



國立中山大學教育研究所碩士在職專班

碩士論文

國小五年級擬題教學之研究

~以整數四則混合運算為例

研究生：吳進寶 撰

指導教授：梁淑坤 博士

中華民國九十四年一月

目 次

第一章 緒論

第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的.....	6
第三節 待答問題.....	6
第四節 名詞釋義.....	7

第二章 文獻探討

第一節 解題的相關理念.....	8
第二節 擬題和相關研究.....	25
第三節 四則混合運算的教材內容.....	44
第四節 資料分析的背景.....	49

第三章 研究方法

第一節 研究架構.....	54
第二節 研究工具.....	57
第三節 研究對象.....	61
第四節 研究程序.....	63
第五節 預試資料的分析.....	65

第四章 結果與討論

第一節 學生的擬題作品類型和內容.....	73
-----------------------	----

第二節 學生在擬題教學過程中的解題表現.....	85
第三節 學生對擬題教學的接受程度.....	97
第四節 教師在擬題教學過程中所遭遇的困難.....	99
第五章 結論與建議	
第一節 結論.....	101
第二節 建議.....	103
參考文獻	
一、中文部份.....	105
二、英文部份.....	108
附錄	
附錄一 第一次解題學習單舉隅.....	111
附錄二 第二次解題學習單舉隅.....	112
附錄三 第三次解題學習單舉隅.....	113
附錄四 第四次解題學習單舉隅.....	114
附錄五 第五次解題學習單舉隅.....	115
附錄六 第六次解題學習單舉隅.....	116
附錄七 第七次解題學習單舉隅.....	117
附錄八 第八次解題學習單舉隅.....	118
附錄九 第一次擬題學習單舉隅.....	119

附錄十	第二次擬題學習單舉隅.....	120
附錄十一	第三次擬題學習單舉隅.....	121
附錄十二	第四次擬題學習單舉隅.....	122
附錄十三	第五次擬題學習單舉隅.....	123
附錄十四	第六次擬題學習單舉隅.....	124
附錄十五	第七次擬題學習單舉隅.....	125
附錄十六	第八次擬題學習單舉隅.....	126
附錄十七	學習日記舉隅一.....	127
附錄十八	學習日記舉隅二.....	128
附錄十九	學習日記舉隅三.....	129

圖次

圖 2-1	Polya (1945) 的解題歷程.....	9
圖 2-2	解題歷程圖示.....	21
圖 2-3	解自己所擬的題目.....	41
圖 2-4	學生的擬題過程.....	42
圖 2-5	擬題作品分類流程.....	51
圖 3-1	研究架構圖.....	54

表次

表 2-1	Polya (1945) 的解題歷程表.....	10
表 2-2	Schoenfeld (1985) 的解題階段及相關問題表.....	14
表 2-3	Mayer (1992) 的數學解題成份分析模式.....	19
表 2-4	解題歷程比較.....	20
表 2-5	教育部歷年頒布的數學課程標準的目標.....	22
表 2-6	南一版四則運算教學目標.....	47
表 2-7	南一版各冊相關主題的教學目標.....	48
表 2-8	擬題作品分類表.....	49
表 2-9	解題表現的分類表.....	52
表 3-1	擬題教學流程.....	56
表 3-2	運算題型的題目表.....	57
表 3-3	研究對象接受數學課程的情形.....	62
表 3-4	預試的擬題作品內容分析表.....	66
表 3-5	預試的解題成敗情形統計表.....	69
表 4-1	擬題作品分類結果.....	75
表 4-2	擬題作品內容分析表.....	76
表 4-3	解題成敗情形統計表.....	88
表 4-4	運算失敗原因統計.....	96

國小五年級擬題教學之研究

~以整數四則混合運算為例

第一章 緒論

第一節 研究動機

傳統數學教學方式注重老師教、學生學的知識傳遞歷程，與今日多元化的數學世界顯然是格格不入的，然而如何培養學生思考能力以解決數學問題確實相當困難（施淑娟，1999）。尤其在傳統的數學教室中，教師經常把課本或指引的題目，拿來示範解題給學生模仿（林文生，1996），這樣的流程反反覆覆，學生就在「成功的模仿下學習」，直到學會教師要傳授的「功夫」（梁淑坤，1997）。所以，數學教室裡常只是一群學生認真模仿著老師的算法（劉祥通、周立勳，1999）。如此的數學教育，實在無法提升學生的自發性思考能力，培養學生解決問題的能力。

因此自民國八十五年實施的民國 82 年版國小數學課程，其教學活動的重點在於讓孩子們透過討論與溝通，產生數學知識，解決問題（周筱亭，1995）。因為在快速變遷的時代中，無法預測學生要學會的是什麼形式的數學，況且學校數學教育不可能把學生們周遭所遇到的問題全部都教過，所以培養學生的解題能力，乃為數學教育上極為

迫切的需要（林碧珍，1989）。

針對 82 年版國小數學課程的內容，周筱亭（1995）提出二項重點說明：

1. 此次數學課程標準的修訂原則為：配合社會的需求、落實以學生為本位的觀點、強調數學的解題活動。
2. 此次數學課程的重點為：將數學視為解題、將數學視為推理、將數學視為溝通和數學的聯結。

由以上二點，可明顯看出 82 年版數學課程的改革動向，其學習理論以建構主義為主，由發現轉向建構，強調由學生自己建構知識，而不是被動接受知識（甯自強，1993）。落實以兒童為本位的觀點--只有在學童主動參與教學活動下，學習才會發生（黃敏晃，1995）。

既然建構主義取向的教學，提出了以「學習者的學習活動」為中心的「建構式」教學主張，教師們的角色便須隨之改變，由傳統的「教學者」改變為情境的「設計者」、學習者討論溝通的「協調者」，促進學習者進行學習。因而在教學情境中，學生已成為主角，整個學習過程中，他是知識的詮釋者、創造者及問題的探索者（張美珍，2002）。因此從建構主義的觀點來看，教學者應需妥善運用教學策略，並考量如何安排教學活動的進行，以促進學生的學習成效。

承如以上所討論的課程精神，國內外有許多學者提出建議，應該讓學生由主動的建構過程中去學習數學，而提供學生在課堂中擬題的機會，便是一項被推薦的教學方式（Kilpatrick, 1987；Krulik & Rudnick, 1993；Silver & Cai, 1993；梁淑坤，1994）。比起教科書中或是教師所出的題目，學生們解自己所擬的題目的動機比較強烈，而且問題若是由解題者所擬出來解題的動機就會很高（Brown & Walter, 1993；梁淑坤，1994）。亦有學者提出採用擬題策略，是促進建構學習的有效數學解題教學策略之一（施淑娟，1999）。

由以上所述，擬題與 82 年版數學課程精神是相符合的。另外，在 82 年版之後的國民中小學九年一貫課程暫行綱要（教育部，2002）中，數學學習領域課程目標第三條：「發展形成數學問題與解決數學問題的能力。」其中「形成數學問題」意義同於「擬題」，「解決數學問題」意思同於「解題」。由此可知，九年一貫課程的數學領域，重視學生發展「擬題」和「解題」的能力培養，而擬題的精神正可符合其課程目標的需求。

而在九年一貫課程目標（教育部，2002）的說明中亦提到「數學學習活動應讓所有學生都能積極參與討論，激盪各種想法，激發創造力，明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期在社會互動的過程中建立數學知識。」透過擬題的活動，正可以提供學生

一些討論、思考和想像的機會，藉以提昇學生的創造力，進而培養合作及溝通表達的能力。

在擬題過程當中，學生必須以自己的數學觀點去思考周遭或日常生活中的事物，然後透過個人的思考模式想出數學問題來，再以數學知識和方法解決問題，如此，擬題是訓練一個人的數學思考，培養分析問題、創造問題與解決問題能力的方法之一（楊惠如，2000）。

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM）則在課程與評量標準（NCTM, 1989：138）提出「應讓學生在數學課中經驗、察覺和形成他們的問題（即擬題），並以此作為教學的重心。」。同時 NCTM（1991：95）也建議「學生應有機會從已知情境中形成問題，並藉由修正已知問題的條件中來創造新的問題」。意即應該提供機會，讓學生擬他們自己的問題。

另外，由於九年一貫數學領域之課程綱要，於 2003 年 11 月 14 日正式發佈，並將於 94 學年度起，自一年級及七年級同步逐年實施。因此 93 學年度一年級至六年級的學生，皆面臨國小階段與國中階段，使用不同課程標準的狀況，為協助這些學生平順銜接二套課程標準，教育部規劃銜接與補強計畫進行輔導（教育部，2004a），其中「國民中小學數學課程銜接補強建議」（教育部，2004a）在五年級下學期

應補強內容的第二項提到：「加強四則混合計算（不超過三步驟）在處理情境問題與理解算式約定之後，提供更多去情境之練習題，藉以熟練直式計算，計算數字不必太小，但在（1）的限制之內。」意即整數四則混合運算，是需要銜接與補強的部份之一。

在教學實務中，研究者現任教對象為國小五年級學生，整數四則混合運算是上學期數學的其中一個單元。根據研究者的實際了解，班上學生學習意願普遍不佳，全班有三分之二的學生，評量結果較其他單元低落許多。在上學期末學年會議中，有幾位同學年的教師也提出類似的看法，引起了廣泛的討論。如今在「國民中小學數學課程銜接補強建議」（教育部，2004a），亦有相同看法，認定學生在整數四則混合運算這方面的不足，希望學生有整個學期的時間，可以練習及熟悉，因此教師應該持續提供恰當之練習題。

基於上述理由，研究者因而產生研究動機--將整數四則混合運算和擬題教學相結合，讓學生加深對問題情境結構的熟悉，自己形成數學問題，自己解決數學問題，並且透過全班討論的進行，分享解題的方法和擬題的成果，增加學習的樂趣。

第二節 研究目的

根據上述研究動機，本研究的研究目的如下：

- 一、 分析學生擬題的作品類型和內容。
- 二、 探討學生在擬題教學過程中的解題表現。
- 三、 探討學生對擬題教學的接受程度。
- 四、 探討教學者在擬題教學過程中所遭遇的困難。

第三節 待答問題

根據以上四項研究目的，本研究的待答問題如下：

- 一、 學生的擬題作品出現那些類型和內容變化？
- 二、 學生在擬題教學過程中的解題表現為何？
- 三、 學生對擬題教學的感想有那些？
- 四、 教學者在擬題教學過程中遭遇那些困難？

第四節 名詞釋義

以下是本研究重要相關名詞，有「擬題」、「擬題的類型」、「擬題的內容」和「解題表現」等四個。

一. 擬題

本研究是指「學生先解完教師提供的題目後，再以原題為基礎，想出另一個類似的數學問題，學生可以改變數字、事物、問題結構等。」

二. 擬題的類型

研究者採用國內學者梁淑坤（1999）所發展出的一套評量工具（如表 2-8），將學生擬題的作品分類，再依此分類方式，進行擬題作品類型的探討，如題目是否可行、資料是否充足等。

三. 擬題的內容

本研究的擬題作品內容分析，是先收集學生擬題的作品，再和原題目比較差異，並依照數字、事物和題目結構等三方面，探討學生如何改變原題目。

四. 解題表現

Mayer（1992）提出解題者需具備五種知識：語言知識、語意知識、基模知識、策略知識和程序性知識。研究者將學生的解題記錄，根據 Mayer 五種知識的分類方式，進行錯誤原因的解析。

第二章 文獻探討

本章內容分成四節，概要分述如下：

第一節 探討數學解題的相關理念和教學策略。

第二節 探討擬題的相關研究，以及擬題對數學教育的重要性。

第三節 分析整數四則混合運算的教材內容。

第四節 說明本研究資料分析的背景。

第一節 解題的相關理念

在數學解題的研究領域中，Polya (1945) 是最早提出數學解題的歷程模式。其後繼的著名學者，例如 Schoenfeld (1985) 加入後設認知的觀點來看待解題，Mayer (1992) 則是以心理學角度詮釋解題的歷程，雖然是不同的觀點，然而大部份都以 Polya 為基礎，再發展出各自的理論架構。

本節主要以前述三位學者的解題理論為核心，然後歸納解題的觀點和教學策略。因此，內容分成以下五個部份：

- 一. 探討 Polya 的解題四階段。
- 二. 探討 Schoenfeld 的數學解題歷程模式。
- 三. 探討 Mayer 的數學解題歷程模式。
- 四. 歸納三位學者的理論。
- 五. 探討解題的教學策略。

一. Polya 的解題四階段

波蘭數學家 Polya (1945) 在其所著《How to solve it》中，提出將解題歷程分成四個階段（如圖 2-1）：

1. 瞭解題意 (Understand) : 了解問題是問什麼？已知、未知的條件是什麼？
2. 擬定解題計畫 (Plan) : 找出未知數和已知數之間的關係，如果找不著，就得考慮一些輔助問題，想辦法擬定解題的方法、策略和執行步驟。
3. 實行解題計畫 (Carry out) : 執行所擬定的計畫。
4. 回顧解答 (Look back) : 檢驗解答的合理性，並鼓勵用不同方法求解，或應用到別的問題。

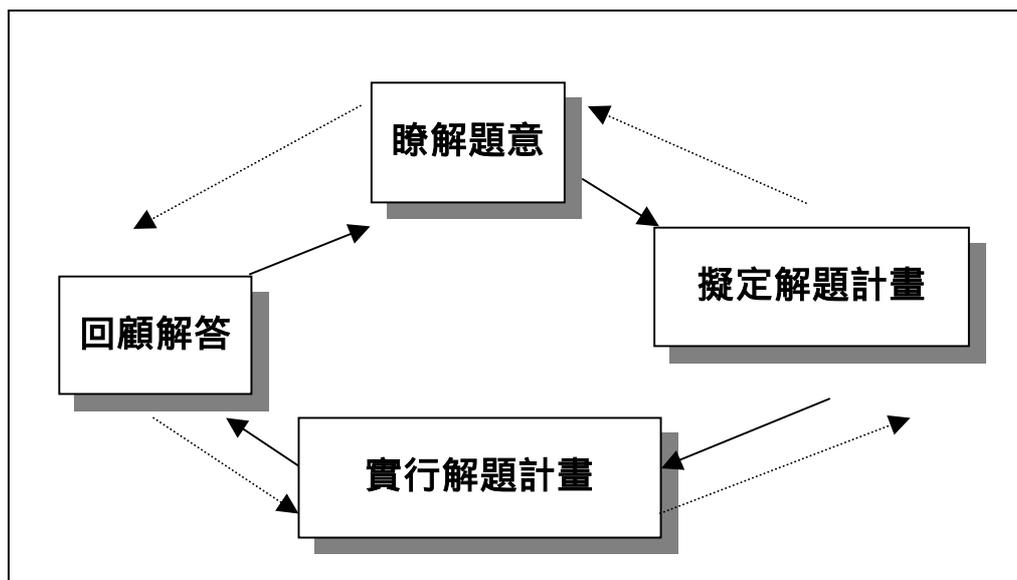


圖 2-1 Polya (1945) 的解題歷程

在實際進行解題時，不一定是依序直線進行的，有時需折返，有

時需繞圈子，才能達成「解決問題」的目的。在每一階段中，他也提出許多相關的解題策略，稱之為捷思法（heuristic）策略，供學習解題者參考。但這些捷思法，如同 Polya 自己在序文所說的，在當時並不太流行，但是它的歷史很久，將來也許會被重視。有關 Polya 的解題歷程內容，詳述如表 2-1。

當然在今日的數學教育研究當中，Polya 的解題歷程並不是一個新的概念，在 80 年代，美國中小學的數學課程即以數學解題為主要的導向，而且好些中小學教科書的編寫，也是以 Polya 的解題歷程作為依歸（譚克平，1999）。由此可看出，Polya 的學說對數學教育確實產生了影響，也應驗了他在書中序文的預言。

綜觀 Polya 的解題四階段歷程，可看出其中最明顯的特徵是，Polya 將解題歷程視為「階段」。而 Polya 之後的學者，大都以 Polya 提出的解題四階段為基礎，再加以修改增刪。

表 2-1 Polya 的解題歷程表（Polya, 1945；引自閻育蘇，1993：12）

<p>第一步 你必須弄清問題</p>	<p>了解問題 未知數是什麼？已知數據是什麼？條件是什麼？滿足條件是否可能？要確定未知數，條件是否充分？或者它是否不充分？或者是多餘的？或者是矛盾的？畫張圖。引入適當的符號。把條件的各個部份分開。你能否把它們都寫下來？</p>
------------------------	---

接下頁

<p>第二步</p> <p>找出已知數與未知數之間的聯繫</p> <p>如果找不出直接的聯繫，你就可能不得不考慮輔助問題</p> <p>你應該最終得出一個求解的計畫</p>	<p style="text-align: center;">擬定計畫</p> <p>你以前見過它嗎？你是否見過相同的問題而形式稍有不同？你是否知道與此有關的問題？你是否知道一個可能用得上的定理？看看未知數！試想出一個具有相同未知數或相似未知數的熟悉的問題。</p> <p>這裏有一個與你現在的問題有關，且早已解決的問題。你能不能利用它？你能利用它的結果嗎？你能利用它的方法嗎？為了能利用它，你是否應該引入某些輔助元素？你能不能重新敘述這個問題？你能不能用不同的方法重新敘述它？</p> <p>回到定義去！</p> <p>如果你不能解決所提出的問題，可先解決一個與此有關的問題。你能不能想出一個更容易著手的有關問題？一個更普遍的問題？一個更特殊的問題？一個類比的問題？你能否解決這個問題的一部份？僅僅保持條件的一部份而捨去其餘部份，這樣對於未知數能確定到什麼程度？它會怎樣變化？你能不能從已知數據導出某些有用的東西？你能不能想出適於確定未知數的其他數據？如果需要的話，你能不能想改變未知數或數據，或者二者都改變，以使新未知數和新數據彼此更接近？</p> <p>你是否利用了所有的已知數據？你是否利用了整個條件？你是否考慮了包含在問題中的所有必要的概念？</p>
<p>第三步</p> <p>實行你的計畫</p>	<p style="text-align: center;">實行計畫</p> <p>實現你的求解計畫，檢驗每一步驟。你能否清楚的看出這一步驟是正確的嗎？你能否證明這一步驟是正確的？</p>
<p>第四步</p> <p>驗算所得到的解</p>	<p style="text-align: center;">回顧解答</p> <p>你能否檢驗這個論證？你能否用別的方法導出這個結果？你能不能一下子看出它來？你能不能把這結果或方法用於其他的問題？</p>

