要用數學符號把它寫下來就好了。
M1A054 M1：好。(寫)
M1A055 R：外面就佔全部的三分之九，這個九是？
M1A056 M1：它一顆糖葫蘆，一串還有那一串這樣子。
M1A057 R：然後這個 3 是？

M1A058 **M1**：是一串的糖葫蘆。
M1A059 **R**：好，妳把妳的名字座號寫在這邊，好不好？
M1A060 **M1**：好。(寫)好了。
M1A061 **R**：現在再回到這個題目。這裡是四顆變成一串糖葫蘆，那我現在知道全部有三串，那布底下應該有多少顆？
M1A062 **M1**：多少顆？好。有八顆。
M1A063 **R**：妳怎麼知道的？
M1A064 **M1**：它說布裡和外面的一共有 3 串，然後一串糖葫蘆有 4 顆，這裡面有 2 串，所以等於 8 顆。
M1A065 **R**：如果用一串一串來算的話，裡面和外面總共有幾串？
M1A066 **M1**：三串。
M1A067 **R**：那外面這一串是佔全部的多少？用一串來算。
M1A068 **M1**：嗯，四分之……四分之一。
M1A069 **R**：四分之一？好。我再把它說得更清楚，其實是一樣。就是說妳說外面有一串，裡面有兩串嘛，這三串原來是放在一包裡面的，那我也可以說外面這裡是多少包？
M1A070 **M1**：四分之一包。
M1A071 **R**：四分之一包？爲什麼妳會知道是四分之一包？
M1A072 **M1**：因爲一串要數顆的啊!1、2、3、4，裡面的四分之一包的其中一顆。
M1A073 **R**：其中一顆？
M1A074 **M1**：嗯。
M1A075 **R**：那布底下是佔多少包？
M1A076 **M1**：佔四分之八……四分……四分……佔全部的……四分之四……我改成四分之四包。
M1A077 **R**：哦，妳說外面這邊是四分之四包？
M1A078 **M1**：嗯。
M1A079 **R**：好，爲什麼要這樣子改？
M1A080 **M1**：因爲這樣子有四分之……每一顆都四分之一呀!四分之二、四分之三、四分之四，這樣子。
M1A081 **R**：所以是四分之四包？那布裡面有多少包？
M1A082 **M1**：四分之八包。
M1A083 **R**：四分之八包？爲什麼妳知道四分之八包？
M1A084 **M1**：因爲一串這樣子就有四顆，如果拿起一顆就是四分之一顆嘛，那這它有兩串，所以是四分之八包。
M1A085 **R**：好，來，再一個問題，這個問題是說我從一包裡面拿出所有的糖果，然後除了一顆露在外面讓妳看到之外，其餘的藏在布底下，我知道這一顆糖果我也可以稱它爲五分之一包糖果……
M1A086 **M1**：哦!五分之一包糖果。
M1A087 **R**：對，那請問布底下有多少顆糖果？
M1A088 **M1**：布底下……五分之一包就是其中的一顆……裡面藏了五分之……嗯？……裡面藏了四顆，加上外面這一顆就是五分之一

顆。

M1A089 **R**：這樣子？好，很好。那外面這一顆我也可以說它是幾包糖果？
M1A090 **M1**：五分之一包糖果。
M1A091 **R**：裡面所藏的這一些呢？
M1A092 **M1**：五分之……你說是全部嗎？
M1A093 **R**：布底下的。
M1A094 **M1**：哦，那就是五分之……一顆……這樣子是……這樣子是四……這裡不算嗎？
M1A095 **R**：對，不算。
M1A096 **M1**：那就是四分之一包糖果。
M1A097 **R**：爲什麼妳會知道四分之一包？
M1A098 **M1**：因爲這個不算，然後它有四顆糖果，然後拿一顆就是四分之一包糖果。
M1A099 **R**：爲什麼要拿一顆？
M1A100 **M1**：嗯……四分之……應該是四分之四包糖果。
M1A101 **R**：四分之四包糖果？
M1A102 **M1**：嗯。
M1A103 **R**：四分之四，妳講的第一個四是指什麼？
M1A104 **M1**：是指這裡面有四顆。
M1A105 **R**：第二個四是什麼？
M1A106 **M1**：四份裡面有四顆……四份……應該……應該是四分之一包糖果，因爲拿一份，那一份就是四分之一包糖果。
M1A107 **R**：那如果說那四份我都要算呢？
M1A108 **M1**：那就是四分之四包糖果啊!
M1A109 **R**：好，再來。我現在有一條繩子想要分給 3 位小朋友，這條繩子要分給 3 位小朋友，平分給 3 位哦!那妳會怎麼做？
M1A110 **M1**：我會……
M1A111 **R**：妳可以畫畫看，用黑色的畫。
M1A112 **M1**：先量一下。
M1A113 **R**：好，先量一下。
M1A114 **M1**：12……12 就去除以 3，這樣子要平分 3 位，每人要分 4……1、2、3、4，對，這樣，每人就是分 4 段。……這樣子，每人都分 4 段。
M1A115 **R**：這個小朋友從哪裡分到哪裡？
M1A116 **M1**：從這裡到……
M1A117 **R**：妳把它畫這樣子好了。
M1A118 **M1**：圈起來嗎？
M1A119 **R**：對。
M1A120 **M1**：1、2、3、4，到這裡。
M1A121 **R**：到這裡？好。這是一條繩子，結果他得到這邊，那妳能不能跟我說他得了多少條繩子？

M1A122 **M1**：他得到……我分 12 份，然後就是十二分之四條。
M1A123 **R**：十二分之四條？那這個小朋友可以得到多少條？
M1A124 **M1**：也是十二分之四條。
M1A125 **R**：那這個呢？
M1A126 **M1**：也是一樣。
M1A127 **R**：好，再來，我有一段繩子，然後現在分給六個小朋友，分給六位小朋友，那這六位小朋友知道其中的一位小朋友得到這麼多，那妳能不能幫我畫出我原來的那一條繩子？
M1A128 **M1**：那條繩子每一個小朋友不會很多？
M1A129 **R**：一個小朋友得到這樣。
M1A130 **M1**：得到這樣？
M1A131 **R**：嗯。那原來那一條是怎樣？
M1A132 **M1**：原來的？好，看一下。……就要畫到 5 個……3、4、5……(畫)這樣。
M1A133 **R**：好，妳把妳切斷的地方用紅的點出來。
M1A134 **M1**：好。……1、2、3、4……(畫)1、2、3、4、5、6，好。
M1A135 **R**：好，那這位小朋友他得到多少段？
M1A136 **M1**：他得到……
M1A137 **R**：對不起，是多少條。
M1A138 **M1**：多少條，看一下。1、2、3、4……得到六分之一條。
M1A139 **R**：這個呢？
M1A140 **M1**：也六分之一條。
M1A141 **R**：這個？
M1A142 **M1**：六分之一條。
M1A143 **R**：好，再來的題目是這樣子的。我這裡是從一包巧克力拿出來的，這是一包巧克力，請妳把它分給六位小朋友，妳會怎麼分？
M1A144 **M1**：(分)每人都分到四顆。
M1A145 **R**：每人都分到四顆？
M1A146 **M1**：嗯。
M1A147 **R**：那每一個人得到多少包？
M1A148 **M1**：多少包，我看一下，得到二十四分之四包。
M1A149 **R**：二十四分之四包，妳怎麼知道的？
M1A150 **M1**：因爲一包巧克力就有 24 顆，然後每人都分到 4 顆，那個二十四分之四是他們每人分到 4 顆。
M1A151 **R**：所以是二十四分之四包？好。那現在接下來的是我把這一包巧克力每六個放做一盤，然後可以放多少盤？
M1A152 **M1**：好……(分)可以分四盤。
M1A153 **R**：四盤？好。那這一盤我可以說它是佔了多少包？
M1A154 **M1**：佔了二十四……佔二十四分之六。
M1A155 **R**：二十四分之六包？它有沒有別的名字？別種名稱可以來稱呼它？
M1A156 **M1**：沒有。

M1A157 R：沒有，只有二十四分之六這種名稱？好，再來。這個題目是說，如果這桌上是一盤糖果，那這一盤糖果有的藏在布底下，有的讓妳看到，然後知道說讓妳看到的這些叫做三分之一盤……

M1A158 M1：三分之一盤。

M1A159 R：那裡面有多少顆糖果？

M1A160 M1：三分之一盤……1、2、3、4、5、6(錄音帶翻面)……(數)裡面有 24 顆。

M1A161 R：妳怎麼知道的？

M1A162 M1：就是外面讓我看到 8 顆嘛，它說三分之一包嘛，然後那就是布裡面這樣子這樣子是三分之一盤，然後有 8 顆，它這裡面就有 2 包，然後每包就有 8 顆……咦？……8 顆，然後，這樣全部就有 24 顆了。