二. Schoenfeld 的數學解題歷程模式

Schoenfeld (1985) 則認為在複雜的解題活動中，還需加入一些高層次思考的方法，例如後設認知中的自我控制能力，此外也要考慮到解題者對數學的信念等因素 (譚克平，1999)。

因此，Schoenfeld (1985) 著重在解題者心理活動，強調數學解題要考慮四個變項：資源 (resources)、捷思 (heuristics)、控制 (control) 和信念系統 (belief system)。

資源是指解題者所具有相關的數學知識，包括數學事實、數學定義、運算程序及相關技巧等。若缺乏資源，則解題活動將無法進行。具有更多資源的解題者，解答正確的機會越高。

捷思是指捷思策略 (heuristics strategies)，例如畫表格、尋找組型、簡化問題、猜測等。解題者若具有資源，缺乏適當的解題策略，解題時仍會不知從何著手。而解題者可以從解題的經驗中，累積獲得解題策略，之後對類似問題，便會運用解題策略來進行解題。

控制是指解題者如何決定解題計畫、如何選擇目標、如何採用策略、監控和評估解題結果等。

信念系統是指解題者對於數學的觀點，此數學觀將會影響解題者

的行為。例如有些學生認為數學需要天分，無法靠後天的努力來增強，在遇到解題失敗時，容易歸咎於本身的因素。有時遇上較耗費時間的問題，也會放棄繼續作答。

Schoenfeld (1985) 研究發現在這四個變項中，控制因素是處於關鍵的重要地位。因為如何合理的運用資源、如何適當的採用捷思策略，都是控制因素所主導的。因此他以控制因素的觀點，將解題歷程分成六個階段，而且每一階段又可分為數個解題步驟（如表 2-2）：

1. 讀題 (reading)：開始於解題者閱讀題目的時候，包括解題者為求更了解題意時，複述題目中重要條件的情形。
2. 分析 (analysis)：讀題後，了解問題的陳述，有系統的重新陳述問題，尋找解題的方向。
3. 探索 (exploration)：讀題後，也是尋找解題路徑。要注意的是：分析和探索的差別是，分析通常較具有良好結構(well structured)的形式，而探索比較不具良好的結構，所以分析可說是比較系統化的找尋解題路徑。
4. 計畫 (planning)：開始於從分析或探索階段獲得一解題路徑時，依此路徑規劃解題步驟。
5. 執行 (implement)：開始於計畫階段之後，將所規劃的解題步驟

逐一執行。

6. 驗證 (verify) : 檢驗答案合理性之驗算工作。

從表 2-2 中可發現 Schoenfeld 並沒有把計畫和執行做明顯劃分 ; 不過其中 PI1、PI2 和 PI3 三個步驟可視為計畫階段 , PI4、PI5、PI6 三個步驟則是屬於執行階段。

另外在表 2-2 中 , 第六個階段是過渡 (transition) , 此一階段的相關問題 , 是作為判斷 Schoenfeld 以控制因素所分的六個階段相互轉換的依據 , 亦即從一個階段轉到另一個階段時 , 這中間產生的解題行為

表 2-2 Schoenfeld 的解題階段及相關問題表
(Schoenfeld, 1985 ; 引自塗金堂 , 1996 : 301)

一、 讀題 (reading)

R1 : 注意到問題所有條件嗎 ? 條件是明顯的 ? 或是模糊的 ?

R2 : 正確了解目標狀態嗎 ? 目標狀態是明顯的 ? 或是模糊的 ?

R3 : 是否評估解題者現有知識與問題的關係 ?

二、 分析 (analysis)

A1 : 選擇什麼觀點 ? 選擇是明顯的或是不明顯的 ?

A2 : 選擇問題條件採取行動嗎 ?

A3 : 根據問題目標採取行動嗎 ?

A4 : 條件和目標有何關聯 ?

A5 : 解題者的行動 (A1-A4) 合理嗎 ?

接下頁

三、 探索 (exploration)

E1 : 本階段是問題的條件導向？或目標導向？

E2 : 所採行動有方向或重點嗎？行動有目的嗎？

E3 : 有無監視行為？監視行為的有無對解答的結果有何影響？

E4 : 解題者所採取的行為是否合理？

四、 計畫--執行 (planning-implementation)

PI1 : 是否有計畫行為？

PI2 : 計畫與解題有關係嗎？是否適當？是否有良好架構？

PI3 : 受試者是否評估計畫的相關性、適當性及結構性？

PI4 : 執行是否依計畫有系統的進行？

PI5 : 是否在局部或整體層次評估執行？

PI6 : 評估之有無對結果的影響如何？

五、 驗證 (verification)

V1 : 解題者是否重新檢查解答？

V2 : 有無考驗解答？如果有的話？如何考驗？

V3 : 有無歷程及解答的評估？對結果的信心有多少？

六、 過渡 (transition)

T1 : 對解題的當前狀態有無評估？若放棄一種解題途徑，是否企圖利用其中有用的部份？

T2 : 有無評估先前放棄的解題途徑，對解答產生的局部與整體影響如何？所採行動適當而必要嗎？

T3 : 是否評估採取新途徑的短程或長程的影響？或直接跳入新的方法？

T4 : 採用新途徑後有無評估短程及長程影響如何？行動是否適當而必要？

比較 Schoenfeld 和 Polya 之間的差異，有二個發現：

首先，Schoenfeld 將「瞭解題意」區分成「讀題」、「分析」，將「擬定解題計畫」區分成「探索」、「計畫」。他們都著重在探究數學解題所經歷的階段，並詳述每個階段所採取的策略，只是 Schoenfeld 將各階段再加以細分。

其次，Schoenfeld 所提出的控制因素，和「後設認知」（metacognition）有相當大的關連性。解題者在規劃、監控與調整解題活動的表現越好，獲得正確答案的機會越大。Schoenfeld 加入的「後設認知」概念，是 Polya 並未考慮到的。

雖然 Schoenfeld 對解題歷程的六個階段，都提出了一些相關問題，但由於解題歷程是複雜的思考過程，要從外在的行為觀察加以劃分，是不容易的。因此近年來，研究者常採用放聲思考法（thinking aloud），探討解題者表現的解題行為（塗金堂，1996）。它的實施程序是，研究者在解題過程中，以錄音或錄影方式，將解題者口述的語言記錄下來，再轉譯成原案（protocol），最後根據原案，進行分析解題行為。

三. Mayer 的數學解題歷程模式

Mayer (1992) 以心理學家的觀點，提出「問題」具有三個特徵：「給予的條件狀態」、「目標」和「障礙」。他認為問題是個體從已知的條件狀態，欲達到目標狀態時，因缺乏立即通往正確答案路徑，而所處的一種情境。所謂解題，即是在符合限制條件的要求之下，用各種可能方法，從已知條件狀態達到目標狀態的歷程。

Mayer (1987, 1992) 把數學解題分為以下四個階段：

1. 問題轉譯：指將每一個陳述句轉譯為內在表徵，也就是去理解語句之間的關係，將每一個陳述句加以解釋。
2. 問題整合：包括認識問題的類型和資料、決定解題所需要的資料、用圖示或圖畫來表示問題等，即將資料整合而成一個問題表徵。
3. 解題計畫和監控：想出及監控解題計畫。
4. 解題執行：運用演算法則進行計算。

而這四個階段可分成「問題表徵」和「問題解決」二大步驟：問題表徵包含問題轉譯和問題整合兩個歷程；問題解決則包含計畫和監控、執行兩個步驟。

Mayer 認為解題者需要具備五種知識：語言知識、語意知識、基

模知識、策略知識和程序性知識。其中，問題轉譯需要語言知識和語意知識，問題整合需要基模知識，計畫和監控需要策略知識，執行解題需要程序性知識。如果解題者在解題時，缺乏五種知識中的任何一種，很可能就無法成功的解題。

他舉了一個地磚問題，說明解題時，會如何運用到這五種知識(如表 2-3)：

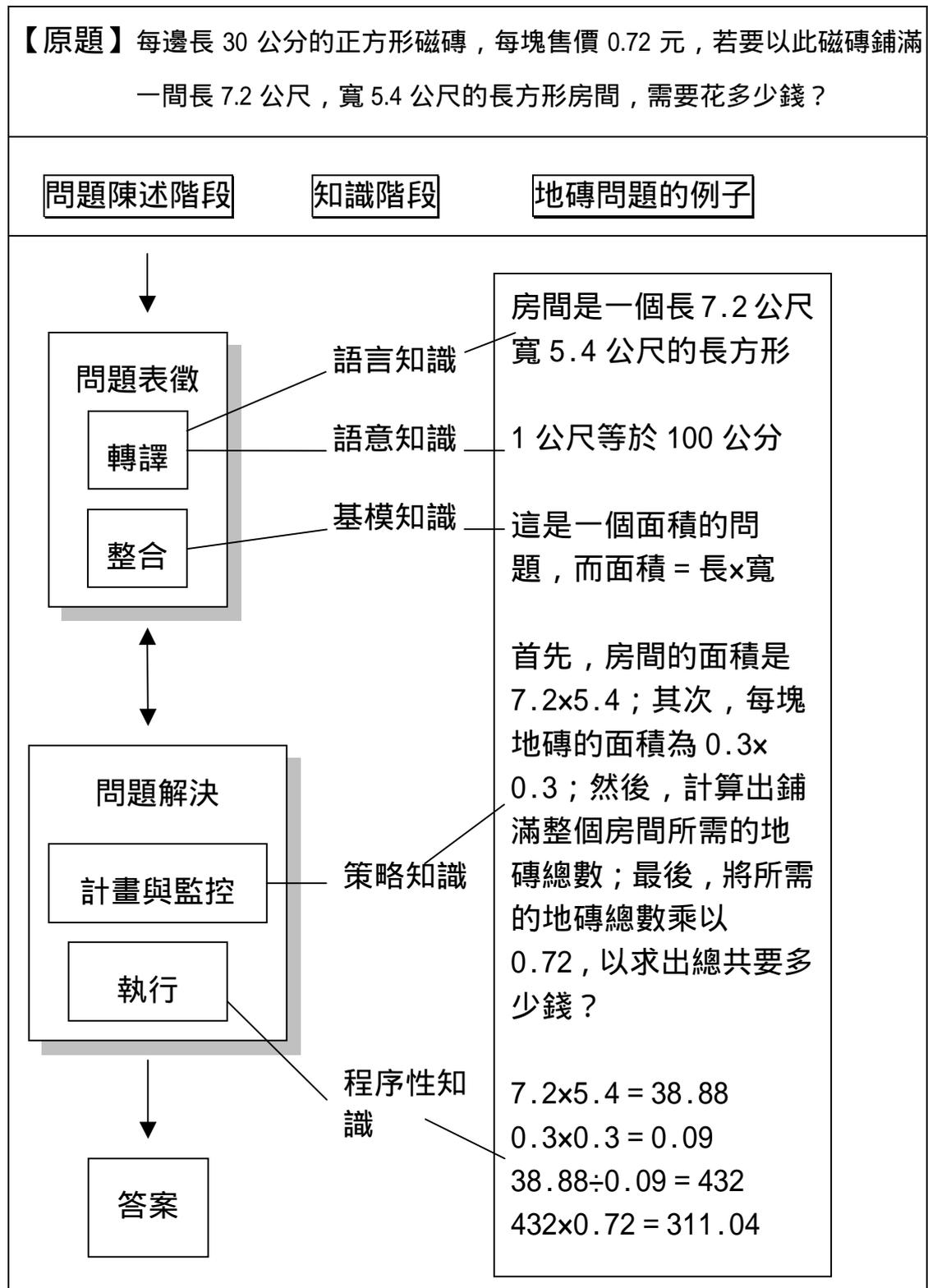
1. 語言的知識，例如認字的能力。
2. 語意的知識，例如 1 公尺等於 100 公分、正方形的四邊是等長。
3. 基模的知識，例如長方形的面積等於長乘以寬。
4. 策略的知識，例如先設定子目標，算出房間的面積以及需要多少磁磚，再算要花多少錢。
5. 程序性的知識，例如能做乘除法的計算。

Mayer 和 Schoenfeld 所關注的是，在解題歷程中影響解題者表現的因素，是不同於 Polya 按階段解題的觀點。

另外，Mayer 認為解題者需具備的五種知識，和 Schoenfeld 提到的「資源」變項相似，他重視解題者本身的條件，而將其列為解題歷程考慮的因素。而且以往的數學教學，經常只強調獲得事實和程序性的知識，而忽略了基模及策略的知識（鄭博信、劉曼麗、詹勳國，

2000)。Mayer 的觀點，正可以釐清這個現象。

表 2-3 Mayer 的數學解題成份分析模式 (Mayer, 1992 : 459)



四. 解題理論的歸納

研究者嘗試依解題歷程所含成份的觀點，比較 Polya、Schoenfeld 和 Mayer 三位學者的解題歷程，整理如表 2-4：

表 2-4 解題歷程比較

學者 成份分析	Polya (1945)	Schoenfeld (1985)	Mayer (1992)
對問題的察覺	✓	✓	✓
數學知識和相關概念		✓	✓
問題表徵轉換			✓
擬定策略	✓	✓	✓
執行策略	✓	✓	✓
察覺與監控		✓	✓
回顧解答	✓	✓	

從上表中可看出，「對問題的察覺、擬定策略、執行策略」是三人共同的想法，「數學知識和相關概念 察覺與監控問題」是 Schoenfeld 和 Mayer 提出的，Polya 和 Schoenfeld 是提出「回顧解答」，而「表徵轉換」則是 Mayer 特別提出的。

研究者認為雖然三人的觀點有差異，但卻各有獨到的創見。研究者綜合三位學者的共同看法，將解題歷程分成 7 個成份，詳如圖 2-2：

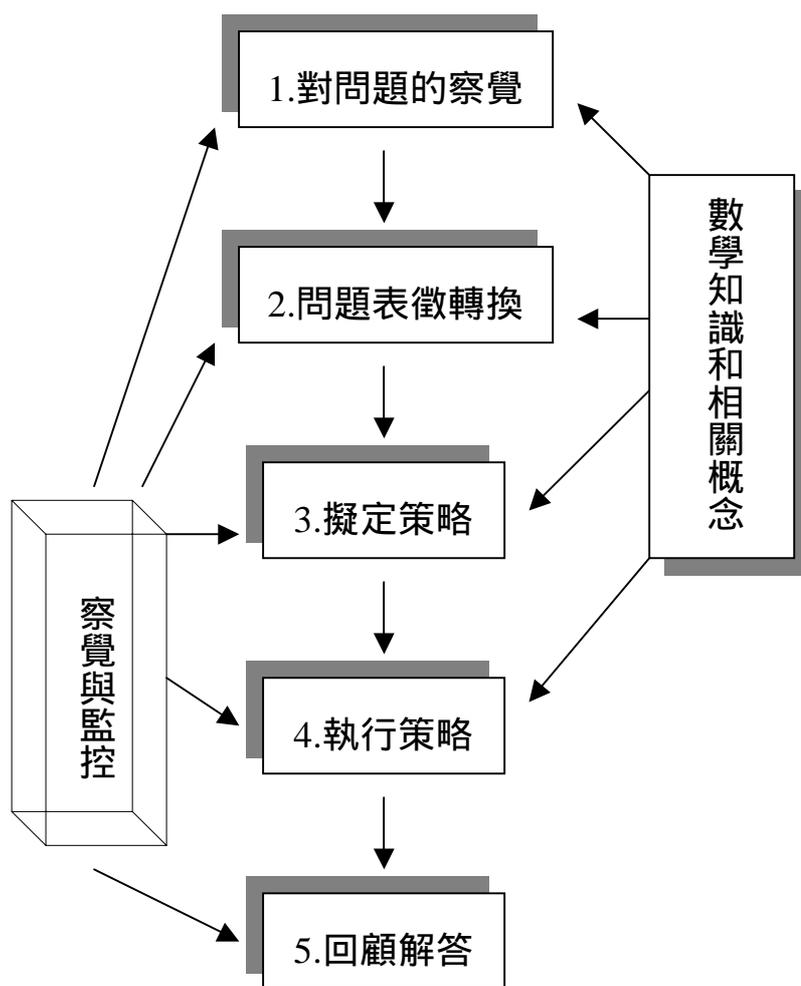


圖 2-2 解題歷程圖示

其中，就解題歷程而言，依序為：1.對問題的察覺→2.問題表徵的轉換→3.擬定策略→4.執行策略→5.回顧解答。就解題者本身條件而言，須具備數學知識和相關概念，以及屬於後設認知的察覺與監控。研究者將依據 Mayer 數學知識的分類方式，解析學生在解題歷程中前四個階段（1 到 4）的問題。至於察覺與監控，因其涉及心理層面的活動，本研究不列入探討的範圍。

五. 解題的教學策略

解題對數學教育而言，一直是重要的課題。從教育部歷年頒布的數學課程標準的目標中(詳如表 2-5)，不難發現解題在數學課程的重要性。

表 2-5 教育部歷年頒布的數學課程標準的目標

數學課程標準	目標內容
民國 51 年版算術課程標準(教育部, 1962)	總目標中第三條：「從處理日常生活中有關數量問題，培育兒童基本數量知識，訓練計算技能。」
民國 57 年版數學暫行課程標準(教育部, 1968)	目標第一條：「從解決有關數量問題之經驗中，訓練兒童解決家庭、學校、社會、日常生活中有關數量問題之能力。」
民國 64 年版數學課程標準(教育部, 1975)	總目標中第三條：「能運用數、量、形之間的相互關係，及使用適當的數學語言，進而解決日常生活中有關的問題。」
民國 82 年版數學課程(教育部, 1993)	總目標中第二條：「養成從數學的觀點考慮周遭事物，並運用數學知識與方法解決問題的能力。」
民國 91 年版國民中小學九年一貫課程暫行綱要(教育部, 2002)	數學學習領域課程目標第三條：「發展形成數學問題與解決數學問題的能力。」
民國 92 年版國民中小學九年一貫課程綱要(教育部, 2004b)	數學學習領域課程目標第二條：「學習應用問題的解題方法。」

其中出現的字眼雖有不同，例如：「處理日常生活中有關數量問題」、「解決有關數量問題」、「解決日常生活中有關的問題」、「解決數學問題」等，其意義卻和「解題」相去不遠。因此，歷年的數學課程目標，確實凸顯了解題在數學課程的重要性，也期望能提升學生的解題能力。

然而要提升學生的解題能力，需要有適當的解題教學策略。研究者將幾位相關研究學者的看法摘要如下：

劉祥通（1996）基於數學寫作活動的內涵，提出八項解題的教學策略：1.鼓勵學生留下解題痕跡以發展算則或符號的教學。2.讓學生以自己的話表徵數學概念。3.要求學生說明自己的解題策略或困擾。4.讓學生自創解題算則或程序。5.創造開放式的問題供學生組織答案。6.要求學生列出解題的步驟與策略。7.要求學生練習擬題以加深對問題結構的瞭解。8.以寫作活動配合調查活動、實測活動或造形活動。

施淑娟（1999）從促進學生建構學習的觀點，提出數學解題的教學策略：1.教導學生使用解題策略：協助瞭解問題、協助擬定與執行計畫的策略、協助回顧與檢核的策略等。2.生活化、趣味化的佈題：最好是學生自己的問題。3.搭配數學遊戲。4.結合數學寫作活動。5.

採用擬題策略。

塗金堂（1999）基於合作學習的精神，提出「合作--省思」的數學解題教學法，其策略為：1.教師示範教學：教師口述解題時的思考歷程，讓學生了解解題時，需要探索、分析的嘗試過程。2.小組合作解題：二人一組共同解題，一人解題，另一人為協助者，藉由協助者的幫忙，培養解題者的省思行為。3.全班成果分享：欣賞與比較別人不同的解法，幫助學生省思自身的解題歷程。

綜合以上學者的解題教學策略，研究者歸納出重點如下：

1. 解題教學應以學生為主。
2. 鼓勵學生發表。
3. 發展學生自己的解題策略。
4. 學生應自我思考和省思。
5. 讓學生主動學習。
6. 擬題可作為促進解題的途徑之一。

其中第 6 項擬題可促進解題的教學策略，正是本研究中擬題教學的重點：將整數四則混合運算和擬題教學相結合，讓學生加深問題情境結構的熟悉，自己形成數學問題，自己解決數學問題，並且透過全班討論的進行，分享解題的方法和擬題的成果，增加學習樂趣。

第二節 擬題和相關研究

本節針對「擬題」分成以下三個部份進行探討：

- 一. 探討擬題的定義、特徵和方式。
- 二. 探討擬題在數學的相關研究。
- 三. 探討擬題和解題的關係。

一. 擬題的定義、特徵和方式

針對擬題的定義、特徵和方式，將分成三部份進行探討：

- (一)擬題的定義。
- (二)擬題的特徵。
- (三)擬題的方式。

(一) 擬題的定義

擬題的定義究竟是什麼？以下是相關研究學者的看法：

1. Dillon (1982)：認為擬題是解題之後，尋找題目的過程。
2. Silver (1994)：認為擬題有二種方式，包括新問題的產生、和由給予的問題而形成問題。
3. 梁淑坤 (1994)：「自己想出一個數學題目來」，就是「擬題」。
4. Stoyanova and Ellerton (1996)：學生依據數學經驗的基礎，建構及創造有意義的數學題目，是一個屬於個人化的過程。

從以上學者的看法，可得知擬題和個人的數學經驗有關，特別是有了解題的經驗，可將其應用在形成新問題上。因此，研究者依照這種產生新問題的方式，將本研究的「擬題」界定為：「學生先解完教師提供的題目後，再以原題為基礎，想出另一個類似的數學問題。」

(二) 擬題的特徵

對於擬題的特徵，國內學者梁淑坤（1994：153）曾提出看法：

- 1、組織的方法是屬於個人的（idiosyncratic）。
- 2、當中包括猜想及可信推理（plausible reasoning）。
- 3、可以發生在解題前，解題中，以及解題後（before，during，and after problem solving）；擬題者把想出的題目寫出來時，是較課本的題目「粗糙的」（primitive）。這些題目可能是非完整性的（incomplete）；非可行性的（inplausible）；亦可能尚欠足夠解題資料的（insufficient）。

由以上看法可知，擬題的結果可能會是粗糙、不完整的、不行的或解題資料不足等，這和擬題者的數學經驗有關。根據 English（1997）的研究發現，擬題能力強的學生，他們的數字計算能力並不強，但是在特殊題目的解題表現佳；學生擬的題目具有複雜性，創造思考能力

甚為豐富。

因此，透過擬題的活動自然形成數學化的思考方式，擬題者可將這些繁複的數學知識重新組織，並發現其系統性與關連性（林原宏、許淑萍，2002）。另外，擬出正確問題和解決問題是同樣重要的，擬出數學問題需從逆向角度去審視本身數學知識（Leung & Silver, 1997）。若擬題者缺乏相關數學知識，是無法擬出問題的。

（三）擬題的方式

有關擬題的方式，以下列舉幾位學者的看法：

1. Brown and Walter(1983 : 62)建議擬題應該有以下五個階段：

階段 0：選擇起點（Choosing a starting point）

這個起點可以是一種教材，也可以是一個數學定理。

階段 1：列出屬性（Listing attributes）

這個屬性是根據階段 0 的起點而來，無論這些屬性合不合乎邏輯，都予以保留，因為不合邏輯的題目也可能產生新的問題。

階段 2：假如不是（What-if-not）

此階段是階段 1 的屬性，再創造一個新題目。

階段 3：問問題或擬題（Question asking or problem posing）

將屬性改變之後，會產生新的屬性，尚未形成一個完整

的題目，藉著問「假如不是會如何」之後，再將這些屬性經過有效的統整形成新的題目。

階段 4：分析題目（Analyzing the problem）

題目形成後，接下來就是解題。將題目分析完畢，可以改變屬性，再創造新題目。如此一來，新的題目就可以源源不絕，擬題、解題、擬題……，就可以依序循環下去。

2. 1987 年日本小學教師坪田耕三在「生動的算術」一書中，提出擬題的七個方法（引自梁淑坤，1994：164）：

A. 模仿法或類題法：學習某問題後，擬出和此題同樣式的題目。

B. 算式法：提出一個公式，再擬出適用此公式的問題。

C. 原理法：給與四則算法和通分等原理，擬出和此相對的題目。

D. 訂正法：擬出一個題目，其中故意漏掉必要的條件，或是給予其他不必要的條件，或擬出矛盾而再訂正的方法。

E. 實驗法：實驗或以具體東西的操作，再以此現象為根基來擬出問題。

F. 自由法：以自由的題材，做成自由型式的問題。

G. 題材法：依據給定的主題來擬題。

3. Moses, Bjork and Goldenberg（1993）提出將數學文字敘述分

為已知、未知、限制等三部份。改變題目的方法有：將已知改為未知、增減條件限制、改變情節或單位，如此又可產生新的問題來。Moses 等人並提出教導學生擬題的原則：

A. 確認並改變限制，學生有將焦點放在已知、未知和限制上嗎？

B. 在學生熟悉的方式或領域中，鼓勵他們以不同的角度來看問題，藉由改變問題的屬性或限制來產生新的問題。

C. 使用語意不清的問題，鼓勵學生以猜測的方式，來創造新的問題。

D. 從低年級就教導兒童變化問題的觀念，鼓勵學生以不同的方式來玩同一種遊戲。

4. Stoyanova and Ellerton (1996) 將擬題分成三種情境：

A. 結構 (structured) 的情境：學生可以利用現有的題目加以改變。

B. 半結構 (semi-structured) 的情境：學生利用先前的數學知識、技巧、概念以及關係連結，完成一個完整結構的問題。

C. 自由 (free) 的情境：讓學生在一個給定的自然情境下自由發揮。

5. Cudmore and English (1998) 認為學生擬題的階段分為：

A. 產生資料。

B. 全班資料調查。

C. 討論和形成擬題的過程。

- D.個人或小組資料調查。
- E.個人或小組擬題。
- F.試著解題。
- G.寫下初稿的題目。
- H.接受同儕的回饋。
- I.寫下完成的題目。

6. 劉芳妃（1998）提出合作擬題的教學模式流程：

- A.教學前準備。
- B.進入新單元。
- C.引起動機。
- D.運用發問技巧提問。
- E.小組討論、師生互動（溝通、講解）
- F.例題講解及擬題示範。
- G.隨堂練習、自我評量。
- H.合作擬題活動。
- I.小組解題（評估題目是否可解）。
- J.各組上台呈現問題。
- K.各組解他組題目。
- L.教師講解。

由以上可知進行擬題的方式，有多樣性的選擇。研究者考量學生是初次接觸擬題的活動，而且教材內容（四則混合運算）涉及多個運算步驟，學生不易建構出問題情境，因此決定採用坪田耕三（1987）的模仿法（類題法）。坪田耕三建議教師們，可以試著在解答一個問

題後，先不要急著結束，而以這個題目做基礎，要求學生們擬題。這樣的話，老師會發現自己從未注意到的問題，而且會發現很多小孩活潑的一面，對教材的看法也會改變。

而本研究的擬題教學，即以上述重點為主：由學生先自己解題，並經由全班討論、發表解題過程，歸納解題的可能途徑；之後，以前一題目為基礎，學生擬題後再自行解題；最後，發表挑選的擬題作品，由全班進行討論分享。

二. 擬題在數學的相關研究

有關數學擬題的研究論述，在國內外均為數不少。現依國外、國內之分，簡要敘述如下：

(一) 國外方面

美國數學教師協會 (NCTM, 1989) 在學校數學課程與評量標準中，建議應該學生在數學課堂上，透過經驗、察覺和形成他們的問題 (即為擬題)，並以此作為數學教育的重心，從事擬題活動，以增加學生的解題樂趣。

Keil (1965) 對 800 多位六年級學生作擬題教學研究，由另一位教師擔任教學，每週一節課，共十六週的時間。提供和數學課本類似的情境，讓學生從事擬題活動。結果發現，經歷過自行擬題及解自己所擬題目的實驗組學生，在數學解題能力的表現上比只解課本題目的控制組學生好，顯示擬題教學對解題能力有正面效果。

Stover (1982) 引導六年級學生將已知的故事題，以圖形或添加其他訊息、編排訊息來改寫。在研究過程中，寫作變成數學課程的一部份。結果發現，學生經過這樣的訓練後，在解題表現有明顯的進步。

Brown and Walter (1983) 在高等教育中研究擬題，在 *The art of problem posing* 一書中，說明如何在教學中加入擬題活動，使學生能

主動思考與學習。他們提出的擬題策略是「What-if-not」，鼓勵學生在獲得答案後，第一步先接受答案，第二步再挑戰各種假設，想想情況如果不是這樣的話，那麼答案又是如何，如此便又形成一個新的問題。這個擬題策略即是屬於 Silver(1993)所說的：解題之後的擬題。

日本幾位主張「開放取向教學」(open approach teaching)的學者(Nohda, 1984; Hashimoto, 1987), 提出擬題能幫助學生更完整地分析問題，對解題能力有幫助。

日本國小教師坪田耕三(1987)對國小一到六年級學生，進行開放性問題教學。以學生剛解過的問題為基礎，鼓勵學生從原有問題中再擬出問題來。如此學生不會認為找出一個答案後，問題就結束了，而能藉由教師指導的方式，更改題目條件或數據，主動地發現問題和分析問題。

澳大利亞教育學會(Australian Education Council)認為學生應該學習如何擬題，並且試著解出自己所擬的題目(Stovanova & Ellerton, 1996)。

Skinner 是澳大利亞的一位教師，她將自己在幼稚園至國二年級的教學經驗，寫成 What's your problem 一書，分享她擬題教學的樂趣(Skinner, 1990)。她強調上課用的問題，必須是自己擬出來的，而且擬出的題目要動腦筋才能解出來，否則太容易的題目就達不到擬題教

學的效果。在上課過程中，她會技巧地引導學生擬出問題，並讓學生有修改題目的機會。學生在解別人擬的題目時，有時會反問擬題者，而擬題者從他人的疑問中，發現題目的漏洞或缺失，再加以修改，有助於澄清自己的觀念。從這樣擬題與解題活動的互動情形，可證明幼稚園和低年級學生也可學會自行擬題。

Winograd (1990) 採分組方式，研究五年級學生在小組中分享擬題和解題的活動，探討學生擬題的表現和困難、小組共同解題的行為、以及擬題課程中學生的數學信念。Winograd 觀察 8 位學生的擬題行為、17 位學生的合作擬題學習、訪談 25 位學生的數學信念。結果發現，學生在擬題過程中，表現出多樣化的型態，學生在小組合作學習中多以任務導向，完成擬題的學習活動，並在擬題過程中表現出數學信念。Winograd 建議學生擬題的題目，可以成為教師佈題和教材的來源。

Borba (1994) 以 200 位八年級學生為研究對象，在九個星期的課程中，每一小組必須選定一個主題，並且擬出一個題目，並由小組成員合作去解他們所擬的題目。研究者透過觀察、訪談，以及學生的數學日記來分析結果。結果發現，許多學生覺得透過擬題活動，讓他們感受到對於學習的自主權，可以自由選擇自己有興趣的題材。但研究者也發現，在小組擬題的過程中，教師必須適時的引導，才能讓學

生分工合作，完成小組的任務。

Schloemer (1994) 採用「What-if-not」的擬題策略，教導大學生學習高等代數，並將學生分成控制組和實驗組。他發現控制組和實驗組在數學成就上並無顯著差異；在擬題能力方面，實驗組比控制組佳；在數學態度的表現上，前後測結果顯示二組均下降。根據研究者的結論解釋，實驗組已習慣原來的教材，當教師使用擬題的教學方式，反而使他們在數學態度上產生負面的影響。

Silver、Mamona-domwms、Leung 和 Kenney (1996) 研究 53 位中學教師和 28 位職前教師，以個別擬題或合作擬題的方式，研究其 IP (Initial Posing)、PS (Problem Posing)、AP (Additional Posing) 等階段。結果發現，受試者在解題前擬的題目比在解題後擬的題目多，而這種擬題能力可以影響教師將來教學時的佈題。

Leung 和 Silver (1997) 嘗試建立擬題作品系統化分類的工具，以 TAPP (Test Arithmetic Problem Posing) 來測驗 63 位職前教師，結果發現許多受試者都可以擬出「可行的」題目。

English (1997) 以五年級和七年級學生為研究對象，建立發展實驗的數學擬題課程專案，特別是研究不同能力組在擬題方面的表現。結果發現，擬題能力強的學生，他們的數字計算能力並不強，但是在特殊題目的解題表現佳；學生擬的題目具有複雜性，創造思考能力甚

為豐富。因此，English 認為要多鼓勵學生擬題，而學生應該學習擬題並嘗試解自己擬的題目，如此一來，可提昇學生的解題能力和興趣。

English (1998) 研究 54 位三年級學生的擬題能力，發現學生在數概念以及解題能力方面，表現出不同的類型；在許多非例行性的情境中，可以擬出多樣化的題目；但在加法和除法的類型中，學生所擬的題目類型是傾向一致的，這可能是受到教材中例行性題目的影響，使得學生思考產生固化。

Cai (1998) 以 181 位美國六年級學生和 223 位中國六年級學生為研究對象，進行跨文化的比較，探討其擬題和解題的認知分析。結果發現，雖然中國學生在計算方面優於美國學生，但是在擬題方面卻有許多相似處。

(二) 國內方面

梁淑坤(1995)以 65 位職前教師和 127 位在職教師為研究對象，研究他們的擬題行為，以及三種擬題實驗形式(包含數值、文字敘述、包含符號)對擬題之影響。結果發現，職前教與在職教師在擬題的數量上並無差異；在三種形式中，有數值的形式較其他二種，容易為教師們所接受；在文字敘述方面，教師們則自行提供資料、或擬出資料不足、或甚至不可行的題目；在包含符號的形式方面，教師們依然傾向寫出非題目、非數學或不可行的題目。

徐文鈺(1996)以104位國小五年級學生為研究對象，將學生分合作擬題組、個別擬題組及控制組等三組。三組學生各接受為六週，每週二次、每次約40分鐘的分數課程教學。結果發現，合作擬題組在複雜的「部份/整體」概念的表徵轉換能力、分數解題能力、分數擬題能力的流暢性、精緻性、獨特性，效果均優於其二組；但在分數概念的增進效果上，三組並無顯著差異；而合作擬題組擬題能力的變通性，效果優於控制組，與個別擬題組並沒有差異。

孫秀芳(1997)研究國小二年級學生的加法擬題能力，以及學生對擬題的認知程度。結果發現，大多數學生都具有擬題能力，學生所擬出來的題目大都是熟悉的情境，並且確定擬題與解題的活動是相連的。

劉芳妃(1998)以國中一年級的學生為研究對象，對數學課程的擬題作業表現與活動，探討學生學習合作擬題時的情意層面和擬題能力。結果指出，小組合作擬題活動可供學生數學概念的溝通機會，加強社會化發展；在擬題的活動中，由觀摩別人的擬題後，提出自己的看法，從中可以培養學生的批判能力。

林德宗(1999)在國小五年級數學教室中，探討擬題活動的應用。結果發現，學生透過擬題活動，可以增進其對數學概念的理解，並且

協助學生將知識連結到日常生活經驗中；學生透過討論的過程，能修正題目，學習接納同學的意見。

楊惠如(2000)以行動研究方式，探討擬題活動在數學教室中教學的情況、困難和解決的方法。此研究經由「初試啼聲」階段的摸索，到「漸入佳境」階段的轉型，最進入「步入軌道」階段，一共歷經三個階段。雖然這三個階段的教學中，教師遭遇到許多教學上的困難，其中包括教學準備、學生擬題、全班討論、共同評鑑等方面，但是透過研究者的不斷反省與思考，尋求解決的方法，以實際的行動解決了教學上的困難。

周幸儀(2002)以國小二年級學生為研究對象，透過合作擬題教學活動，探討學生擬題學習歷程，以及擬題教學對學生的數學概念、擬題能力、解題能力的增進效果。結果發現，透過擬題教學活動的實施，學生在數學概念、擬題能力及解題能力的表現上，均有明顯的進步。

莊美蘭(2003)以國中一年級的學生為研究對象，進行合作擬題和個別擬題的教學活動，探討適合進行擬題活動的數學課程單元，以及合作擬題和個別擬題的差異。結果發現，負數、體積、容積與容量等較容易進行擬題教學活動；合作擬題的優點是可以透過同儕的互