M1A163 R：全部有 24 顆？那裡面有幾顆？

M1A164 M1：裡面有 16 顆。

M1A165 R：16 顆？好。如果這個叫做三分之一盤，那裡面這邊可以叫它多少盤？

M1A166 M1：它裡面有 8 顆……16……可以說它有二分……三分之一盤……其中一盤……如果是它有兩盤，如果我拿其中一盤就是二分之一盤。

M1A167 R：二分之一盤？如果我不拿其中一盤，我拿全部呢？

M1A168 M1：那是二分之二盤。

M1A169 R：哦，這裡是三分之一，裡面是二分之二？妳的意思是這樣嗎？

M1A170 M1：就是它們三盤的其中一盤叫做三分之一盤……

M1A171 R：對。

M1A172 M1：如果這個不要的話，這兩個……

M1A173 R：這個要哦!這只是先放在外面，我只說這兩盤要叫做多少。

M1A174 M1：那就是三分之二盤。

M1A175 R：好，再來，我有一條積木，然後鋸一鋸之後，就只剩下這麼一顆了，然後我要請妳把它做出……對不起，這一條叫做五分之一條積木，然後我要請妳做出五分之二條積木，妳會不會做？

M1A176 M1：好。(做)這樣子。

M1A177 R：這樣子叫做？

M1A178 M1：五分之二條。

M1A179 R：五分之二條積木？好。五分之四條呢？

M1A180 M1：(做)這樣。

M1A181 R：要不要把它接在一起？

M1A182 M1：好。(接)

M1A183 R：好，五分之四條積木。那五分之八條積木呢？

M1A184 M1：(做)好了，就這樣。

M1A185 R：好，很好，那妳排了幾個？

M1A186 M1：我排了 8 個。

M1A187 R：剛剛五分之四條妳排了幾個？

M1A188 **M1**：四個。

M1A189 **R**：四個，好，很好。再來，最後這個題目，也是從一條積木鋸下來的，然後我知道說這裡叫做五分之二條積木，那妳能不能做出五分之四條積木？

M1A190 **M1**：五分之四條積木？好，可以。現在有五分之二條積木……(做)這樣就有五分之四條積木，好了。

M1A191 **R**：那裡有五分之四條積木，說明一下好嗎？

M1A192 **M1**：好，就是五分之四條積木，每一個都有……等一下……1、2、3、4……不夠，五分之幾條？

M1A193 **R**：我剛剛說要五分之四條。

M1A194 **M1**：咦？那還不夠。

M1A195 **R**：不夠，那妳再排。

M1A196 **M1**：(排)好，這樣就夠了。就是那個五就是有五排，1、2、3、4、5，然後那個五分之多少？

M1A197 **R**：五分之四。

M1A198 **M1**：五分之四……五分之四就是五是……1、2、3、4、5，有五排，然後四是……嗯？五分之四就是……這樣子就是……咦？……一條就是五分之……

M1A199 **R**：五分之二，我剛剛說這樣是五分之二。

M1A200 **M1**：對，一條就是五分之二，然後你要五分之四就是要有五排，還有要四個……咦？奇怪……這樣就五分之二……這樣就五分之四……五分之二、五分之四……五是……那這樣是多餘的。

M1A201 **R**：好，多餘的拿掉。

M1A202 **M1**：這樣才是五分之四，因爲一排就是五分之二，那兩排就五分之四了。

M1A203 **R**：要不要合一起？

M1A204 **M1**：合起來，這樣。

M1A205 **R**：哦，所以妳算了一排是幾顆？

M1A206 **M1**：五分之二。

M1A207 **R**：五分之二有多少顆？

M1A208 **M1**：有 6 顆。

M1A209 **R**：妳認爲五分之四是再加 6 顆進去？

M1A210 **M1**：對。

M1A211 **R**：好，很好，那今天就到這裡。

附錄 12

中分組 M1 後測訪談記錄

M1B001 **R**：這些題目以前也有類似都問過，那再問妳一次。第一個題目是這樣子的，有一包花片，有 20 顆，我把它拿出 5 顆在布的外面，其它的放在布的裡面，請問布的裡面有多少顆？

M1B002 **M1**：15 顆。

M1B003 **R**：好，15 顆，那妳是怎麼知道的。

M1B004 **M1**：就是全部有 20 顆，外面有 5 顆，然後 20 減 5 等於 15 顆。

M1B005 **R**：好，20 減 5 等於 15 顆。那麼外面這些花片，我也可以說它是多少包花片？

M1B006 **M1**：二十分之五包。

M1B007 **R**：二十分之五包。那裡面的花片呢？

M1B008 **M1**：二十分之十五包。

M1B009 **R**：二十分之十五包。二十分之五包可不可以有其它的稱呼？

M1B010 **M1**：……應該……應該沒有吧!

M1B011 **R**：應該沒有，那二十分之十五包有沒有其它的稱呼？

M1B012 **M1**：也沒有。

M1B013 **R**：也沒有。現在這裡有四顆花片，那這四顆花片就是四顆糖葫蘆，四顆糖葫蘆我把它串在一起，叫做一串。現在知道說布裡面跟布外面全部有三十二顆糖葫蘆，請問布裡面應該有多少串？

M1B014 **M1**：八串。

M1B015 **R**：布裡面應該有多少串？

M1B016 **M1**：外面有……

M1B017 **R**：我這 32 顆糖葫蘆是裡面和外面合起來的。

M1B018 **M1**：應該有七串。

M1B019 **R**：妳怎麼知道？

M1B020 **M1**：因爲外面有四顆，一共有八串，這裡有一串，這裡面有七串，七串……四七不是二十八？加上外面的就有三十二顆。

M1B021 **R**：好，很好，再一個問題。如果總共有……這 5 顆我把它串成一串，叫做一串糖葫蘆，那知道全部總共有六串糖葫蘆，請問布裡面有多少顆？

M1B022 **M1**：30 顆。

M1B023 **R**：好。

M1B024 **M1**：……等一下、等一下。應該 25 顆。

M1B025 **R**：好，妳怎麼算的？

M1B026 **M1**：這裡一串就有 5 顆，然後你不是說有六串嗎？然後這裡有一串，裡面就有五串，這裡有 25 顆。

M1B027 **R**：25 顆，好，很好。現在外面……這是新題目。外面這 6 顆花片我知道它是從一包花片拿出來的，我知道它叫七分之一包花片。我那包花片其它的部份放在布裡面，請問布裡面應該有多少

包？

M1B028 **M1**：七分之六包。
M1B029 **R**：七分之六包？好，那七分之六包應該有多少包花片？
M1B030 **M1**：有六顆……應該有……一共有七包……應該是有 42 顆。
M1B031 **R**：42 顆？爲什麼妳知道是 42 顆？
M1B032 **M1**：不是一包花片，這裡放在外面的有七個花片……
M1B033 **R**：六個花片。
M1B034 **M1**：六個花片，然後有六串，這裡面的有……等一下，好像是……裡面有七串，然後應該裡面有 36 顆。
M1B035 **R**：好，妳怎麼知道的？
M1B036 **M1**：因爲這裡面有 6 串，然後每一串有 6 顆，一共有 7 串，所以一共是 42 顆。
M1B037 **R**：一共是指哪裡？
M1B038 **M1**：全部。
M1B039 **R**：裡面跟外面嗎？
M1B040 **M1**：嗯。
M1B041 **R**：那我只要裡面的呢？
M1B042 **M1**：36 顆。
M1B043 **R**：36 顆。妳說外面這裡是七分之一嘛!外面是七分之一包，裡面叫做七分之六包，那妳的 42 是經由哪裡乘出來的？或哪裡加出來的？
M1B044 **M1**：七……好像是七乘以六吧!
M1B045 **R**：七乘以六？六是指哪裡？
M1B046 **M1**：六是指七分之一包裡有六個花片。
M1B047 **R**：所以妳指的是六顆？所以七分之……就乘以七，那個七是什麼？
M1B048 **M1**：一共有七……一共有六分之七。
M1B049 **R**：七分之六吧？妳本來講七分之六。
M1B050 **M1**：七分之六，代表是……一共有七串。
M1B051 **R**：好，再來，同樣也是這六顆，新題目了哦!然後也跟糖葫蘆沒有關係了哦!同樣也是這六顆，但是我現在知道它是八分之二包花片，八分之二包，那請問妳布裡面應該有多少顆花片？
M1B052 **M1**：八分之二……裡面哦……八分之六……
M1B053 **R**：妳說裡面有八分之六包？
M1B054 **M1**：嗯，這裡面有……六顆……應該裡面有 48 顆……八分之二……六包……裡面有 42 顆。
M1B055 **R**：妳是怎麼知道的？
M1B056 **M1**：因爲要算布裡面的，就是外面的有八分之二，裡面的有八分之六，我把八分之二 6 顆，然後有八分之六有 42 顆就用乘的……
M1B057 **R**：八分之六怎麼會有 42 顆？