動，提供討論機會，促進小組的學習，個別擬題則是讓同學激發個人擬題的創意與實力，發現自己在數學概念的錯誤。

陳佩琦（2003）以國小一年級學生為研究對象，探討擬題教學的實施情形。結果發現，學生的擬題、解題表現有明顯進步；擬圖畫題或文字題，均優於擬算式題；擬題教學可增進解題教學。

林群雄（2004）以國小三年級學生為對象，透過行動研究方式，探討教師的專業成長，瞭解擬題教學的困難和適用的擬題素材。結果發現，教師引導討論的能力獲致成長，心態也轉為學生本位；學生也能提升學習興趣、動機和自信。

由以上國外、國內相關的研究，可看出擬題已愈來愈受重視，在數學教育的應用方式相當廣泛，更肯定擬題可以增進學生解題的表現。探討擬題的相關研究後，研究者產生以下一些研究構想：

1. 就擬題的教材內容方面，整數四則混合運算是尚未出現的題材，應是值得嘗試的內容。
2. 就擬題的方法而言，尚未見到坪田耕三類題法的相關實證研究，而且研究者對此也感到興趣。
3. 就研究對象的背景而言，研究者的這一班學生在國小階段已歷經三種課程標準（詳見第三章第三節），在擬題相關研究

中尚未出現過此類研究對象。

4. 就實施時間而言，研究者是利用彈性課程時間，配合該學期課程銜接補強所安排的，並非佔用數學正課時間，和其他使用數學課時間實施的研究不同。

三、擬題和解題的關係

本章第一節即已說明，Polya (1945) 在《How to solve it》一書中所提出的解題四階段：解題者要先瞭解題意 (Understand)，才能擬定解題計畫 (Plan)，接著實行解題計畫 (Carry out)，最後回顧解答 (Look back)。

國內學者梁淑坤 (1994) 根據 Polya 的解題模式，以擬題 (Pose) 代替瞭解題意 (Understand)，成為擬題的四個步驟，如圖 2-3：

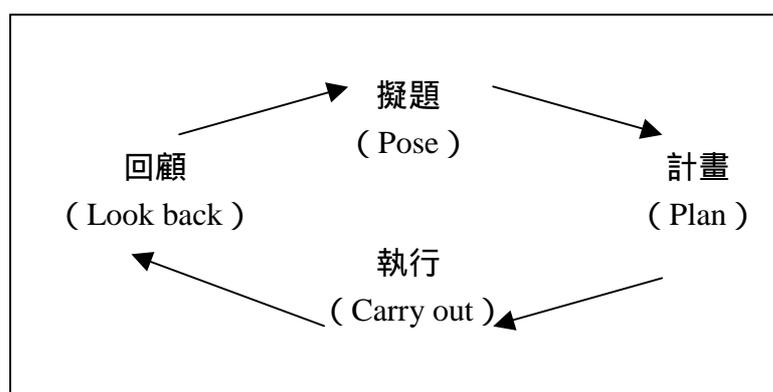


圖 2-3 解自己所擬的題目 (引自梁淑坤，1994：159)

從圖 2-3 可看出，解題者的工作順序為→先擬出題目→擬定解題計畫→執行解題→回顧解答→再擬題。因為解題者亦是擬題者，他(她)當然清楚題目的內容，馬上可以做策劃功夫，不用再理解他(她)自己擬出的題目了。在解題時也許會想出新的題目來，然後再策劃、再解題。再者解題後可將所得結果整理後再擬出題目來，這樣下去，

可以變成永無休止的擬題和解題活動（梁淑坤，1994：159）。

其後，林群雄（2004：15）參考 Polya（1945）的解題步驟和梁淑坤（1994）的擬題步驟，自行依據實際上課經驗，將學生的擬題過程呈現如下：

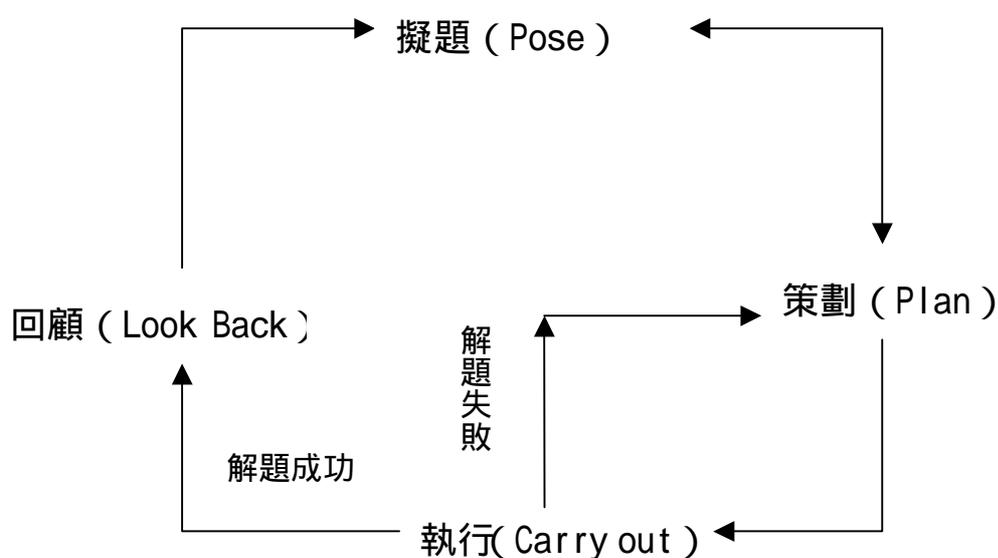


圖 2-4 學生的擬題過程（林群雄，2004：15）

林群雄認為在進行規劃解題策略時，解題者有時會發現題目條件不足，便會回頭重新檢視題目或重新擬題，因此擬題和策劃之間，是以「雙向箭頭」表示可以來回的過程。甚至有些解題者，在執行解題步驟時，遇到窒礙難行之處，會重新規劃解題策略，若還是無法解題，便會再檢視題目或重新擬題，再進行解題，因此策劃和執行之間，是以「迴圈」表示二者是可以返回的過程。

English (1997) 認為解題和擬題是明顯緊密相關的。一方面擬題可從解題過程強烈提取，例如確認問題的關鍵要素，和彼此有關問題；另一方面擬題可使學生超越解題過程的界限。

美國數學教師協會 (NCTM, 1989) 提出要求強調增加數學擬題活動。坪田耕三 (1987) 認為擬題可以培養學生的創造力，適應現代激烈變化的社會。

綜合上述的觀點可知，擬題與解題是相連性的活動 (Brown & Walter, 1983) 擬題教學的作用，可以擴展學生重要數學概念的了解，改善學生解題的方法 (Stoyanova & Ellerton, 1996) 而 English (1997) 提出了鼓勵擬題活動的理由，其中有一項是：「不但能提高兒童解題能力，而且強化基本概念。」亦是說明擬題和解題的密切關係。所以，從擬題可以促進解題的觀點來看，教師應該增加學生擬題的機會，以提升學生解題的能力和興趣。

第三節 四則混合運算的教材內容

本節是說明四則混合運算的教材內容，以下分成二個部份。首先是說明四則混合運算的產生，再來分析四則混合運算的教材內容。

一. 四則混合運算的產生

國內學者謝堅（2000：79）對四則混合運算的產生和解題形成的共識，曾做了以下的說明：

針對第一個問題，本課程（82 版）認為四則運算混合計算問題，是用來記錄多步驟文字題的題意或解題計畫的，是另一種形式的文字題；學童將多步驟文字題改用比較方便的算式填充題重新表徵後，再去求算式填充題（也就是原文字題）的答案。四則混合計算問題不是當我們解題成功後，再將解題過程改用一個算式記錄，並要求重新再算一次答案。

針對第二個問題，本課程認為產生併式時，人們先形成由左往右依次運算的共識；但是當步驟愈來愈多或運算次序發生混淆時，為了要區別先算什麼，後算什麼，才使用括號來標示先算的部份，形成先算括號部份的共識；當問題更複雜，使用相同或不同的括號愈來愈多時，為了要減少使用括號的次數與種類，人們發現先乘除後加減的約定可以省略的括號最多，所以又形成先乘除後加減的共識，來減少括號的使用。

由以上的說明，研究者歸納出二項要點：

(一)學生開始解題時，會因為記錄解題計畫，而產生多個算式；

之後，再透過併式的方式，簡化成一個多步驟的算式填充題。

(二)解四則混合計算時，形成約定的共識是：由左而右依序運算；

括號內的先算；先乘、除，後加、減。

因此，學生在整數四則混合運算解題時，有三個關鍵：

1. 學生能否產生多步驟文字題的解題計畫？
2. 學生會不會將多個算式併式簡化成一個算式填充題？
3. 併式之後的算式填充題，學生知道如何解答嗎？

二. 教材內容的分析

本研究教材內容係參考自南一版國小數學第九冊（南一，2000）主題八「地下街」四則計算的第二、三項教學目標（詳見表 2-6），其內容分別是：

第 2 項：知道併式由左而右運算的約定，並能用來列式及簡化算式。

第 3 項：知道併式先乘除後加減運算的約定，並能用來列式及簡化算式。

其中「由左而右」和「先乘除後加減」是本研究所指的「數學知識」，是屬於 Mayer 所說的程序性知識。

另外，對照第七（四上）、第八（四下）、第九冊（五上）相關主題的教學目標（詳見表 2-7），可發現在四年級上學期的數學（第七冊），已開始進入兩步驟的問題，在五年級上學期的數學（第九冊）則是發展至多步驟問題。

因此，本主題教材含有二個面向的交織；一是四則運算的混合，例如：加減混合、乘除混合、加（減）乘（除）混合、四則混合等；另一是運算步驟的增加，例如兩步驟、三步驟等。而本研究工具--運算題型的題目表（表 3-2），即是根據上述二個面向編製而成的。

表 2-6 南一版四則運算教學目標

單元名稱：八、地下街
教材內容：整數、四則運算（數與計算、關係）
<p>1.復習解決生活情境中兩步驟的問題。（N-2-2）</p> <p>1-1 能解決生活情境中有關加減的兩步驟問題。</p> <p>1-2 能解決生活情境中有關乘除的兩步驟問題。</p> <p>1-3 能解決生活情境中有關四則的多步驟問題。</p>
<p>2.知道併式由左而右運算的約定，並能用來列式及簡化算式。 （N-2-17）</p> <p>2-1 能把加減兩步驟的紀錄併成一個算式。</p> <p>2-2 從生活情境中，知道只有加減的運算時，是由左而右進行計算。</p> <p>2-3 能把乘除兩步驟的紀錄併成一個算式。</p> <p>2-4 從生活情境中，知道只有乘除的運算時，是由左而右步進行計算。</p>
<p>3.知道併式先乘除後加減運算的約定，並能用來列式及簡化算式。 （N-2-17）</p> <p>3-1 能把加（減）乘（除）兩步驟的紀錄併成一個算式。</p> <p>3-2 從生活情境中，知道加（減）乘（除）運算，是先乘（除）後加（減）進行計算。</p> <p>3-3 能把四則多步驟的記錄併成一個算式。</p> <p>3-4 從生活情境中，知道四則運算是先乘除後加減進行計算。</p>
<p>4.能在情境中，理解結合律。（N-2-15）</p> <p>4-1 從不同的解法中，察覺加法的結合律。</p> <p>4-2 能在情境中，理解加法的結合律。</p> <p>4-3 從不同的解法中，察覺乘法的結合律。</p> <p>4-4 能在情境中，理解乘法的結合律。</p>
<p>5.能在情境中，理解乘法對加法的分配律。（N-2-15）</p> <p>5-1 從不同的解法中，察覺乘法對加法的分配律。</p> <p>5-2 能在情境中，理解乘法對加法的分配律。</p>

表 2-7 南一版各冊相關主題的教學目標

領域	主題 (教材)	教學目標 (能力指標編號)
數與計算、代數	第七冊主題一 百貨公司 (一萬以內的數、算式填充題、加減直式紀錄)	1.能將情境中的問題表徵為加法、減法算式填充題。(A-2-1) 2.能理解加法和減法直式算則。(N-2-3) 7.延伸加、減與情境的意義,使能適用來解決更多的生活情境問題。(N-2-2)
數與計算、代數、量與實測	第七冊主題六 愛心園遊會 (算式填充題、乘、除、找規律)	1.能將情境中的問題表徵為加法、減法算式填充題,並能解釋式子與原來問題情境的關係。(A-2-1) 2.能透過具體表徵,解決從生活情境問題中所列出的加法、減法算式填充題。(A-2-2) 5.解決生活情境中的乘法問題。(N-2-2) 6.解決生活情境中的除法問題。(N-2-2) 8.解決生活情境中的兩步驟問題。(N-2-2)
數與計算	第八冊主題一 電器館 (十萬以內的數、四則運算)	3.延伸加、減、乘、除情境的意義,使能適用來解決更多的生活情境問題並用計算器械處理大數(十萬以內)的計算。
數與計算、代數	第八冊主題五 節約能源 (乘和除、算式填充題)	1.能將情境中的問題表徵為乘法、除法算式填充題,並能解釋式子與原問題情境的關係。(A-2-1) 2.能透過具體表徵,解決從生活情境中所列出的乘法、除法算式填充題。(A-2-2、N-2-2) 4.知道連乘或連除的約定,並能用來列式及簡化式子。(N-2-16) 5.能知道先乘除後加減的約定,並能用來列式及簡化式子。(N-2-16)
數與計算、關係	第九冊主題八 地下街 (整數 四則運算)	1. 復習解決生活情境中兩步驟的問題。(N-2-2) <u>1-3 能解決生活情境中有關四則的多步驟問題。(N-2-17)</u> 2. 知道併式由左而右運算的約定,並能用來列式及簡化算式。(N-2-17) 3. 知道併式先乘除後加減運算的約定,並能用來列式及簡化算式。(N-2-17)

第四節 資料分析的背景

本節分成二方面，說明資料分析的背景：第一是國內學者梁淑坤（1999）所發展出的擬題分類評量工具，另一方面則是國外學者Mayer（1992）提出解題者需具備的五種知識分類方式。

一. 擬題分類

在本章第二節擬題相關研究中，研究者認為國內學者梁淑坤（1999）所發展出的一套評量工具，定義清楚且分類完整，適合作為本研究學生擬題作品的分類方式。此項評量工具（如表 2-8），將學生擬題的作品分成 5 類，以「1」至「5」代號編碼。再依此分類方式，進行內容的探討。此處分類的數字「1」至「5」，是表示「次序量尺（ordinal）」，而不是「等距量尺（interval）」或「等比量尺（ratio）」的意思。

表 2-8 擬題作品分類表（梁淑坤，1999：204）

分類	非題目類	題目類				
		非數學	不可行	可行的		
				資料不足	資料適中	資料超過
編碼	1	2	3	4	5	5

雖然此分類方式非等比制，亦即「4」並不是「2」的二倍，但仍可以作為題目好壞程度的高低評比。研究者依此分類方式，進行

擬題作品類型的探討，如題目是否可行、資料是否充足等。

分類的流程（如圖 2-5）說明如下：

1. 先考慮擬題作品是否為題目，若不是，則是屬於第一類「非題目」。例如：教室長 10 公尺，有 6 個窗戶。→只是敘述的語句，並不是題目。
2. 若是題目，再考慮是否為數學題目，若不是，則是屬於第二類「非數學」。例如：跳繩有 20 公分，可以切開來使用嗎？→雖有提問，但不能算是數學題目。
3. 若是數學題目，再考慮是否可行，若不合邏輯或相互矛盾，則是屬於第三類「不可行」。例如：妹妹體重 10 公斤，爸爸體重 5 公斤，二人差多少公斤？→爸爸的體重不合常理，是不可行的題目。
4. 若是可行的數學題目，再考慮資料是否充足，若是資料不足，則是屬於第四類「資料不足」。例如：糖每公斤 18 元，阿忠付了 200 元，還剩下多少元？→缺少阿忠買糖多少公斤的資料。
5. 若是資料適中或超過，則是屬於第五類「資料適中」或「資料超過」。例如：正方形每邊長 12 公分，共有四個邊，求它

的面積是多少？→資料有超過，因為正方形本來就有四個邊。

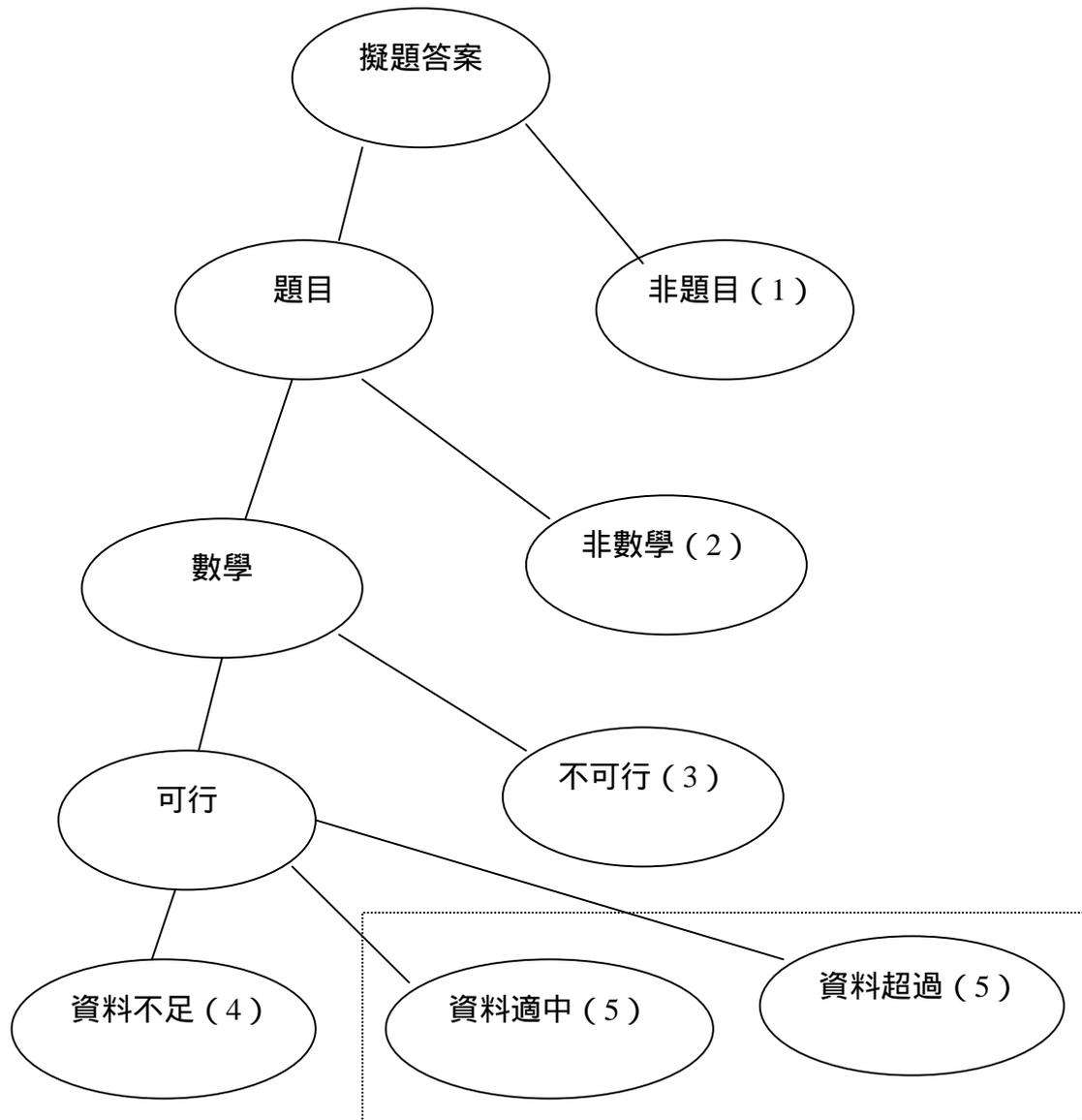


圖 2-5 擬題作品分類流程 (梁淑坤, 1999 : 205)

二. 數學知識

本研究試圖透過解題記錄，探討的學生解題表現，主要是在了解學生在整數四則混合運算方面，何種數學知識發生了問題。

承本章第一節研究者所歸納的解題歷程(如圖 2-2)來看，Mayer (1992) 所提出解題者需要具備的五種知識(1 到 5)，正好對應解題四階段(一到四)所需要具備的數學知識，可作為學生解題表現的分類依據，進而對應分析學生解題錯誤的原因(如表 2-9)。

表 2-9 解題表現的分類表

解題錯誤分類	Mayer 解題四階段	解題歷程成份	相關數學知識
策略錯誤	一.問題轉譯	對問題的察覺	1 語言知識 2.語意知識
	二.問題整合	問題表徵轉換	3.基模知識
	三.計畫和監控	擬定策略	4.策略知識
運算錯誤	四.執行解題	執行策略	5.程序性知識

首先，研究者將學生的解題錯誤，先分成策略錯誤和運算錯誤二大類。

再按照 Mayer 解題四階段的劃分，判定策略錯誤是發生在那一個階段，即可對應出是何種相關知識的問題：

(一)第一階段「問題轉譯」是語言知識和語意知識的問題，例如：誤解題目意思、因語句長而不懂意思等。

(二)第二階段「問題整合」是基模知識的問題，例如：圓面積和圓周長求法的概念混淆等。

(三)第三階段「計畫和監控」是策略知識的問題，例如：列出錯誤的解題算式。

另外，由於運算錯誤僅是發生在解題歷程第四階段，因此未再加以細分，僅單獨列為一類：

(四)第四階段「執行解題」是程序性知識的問題，例如加法錯誤、先加減後乘除等。

第三章 研究設計

本章對研究設計的說明，分成研究架構、研究工具、研究對象、研究程序、和預試資料的分析等五個小節。

第一節 研究架構

研究者根據研究目的，將本研究架構圖示意如下：

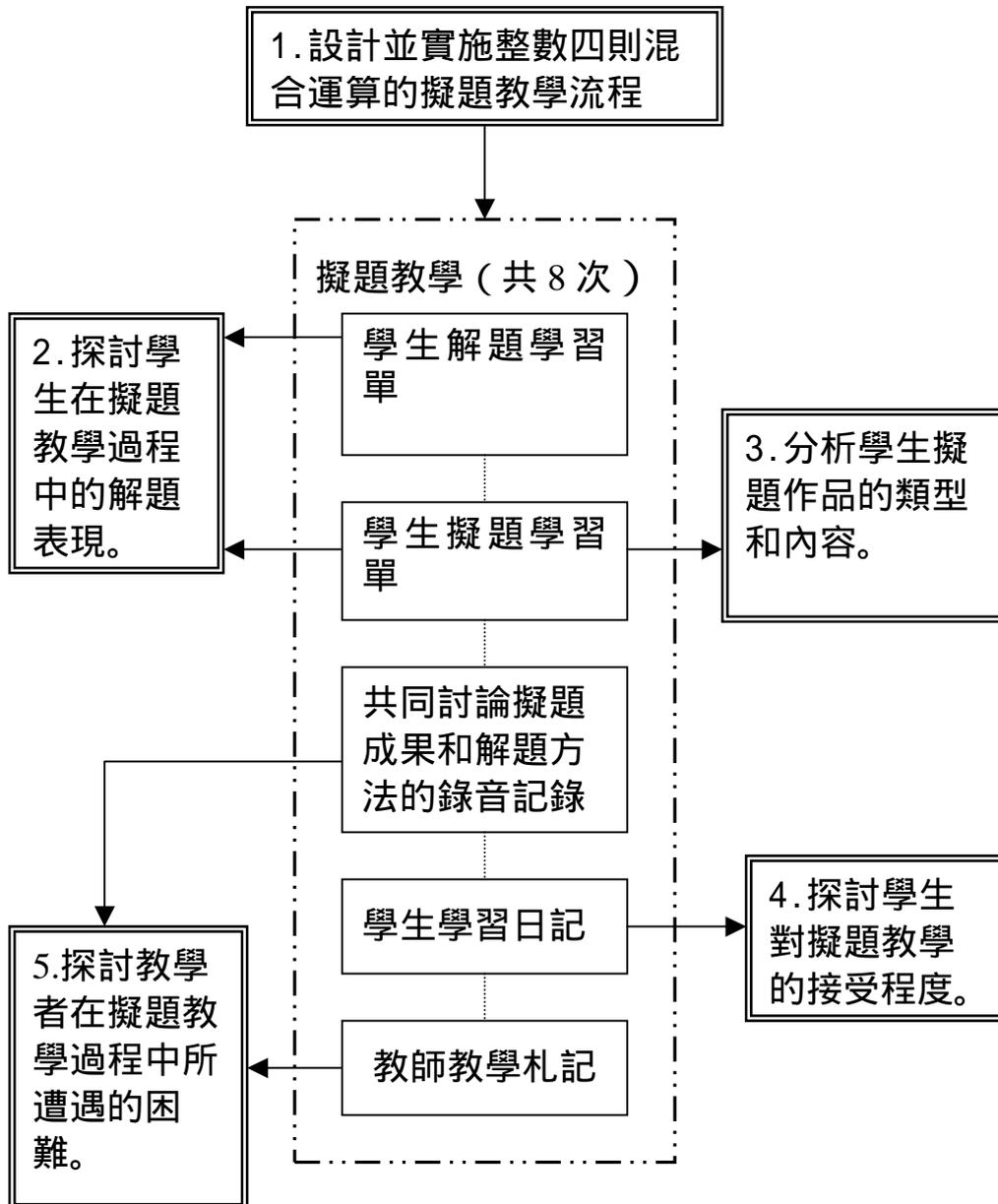


圖 3-1 研究架構圖

本研究架構圖的說明如下：

- 一. 研究者設計擬題教學流程的原則，係參考坪田耕三（1987）的擬題教學觀點；即在學生解完題目後，以此原題目為基礎，要求學生再擬出題目，並且解自己所擬的題目。因此教學流程分為「解題」、「擬題並解題」（簡稱為「解擬題」）等二個階段，詳見表3-1。
- 二. 從學生的解題學習單、擬題學習單等資料，探討學生在擬題教學過程中的解題表現。
- 三. 從學生擬題學習單，分析學生擬題作品的類型和內容。
- 四. 從學生學習日記，探討學生對擬題教學的接受程度。
- 五. 從討論過程的錄音記錄、教師教學札記等資料，探討教學者在擬題教學過程中所遭遇的困難。其中錄音記錄是作為教學者事後回想之用。

表 3-1 擬題教學流程

第一階段：解題

1. 呈現題目：研究者發給每位學生一份解題學習單。
2. 學生解答題目：學生開始解答解題學習單上的題目。
3. 全班共同檢討解題的過程：待全部學生解答完成後，由全班共同討論如何解題，鼓勵學生上台發表不同的解題方法。
4. 歸納解題方法：由於學生所發表的解題方法，可能會有粗糙或缺漏的現象，因此需要引導學生討論正確和錯誤的解題方法。

第二階段：擬題並解題（此處的「解題」簡稱為「解擬題」）

1. 根據原題目進行擬題並解題：發給每位學生一份擬題學習單，由學生以前一題為基礎，自己擬題並且解題。
2. 提示學生擬題的方式：鑒於初期學生對擬題不熟悉，可能會有不知如何下手的疑慮，因此提示學生可用模仿的方法，更改事物、數字、題目結構等皆可。
3. 選擇要分享的擬題作品：由於時間的限制，因此要分享學生擬題的每一題題目，是不可能的，因此必須挑選討論分享的題目。研究者挑選的原則，主要是將學生的擬題作品，和原題作比較後，發現有差異者，如改變結構、題目不合邏輯、數字有疑問等，研究者就將其列為討論分享的擬題作品。
4. 共同評價擬題的題目：引導學生觀察、討論擬題的作品和前一題（第一階段解題）有什麼不同？是個好題目嗎？需要修改那裡？
5. 討論解答擬題的題目：引導學生發表解題的方法，說明它和前一題的解題方法有什麼相同或不同之處？有別的解題方法嗎？
6. 學生填寫學習日記：完成每次擬題教學活動後，請學生填寫數學日記，藉以反省自己的學習，寫下對擬題教學的感想。
7. 教學者記錄教學札記：教師記錄觀察到的事件和省思的心得。

第二節 研究工具

本研究使用的研究工具，有研究者自編運算題型的題目表、解題學習單、擬題學習單、教學札記和學生學習日記等五項。

一. 運算題型的題目表

根據教材內容的分析，研究者決定採用 4 種運算題型共 8 題，其類型和運算步驟詳如表 3-2。研究者編製問題時，考量的原則有：

- (一)問題範圍限制在三步驟內。
- (二)問題情境和生活情境有關。
- (三)數值儘量適中。
- (四)有關的數學知識均勻分配題目。
- (五)題目內容避免和教科書類似。

表 3-2 運算題型的題目表

運算	步驟	題目內容
1.加減混合	兩步驟	1. 阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，現在阿土伯還有多少隻鴨子？
2.乘除混合	兩步驟	2. 5 包麵粉售價 285 元，爸爸想買 7 包麵粉，需要付多少元？
3.加(減)乘(除)混合	兩步驟	3. 貼紙每張 8 元，簽字筆每枝 35 元，阿強買 12 張貼紙和 1 枝簽字筆，共要付多少元？

接下頁

運算	步驟	題目內容			
	兩步驟	4. 蛙鏡 3 副 189 元，小琪有 70 元，夠不夠買 1 副蛙鏡？夠的話，還剩多少元？不夠的話，還差多少元？			
4.四則混合	三步驟	5. 阿星和 3 位同學去逛夜市時，合買 1 個籃球，價錢是 324 元，由大家平均分攤，阿星自己又買 8 個哈姆太郎玩偶，每個價錢是 17 元，請問阿星總共花了多少元？			
	三步驟	6. 1 個鹹蛋超人賣 280 元，阿福想買 4 個，可是阿福現在只有 400 元，所以阿福計畫每天存 45 元，請問需要存幾天錢才夠？			
	三步驟	7. A 圖形是正方形，邊長是 10 公分，B 圖是長方形，長是 14 公分，寬是 8 公分，A、B 二個的面積共是多少平方公分？單位：公分 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>10</p> <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <p>10</p> <p>A</p> </div> </div> <div style="text-align: center;"> <p>14</p> <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <p>8</p> <p>B</p> </div> </div> </div>			
	三步驟	8. 甲、乙二圖面積共是 504 平方公分，甲是正方形，邊長是 12 公分，乙是長方形，寬是 12 公分，求乙的長是多少公分？單位：公分 <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <p style="margin-right: 5px;">12</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">甲</td> <td style="border: 1px solid black; width: 180px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">乙</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">?</td> </tr> </table> </div> </div>	甲	乙	12
甲	乙				
12	?				

二. 解題學習單

研究者參考相關的擬題教學研究，並徵詢指導教授和同學年教師的意見，自行編製解題學習單。其中，題目內容是取自研究者自編的運算題型題目表（表 3-2），題目共有 8 題。例如：

今天的題目：

阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，現在阿土伯還有多少隻鴨子？

把你的做法用算式記下來：

【】

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

【】

三. 擬題學習單

研究者依本研究擬題教學的原則——學生自己擬題並且解題，所設計出的擬題學習單。內容提示學生在做完解題階段的題目，自行想出另一個題目，並且還要把答案算出來。例如：

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

【】

我會把做法用一個算式填充題記下來並求出答案：

【】

四. 教學札記

研究者自行設計的教學札記，主要是記錄教學時所觀察到的事件，以及事後反省的想法。例如：

擬題進度：	日期：
上課觀察到的事件：	
事後反思：	

五. 學習日記

研究者所編製的學習日記，是在每次擬題教學結束後，由學生填寫完後繳回，內容主要是讓學生寫下學習的感想。例如：

今天上數學課，我學到的是：
今天上數學課，我心中覺得：

第三節 研究對象

本研究對象是選自高雄縣某國小五年級的其中一班，班級導師是由研究者擔任。該國小學區位於高雄縣市交界處，屬於鄉鎮型學校，家長以從事工、商業者居多，平時雖會關心學生的學習狀況，但和教師互動較少，大都以電話溝通為主。

該國小教務處於每個學年結束時(即暑假期間)，會將升上三、五年級的學生，依照前一學年的平均學業成績，以 S 形方式重新編班，目的就是要達成常態編班，而且這項措施已實施多年。因此研究者假設所研究對象的班級，在數學成就方面，和其他班級是沒有差異的。

該班男生十八人，女生十七人，合計三十五人，其中並無特殊學生。由於在前一學期(五年級上學期)，研究者和學生已建立良好的互動關係，因此學生們很樂意和研究者分享生活的點滴。

該班學生在國小前三年是學習 82 年版數學，從四年級開始學習 91 年版九年一貫暫行課程，五年級是第二年的 91 年版九年一貫暫行課程。但該班學生升上六年級後，則是學習 92 年版的九年一貫課程，其中數學課程有不少的變動，因此才會產生部份課程銜接補強的問題。所以，該班學生在國小階段的數學課程，已歷經三種數學課程版本的更迭(如表 3-3)。

表 3-3 研究對象接受數學課程的情形

學年度	年級	82 年版			91 年版九年一貫 暫行綱要		92 年版 九年一貫 課程綱要
93	六						
92	五						
91	四						
90	三						
89	二						
88	一						

註：灰色部份表示研究對象在各年級時，接受數學課程的版本，因此六年內共歷經三種數學課程的版本。

第四節 研究程序

研究程序共分成四個步驟，茲分述如下：

一. 研究資料的準備（93年1月~93年3月）

首先擬定研究主題，進行文獻探討。接著選定教學班級和教學內容，並設計擬題教學運算題型的題目、解題學習單、擬題學習單、學習日記和教學札記等。

二. 擬題教學的預試（93年4月）

研究者選擇鄰近地區學校的一個五年級班級，進行1次擬題教學（1題）的預試，時間是93年4月6、7日二天（週二、週三），都是在該班的彈性課程時間實施，第一天是解題階段，第二天是解擬題階段，預試後將資料作分析整理。

三. 擬題教學的實施（93年5~6月）

在研究者選定（即研究者任教）的五年級班級，進行8次擬題（8題）教學活動，時間為93年5月3、6、10、13、17、20、24、27、31日和6月3、7、10、14、17、21、24日等共十六天（8週），即固定在每週一、四的彈性課程（該班級每週排有三節彈性課程，本研究利用其中二節實施擬題教學）實施，每週一是解題階段，每週四是解擬題階段，每週

進行 1 題，連續 8 週共計進行 8 題。

四. 資料的分析 (93 年 7 月~93 年 10 月)

整理學生解題學習單、擬題學習單、學習日記和教師札記，分析解題、擬題的結果作成統計表，並將學習日記和教師札記的內容分類歸納。

五. 結果的歸納及論文的撰寫 (93 年 10 月~93 年 12 月)

歸納出研究結果，提出研究建議。最後，撰寫及修訂論文內容。

第五節 預試資料的分析

為了解學生對擬題教學的接受程度，和資料的試作分析，經研究者向鄰近地區另一個學校，取得同意後，選擇一個五年級的班級進行預試。該班共有 36 人，男、女生正好各有 18 人。以下是資料的試作分析結果。

【編碼說明】

第一碼：p 表示預試。

第二碼：p 表示擬題，s 表示解題，m 表示學習日記。

第三碼：數字表示學生的座號。

例如：p-s-19 是表示 19 號學生在預試的解題學習單。

p-p-2 是表示 2 號學生在預試的擬題學習單。

【預試題目內容】

汽水 1 箱有 24 罐，售價是 336 元，媽媽買了 4 罐，要付多少元？

說明：本題目是屬於乘除混合的類型，需要兩步驟的運算。

本節分成以下四個部份說明預試的結果：

- 一. 學生的擬題作品類型和內容。
- 二. 學生在擬題教學過程中的解題表現。
- 三. 學生對擬題教學的接受程度。
- 四. 教學者遭遇的困難。

一. 學生的擬題作品類型和內容

(一) 擬題作品類型

結果全部 36 位學生所擬的題目，都是屬於第 5 類可行的、並且適中的題目。例如：

【預試擬題作品舉例】

糖果 1 箱有 50 包，售價是 1550 元，媽媽買了 19 包，要付多少元？(p-p-5)

(二) 擬題作品內容

學生預試的擬題作品內容分析表，詳如表 3-4。其中，學生改變數字、事物占大多數，而改變題目結構者僅有 1 人，可能是學生受到原題目的影響，未再深入思考，僅注意到改變數字和事物。