M1B058 **M1**：八分之六就 6 去乘以 7，等於 42，因爲這沒有去乘，不然要算全部的話就等於 48 顆。

M1B059 **R**：全部是 48 顆？

M1B060 **M1**：嗯。

M1B061 **R**：全部是 48 顆，如果是布裡面的就是 42 顆，好，妳再整理一下妳的想法。妳說八分之二是 6 顆，那妳要求裡面的是八分之六。

M1B062 **M1**：嗯，八分之六，……八分之六……8 顆……一共有 8 串……應該裡面有……八分之二顆，八分之一一共有 3 顆。應該有……嗯……3 顆……六串……然後 7……裡面應該有 36 顆。

M1B063 **R**：妳怎麼知道有 36？

M1B064 **M1**：因爲裡面有八分之六包嘛，要是八分之一的話就有 3 顆，八分之二就有 6 顆，然後裡面有六串，然後……不是，八分之六包，然後這六顆去乘以有六串就等於 36 顆。

M1B065 **R**：可是妳的不是……這個六顆不是一串的。妳剛剛講得很好，妳說八分之一有 3 顆，八分之二有 6 顆，妳能不能往上算？

M1B066 **M1**：嗯……八分之六……哦，這布裡面每串都有 6 顆，然後有……不是有八分之六串嘛，然後就乘以 6 等於 36。

M1B067 **R**：好，那我再問妳，八分之一有 3 顆，八分之二有 6 顆，那八分之四有幾顆？

M1B068 **M1**：八分之四就有 12 顆。

M1B069 **R**：那八分之六有幾顆？

M1B070 **M1**：應該 36 顆。

M1B071 **R**：那怎麼會差那麼多？八分之四才只有 12 顆，八分之六會有 36 顆？

M1B072 **M1**：應該是……嗯……應該是有 18 顆。

M1B073 **R**：妳又改變主意了，沒有關係，妳現在是改變主意了嘛!爲什麼？

M1B074 **M1**：因爲每串都有……全部有八分之六串，然後我用 3 去……要是這裡有八分之四就有 12 顆的話，12 顆……3 乘以 4 不是有 12 顆，然後這裡有 6 的話，3 去乘以 6 就等於 18 顆。

M1B075 **R**：好，來，算得很辛苦，再一個題目。那現在變成有 8 顆，8 顆但是我知道它叫做六分之四包，六分之四包，請問妳我那一包其它的都放在布裡面，請問布裡面有多少顆？這裡叫做六分之四包。

M1B076 **M1**：這裡面應該有六分之二包，然後六分之二包……裡面有 4 顆。

M1B077 **R**：哦，妳怎麼知道？

M1B078 **M1**：因爲六分之四包，要是六分之一的話就是有 2 顆，要六分之四包的話就有 8 顆，然後裡面有六分之二，六分之一有 2 顆，六分之二就有 4 顆。

M1B079 **R**：好，很好，太好了。再試一個好了，總共有 9 顆，我知道它叫七分之三包，那一包剩下的放在布裡面，請問布裡面的有幾顆？

M1B080 **M1**：七分之三包……裡面有七分之四包，然後七分之一包就等於有 3 顆，然後七分之二包就等於 6 顆，這裡面有四包，所以到四包的時候就等於……等一下哦!……裡面有七分之四包，然後一共有……七分之三包就有 9 顆，那這裡面就有 27 顆。

M1B081 **R**：好，爲什麼會有 27 顆？

M1B082 **M1**：因爲這樣一串就有 9 顆，然後這裡面有四串嘛，就有 36 顆。

M1B083 **R**：是四串嗎？可是這外面只有一串啊!

M1B084 **M1**：啊!這外面的有七分之三包，然後這裡有七分之四包，七分之三包就等於有 9 顆，七分之四就有 36 顆。

M1B085 **R**：七分之四爲什麼會有 36 顆？七分之三 9 顆是對，那七分之四爲什麼會有 36 顆？

M1B086 **M1**：……九分之四包……

M1B087 **R**：不是，裡面是七分之四。

M1B088 **M1**：七分之四包。那裡應該是……9……七分之一……有……裡面應該有九分之四包……不是，七分之四包……七分之一……9 顆……應該是……因爲這裡有七分之四，七分之三……嗯……這裡面應該還有七分……七分之三包……再一串是七分之六包……

M1B089 **R**：再一串是七分之六包？

M1B090 **M1**：嗯……七分之四的話……這裡應該有……七分之四……我覺得裡有應該有 3 顆。

M1B091 **R**：是多 3 顆，還是就只剩下 3 顆？

M1B092 **M1**：就是多 3 顆是這布裡面的。

M1B093 **R**：就 3 顆？

M1B094 **M1**：嗯!

M1B095 **R**：沒有要加這 9 顆？只有 3 顆？

M1B096 **M1**：要合起來的話，當然要加這 9 顆，……就七分之一就等於 3 顆，七分之二等於 6 顆，七分之三等於 9 顆，然後不是要七分之四，七分之四一定有 3 顆。

M1B097 **R**：七分之四要多 3 顆，還是七分之四一定 3 顆？

M1B098 **M1**：一定 3 顆。

M1B099 **R**：我的意思是說七分之四是代表 3 顆，還是七分之四是前面的七分之三之後再多 3 顆？

M1B100 **M1**：七分之四……應該是……裡面應該是……前面的。

M1B101 **R**：前面的？

M1B102 **M1**：嗯!

M1B103 **R**：所以妳認爲裡面的總共有七分之四包……

M1B104 **M1**：應該不是七分之四包……3 顆……

M1B105 **R**：不是，這外面我講說是七分之三包嘛，那裡面妳認爲是幾包？

M1B106 **M1**：七分之一包。

M1B107 **R**：爲什麼現在只剩下七分之一包？

M1B108 **M1**：因爲這邊有七分之三，啊七分之四……那就有七分之四……七分之三包……再一串……還要再一串……七分之三……七分之六……七分之三……七分之四……七分之四就是指這一個跟這一個合起來的。
M1B109 **R**：七分之四是指哪裡？
M1B110 **M1**：那個布裡面和布外面合起來的。
M1B111 **R**：總共有幾顆？
M1B112 **M1**：這裡有 9 顆，這裡有 12 顆。
M1B113 **R**：妳的意思是七分之四代表有幾顆？
M1B114 **M1**：七分之四有 3 顆。
M1B115 **R**：七分之四有 3 顆？七分之三有？
M1B116 **M1**：有 9 顆。
M1B117 **R**：七分之四怎麼會比七分之三少？
M1B118 **M1**：七分之三……應該比它多……七分之三再……裡面還有七分之四……七分之三……裡面應該有 12 顆。
M1B119 **R**：12 顆？好。來，第一個題目是這樣，這是一條繩子，要平分給 3 人，那妳會怎麼做？
M1B120 **M1**：……這樣子。
M1B121 **R**：好，總共要切幾刀？
M1B122 **M1**：2 刀。
M1B123 **R**：2 刀，好，切 2 刀，前面這一段我也可以說它是幾條繩子？
M1B124 **M1**：它的長 12，應該是四分之一。
M1B125 **R**：四分之一？
M1B126 **M1**：嗯。
M1B127 **R**：四分之一條繩子？
M1B128 **M1**：嗯，十二分……三分之一。
M1B129 **R**：三分之一？到底是四分之一，還是三分之一？
M1B130 **M1**：嗯……應該是四分之一。
M1B131 **R**：四分之一？爲什麼妳會說是四分之一？
M1B132 **M1**：因爲一段就是四分之一，兩段就是四分之八，三段就已經是四分之……四分之一已經到……十二段嘛，它的長 12 公分，然後平分給 3 個人，每一段都 4 公分，所以是四分之一。
M1B133 **R**：所以妳認爲它是四分之一。妳切成三段嘛，那這一段是四分之一，如果加上這一段是多少？
M1B134 **M1**：四分之二。
M1B135 **R**：再加上這一段呢？
M1B136 **M1**：四分之三。
M1B137 **R**：四分之三有沒有等於一條繩子？
M1B138 **M1**：應該有吧!
M1B139 **R**：四分之三有等於一條繩子？
M1B140 **M1**：還沒!應該沒有，四分之四才等於……
M1B141 **R**：對呀，那這樣子講是不是有一點問題？

M1B142 **M1**：應該是三分之一。

M1B143 **R**：改變了嗎？

M1B144 **M1**：嗯，改變了。

M1B145 **R**：到底要四分之一還是三分之一？

M1B146 **M1**：三分之一。

M1B147 **R**：好，來，妳說說看這樣是多少？(比)

M1B148 **M1**：三分之一、三分之二、三分之三。

M1B149 **R**：哦，三分之三，確定哦？

M1B150 **M1**：確定。

M1B151 **R**：這次確定哦？

M1B152 **M1**：確定。

M1B153 **R**：那第二個題目是這樣，有一條繩子有多長我不知道，可是我把它切一段在這邊給妳看，我知道這個叫四分之一條繩子，那請問妳一條繩子有多長？妳能不能畫出來給我看？