表 3-4 預試的擬題作品內容分析表

類別	數字		事物		題目結構	
	無改變	有改變	無改變	有改變	無改變	有改變
預試	3	33	2	34	35	1

1. 數字方面

① 出現數字需要算至小數第二位的題目，可能是學生在改變數字時，未加以考慮所致。例如：

【預試擬題作品舉例】

可樂 1 箱有 25 罐，售價是 366 元，爸爸買了 10 罐，要付出多少元？(p-p-33)

說明：算至小數第二位： $366 \div 25 \times 10 = 14.64 \times 10 = 146.4$

②出現數字變小的題目，例如：

【預試擬題作品舉例】

海報一箱有 2 張，售價是 226 元，姐姐買了 2 箱，要付多少元？(p-p-31)

說明：物品數量僅為個位數： $226 \times 2 = 512$

③出現數字變大的題目，例如：

【預試擬題作品舉例】

某超市賣蘋果 1 箱 100 顆，售價 10000 元，10 顆多少元？(p-p-6)

說明：物品單價擴大至五位數： $10000 \div 100 \times 10 = 1000$

④出現以單位量取代數字的題目，例如：

【預試擬題作品舉例】

原子筆 1 打有 12 枝，售價是 120 元，我買了半打，要付多少元？(p-p-10) →

說明：以半打取代 6 枝： $120 \div 12 \times 6 = 60$

2. 事物方面

出現事物較特殊的題目，例如：

【預試擬題作品舉例】

毒品 1 箱有 20 罐，售價是 500 元，歹徒買了 5 罐，要付多少元？（p-p-14）

說明：學生加入社會事件的情境。

3. 題目結構方面

出現比例問題的題目，例如：

【預試擬題作品舉例】

公園有 36 棵假樹，是由 432 位義工所打造出來，那 5 棵樹是由幾位義工所打造？（p-p-27）

說明：已非單價和總價的關係，而是涉及比例概念的問題。

二. 學生在擬題教學過程中的解題表現

（一）解題成敗情形

從本次預試的解題成敗情形（如表 3-5），研究者有二項發現：

1. 本次解題成功率超過八成以上，顯示本題目對大多數的學生是很容易的，只有少數幾位無法解題成功。究其原因，本題目是兩步驟的乘除問題，學生在四年級已學習過類似兩步驟的問題，對五年級學生而言，只是復習舊經驗，所以學生在這種兩步驟的乘除問題，解題表現是相當良好的。

2. 因為解擬題是解自己擬的題目，所以研究者預期解擬題的成功率會較高，結果卻是相反。研究者發現，解擬題的成功率較低的原因，是策略錯誤者多出 3 人，顯示仍有學生不會解自己擬的題目。

表 3-5 預試的解題成敗情形統計表

次別	類別	解題成功（比率）	解題失敗	解題失敗原因	
				策略錯誤	運算錯誤
預試	解題	33 (92%)	3	3	0
	解擬題	30 (83%)	6	3	3
	合計	63 (88%)	9	6	3

(二)策略錯誤解析

從表 3-5 可發現，因為策略錯誤而解題失敗有 6 人，顯示這些學生的策略知識發生問題。例如：

【預試解題作品舉例】

汽水 1 箱有 24 罐，售價是 336 元，媽媽買了 4 罐，要付多少元？（p-s-10）

解題記錄： $336 \div 4 = 84$

說明：10 號學生的解題策略，未考慮 336 元是一箱的價錢，而且媽媽是要買 4 罐汽水。

(三) 運算錯誤解析

因為運算錯誤而解題失敗有 3 人，其原因分別是抄錯數字 1 人，數字除不盡 1 人，計算錯誤 1 人。例如：

【預試解題作品舉例】

沙士 1 箱 250 罐，價格 5000 元，姐姐買了 150 罐，要付多少元？（p-p-12）

解題記錄： $5000 \div 250 \times 150 = 200 \times 150 = 30000$

說明：12 號學生在除法計算時出現錯誤。

計算錯誤僅有 1 人，所以學生在預試的程序性知識方面較無問題。研究者推測兩步驟以內的運算，對五年級學生是相當容易的，因為他們在四年級早已學過。

三、學生對擬題教學的接受程度

本次預試也要求學生填寫學習日記，研究者將資料內容分成上課方法、教材內容和學習態度等三方面來加以說明。

(一) 上課方法

預試班級的學生，覺得研究者用了別的方法上課，使課程不會無聊，也希望以後能繼續這樣的活動。例如：

這堂課很好玩，因為老師用了別的方法上課，使得課程不會無聊。（p-m-15）

希望數學課可以用這種方法來教我們。(p-m-13)

(二)教材內容

學生對擬題教學的教材內容感到十分有趣，而且能提出對教材內容的想法。例如：

蠻有趣的，而且數字出到 5 位數了。(p-m-18)

我覺得數學真的可以用到動動腦筋，而且還可以玩到很多東西。(p-m-25)

很多不同的做法，有些數字很大或已經 5 位數了，可是還是算得出來，非常的好。(p-m-28)

(三)學習態度

學生從擬題教學活動中，增強了學習的信心，也發掘了數學的樂趣，改變以往對數學的態度。例如：

學到怎麼出題目，還知道原來我的同學這麼有創意。(p-m-1)

了解什麼時候該用什麼算式做答，因為這樣才是學數學真正意義。(p-m-3)

大家高高興興一起上這堂數學，也更進一步學會 + - × ÷。(p-m-9)

我知道如何出題目，而且現在要算 answer 的時候，變得比以前快好多喔！

(p-m-26)

我也把今天的數學課當復習，也讓我的數學能更上一層樓，比別人好。

(p-m-27)

自己發揮題目也自己發揮算式，我覺得我很厲害。(p-m-34)

從以上的資料可看出，學生對擬題教學的接受程度很高，參與意願和學習態度都呈現正面的反應，並且顯現出擬題教學重視討論、溝

通、和分享的意義。所以，預試結果顯示，學生對擬題教學均抱持正面的接受態度，值得進行研究。

四. 教學者遭遇的困難

在本次預試過程中，研究者遭遇的困難有：

- (一)學生對擬題的方法比較陌生，因此大多數學生都模仿原題，變化性較小。
- (二)討論發表時間的控制，無法確實做到，而且發表活動集中在幾個人。
- (三)學生會在乎這樣的活動和數學課程有無關聯，他們關心考試會不會考這些題目。

第四章 結果與討論

本章分成四個小節，說明研究的結果與討論：

第一節 學生的擬題作品類型和內容。

第二節 學生在擬題教學過程中的解題表現。

第三節 學生對擬題教學的接受程度。

第四節 教師在擬題教學過程中所遭遇的困難。

【編碼說明】

第一碼：數字表示第幾次擬題教學

第二碼：s 表示解題，p 表示擬題，m 表示學習日記

第三碼：數字表示學生座號

例如：3-p-20 是表示在第 3 次擬題教學 20 號學生的擬題學習單。

8-s-12 是表示在第 8 次擬題教學 12 號學生的解題學習單。

第一節 學生的擬題作品類型和內容

本節主要分成「擬題作品類型」和「擬題作品內容」二個部份，目的是探討學生的擬題作品，出現那些類型和內容變化。

一. 擬題作品類型

研究者將學生擬題作品分類後，結果如表 4-1。從表中可發現學生擬題類型幾乎是屬於第 5 類 (98.5%)，皆是可行的，並且是資料適

中;其餘屬於第 4 類資料不足的有 1 題,屬於第 3 類不可行的有 3 題
因此學生擬題作品類型共計出現資料適中、資料不足和不可行的等三
類。以下是分類舉例說明：

(一)資料適中的題目，例如：

【第 4 次擬題作品舉例】

買 3 隻娃娃 369 元，妹妹有 300 元，夠不夠買 1 隻？不夠的話還差幾元？
(4-p-35)

(二)資料不足的題目，例如：

【第 7 次擬題作品舉例】

正方形邊長 19 公分，梯形寬 8 公分，上底 20 公分，下底 30 公分，兩個相
差多少公分？(7-p-4)

說明：未說明梯形的高是多少？問題是求相差什麼？是面積或周
長？

(三)不可行的題目，例如：

【第 8 次擬題作品舉例】

小寶和小廷的體重合起來是 504 公斤，小寶是大胖子，手腳的重量是 12 公
斤，小廷是瘦皮猴，手的重量是 12 公斤，求小廷的腳？(8-p-30)

說明：構成體重不只是手腳而已，身體部位無法單獨計算。

從學生擬題表現的結果可知，和研究者採取坪田耕三的「類題法」有關，學生以原題目為基礎，容易擬出可行的題目。也由於學生能擬出可行的題目，因而學生可以再進行解題，這樣的循環才能持續下去。

表 4-1 擬題作品分類結果

題目分類	非題目類	題目類				
		非數學	不可行	可行的		
				資料不足	資料適中	資料超過
編碼	1	2	3	4	5	5
第 1 次					35	
第 2 次					34	
第 3 次					35	
第 4 次					34	
第 5 次					35	
第 6 次					35	
第 7 次				1	33	
第 8 次			3		32	
合計			3 (1.1%)	1 (0.4%)	273 (98.5%)	

註：上表中的數字是表示人數

二. 擬題作品內容

研究者依數字、事物和題目結構三個面向，將學生每次的擬題作品，和原題目進行比較，發現有改變的部份。除了事先和指導教授討論分析方法，也向研究者同校教師諮詢相關意見，始整理成表 4-2 擬題作品內容分析表。

表 4-2 擬題作品內容分析表

人數	次別	數字		事物		題目結構	
		無改變	有改變	無改變	有改變	無改變	有改變
35	第 1 次	3	32	0	35	29	6
34	第 2 次	1	33	0	34	28	6
35	第 3 次	0	35	0	35	28	7
34	第 4 次	2	32	0	34	17	17
35	第 5 次	0	35	0	35	29	6
35	第 6 次	0	35	0	35	29	6
34	第 7 次	1	33	19	15	9	25
35	第 8 次	4	31	23	12	24	11

註：1. 上表中數字表示人數。

2. 進行第 2、4、7 次擬題時皆有 1 位學生缺席。

觀察表 4-3，可發現學生最常改變數字，其次是事物，題目結構

則是最少。但隨著擬題次數增加，改變題目結構者有增加的趨勢，顯示學生逐漸熟悉對於題目結構的掌握，多次練習可能效果會更顯著。另外，第 7 次卻出現改變題目結構者大幅增加，改變事物者反而減少。這可能和題目內容有關，因為該次題目是求面積和，多數學生為圖方便，改成求面積差的題目，圖形則未改變。

以下分別從數字、事物和題目結構三方面，說明學生在這三個方面如何改變題目。

(一) 數字方面

學生的擬題作品中，大多數都有改變數字。改變數字的情形，有數字變大、數字變小、數字無法除盡等三種，以下舉例說明：

1. 數字變大

【第 1 次擬題原題目】

阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，現在阿土伯還有多少隻鴨子？

【第 1 次擬題作品舉例】

爸爸有 3358910 棟 101 大樓，前天賣了 57560 棟 101 大樓，五天後爸爸又建了 3358910 棟 101 大樓，爸爸現在有幾棟 101 大樓？（1-p-3）

阿水伯有 1234567890 隻狗，前天賣了 500000000 隻，昨天買了 19843000 隻，今天又賣了 370000 隻，請問他現在有幾隻狗？（1-p-12）

2. 數字變小

【第 2 次擬題原題目】

5 包麵粉售價 285 元，爸爸想買 7 包麵粉，需要付多少元？

【第 2 次擬題作品舉例】

口香糖 3 包 21 元，買 6 包要多少錢？（2-p-28）

6 包巧克力 30 元，弟弟想買 9 包，這樣要多少元？（2-p-35）

3. 數字無法除盡

【第 4 次擬題原題目】

蛙鏡 3 副 189 元，小琪有 70 元，夠不夠買 1 副蛙鏡？夠的話，還剩多少元？不夠的話，還差多少元？

【第 4 次擬題作品舉例】

小庭和班上 34 位同學合買了一台電腦 25000 元，每個人平分，後來小庭又去買了一枝紅筆，花了 8 元，請問小庭共花了幾元？（4-p-21）

說明： $25000 \div (34 + 1)$ 數值除不盡

【第 8 次擬題原題目】

甲、乙二圖面積共是 504 平方公分，甲是正方形，邊長是 12 公分，乙是長方形，寬是 12 公分，求乙的長是多少公分？單位：公分



【第 8 次擬題作品舉例】

A 和 B 面積是 502 平方公分，A 的長是 15 公分，是一個長方形，B 的邊長是 15 公分，是一個正方形，現在 A 的寬是多少？（8-p-33）

說明： $(502 - 15 \times 15) \div 15$ 數值除不盡

(二) 事物方面

學生的擬題作品中，除了第 7、8 次因為是圖形題的關係，學生較少更換圖形名稱，其餘各次擬題的事物都出現改變的現象。改變事物的情形，有更換事物、增加事物、增加事物的單位和減少事物等四種，以下舉例說明：

1. 更換事物：

【第 1 次原題目】

阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，現在阿土伯還有多少隻鴨子？

【第 1 次擬題】

培星養了 72 隻魚，昨天賣掉 22 隻魚，今天又買了 10 隻魚，培星現在有多少隻魚？（1-p-21）

說明：鴨子換成魚。

2. 增加事物：

【第 3 次原題目】

貼紙每張 8 元，簽字筆每枝 35 元，阿強買 12 張貼紙和 1 枝簽字筆，共要付多少元？

【第 3 次擬題】

弟弟買了 3 枝每枝 28 元的美工刀，和 3 枝每枝 32 元的剪刀，和 10 張每張 4 元的白紙，和 10 張每張 5 元的貼紙，還有 4 枝每枝 20 元的鉛筆，弟弟要付多少元？（1-p-5）

說明：增加事物為 5 種：美工刀、剪刀、白紙、貼紙、鉛筆。

3. 增加事物的單位

【第 1 次原題目】

阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，現在阿土伯還有多少隻鴨子？

【第 1 次擬題舉例】

我有 12 打筆，賣 5 打筆，又買 7 枝筆，我有幾枝筆？（1-p-14）

說明：有「枝」和「打」二種單位。

4. 減少事物：

【第 3 次原題目】

貼紙每張 8 元，簽字筆每枝 35 元，阿強買 12 張貼紙和 1 枝簽字筆，共要付多少元？

【第 3 次擬題舉例】

一台電腦 50000 元，今天賣了 20 台，昨天賣了 30 台，總共多少元？(3-p-34)

說明：將 2 種事物（貼紙、簽字筆）減為 1 種事物（電腦）。

(三) 題目結構方面

改變的情形大致有增加運算條件、加入單位換算的概念、加入立體圖形、變成非例行性題目等。以下舉例說明：

1. 增加運算條件

【第 1 次原題目】

阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，現在阿土伯還有多少隻鴨子？

【第 1 次擬題】

阿水伯有 1234567890 隻狗，前天賣了 500000000 隻，昨天買了 19843000 隻，今天又賣了 370000 隻，請問他現在有幾隻狗？（1-p-12）

說明：多加一個運算條件：賣了 370000 隻。

【第 5 次原題目】

阿星和 3 位同學去逛夜市時，合買 1 個籃球，價錢是 324 元，由大家平均分攤，阿星自己又買 8 個哈姆太郎玩偶，每個價錢是 17 元，請問阿星總共花了多少元？

【第 5 次擬題】麥香奶茶和 5 瓶輕鬆小品（咖啡口味）去遊樂園玩，買門票花了 600 元，平均分攤後，麥香奶茶跑去買了 6 包爆米花，1 包 500 元，還剩下 5000 元，請問麥香奶茶出門帶多少錢？（5-p-26）

說明：多加一個運算條件：還剩下 5000 元。

2. 加入單位換算的概念

【第 2 次原題目】5 包麵粉售價 285 元，爸爸想買 7 包麵粉，需要付多少元？

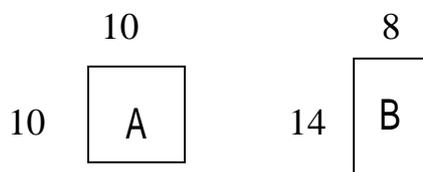
【第 5 次擬題】

10 張 Ro 月費卡 3500 元，blue 想買 18 張，需要付多少元？可以用幾天？幾年？（2-p-12）

說明：題目中「月費卡」是指可使用 1 個月的點數卡，其中 18 張可使用幾天和幾年的問題，是學生加入單位換算的概念，因而發展成其他問題。

3. 加入立體圖形

【第 7 次原題目】A 圖形是正方形，邊長是 10 公分，B 圖是長方形，長是 14 公分，寬是 8 公分，A、B 二個的面積共是多少平方公分？單位：公分



【第 7 次擬題】(7-p-12)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

甲是正方形，邊長 12 公分，乙是長方體，寬是 10 公分，長是 21 公分，高是 50 公分，請問 2 個圖形的周長加起來的多少公分？相差幾公分？

我會把做法用一個算式填充題記下來：

12×4	10×4	21×4	50×4	48	40	84	200	324	276
$\times 4$	$\times 4$	$\times 4$	$\times 4$	48	40	84	200	324	276
48	40	84	200	324	276				

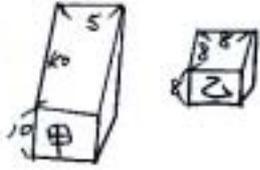
答 1: $12 \times 4 + 10 \times 4 + 21 \times 4 + 50 \times 4 = (372) 276$ 公分
 答 2: $(10 \times 4 + 21 \times 4 + 50 \times 4) - 12 \times 4 = (276)$ 公分

甲 乙

說明：加入立體圖形，並改為求正方形和長方體周長（求邊長和、邊長差）的問題，不過該位學生在解題時發生運算錯誤。

【第 7 次擬題】(7-p-16)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：



甲圖長 40 公分 寬 5 公分 高 10 公分
乙圖長 8 公分 寬 8 公分 高 8 公分
2 個圖形相差幾立方公分？

我會把做法用一個算式填充題記下來：

$$40 \times 5 \times 10 - 8 \times 8 \times 8 = 72$$

$\begin{array}{r} 40 \\ \times 5 \\ \hline 200 \end{array}$	$\begin{array}{r} 200 \\ \times 10 \\ \hline 2000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 8 \\ \hline 32 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1200 \\ - 128 \\ \hline 1072 \end{array}$	A: 72 立方公分
---	--	---	---	------------