M1B154 **M1**：好。……4 公分……(畫)好了。

M1B155 **R**：妳爲什麼會這樣子畫？

M1B156 **M1**：因爲四分之一就等於 4 公分嘛，然後四分之二就等於 8 公分，所以我就一直畫到四分之四。

M1B157 **R**：妳一共又多了幾個四分之一？

M1B158 **M1**：三個四分之一。

M1B159 **R**：三個四分之一我也可以說它是多少條繩子？

M1B160 **M1**：四分之三條繩子。

M1B161 **R**：好，很好，第三個題目。那個叫做五分之二條繩子，那從這邊到這邊叫五分之二條，那請妳畫出一條繩子有多長。

M1B162 **M1**：……6 公分……這樣子……五分之……再畫 6 公分……到這兒應該是五分之四……然後再畫 6 公分……(畫)好，五分之五。

M1B163 **R**：所以我看妳又先做了一個 6 公分的，本來妳量出前面的那一段紅的是 6 公分，那妳又做了一個 6 公分的，所以在上面寫了五分之四，就代表五分之四，從這邊延伸到那邊的，後來又做了一個 3 公分的，3 公分是？

M1B164 **M1**：是五分之一條。

M1B165 **R**：五分之一條，好，很好。那第四個題目，妳看底下那個叫三分之一條繩子，那妳會不會做三分之五條繩子？做看看。

M1B166 **M1**：三分之……(畫)好，三分之五。

M1B167 **R**：妳怎麼這次可以畫得這麼快？是怎麼想的？

M1B168 **M1**：三分之一就等於三公分嘛，然後三分之五就有十五公分。

M1B169 **R**：三分之五就有十五公分，好，所以妳多了多少？妳鉛筆畫的是多了幾條繩子？

M1B170 **M1**：三分之四條繩子。

M1B171 **R**：好，很好。如果現在第五題是六分之二條繩子，請妳做六分之八條繩子。

M1B172 **M1**：六分之二等於四公分……六分……六分之四……然後再……

(畫)
M1B173 R：妳畫到八叫做六分之四？
M1B174 M1：嗯，然後再……再畫四公分……就是……六分之二、六分之四、六分之八……(畫)
M1B175 R：六分之八嗎？
M1B176 M1：應該是吧!……六分之六……然後……(畫)六分之八，好了!
M1B177 R：所以妳又多了六分之四、六分之六、六分之八，多了這三份？
M1B178 M1：嗯!
M1B179 R：好，很好!這一個是不用尺的，然後直接用想的，有必要的時候有鉛筆稍微畫一下就好了。
M1B180 M1：嗯!
M1B181 R：好，還沒有，我題目還沒說。就是說妳們家開生日宴會 PARTY，然後呢，做蛋糕的師傅送了一條蜂蜜蛋糕過來，妳們跟他買了一條蜂蜜蛋糕，那他把它切成三等份，本來這個叫一條哦，然後他切兩刀切成三等份，結果後來發現說來妳們家，包括妳，總共有 7 個人要分這一條，要平分完，那麼請問妳該怎麼切，每個人可以得到多少條蛋糕？有 7 個小朋友要平分它。
M1B182 M1：7 個……1、2、3……3 個……7 個小朋友……要畫 7 個……7 個小朋友……3 等份……
M1B183 R：想很久想不出來，對不對？那我現在給妳一個提示看看。我這一段能不能先分？七個小朋友？
M1B184 M1：七個小朋友？應該不可以。
M1B185 R：不是啊，我說這裡。
M1B186 M1：這裡？
M1B187 R：對。紅色的部份？
M1B188 M1：應該不可以。
M1B189 R：不可以？爲什麼？
M1B190 M1：這樣就比較……就比較……這樣就吃了一小口就有一些吃不到。
M1B191 R：那麼這個題目就先放著。這個題目是說有兩個人分繩子，不同條，但其實材質和長短都一樣，就像這兩條繩子，有一位小朋友拿到三分之一條繩子，有一位小朋友拿到四分之一條繩子，請問哪一個小朋友拿到的比較多？
M1B192 M1：三分之一。
M1B193 R：三分之一條拿到的比較多。多了多少條？他多了多少條繩子？
M1B194 M1：嗯……多了……三分之一多……
M1B195 R：多多少？
M1B196 M1：應該是……三分之一、四分之一……多了……應該是四分之三條。
M1B197 R：多了四分之三條？四分之三條如果在這邊到哪裡，妳指給我看。
M1B198 M1：(比)這裡到這裡。
M1B199 R：對呀，有多了四分之三條嗎？

M1B200 **M1**：應該是⋯⋯
M1B201 **R**：(錄音機中斷)(錄音機再錄)爲什麼分母不能減？
M1B202 **M1**：因爲三分之一分母減四就不夠，所以⋯⋯
M1B203 **R**：那如果是五減四呢？五分之一跟四分之一可以減嗎？
M1B204 **M1**：可以。
M1B205 **R**：五分之一跟四分之一就可以減？
M1B206 **M1**：嗯。
M1B207 **R**：減出來是多少？
M1B208 **M1**：嗯，一分之一。
M1B209 **R**：一分之一？一分之一是等於多少條？
M1B210 **M1**：等於⋯⋯
M1B211 **R**：一分之一不是等於一條嗎？
M1B212 **M1**：嗯。
M1B213 **R**：啊怎麼減出來愈減愈多？
M1B214 **M1**：嗯⋯⋯三分之一⋯⋯四分之一⋯⋯
M1B215 **R**：好，沒關係，困難哦？這一題困難哦？我們回到積木的題目。好，數數看這裡總共有多少顆積木？
M1B216 **M1**：16 顆。
M1B217 **R**：16 顆積木。請妳拿出四分之三包積木是多少？
M1B218 **M1**：四分之三包⋯⋯四分之三包⋯⋯四份⋯⋯(拿)應該是這樣。
M1B219 **R**：應該是這樣？我看妳先把⋯⋯現在總共是四堆，然後每一堆裡面有 4 顆，妳說是這三堆嗎？這叫四分之三包。
M1B220 **M1**：嗯。
M1B221 **R**：好，很好，再來。(錄音帶中斷)(錄音帶翻面)把它鋸下來。我知道這裡叫做五分之四條積木。
M1B222 **M1**：五分之四條。
M1B223 **R**：那妳知不知道一條是長得怎樣？可以幫我排排看嗎？這是五分之四條，那一條積木長成怎樣？
M1B224 **M1**：(排)這樣。
M1B225 **R**：哦，妳多了一條進去，所以這叫做五分之⋯⋯
M1B226 **M1**：五分之五條。
M1B227 **R**：五分之五條，也就是一條積木？
M1B228 **M1**：嗯。
M1B229 **R**：好，再來，如果說這六顆積木我是從一條積木鋸下來的，這剛好叫做五分之二條積木，請妳做出五分之六條積木。
M1B230 **M1**：五分之六條⋯⋯不夠。
M1B231 **R**：不夠？好，我再給妳。
M1B232 **M1**：(排)這樣子，五分之六。
M1B233 **R**：所以妳總共接了幾段上去？
M1B234 **M1**：剛剛這樣是五分之二，然後接了一段、二段、三段，接了四段。
M1B235 **R**：接了四段，每一段有幾顆？

M1B236 **M1**：3 顆。

M1B237 **R**：3 顆，每一段代表多少條？

M1B238 **M1**：每一段代表五分之一條。

M1B239 **R**：五分之一條，好，非常好。我這裡還有一個題目。這個是三分之四條繩子，這條紅線是三分之四條繩子，妳會不會幫老師畫出一條繩子有多長？

M1B240 **M1**：一條繩子？

M1B241 **R**：對，來。

M1B242 **M1**：應該……在這裡畫嗎？

M1B243 **R**：對，一條繩子有多長？

M1B244 **M1**：三分之四……(畫)