說明：題目改成立體圖形，並且改為求體積的問題。

4. 加入特定的條件後，變成非例行性題目

【第 4 次擬題原題目】

蛙鏡 3 副 189 元，小琪有 70 元，夠不夠買 1 副蛙鏡？夠的話，還剩多少元？不夠的話，還差多少元？

【第 4 次擬題舉例】

Ro 月費卡 10 張 3000 元，有優價 500 元，Blue 身上有 548 元，他要買 2 張，請問夠不夠？夠的話還剩多少元？不夠的話還差多少元？(4-P-12)

說明：題意是買 10 張才有減價 500 元，買 2 張仍要依原價。這種條件在買賣交易的情境中常出現，可說是非例行性題目。

第二節 學生在擬題教學過程中的解題表現

本節將分成三部份，說明學生在擬題教學過程中的解題表現：

- 一. 解題成敗情形：分析學生整體的解題成敗情形，再將學生解題失敗的原因，區分為解題策略錯誤和運算錯誤二種，並且提出主要的發現。
- 二. 策略錯誤解析：將學生策略錯誤的原因，分成三方面討論，學生在下列四種數學知識的相關問題。
 - (一)對問題的察覺→語言知識和語意知識。
 - (二)問題表徵轉換→基模知識。
 - (三)擬定策略→策略知識。
- 三. 運算錯誤解析：學生擬定正確的策略後，執行策略需具備程序性知識。此部份即針對學生運算錯誤的情形，探討學生在程序性知識的相關問題。

一. 解題成敗情形

研究者將學生 8 次解題和 8 次解擬題的記錄，先依解題成敗分類統計，並統計每次解題的成功比率。再將學生解題失敗的原因，區分為解題策略錯誤和運算錯誤二種，整理統計結果成表 4-3。

其中，在進行第 2、4、7 次解擬題時，皆有 1 位學生缺席，故解題者計有 34 人。另第 8 次解擬題，則因為有 3 位學生擬出不可行的題目，因而無法解題，故解題者計有 32 人。

分析學生解題成敗情形，主要發現有：

- (一) 學生在第三步驟四則混合運算解題表現較差。
- (二) 學生兩次解題的成功率相近。
- (三) 學生在解擬題的解題策略正確率高。

(一) 困難的第三步驟運算

從表 4-3 中，可發現學生解題成功率，是逐次下降；在前 5 次解題，不論是解題或解擬題，成功率皆有達到八成以上。但從第 6 次以後，成功率則明顯低落，顯示後 3 次學生解題表現較差。

對照第二章的表 3-2 運算題型的題目表，發現後 3 次是涉及第三步驟四則混合運算的題目。由此可知，第三步驟的四則混合運算問題是學生解題表現較差的部份。

(二)學生兩次解題的成功率相近

從表 4-1 中發現，除了第 8 次相差較大外，其餘各次解題和解擬題，成功率都很接近。這個現象和研究者預期的結果不同，因為研究者認為解自己所擬的題目，應該較容易成功，但事實卻不然。另外，從解題失敗的人數來看，除了第 8 次相差 9 人外，其餘各次解題和解擬題，失敗人數相差都在 4 人以內，也顯示解題和解擬題的失敗人數相近。

(三) 解擬題的解題策略正確率高

從表 4-1 中可看出，各次解題因策略錯誤而解題失敗的人數，解擬題皆比解題減少。這個現象正如同國內學者梁淑坤(1994)所說的，如果解題者亦是擬題者，他當然清楚題目的內容，馬上可以做策劃的功夫，不用再理解他自己擬出的題目。因此解自己所擬的題目時，由於解題策略早已設定，解題時較不容易出錯。因此，從表 4-3 中，也可發現解擬題的失敗原因中，較多的是運算錯誤。

表 4-3 解題成敗情形統計表

次別	類別	解題成功(比率)	解題失敗	解題失敗原因	
				策略錯誤	運算錯誤
第1次	解題	34 (97%)	1	0	1
	解擬題	33 (94%)	2	0	2
第2次	解題	30 (86%)	5	1	4
	解擬題	31 (89%)	3	1	2
第3次	解題	33 (94%)	2	2	0
	解擬題	32 (91%)	3	0	3
第4次	解題	34 (97%)	1	0	1
	解擬題	29 (85%)	5	0	5
第5次	解題	28 (80%)	7	5	2
	解擬題	28 (80%)	7	3	4
第6次	解題	20 (57%)	15	7	8
	解擬題	24 (69%)	11	7	4
第7次	解題	22 (63%)	13	11	2
	解擬題	25 (74%)	9	4	5
第8次	解題	16 (46%)	19	18	1
	解擬題	22 (69%)	10	5	5

註：1.上表中的數字是表示人數。

2.第1至4次是二步驟運算，第5至8次是三步驟運算。

二. 策略錯誤解析

研究者分析學生解題策略的錯誤後，結果發現：

- (一)語言知識和語意知識的問題，例如：學生誤解題目語句意義。
- (二)基模知識的問題，例如：面積和周長的概念混淆。
- (三)策略知識的問題，例如：忽視題目的條件，解題計畫錯誤。

(一)語言知識和語意知識的問題

研究者發現學生在語言知識和語意知識發生問題，問題轉譯出現錯誤，例如誤解題目的語句，以致將題目條件的人數算錯：

1. 【第 5 次解題舉例】

阿星和 3 位同學去逛夜市時，合買 1 個籃球，價錢是 324 元，由大家平均分攤，阿星自己又買 8 個哈姆太郎玩偶，每個價錢是 17 元，請問阿星總共花了多少元？

研究者發現該次解題，有 5 位學生將解題策略寫成「 $324 \div 3 + 17 \times 8$ 」，可能就是學生將「阿星和 3 位同學」視為只有 3 人，因而解題策略發生錯誤。

2. 【第 5 次解擬題舉例】

阿姩和 5 位同學去逛夜市，他們的錢合買了 2 顆足球，價錢是 450 元，由大家分攤，阿姩的朋友買了 5 枝自動筆，每枝價錢是 25 元，請問阿姩同學共花了多少錢？（5-p-33）

該位學生將解題策略寫成 $450 \div 5 + 25 \times 5$ ，錯誤原因和前一例子相同，學生將「阿奴和 5 位同學」視為只有 5 人，因而解題策略發生錯誤。

3.【第 5 次解擬題舉例】

媽媽跟 6 位朋友逛街，她們合買了一組沙發，一組 1500 元，媽媽又買了一隻大娃娃，共花了 350 元，大娃娃多少元？（5-p-34）

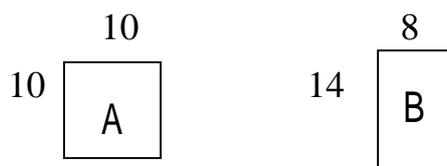
該位學生將解題策略寫成 $350 - 1500 \div 6$ ，錯誤原因和前一例子相同，學生將「媽媽和 6 位朋友」視為只有 6 人，因而解題策略發生錯誤。

(二)基模知識的問題

研究者發現有些學生的基模知識產生混淆，例如學生將「求面積」的題目，使用「求周長」的方法解題：

1.【第 7 次解題舉例】

A 圖形是正方形，邊長是 10 公分，B 圖是長方形，長是 14 公分，寬是 8 公分，A、B 二個的面積共是多少平方公分？單位：公分



研究者發現在該次解題，同時有多達 8 位學生將解題策略寫

成 $10 \times 4 + (14 \times 2 + 8 \times 2)$ ，顯然學生是使用了求「周長」的解題策略，來解「面積」的答案。

2.【第 7 次解擬題舉例】

A 是正方形，邊長 20 公分，B 是長方形，長是 14 公分，寬是 9 公分，二個圖形的面積共是多少平方公分？（7-p-4）

該位學生將解題策略寫成「 $20 \times 4 + 14 \times 2 + 9 \times 2$ 」，錯誤情形和前一例子相同，求「面積」的題目，學生卻用求「周長」的方法。

(三)策略知識的問題

研究者發現學生在策略知識上的問題，是忽視題目的條件，設定了錯誤的解題計畫，例如：

1.【第 6 次解題舉例】

1 個鹹蛋超人賣 280 元，阿福想買 4 個，可是阿福現在只有 400 元，所以阿福計畫每天存 45 元，請問需要存幾天錢才夠？

研究者發現該次解題，有 3 位學生將解題策略寫成 $280 \times 4 \div 45$ ，顯然學生是忽視了題目條件--「阿福現在只有 400 元」。

2.【第 6 次解擬題舉例】

1 隻洋娃娃賣 350 元，名娟想買 3 隻，可是名娟現在有 500 元，名娟決定好每天存 40 元，請問名娟需要存幾天錢才夠？（6-p-33）

該位學生將解題策略寫成 $350 \times 3 \div 40$ ，錯誤原因和前一例子相同，學生忽視了題目條件--「名娟現在有 500 元」。

三. 運算錯誤解析

研究者將因運算錯誤而失敗的原因，分成計算錯誤、抄錯數字、未計算和數字除不盡等四類，詳如表 4-4，以下是分類的舉例說明。

(一)計算錯誤：學生在數字相加、或相減、或相乘、或相除時，發生計算錯誤。例如：

翌絨養了 100000 隻小鳥，昨天賣掉了 1999 隻，今天又買了 100 隻，現在還有多少隻？(1-p-2)

【學生解題記錄】說明：減法錯 $100000 - 1999 = \underline{18001}$

$$18001 + 100 = 18101$$

(二)抄錯數字：學生在運算過程中，將數字抄錯，以致解題失敗。例如：

1 個鹹蛋超人賣 280 元，阿福想買 4 個，可是小偉現在只有 400 元，所以阿福計畫每天存 45 元，請問需要存幾天錢才夠？(6-s-8)

【學生解題記錄】 $280 \times 4 = 1120$

$$1120 - 400 = \underline{720}$$

說明：抄錯 $\underline{750} \div 45 = 16 \dots 30$

$$16 + 1 = 17$$

(三)未計算：沒有作答，或者僅寫出解題計畫。例如：

5 台 Bens 售價 5123555 元，囡仔想買 15 台，要多少元？囡仔有 60000000 元
夠不夠買？（2-p-14）

【學生解題記錄】 $(5123555 \div 5 \times 15) - 60000000 = (\quad)$

說明：僅列出算式，未完成計算。

(四)數字除不盡：學生所擬題目的數據，無法除盡，造成學生解題
失敗。例如：

眼鏡 3 副 200 元，小芳有 70 元，夠不夠買 1 副眼鏡？夠的話還剩多少元？不
夠的話，還差多少元？（4-p-36）

【學生解題記錄】 說明：無法除盡 $200 \div 3 = 66 \dots 2$

$$70 - 66 = 4$$

從表 4-4 可看出，其中「計算錯誤」比率達六成以上。而「計算
錯誤」是和程序性知識有關。因此，學生運算錯誤最大的因素是，學
生的程序性知識不夠熟練。

研究者對此項結果不感到意外，因為本研究第一章已提到教育部
（2004）發佈的「數學銜接補強建議」，希望教師對學生提供更多去
情境之練習題，意即加強計算能力，原因便是學生的程序性知識仍有
不足。

另外，「抄錯數字」可能是學生疏於注意，或者是筆誤。「未計算」

者可能是學生生無法擬出解題計畫的問題，或者是擬出解題計畫後，已無時間執行運算。「數字除不盡」者則應屬題目的數據問題，擬題者未加以考慮所致，因此研究者特別單獨分類出來。以上三項是和程序性知識無關，因此在本小節不加以討論。

表 4-4 運算失敗原因統計

次別	類別	錯誤原因				合計
		計算錯誤	抄錯數字	未計算	數字除不盡	
第1次	解題	1				1
	擬解題	2				2
第2次	解題	4				4
	擬解題	1		1		2
第3次	解題					0
	擬解題	2		1		3
第4次	解題	1				1
	擬解題	2	1	1	1	5
第5次	解題	2				2
	擬解題	2		1	1	4
第6次	解題	6	1	1		8
	擬解題	2	1	1		4
第7次	解題		2			2
	擬解題	3		2		5
第8次	解題	1				1
	擬解題	2		1	2	5
合計		30(63%)	5(10%)	9(19%)	4(8%)	48

註：上表中數字表示人數

第三節 學生對擬題教學的接受程度

研究者根據學生所填寫的學習日記，將資料歸納分成「上課方式」、「教材內容」和「學習態度」三個要點，說明學生對擬題教學的接受程度。結果顯示，學生對擬題教學的接受程度很高，參與學習的意願也很強，對數學也產生了學習的樂趣和信心。

一. 擬題教學是學生希望的上課方式

學生在學習日記中，寫下希望數學課的上課方式，能如同擬題教學的方式一樣，上課時才不會無聊。例如：

我希望數學課時可以用這種方法來教我們。(3-m-16)

老師用了別的方法上課，使課程不會無聊。(4-m-7)

有些學生則進一步解釋，這樣的上課方式，對他們學習的好處。

例如：

先由老師出題目，再由我們自行出題目、解答，不但可以自我鍛練，更可以讓我們的頭腦、智慧更上一層樓。(3-m-27)

也有學生希望未來升上六年級時，還可以進行這樣的上課方式。

例如：

雖然有好幾次都有出錯，可是我們還玩的很愉快，希望六年級還可以出題目。(8-m-11)

二. 擬題教學含有趣味的教材內容

分析學習日記可發現，學生對教材內容有了自主的看法，也不再感到困難，反而是感到有趣。例如：

我覺得數學真的可以用到動動腦筋，而且還可以玩到很多東西。(1-m-23)

我覺得這堂課，我學到了很多，例如：四則運算、檢驗題目...等。(2-m-20)

對其他同學擬出的題目，提出自己的看法，例如：

我學到了很多東西，我們的題目都不一樣，每個人的題目都很有趣，又很好玩。(5-m-31)

三. 擬題教學中可見學生樂於學習的態度

在學生學習日記中，表達最多的是樂於學習的態度，對數學不再感到害怕，也期待下次上課的機會，顯示學生對擬題教學的接受程度很高。例如：

我現在總算對數學有點感到興趣了。(4-m-29)

和數學做朋友。(2-m-11)

很好玩，也學了很多好玩的題目，也希望能多玩幾次。(6-m-10)

因此，從以上結果可知，學生對擬題教學的接受程度頗高，值得在數學課程中繼續推廣。

第四節 教師在擬題教學過程中所遭遇的困難

研究者根據在教學過程中，所作的觀察記錄和省思，歸納出在擬題教學過程中所遭遇的困難，分成「上課時間難以掌握」、「發表文化難以建立」和「部份學生擬題時不用心」等三個方面進行說明。

一. 上課時間難以掌握

教學者遭遇到因為討論時間過久、等待全部學生擬完題、學校安排活動的影響等種種原因，使得上課時間較難以掌握，甚至影響到其他課程的進行。例如：

今天已是第四次擬題教學，但仍出現討論過久，拖延到下一節自然課的時間。(1-t)

學校安排早上五年級聽演講時間，結果時間過長，影響到下一節彈性課(擬題教學)，只好往後延了。(4-T)

擬題的時間有差異，先、後擬好題目的人，有時時間相差達 20 分鐘，造成課程時間緊縮。(3-t)

二. 發表文化難以建立

學生發表的情形仍須改進，某些人常常發言，佔用討論時間，造成其他學生很少表達意見，無法建立班級的發表文化。例如：

14 號一直舉手發言，妨礙其他人的發表，我只好勸阻他。(2-t)

12 號不停問我 (教學者), 可不可改題目? 可不可以換很大的數字? (1-t)

有時是沒有人願意做第一位發表者, 只好點名發表。例如:

現在有意見的人請舉手! 沒有人嗎? 那請 15 號同學先說說看! (7-t)

三. 部份學生擬題時不用心

部份學生擬題時, 會出現故意將數字變大、加入特殊的社會事件、將同學名字加入題目中等現象, 可能是這些學生認為, 擬題和考試內容無關, 想開玩笑作弄別人, 擬題時就不怎麼用心思考了。例如:

有人將數字寫到 6 位數, 也不管可以不可以除盡。(4-t)

擬題作品中出現不合理的問題情境, 如搶銀行、偷錢等, 雖說計算沒有問題, 但卻不合常理。(5-t)

24 號和 18 號為了題目的內容吵架, 因為用的人名有諷刺的味道。(8-t)

第五章 結論與建議

本章根據第四章研究的結果與發現，提出結論與建議。

第一節 結論

學生擬題成功率很高，並且逐漸熟悉對於題目結構的掌握。但學生在第三步驟的四則混合運算表現較差，解題錯誤的原因和各數學知識有關，其中程序性知識不夠熟練，是造成運算錯誤最大的因素。擬題教學是學生希望的上課方式，參與學習意願高。教學者則是在討論發表的進行時間，較難以掌握。

一. 學生的擬題作品類型和內容

學生擬題作品類型共計出現資料適中、資料不足和不可行的等三類。但資料適中（98.5%）是最多的，因此學生擬題成功率很高。

學生最常改變數字，其次是事物，題目結構則是最少。但隨著擬題次數增加，改變題目結構者有增加的趨勢，顯示學生逐漸熟悉對於題目結構的掌握，多次練習可能效果會更顯著。

二. 學生在擬題教學過程中的解題表現

第三步驟的四則混合運算，是學生表現較差的。另外，學生在解題

和解擬題的成功率相近。學生在解擬題時，較會使用正確的解題策略。

學生誤解題目語句意義，是語言知識和語意知識的問題；面積和周長的概念混淆，是基模知識的問題；忽視題目的條件，解題計畫錯誤，是策略知識的問題。

結果顯示，學生運算錯誤最大的因素是，學生的程序性知識不夠熟練。

三. 學生對擬題教學的接受程度

結果顯示，擬題教學是學生希望的上課方式，擬題教學含有趣味的教材內容，擬題教學中可見學生樂於學習的態度。所以，學生對擬題教學的接受程度很高，參與學習的意願也很強，對數學也產生了學習的樂趣和信心。

四. 教師在擬題教學過程中所遭遇的困難

因為討論過久、或其他活動耗時，上課時間較難以掌握。討論發表仍須改進，因為討論發表會集中在某一些人，造成其他學生很少表達意見。學生擬題時，會出現和同學比賽，故意將數字變大，或更換有趣的事物，不用心思考題目。