M1B245 **R**：妳可以用尺，妳如果需要用尺的話可以用尺。

M1B246 **M1**：三分之三……(畫)應該有那麼長，三分之三。

M1B247 **R**：好，妳怎麼知道？

M1B248 **M1**：因爲三分之三是等於一條，三分之四是多了三分之一條，然後應該就是這樣。

M1B249 **R**：應該是這樣，好，我看妳原來是先把這裡分成四等份，然後底下再畫成三等份？

M1B250 **M1**：嗯。

M1B251 **R**：好，很好。現在這裡我知道……妳可以數數看這裡有幾顆。

M1B252 **M1**：18 顆。

M1B253 **R**：我知道它是五分之六條的積木鋸下來的，五分之六條，那妳曉不曉得一條積木我把它鋸成幾顆？我看妳現在先把它排成一整排。

M1B254 **M1**：應該鋸成的話，一條有 3 顆。

M1B255 **R**：一條？

M1B256 **M1**：不是，這樣有 3 顆。

M1B257 **R**：把那一部份鋸掉？

M1B258 **M1**：嗯。然後一條的話是有像這樣的，然後就是五分之六的話就是這樣。

M1B259 **R**：哦，五分之六就是要把這 3 顆放進去，那所以妳排的那一邊總共有幾顆？

M1B260 **M1**：這一邊應該有 15 顆。

M1B261 **R**：好，15 顆，今天就到這裡。

M1B262 **R**：你現在所看的叫做一條蜂蜜蛋糕(十六公分的線)，妳媽媽把它切成兩等份(八公分處做記號)，你所得到的是多少條？

M1B263 **M1**：二分之一條。

M1B264 **R**：你把你得到的這二分之一條帶來學校，和其他三位小朋友，包括你自己總共有四位要平分它，請問你們每一位小朋友可以得到多少條蛋糕？

M1B265 **M1**：四分之一條。

M1B266 **R**：爲什麼？

M1B267 **M1**：因爲有四個人，平分成四份。
M1B268 **R**：你可不可以把每一個人得到的畫出來看看？
M1B269 **M1**：好(在第一段內每二公分畫一記號)。
M1B270 **R**：四個人所得到的是你所畫的這樣子，你說每一個人可以得到多少條？
M1B271 **M1**：四分之一條。
M1B272 **R**：如果這是(一顆積木)從一條積木鋸下來的，現在知道這是代表五分之一條積木，你會不會做出五分之三條積木？
M1B273 **M1**：會…(拿了另外兩顆在第一顆的旁邊)，五分之三條，三顆。
M1B274 **R**：五分之七條你會不會做？
M1B275 **M1**：(拿另外四顆在原來三顆的旁邊)五分之七條。
M1B276 **R**：你爲什麼知道五分之三條是三顆，五分之七條是七顆？
M1B277 **M1**：因爲五分之一條就是一顆，所以五分之三條是三顆、五分之七條是七顆。
M1B278 **R**：如果給你五分之三條，你會不會做五分之三條？
M1B279 **M1**：(拿了另外的三顆組成一段，排在原來三顆的旁邊)。
M1B280 **R**：新題目，知道它是四分之二條積木(四顆積木)，你會不會做四分之八條積木？
M1B281 **M1**：會。現在是四分之四條(拿四顆組成新的一段)、四分之八條好了(再拿兩次四顆各組成新的一段)。
M1B282 **R**：這兩個合起來呢(手比二堆)？
M1B283 **M1**：四分之四條。
M1B284 **R**：這三個呢(手比三堆)？
M1B285 **M1**：四分之六條。
M1B286 **R**：這四個呢(手比四堆)？
M1B287 **M1**：四分之八條。
M1B288 **R**：好，很好。到這裡。

附錄 13

高分組 H1 前測訪談記錄

H1A001 R：糖葫蘆全部有 20 顆，布外面有兩顆把它串成一串，其餘的也是兩顆串成一串放在布底下。請問布底下有多少串？

H1A002 H1：呵.....2 乘 1 等於 2，就是兩顆變一串，然後後面加一個 0 就是了。

H1A003 R：1 為什麼要再加 0？

H1A004 H1：因為 2 乘 10 等於 20。

H1A005 R：你是先算哪裡？

H1A006 H1：先算 2 乘 1。

H1A007 R：你覺得全部有十串？

H1A008 H1：呵....好像不對。

H1A009 R：好像不對？應該有幾串？

H1A010 H1：(思考)

H1A011 R：你要不要用手比一下看看。用手比沒有關係。

H1A012 H1(比手指頭，口中唸唸有詞。)好像是十耶(約 50 秒後)。

H1A013 R：你剛剛是用什麼樣的計算方式？

H1A014 H1：20 除以 2。

H1A015 R：為什麼要 20 除以 2？

H1A016 H1：因為，全部有二十顆，然後兩顆串成一串，所以 20 除以 2 等於 10。

H1A017 R：10 是什麼？單位是什麼？

H1A018 H1：10 串。

H1A019 R：是全部有 10 串還是布裡面蓋著 10 串？

H1A020 H1：布裡面好像有 8 串，加這一串是 10 串。布裡面有....18 除 2，9....9 減 2 等於 7....7、7....20，裡面有 8 串。

H1A021 R：你是怎麼算出來的？

H1A022 H1：20 除以 2 等於 10，10 再減 2 等於 8。

H1A023 R：哪裡來的 2？

H1A024 H1：外面。

H1A025 R：再換一個題目。如果知道全部有 7 個花片，布外面有 1 個花片，那麼布底下有多少個花片？

H1A026 H1：6 個。

H1A027 R：在外面的這個花片，是佔全部花片的多少？

H1A028 H1：七分之一(20 秒之後)。

H1A029 R：為什麼你會知道是七分之一？

H1A030 H1：因為是七片的其中一片，所以是七分之一。

H1A031 R：再換一個題目。全部的花片有 16 顆(布外面放 2 顆)，布裡面有多少顆？

H1A032 H1：14 顆。

H1A033 **R**：這兩個花片是佔所有花片的多少？
H1A034 **H1**：十六分之二。
H1A035 **R**：布底下的花片是佔多少？
H1A036 **H1**：十六分之十四。
H1A037 **R**：全部有 8 顆(2 顆在布外面)，布底下有幾顆？
H1A038 **H1**：6 顆。
H1A039 **R**：你是怎麼數的？我剛剛聽到你在唸 3、4、5、6、7、8，你是這樣數的嗎？
H1A040 **H1**：嗯。
H1A041 **R**：如果現在有兩條布，這一條布和這一條布底下蓋的都是一樣，加上外面的花片總共有多少顆？
H1A042 **H1**：14 顆(立刻回答)。
H1A043 **R**：你怎麼知道？
H1A044 **H1**：就是這個有 6 個、這個有 6 個，就是 6、2、12，再加 2 等於 14。
H1A045 **R**：很好。這 2 顆(指布外面的)佔全部花片的多少？
H1A046 **H1**：十四分之二。
H1A047 **R**：現在我的糖葫蘆全部有 21 顆(布外面有 1 串)，三顆要串成一串，布底下有多少串？
H1A048 **H1**：7 串。
H1A049 **R**：以串做爲單位，外面這一串是佔全部的多少？
H1A050 **H1**：七分之三.....七分之一。
H1A051 **R**：是七分之一？還是七分之三？
H1A052 **H1**：七分之一。
H1A053 **R**：爲什麼你認爲七分之三是錯的？
H1A054 **H1**：因爲是三個成一串，裡面有 21 個平分成 7 串。
H1A055 **R**：如果這裡面和這裡面(指兩條布底下)一樣多，外面這一串是佔全部的多少？
H1A056 **H1**：十四分之一。
H1A057 **R**：這裡七串、這裡七串，另外這一串是佔全部的十四分之一，是這樣嗎？
H1A058 **H1**：對。
H1A059 **R**：這兩個底下合起來有多少顆？
H1A060 **H1**：十四串。
H1A061 **R**：有幾顆？
H1A062 **H1**：有四十二。
H1A063 **R**：你怎麼知道有這樣多？
H1A064 **H1**：因爲一塊布蓋著有 7 串，7 串就是 3 乘以 7 等於 21，21 加 21 等於 42。
H1A065 **R**：講得很清楚，非常好。
H1A066 **R**：現在全部有多少我不知道，但是知道布外面這一顆是佔所有花片，布蓋著和外面的五分之一，布裡面是多少？
H1A067 **H1**：5 顆，4 顆。

H1A068 **R**：到底是 5 顆還是 4 顆？
H1A069 **H1**：4 顆。
H1A070 **R**：爲什麼你知道是 4 顆？
H1A071 **H1**：因爲五分之一，一乘以五等於五。
H1A072 **R**：喔，你爲什麼會用一乘以五？
H1A073 **H1**：因爲它是全部的五分之一，然後就就是 1 乘以 5 等於 5，然後 5 再減外面的那一顆等於 4。
H1A074 **R**：1 乘以 5，那個 1 是外面的一顆嗎？
H1A075 **H1**(點頭表示同意)。
H1A076 **R**：5 是怎麼樣？
H1A077 **H1**：是全部的五。
H1A078 **R**：外面這一顆是全部的？
H1A079 **H1**：五分之一。
H1A080 **R**：裡面是全部的？
H1A081 **H1**：五分之四。
H1A082 **R**：如果這是全部花片的四分之一(指布外面的 3 顆)，請問布蓋著是多少？
H1A083 **H1**：幾分之幾？
H1A084 **R**：這邊是四分之一。
H1A085 **H1**：九顆。
H1A086 **R**：你怎麼知道是九顆？
H1A087 **H1**：3 乘以 4 等於 12，12 再減 3 等於 9。
H1A088 **R**：爲什麼要 3 乘以 4？
H1A089 **H1**：因爲這是四份裡面的其中一份，然後等於 12。
H1A090 **R**：怎麼會等於 12？
H1A091 **H1**：因爲 3、4、12。
H1A092 **R**：4 是什麼？怎麼知道要乘以 4？
H1A093 **H1**：因爲這 3 顆是全部的四分之一，然後等於 12，12 是全部有幾顆，再減這 3 顆等於 9。
H1A094 **R**：3 乘以 4 的理由是什麼？
H1A095 **H1**(想大約 1 分 30 秒)：我可以改一下嗎？
H1A096 **R**：可以。
H1A097 **H1**：因爲這是四分裡面的一分，如果再這上這一份的話就是 4，4 乘以 4 等於 16，16 再減哪 3 顆等於 3。
H1A098 **R**：再講一次，我聽不太懂你的意思。
H1A099 **H1**：這 3 顆是四份其中的一份，然後加上這 3 顆(指外面的 3 顆)就是四分之四。
H1A100 **R**：爲什麼要把四分中的一份再加上這三顆？
H1A101 **H1**：這裡面是四份中的一份，布裡面是四分之三。
H1A102 **R**：對。
H1A103 **H1**：兩個加起來就是四分之四。然後，4 再去乘以 4，等於 16。

H1A104 R：我發現你從五分之一、四分之三、四分之四，好像都會把分子和分母相乘，你是用這樣的方法嗎？
H1A105 H1：嗯(表示贊同)！
H1A106 R：真的喔！
H1A107 H1：嗯。
H1A108 R：你怎麼會想到用這樣的方法？有沒有教你這樣做過？
H1A109 H1：沒有。
H1A110 --
H1A111 R：(在紙上畫了一條 12 公分的線)這是一條巧克力，想要平分給三位小朋友，你會怎麼分？
H1A112 H1 用尺量每 4 公分做一記號
H1A113 R(拿出三個花片，代表三位小朋友)這個小朋友得到多少條？
H1A114 H1：三分之一條。
H1A115 R：這個小朋友呢(指另一個花片)？
H1A116 H1：三分之一條。
H1A117 R：這兩個小朋友呢？
H1A118 H1：三分之二條。
H1A119 R：這三個小朋友呢？
H1A120 H1：三分之三條。
H1A121 R：這裡是一包巧克力(數了 24 顆積木放做一堆)，要平分給六位小朋友(桌上擺出 6 個花片)，你會怎麼分？
H1A122 H1(利用一輪一次分一個方式)
H1A123 R：每一位小朋友得到多少顆巧克力？
H1A124 H1：4 顆。
H1A125 R：每一位小朋友得到多少包？
H1A126 H1：二十四分之四包。
H1A127 R：你的二十四是怎麼來的？
H1A128 H1：一個人四顆，四乘以六，等於二十四。所以就是二十四分之四包。
H1A129 R：現在我要請你把這一包花片(將排列的二十四顆混爲一堆)分成四堆，你會怎麼做？
H1A130 H1(先以 2 顆、2 顆的分式分做四堆，到最後六顆時又把先前已分堆的放回原來的一堆，改以四顆爲首，一顆一顆的分)
H1A131 R(在每一排花片前各放一個花片，代表一位小朋友)這個小朋友得到多少包？
H1A132 H1：二十四分之六包。
H1A133 R：(拿出一張紙，上面放 6 顆積木)開慶生會，總共有 8 個盤子，這只是其中的一個，請問其他的盤子共有多少顆糖果？這一盤是全部的八分之一。
H1A134 H1：四十顆。
H1A135 R：你是說全部有四十顆，還是除了這一盤之外有四十顆？

H1A136 **H1**：全部有四十八顆。等一下，算錯了…….(停 5 秒)，全部的有四十八顆。

H1A137 **R**：你怎麼知道全部有四十八顆？

H1A138 **H1**：因爲有 8 個盤子，裡面都有 6 顆。8、6、48

H1A139 **R**：沒有看到的那些盤子裝多少顆？

H1A140 **H1**：42 顆。

H1A141 **R**：怎麼算的？

H1A142 **H1**：48 減 6。

H1A143 **R**：6 是怎麼來的？

H1A144 **H1**：6 是這邊(指紙上面的)。

H1A145 **R**(拿出 DV 錄影帶匣畫一條直線)如果這一段巧克力，是全部的六分之一，你會不會把全部的巧克力畫出來？先講你打算怎麼畫？

H1A146 **H1**：畫得跟它一樣長。

H1A147 **R**：然後呢？

H1A148 **H1**：然後，不知道耶。

H1A149 **R**：它是從一條巧克力折下來，剛好是六分之一條。

H1A150 **H1**：那就畫 5 條一樣的。

H1A151 **R**：你能不能畫給我看看？

H1A152 **H1**(在原來的線底下畫 5 條相同長度的線)。

H1A153 **R**：這一條巧克力是佔全部的九分之二條(畫一條線段)，你要怎麼把全部畫出來？

H1A154 **H1**：在中間畫一半。

H1A155 **R**：爲什麼要在中間畫一半？

H1A156 **H1**：因爲它是全部的九分之二，是等於九份中的二份。

H1A157 **R**：畫一半會變成什麼？

H1A158 **H1**：兩份中的一份。

H1A159 **R**：這個是多少(指被其切爲兩份的其中一份)？

H1A160 **H1**：九分之一。

H1A161 **R**：怎麼去畫全部？

H1A162 **H1**：再畫七個和它一樣長的。

H1A163 **R**：跟哪個一樣長？

H1A164 **H1**：這裡到這裡(指被切爲兩段中的其中一段)。

H1A165 **R**：所以畫出全部是？

H1A166 **H1**：九分之九。

H1A167 **R**：現在知道這是五分之一條(畫一段線段)，你會不會畫出五分之三、五分之四、五分之五？

H1A168 **H1**(利用尺、鉛筆作圖，利用先加上兩段，再加上一段、最後加一段)。

H1A169 **R**：哪裡是五分之三？

H1A170 **H1**：從這裡到這裡(指三段)。

H1A171 **R**：哪裡是五分之四？

H1A172 **H1**：從這裡到這裡(指四段)。

H1A173 **R**：哪裡是五分之五？

H1A174 H1：從這裡到這裡(指五段)。
H1A175 R：你會不會畫五分之八？打算怎麼畫？
H1A176 H1：先在這裡加上三段。(利用尺、鉛筆作圖，在原來五段之後，多畫了三段)。
H1A177 R：(重新畫一段線)如果這是五分之三條，你會不會畫五分之四條？
H1A178 H1：再畫 3 條。
H1A179 R：再畫 3 條和它一樣長嗎？(指原來所畫的)
H1A180 H1：再畫一條跟它一樣。
H1A181 R：和你原來說的不一樣。剛剛是說用原來的再畫三段，現在是說用你切過三小段之後的再畫一段。爲什麼你知道這樣就夠了？
H1A182 H1：因爲這個是五分之一(指被其切爲三小段之後的一段)，然後五分之一、五分之二、五分之三(點數三小段)，然後再畫一個跟它一樣(三小段的一段)就是五分之四。
H1A183 R：如果要畫五分之二十，你打算怎麼畫？
H1A184 H1：再畫十七個跟它一樣(指三小段的其中一段)。
H1A185 R：回到蓋布的問題。現在知道這個外面的花片是全部的八分之一包，請問八分之二包是多少個？
H1A186 H1(拿了第二個花片，表示全部有兩個)。
H1A187 R：八分之五包呢？
H1A188 H1(繼續拿三個花片，表示全部有五個花片)。
H1A189 R：如果它是八分之五包，蓋的是多少包？
H1A190 H1：八分之四十包(約二十秒)。
H1A191 R：爲什麼你知道有這麼多？
H1A192 H1：(停頓約 40 秒)因爲八…八…..等一下
H1A193 R：沒關係。
H1A194 H1：裡面有 3 顆(停頓約 1 分鐘)。
H1A195 R：是幾包？
H1A196 H1：八分之三包。
H1A197 R：你怎麼知道？跟剛剛講八分之四十包不一樣，爲什麼會改變主意。
H1A198 H1：因爲，你剛剛說一片就是八分之一包，五片就是八分之五包，再加三個就是一包。被布蓋著是八分之三包。
H1A199 R：這裡是六分之二包(指布外面的 4 顆花片)，布裡面蓋著是幾包？
H1A200 H1：(停頓 10 秒)再講一次。
H1A201 R：如果這裡是六分之二包(指布外面的 4 顆花片)，布裡面蓋著是幾包？
H1A202 H1：六分之四包。
H1A203 R：這四顆是六分之二包，布蓋著是多少顆？
H1A204 H1：八顆。
H1A205 R：你怎麼知道的？
H1A206 H1：因爲兩顆是一包。
H1A207 R：兩顆是一包。

H1A208 H1：不對，不對。一包有六….一包有 12 顆，然後兩個等於….好像不對。這兩顆等於六分之一包，這邊是六分之二包(外面的四顆)。這邊有六分之四包（布底下），因爲總共加起來是六分之六包。

H1A209 R：幾顆？

H1A210 H1：因爲六包…六顆，12 顆等於一包，然後平分成兩份就是六分之六包。然後，這邊裡面有六分之四包，裡面有八顆。

H1A211 R：我比較想知道，八是怎麼變出來的。

H1A212 R：因爲兩顆就是六分之六包中的其中一包，然後四乘以 2 等於八。

H1A213 R：因爲六分之一包是兩顆，六分之四就是？

H1A214 H1：八顆。

H1A215 R：現在問幾個問題。這裡是一包花片。這一顆黃色的花片佔多少包？

H1A216 H1：五分之一包。

H1A217 R：怎麼寫？把它寫下來。好，很好。接下來，這個是一包積木(16 顆)，老師想請你拿出四分之三包積木，你會怎麼做？

H1A218 H1：四分之三包？

H1A219 R：四分之三包。好，你爲什麼會這麼做？

H1A220 H1：因爲四乘以四等於十六。

H1A221 R：四乘以四等於十六，然後呢？

H1A222 H1：然後它是四分之三包。

H1A223 R：四分之三包在哪裡呢？

H1A224 H1：在這裡。

H1A225 R：哦，這邊叫做四分之三包。四分之三包有多少個積木？

H1A226 H1：十二個。

H1A227 R：十二個？好，大聲一點。新的題目。這一顆花片代表九分之一包花片，這一顆積木我也可以說是九分之一包積木，它是從一包積木拿出來的。然後那一包剩下的都放在布裡面，只有一顆讓你看到，那布裡面有多少顆？

H1A228 H1：八顆。

H1A229 R：八顆？你怎麼知道？

H1A230 H1：因爲九分之一包是一顆，一包是九顆。

H1A231 R：好，那布裡面是幾包？

H1A232 H1：九分之八包。

H1A233 R：九分之八包？好。現在另外一個新題目……你要講話講大聲一點，外面太吵了，我們的錄音機和錄影機都錄不起來。這個是五分之三包花片，請問你布底下有多少顆花片？

H1A234 H1：十六顆……三十六顆。

H1A235 R：啊？我再把題目講一遍。一包花片我把它分成兩部份，一部份放在外面給你看，一部份放在布裡面不讓你看，那現在知道布外面這一些我也可以稱它五分之三包花片，那麼請問布裡面有多少顆花片？

H1A236 H1：三十六顆。

H1A237 R：三十六顆？爲什麼？

H1A238 H1：因爲這邊有九顆，……咦，好像不對。
H1A239 R：好像不對？嗯。不然怎麼才對？
H1A240 H1：再說一次。
H1A241 R：好。外面這個是五分之三包，那裡面有多少顆？
H1A242 H1：五分之三包？
H1A243 R：對。
H1A244 H1：……裡面有十五顆。
H1A245 R：你怎麼知道？
H1A246 H1：因爲是五分之三包，然後五分之三包就是這邊三等份，一等份是三顆，然後那個五份就可以……我想一下。裡面有九顆。
H1A247 R：九顆？
H1A248 H1：嗯。
H1A249 R：是九顆，還是十五顆？想一下。
H1A250 H1：九顆。
H1A251 R：九顆？好，你爲什麼確定是九顆？
H1A252 H1：因爲這邊已經有……裡面有六顆。
H1A253 R：又有一次不同的答案，那爲什麼會改三次答案，然後最後答案是什麼？你覺得呢？
H1A254 H1：我覺得是六。
H1A255 R：好，爲什麼是六？
H1A256 H1：因爲它是一份有三顆，然後裡面有兩份，這樣子六顆。
H1A257 R：那你會稱呼它布裡面是幾包？
H1A258 H1：五分之二。
H1A259 R：五分之二包？好，很好。最後一個題目。這是一條蜂蜜蛋糕，然後今天開生日 PARTY，師傅送到家的時候，已經幫我們都切三刀……切兩刀了。切兩刀可以分成幾段？
H1A260 H1：三段。
H1A261 R：三段？那這一段我可以稱它是幾條蜂蜜蛋糕？
H1A262 H1：三分之三。
H1A263 R：那如果只有一段呢？
H1A264 H1：三分之一。
H1A265 R：三分之一條。現在問題來了，小朋友來到家裡面，結果邀一邀發現有七位小朋友，那該怎麼辦？該怎麼把一整條的蜂蜜蛋糕平分給七位小朋友？
H1A266 H1：一段分成三份。
H1A267 R：一段分成三份？一段分成三份，是這樣嗎？
H1A268 H1：對。
H1A269 R：那這樣子怎麼分？
H1A270 H1：每一條都切成三份。
H1A271 R：每一段都切成三份。
H1A272 H1：然後全部就是九份，然後有七個，還剩兩顆，如果一段分成兩份的話，全部就只有六份而已，就不夠。

H1A273 **R**：嗯。

H1A274 **H1**：所以多出來可以下次吃。

H1A275 **R**：不行，不可以下次吃，下次會壞掉。……有沒有想到？

H1A276 **H1**：沒有。

H1A277 **R**：沒有？我覺得你好像可以想到。

H1A278 **H1**：可以這兩段分成三份，……不對。這兩段分成八份。

H1A279 **R**：那這樣怎麼拿？如果這裡分成兩份，這裡分成兩份，這裡分成三份，拿到這邊的人有沒有比較少？

H1A280 **H1**：有。

H1A281 **R**：這樣有沒有算平分？

H1A282 **H1**：沒有。

H1A283 **R**：好，不行。好，可以想想看。

H1A284 **H1**：總共有七個人哦？

H1A285 **R**：七個人，對。……現在還沒有辦法解決嗎？好，沒關係，先可以再想一想。

附錄 14

高分組 H1 後測訪談記錄

H1B001 **R**：好，現在第一個問題，有一包花片，我把它拿出五顆放在外面，一包花片哦！另外的放在布裡面。這一包花片我知道它有三十顆，請問布裡面有多少顆花片？

H1B002 **H1**：二十五顆。

H1B003 **R**：二十五顆，好。那布外面我可以說它是多少包花片？

H1B004 **H1**：六分之一。

H1B005 **R**：爲什麼妳會這麼快就知道是六分之一？

H1B006 **H1**：因爲……因爲六乘以五等於三十。

H1B007 **R**：六乘以五等於三十。那個六是什麼？

H1B008 **H1**：一包花片有三十顆，然後分成六份。

H1B009 **R**：平分成六份，每一份有多少？

H1B010 **H1**：五顆。

H1B011 **R**：五顆，好。妳剛剛講說這個叫做六分之一包？

H1B012 **H1**：(點頭)

H1B013 **R**：那布裡面有多少包？

H1B014 **H1**：六分之五包。

H1B015 **R**：六分之五包。好，接下來是一個新題目，糖葫蘆的題目。現在糖葫蘆是四顆串在一起，這個叫做一串，串在一起。那現在知道裡面跟外面合起來總共有六串，那裡面應該是多少顆？

H1B016 **H1**：二十顆。

H1B017 **R**：爲什麼妳知道是二十顆？

H1B018 **H1**：因爲總共有六串，一串有四顆，五乘以四。

H1B019 **R**：五乘以四，那個五是什麼？

H1B020 **H1**：裡面還有五串。

H1B021 **R**：裡面還有五串，好。如果用一串一串當成單位的話，外面的這一串是全部的多少？一串一串來計算。

H1B022 **H1**：六分之一串。

H1B023 **R**：六分之一串，那裡面呢？

H1B024 **H1**：六分之五串。

H1B025 **R**：六分之五串，好，再來。新題目，現在是五顆五顆串在一起，這樣是一串，那知道裡面跟外面合起來，用一顆一顆算，總共有四十顆，那外面這樣子串成一串的話，裡面應該有多少串？

H1B026 **H1**：八串。

H1B027 **R**：八串嗎？裡面跟外面合起來是四十顆哦！

H1B028 **H1**：八串。

H1B029 **R**：八串，好，爲什麼妳會知道是八串？

H1B030 **H1**：因爲八乘以五。

H1B031 **R**：八乘以五，那個是什麼？

H1B032 **H1**：因為總共有四十顆，然後四十除以五。
H1B033 **R**：等於八。這八是外面還是裡面的？
H1B034 **H1**：裡面的。
H1B035 **R**：裡面的。總共有八串？我那個四十是裡面還是外面的？
H1B036 **H1**：全部。
H1B037 **R**：好，答對了，是後面這個答對了。好，另外一個題目，這一顆花片是我從一包花片裡面拿出來的，那一包花片其餘的我就放在布裡面。這一顆花片我知道是八分之一包，這一顆我可以說它是八分之一包，這一顆是八分之一包，那請問妳布裡面有多少包？
H1B038 **H1**：八分之七包。
H1B039 **R**：它有多少顆？
H1B040 **H1**：七顆。
H1B041 **R**：七顆。好，七顆佔的是？
H1B042 **H1**：八分之七包。
H1B043 **R**：八分之七包，好。這是一包花片拿出來的，知道是佔了七分之二包，那包花片其餘的全放在這裡面，請問布裡面有多少包？
H1B044 **H1**：再說一次。
H1B045 **R**：外面這邊是七分之二包，其餘的放在這裡面，那請問這裡面有多少包？
H1B046 **H1**：……七分之五包。
H1B047 **R**：七分之五包，七分之五包是多少顆？
H1B048 **H1**：十五顆。
H1B049 **R**：七分之五包是十五顆，妳怎麼知道？
H1B050 **H1**：因為六顆就是七分之二包，然後三顆就是七分之一包，然後三乘以七再減六。
H1B051 **R**：三乘以七再減掉六，三乘以七算出來是什麼？
H1B052 **H1**：全部的。
H1B053 **R**：全部的，好。如果這一包花片我把它拿出來，然後外面呢總共是八顆花片，我知道它是九分之四包，請問其餘的花片在布裡面有多少顆？我問的是顆哦！
H1B054 **H1**：再說一次。
H1B055 **R**：這八顆花片我把它拿出來，這八顆代表九分之四包，那布裡面有多少顆？
H1B056 **H1**：十顆。
H1B057 **R**：妳怎麼知道有十顆？
H1B058 **H1**：因為二顆就是九分之一包，外面的是九分之四包，然後九乘以二等於十八，十八減八等於十。
H1B059 **R**：哦，妳還是先算出全部有多少，然後再減掉八，所以等於十。這邊是一包花片，請妳拿出四分之三包花片。
H1B060 **H1**：這裡。(拿出九顆)
H1B061 **R**：哪裡？這邊？妳為什麼知道這邊有四分之三包？

H1B062 H1：因爲平分成四等份，然後其中的三份。
H1B063 R：其中的三份，好，很好。這是一條巧克力，然後想要平分給三位小朋友，請妳畫畫看，請妳分分看，會怎麼分？
H1B064 H1：(畫)好了。
H1B065 R：妳怎麼確定這樣子分是對的？
H1B066 H1：因爲它是十二公分，要分成三份，一份是四公分。
H1B067 R：好，那妳切幾刀？
H1B068 H1：兩刀。
H1B069 R：兩刀，好，那每一個小朋友可以說他分到多少條？如果這是一整條的話，那每一個小朋友可以說分到多少條？
H1B070 H1：三分之一。
H1B071 R：三分之一條，好。第二個題目，有一條巧克力分給六個人，知道這裡是六分之一條巧克力，妳能不能畫出原來那一條巧克力？
H1B072 H1：(畫)好了。
H1B073 R：好，妳怎麼做出來的？
H1B074 H1：因爲這是六分之一，然後要做出六分之六，就要畫五個跟它一樣長的。
H1B075 R：再畫五個跟它一樣的。妳怎麼知道要畫出六分之六？
H1B076 H1：要畫出一個完整的。
H1B077 R：要畫出一個完整的就是六分之六，所以妳就這樣子畫。第三個題目，同樣是一條巧克力，然後知道這裡是七分之二條，那妳會不會畫出原來完整的？
H1B078 H1：(畫)
H1B079 R：好，妳是怎麼做出來的？
H1B080 H1：因爲它是七分之二條，是四公分，然後再畫兩個四公分的，然後再畫一個兩公分的。
H1B081 R：所以妳是再畫兩個四公分的，如果這邊到這邊是多少？
H1B082 H1：七分之四。
H1B083 R：然後再做一個？
H1B084 H1：七分之六。
H1B085 R：然後妳再畫一個兩公分的，所以叫做……
H1B086 H1：七分之七。
H1B087 R：七分之七，好。這個問題是之前問過妳的。如果說要開慶生會，這是一條蜂蜜蛋糕，然後師傅送來的時候已經切兩刀了，那是把這條蜂蜜蛋糕切成幾段？這每一段是多少條蛋糕？
H1B088 H1：三分之一條。
H1B089 R：然後現在就是有七位小朋友要來分，每一個人可以分到多少條？妳會怎麼做？
H1B090 H1：(畫)(每一段七等份)
H1B091 R：好，那每一個小朋友他可以得到多少條？妳可以把一個小朋友的先把它塗出來。

H1B092 **H1**：(畫)
H1B093 **R**：好，那這個小朋友的是得到多少條？
H1B094 **H1**：一份分成七份，然後他得了三份。
H1B095 **R**：二十一份他得了多少條？用分數來表示。
H1B096 **H1**：二十一分之三條。
H1B097 **R**：二十一分之三條。爲什麼這麼？
H1B098 **H1**：因爲一份分成七份，就是七塊，每個人分三塊，一條二十一塊，每人分到三塊。
H1B099 **R**：這個在上課的時候，我們有沒有談過？有沒有學過類似的？
H1B100 **H1**：有。
H1B101 **R**：有，有哪個部份是跟這個有點類似的？
H1B102 **H1**：好像沒有。
H1B103 **R**：好像沒有，好。這是一條蜂蜜蛋糕，然後妳分到這一塊，這一條被分成幾份？
H1B104 **H1**：五份。
H1B105 **R**：五份，那如果說妳拿到的這一段可以說是幾條蛋糕？
H1B106 **H1**：五分之一條。
H1B107 **R**：五分之一條，如果妳今天早上有四節課，下午有四節課，妳每一節課都吃它的四分之一、四分之一、四分之一，四節下課，請問妳每一節下課是吃了多少條？
H1B108 **H1**：四分之一。
H1B109 **R**：四分之一條，這個叫做一條哦！
H1B110 **H1**：二十分之一。
H1B111 **R**：二十分之一條，爲什麼？
H1B112 **H1**：因爲一段平分成四份，一節下課吃了四分之一條⋯⋯
H1B113 **R**：是條嗎？
H1B114 **H1**：⋯⋯一條分成五份，然後這邊分成四份，其它的也一樣，然後總共是二十份，然後一節下課就是吃了二十分之一。
H1B115 **R**：二十分之一條，好。這是一包積木，請妳拿出八分之五包積木。
H1B116 **H1**：(拿)
H1B117 **R**：好，妳怎麼知道這裡是八分之五包？
H1B118 **H1**：因爲就是分成八份，然後拿出裡面的五份。
H1B119 **R**：所以那邊八分之五包是幾顆？
H1B120 **H1**：十顆。
H1B121 **R**：十顆，好，來，有一包積木我把它拿出來，知道這裡是六分之三包，那妳曉不曉得一包是多少顆？
H1B122 **H1**：十八顆。
H1B123 **R**：十八顆，爲什麼知道是十八顆？
H1B124 **H1**：因爲六分之三包，再算出另外的六分之三包，這邊是九顆，另外六分之三包也是九顆，總共是十八顆。

H1B125 **R**：所以妳是用六分之三、六分之三算的，好。如果從這裡到這裡，我知道它叫做三分之四條積木，或者是蜂蜜蛋糕，那妳曉不曉得一條長怎樣。

H1B126 **H1**：(畫)

H1B127 **R**：一條積木在哪裡？

H1B128 **H1**：(指)

H1B129 **R**：從哪裡到哪裡？

H1B130 **H1**：(畫)

H1B131 **R**：爲什麼這個是一條積木？

H1B132 **H1**：因爲這裡是四分之三……

H1B133 **R**：哦，不是，我講的是三分之四條……

H1B134 **H1**：(重畫)

H1B135 **R**：一條在哪裡？

H1B136 **H1**：這裡到這裡。

H1B137 **R**：這裡到這裡，爲什麼妳知道這裡是一條積木？

H1B138 **H1**：因爲這裡是三分之四條，這邊就是一條。

H1B139 **R**：好，如果這一段又平分給八個人，那八個人其中的一個其實得到的是多少條？

H1B140 **H1**：二十四分之一條。

H1B141 **R**：二十四分之一條，好，妳怎麼知道？

H1B142 **H1**：因爲這邊分成八份，這邊也一樣分成八份，總共是二十四份，然後拿其中的一份。

H1B143 **R**：好，如果說這邊到這邊是三分之一條，那邊到那邊是四分之一條,我怎麼知道三分之一條比四分之一條多多少？這兩個相差多少？相差多少條？

H1B144 **H1**：不知道。

附錄 15

學習回顧

四年　　班　座號：　　姓名：

小朋友：

上了十幾節有關分數的課，現在已經接近尾聲了，這段期間感謝您認真的參與。在結束之前，不妨把你這十六節分數課做一下回顧，想想看學到了什麼？還有哪些地方不太清楚？甚至是整個上課的感覺，都可以寫下來告訴我。

王老師

學生	學習單回饋
S1	①我學到了分數裡有關的東西。 ②用分數來說明一個圖。 ③老師我很喜歡上您的課。
S2	謝謝王老師教分數。 我以前不知道什麼是分數現在知了。 學了分數等值。
S3	我在這16節課裡學到了許多分數的問題，包括分數的加減還有等值分數，我覺得因為有王老師的教導，讓我分數學的非常了解。

S4	我學到了很多分數和單元還有分母和分子的關工。
S5	學到等值分數、數線。 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 可以找到（ ）來做為共同測量它們的尺。 上課很好玩。 
S6	謝謝。 這讓我有個美的時光，謝謝您的教 我覺得王老師您出的題目都很棒。
S7	①我最不會怎樣讓分數相同。上了王老師的課也是替自己安習。②希望未來可以上最有趣的數學！③我最會分數的單位。