第二節 建議

本節分成教學方法、擬題引導、時間控制、課程教材和未來研究方向等四個部份，說明本研究的建議事項。

一. 擬題教學的推廣

國內梁淑坤(民 83)曾建議把擬題活動推廣至一般數學教室裡。本研究的實證結果亦顯示，擬題教學對數學學習有正面效果，值得推行，然而對於教學方法的應用，則有賴教學者的智慧和思考。

二. 擬題的引導

「擬題」是由個人應用本身所具備的數學知識、生活經驗和思想角度所想出的題目，每個人所想的都不太不一樣，題目將會呈現出多樣性。因此，在學生擬題時予適當引導，先讓學生有成功的經驗，擬出可行的題目，再讓學生發展更高層次的擬題。

三. 適當的時間控制

教師應要能掌控時間，對討論要限制適當時間；指定發表要以普遍為原則，避免淪為少數人的辯論；教師要事先向學生說明擬題時的注意事項，以免學生自我隨意擬題，缺乏合理的情境。

四. 擬題教材的加入

現行數學教材的內容，已有擬題的習題出現，但僅止於少數單元，數量亦不多。教學者可利用回家作業或晨間時間，指導學生進行擬題，作為共同解題的材料，並加以討論分享。久而久之，擬題的習慣養成後，學生會逐漸將問題生活化，解題的思考會更多元、靈活，對數學的恐懼也會降低。

五. 未來研究的方向

由於本研究有一些研究限制，使得結果無法做一般情境的推論。但仍可做相關研究之參考。建議未來研究可考慮以下幾點：

- 一、研究對象：可擴及其他年齡的學生。
- 二、教材內容：可考慮其他數學單元，如幾何圖形、代數等。
- 三、擬題方式：除了坪田耕三的研究，亦可參考其他學者的方法。
- 四、結合其他活動：除了解題、擬題之外，也可加入遊戲或評量等活動。

參考文獻

一、中文部分

- 林文生 (1996)。一位國小數學教師佈題情境及其對學生解題交互影響之分析研究。國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，台北。
- 林原宏、許淑萍 (2002)。乘除擬題能力測驗編製及其實證研究。測驗統計年刊，10，135-172。
- 林群雄 (2004)。『教』與『學』之成長實錄—擬題活動教學融入國小三年級數學課堂之行動研究。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。
- 林碧珍 (1989)。國小學生數學解題的表現及其相關因素的研究。國立台灣師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，台北。
- 林德宗 (1999)。擬題活動在國小五年級數學教室裡的應用。八十八年度大專學生參與專題研究計畫報告 (NSC 88-2815-C-023-001-S)。
- 周幸儀 (2002)。國小二年級數學科合作擬題教學之行動研究。國立台南師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，台南。
- 周筱亭 (1995)。國民小學教師對數學新課程應有的認識。國立嘉義師範學院八十二學年度數學教育研討會。
- 坪田耕三 (1987)。生動的算術。國土社。
- 施淑娟 (1999)。數學解題的學習與教學。學生輔導通訊，62，50-63。
- 南一書局 (2003)。國民小學數學課本第九冊。台南：南一書局。
- 南一書局 (2003)。國民小學數學習作第九冊。台南：南一書局。
- 南一書局 (2003)。國民小學數學教師手冊第九冊。台南：南一書局。
- 孫秀芳 (1997)。國小二年級學生加減法擬題能力之研究。國科會補助大學生研究專案成果報告 (NSC86-2815-C-023-005-H)。
- 徐文鈺 (1996)。不同擬題教學策略對兒童分數概念、解題能力與擬題能力之影響。國立臺灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文，未出版，台北。
- 莊美蘭 (2003)。國一數學課程中擬題教學活動之研究。國立中山大學教育研究

- 所碩士論文，未出版，高雄。
- 陳佩琦（2003）。**國小二年級數學擬題教學實踐之研究**。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。
- 梁淑坤（1994）。「擬題」的研究及其在課程的角色。載於臺灣省國民學校教師研習會（主編），**國民小學數學科新課程概說（低年級）**（頁 152-167）。台北：臺灣省國民學校教師研習會。
- 梁淑坤（1995）。**師範生擬題行為之研究**。國科會補助研究計畫的成果報告（NSC 83-0111-S-023-007，NSC 84-2511-023-001）。
- 梁淑坤（1997）。**擬題能力之評量：工具之製作**。國科會補助研究計畫的成果報告（NSC 84-2511-S-023-006）。
- 梁淑坤（1999）。從擬題研究提出數學教學建議。載於高雄市政府公教人力資源發展中心（主編），**新典範數學**（頁 184-220）。高雄：高雄市政府公教人力資源發展中心。
- 教育部（1962）。**國民小學課程標準**。台北。
- 教育部（1968）。**國民小學課程標準**。台北。
- 教育部（1975）。**國民小學課程標準**。台北。
- 教育部（1993）。**國民小學課程標準**。台北。
- 教育部（2002）。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要**。台北。
- 教育部（2004a）。**數學課程銜接與補強**。2004年3月27日，取自教育部：
http://teach.eje.edu.tw/9CC/textbooksource/2004_0205/index.htm
- 教育部（2004b）。**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北。
- 張美珍（2002）。從建構主義取向探究博物館教育活動的規劃設計。**科技博物**，6（6），19-29。
- 甯自強（1993）。國小數學科新課程的精神及改革動向-由建構主義的觀點來看。**科學教育月刊**，1（1），101-108。
- 黃敏晃（1995）。小學新課程的精神。**國立嘉義師範學院八十二學年度數學教育**

研習會。

- 楊惠如 (2000)。擬題活動融入國小三年級數學科教學之行動研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，嘉義。
- 塗金堂 (1996)。數學解題之研究取向。教師之友，37 (3)，38-44。
- 塗金堂 (1999)。「合作--省思」的數學解題教學法。載於高雄市政府公教人力資源發展中心 (主編)，**新典範數學** (頁 60-91)。高雄：高雄市政府公教人力資源發展中心。
- 劉芳妃 (1998)。合作擬題活動融入國一數學科教學之個案研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。
- 劉祥通 (1996)。數學寫作教學策略初探。載於甯自強 (主編)，**國立嘉義師範學院八十四學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編** (頁 247-257)。嘉義：國立嘉義師範學院。
- 劉祥通、周立勳 (1999) 從數學寫作活動的實踐發展國小教師數學教學之布題能力。發表於 1999 年國際數學教師教育研討會。
- 鄭博信、劉曼麗、詹勳國 (2000)。「國小一至三年級數學學習障礙學生電腦化動態評量之研究」子計畫一：解題歷程與錯誤類型分析。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (NSC 88-2614-S-153-001)。
- 謝 堅 (2000) 實驗課程中四則運算教材的設計。載於臺灣省國民教育研習會 (主編)，**國民小學數學科新課程概說 (高年級)** (頁 78-97)。台北：臺灣省國民教育研習會。
- 譚克平 (1999)。以波利亞解題策略教導國中數學之效益研究。載於高雄市政府公教人力資源發展中心 (主編)，**新典範數學** (頁 286-305)。高雄：高雄市政府公教人力資源發展中心。
- Polya (1945/1993)。How to Solve It : a new aspect of mathematics method。閻育蘇 (譯)。**怎樣解題**。台北：九章出版社。

二、英文部分

- Borba M. C. (1994). *High School Students' Mathematical Problem Posing: An Exploratory Study in the Classroom*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.
- Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. Philadelphia, PA: The Franklin Press.
- Brown, S. I. & Walter, M. I. (1993). *Problem posing: Reflection and application*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cai, J. (1998). An investigation of U. S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 10(1), 37-50.
- Cudmore, D. H. & English, L. D. (1998). *Using Intranets to Foster Statistical Problem Posing and Critiquing in Secondary Mathematics Classrooms*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.
- Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *Journal of Creative Behavior*, 16, 97-111.
- English, L. D. (1997). Promoting a problem-posing classroom. *Teaching children Mathematics*, 4(3), 172.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and in formal context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.
- Hashimoto, Y. (1987). *Classroom practices of problem solving in Japanese elementary school*. Proceedings of the U.S. Japan Seminar on Mathematical Problem solving.
- Keil, G. E. (1965). *Writing and solving original problems as a means of improving verbal arithmetic problem solving ability*. Doctoral dissertation.

- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulation: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognition science and mathematics* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers*. Boston: Allyn and Bason.
- Leung, S. S. & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and Creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 5-24
- Mayer, R. E. (1987). *Education psychology: A cognitive approach*. Toronto: Little, Brown and company.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company Press.
- Moses, B., Bjork, E., & Goldenberg, E. P. (1993). Beyond problem solving: problem posing. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds), *Problem posing: Reflections and applications* (pp. 178-188). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nohada, N. (1984). The heart of 'open approach' in mathematics teaching. In T. Kawaguchi (Ed.), *Proceedings of ICIM-JSME regional conference on mathematics education* (pp. 314-318). Tokyo: Japan society of Mathematics Education.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. (2nd ed.). New York: Doubleday.

- Schloemer, C. G. (1994). *Integrating problem posing into instruction in advanced algebra: Feasibility and outcome*. Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematics problem solving*. New York: Academic Press.
- Silver, E. A. & Cai, J. (1993). *Mathematics problem posing and problem solving by middle school students*. Paper presented at AERA. Atlanta, GA.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S.S. & Kenney P.A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in mathematics Education*, 27(3), 293-309.
- Skinner, P. (1990). *What's your problem: Posing and solving mathematical problem, K-2*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Stover, G. B. (1982). *Structural variables affecting mathematical word problem difficulty in sixth graders*. Dissertation Abstracts International, 42, 5050A.
- Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into student's problem posing in school mathematics. In Corwin, R. B. (Ed.), *Talking Mathematics: Supporting Children's Voices*. Portsmouth, NH.
- Winograd, K. (1990). *Writing, solving and sharing original math story problem: Case studies of fifth grade children's cognitive behavior*. Doctoral Dissertation, University of Northern Colorado.

附錄一 第一次解題學習單舉隅

【解題成功】(1-s-23)

今天的題目：
阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，
現在阿土伯還有多少隻鴨子？
把你的做法用算式記下來：


$$\begin{array}{r} 72 \\ -47 \\ \hline 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ +21 \\ \hline 46 \end{array}$$

A: 46 隻鴨子

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$72 - 47 + 21 = (46)$$

【解題失敗—減法錯誤】(1-s-7)

今天的題目：
阿土伯養了 72 隻鴨子，昨天賣掉 47 隻，今天又買進 21 隻，
現在阿土伯還有多少隻鴨子？
把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 72 \\ -47 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ +21 \\ \hline 36 \end{array}$$

A: 36 隻

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$(72 - 47) + 21 = ()$$

附錄二 第二次解題學習單舉隅

【解題成功】(2-s-17)

今天的題目：

5包麵粉售價 285 元，爸爸想買 7 包麵粉，需要付多少元？
 把你的做法用算式記下來：

$$(285 \div 5) \times 7 = 399$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 285} \\ \underline{25} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 59 \\ \times 7 \\ \hline 399 \end{array}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$(285 \div 5) \times 7 = 399 \text{ A: } 399 \text{ 元}$$

【解題失敗—除法錯誤】(2-s-34)

今天的題目：

5包麵粉售價 285 元，爸爸想買 7 包麵粉，需要付多少元？
 把你的做法用算式記下來：

$$285 \div 5 \times 7 = 417$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 5 \overline{) 285} \\ \underline{25} \\ 45 \\ \underline{45} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 59 \\ \times 7 \\ \hline 417 \end{array}$$

A: 417 元

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$285 \div 5 \times 7 = ()$$

附錄三 第三次解題學習單舉隅

【解題成功】(3-s-22)

今天的題目：

貼紙每張 8 元，簽字筆每枝 35 元，阿強買 12 張貼紙和 1 枝簽字筆，共要付多少元？

把你的做法用算式記下來：

$$12 \times 8 + 35 = 131$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \end{array} \quad \begin{array}{r} 96 \\ + 35 \\ \hline 131 \end{array}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$12 \times 8 + 35 = (131)$$

【解題失敗—解題策略錯誤】(3-s-3)

今天的題目：

貼紙每張 8 元，簽字筆每枝 35 元，阿強買 12 張貼紙和 1 枝簽字筆，共要付多少元？

把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \end{array} \quad \begin{array}{r} 96 \\ + 1 \\ \hline 97 \end{array}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$12 \times 8 + 1 = (\quad)$$

附錄四 第四次解題學習單舉隅

【解題成功】(4-s-35)

今天的題目：
 蛙鏡 3 副 189 元，小琪有 70 元，夠不夠買 1 副蛙鏡？夠的話，還剩多少元？不夠的話，還差多少元？
 把你的做法用算式記下來

$$\begin{array}{r} 63 \\ 3 \overline{)189} \\ \underline{18} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 \\ -63 \\ \hline 7 \end{array}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：
 $(189 \div 3) - 70 = 7$

【解題失敗—減法錯誤】(4-s-33)

今天的題目：
 蛙鏡 3 副 189 元，小琪有 70 元，夠不夠買 1 副蛙鏡？夠的話，還剩多少元？不夠的話，還差多少元？
 把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 63 \\ 3 \overline{)189} \\ \underline{18} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 \\ -63 \\ \hline 13 \end{array}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：
 $189 \div 3 - 70$ A 夠 13 元

附錄五 第五次解題學習單舉隅

【解題成功】(5-s-31)

今天的題目：
 阿星和 3 位同學去逛夜市時，合買 1 個籃球，價錢是 324 元，由大家平均分攤，阿星自己又買 8 個哈姆太郎玩偶，每個價錢是 17 元，請問阿星總共花了多少元？
 把你的做法用算式記下來：

$(1+3) \div 4 = 1$
 $1 \times 324 + (8 \times 17) = 217$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +3 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 4 \overline{) 324} \\ \underline{32} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \\ + 81 \\ \hline 217 \end{array}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$(3+1) \div 4 = 1$
 $1 \times 324 + (8 \times 17) = 217$

A: 217元
H: 217元

【解題失敗—解題策略錯誤】(5-s-24)

今天的題目：
 阿星和 3 位同學去逛夜市時，合買 1 個籃球，價錢是 324 元，由大家平均分攤，阿星自己又買 8 個哈姆太郎玩偶，每個價錢是 17 元，請問阿星總共花了多少元？
 把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 108 \\ 3 \overline{) 324} \\ \underline{3} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \\ + 81 \\ \hline 217 \end{array}$$

A: 244元

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$324 \div 3 + 17 \times 8 = ?$

附錄六 第六次解題學習單舉隅

【解題成功】(6-s-11)

今天的題目：

1 個鹹蛋超人賣 280 元，阿福想買 4 個，可是~~小偉~~^{阿福}現在只有 400 元，所以阿福計畫每天存 45 元，請問需要存幾天錢才夠？
把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 4 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ - 400 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 45 \overline{) 720} \\ \underline{45} \\ 270 \\ \underline{270} \\ 0 \end{array}$$

16 天

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$(280 \times 4 - 400) \div 45 = 16$$

【解題失敗—解題策略錯誤】(6-s-14)

今天的題目：

1 個鹹蛋超人賣 280 元，阿福想買 4 個，可是~~小偉~~^{阿福}現在只有 400 元，所以阿福計畫每天存 45 元，請問需要存幾天錢才夠？
把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 4 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \overline{) 1120} \\ \underline{800} \\ 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 45 \overline{) 720} \\ \underline{45} \\ 270 \\ \underline{270} \\ 0 \end{array}$$

16 天

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$280 \times 4 \div 400 = 45 = (17 \div 15)$$

附錄七 第七次解題學習單舉隅

【解題成功】(7-s-12)

今天的題目：

A 圖形是正方形，邊長是 10 公分，B 圖是長方形，長是 14 公分，寬是 8 公分，A、B 二個的面積共是多少平方公分？單位：公分

$$\begin{array}{c} 10 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 8 \\ 14 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array}$$

把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \times 14 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ + 112 \\ \hline 212 \end{array} \quad A=212 \text{ 平方公分}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$10 \times 10 + 8 \times 14 = (212)$$

【解題失敗—解題策略錯誤】(7-s-7)

今天的題目：

A 圖形是正方形，邊長是 10 公分，B 圖是長方形，長是 14 公分，寬是 8 公分，A、B 二個的面積共是多少平方公分？單位：公分

$$\begin{array}{c} 10 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 8 \\ 14 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array}$$

把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 4 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times 2 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \times 2 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ + 28 \\ + 16 \\ \hline 84 \end{array} \quad A:84 \text{ 公分}$$

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$10 \times 4 + 14 \times 2 + 8 \times 2 = \square$$

附錄八 第八次解題學習單舉隅

【解題成功】(8-s-1)

今天的題目：

甲、乙二圖面積共是 504 平方公分，甲是正方形，邊長是 12 公分，乙是長方形，寬是 12 公分，求乙的長是多少公分？
單位：公分

12	甲	乙
	12	?

把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 24 \\ 120 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 504 \\ - 144 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 12 \overline{) 360} \\ \underline{360} \\ 0 \end{array}$$

A: 30 公分

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

$$(504 - 12 \times 12) \div 12 = 30$$

【解題失敗—解題策略錯誤】(8-s-36)

今天的題目：

甲、乙二圖面積共是 504 平方公分，甲是正方形，邊長是 12 公分，乙是長方形，寬是 12 公分，求乙的長是多少公分？
單位：公分

12	甲	乙
	12	?

把你的做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 36 \overline{) 504} \\ \underline{36} \\ 144 \\ \underline{144} \\ 0 \end{array}$$

A: 14 公分

請把你上面解題所用到的算式寫成一個算式填充題：

(12 × 12) ÷ 36 = 504 × 12 = 4

策略錯誤

附錄九 第一次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(1-p-30)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

歹徒今天有 1200 罐毒品，賣了 1100 罐，又去買 10000 罐，請問歹徒現在有幾罐

我會把做法用算式記下來：

$$(1200 - 1100) + 10000 = 10100$$

$\begin{array}{r} 1200 \\ -1100 \\ \hline 100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10000 \\ +100 \\ \hline 10100 \end{array}$	A: 10100 罐
--	--	------------

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—數字抄錯】(1-p-29)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

友友買了 70 包海洛因，昨天賣掉 29 包，今天又買了 26 包，現在友友還多少包海洛因？

我會把做法用算式記下來：

$\begin{array}{r} 70 \\ -29 \\ \hline 41 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49 \\ +26 \\ \hline 75 \end{array}$	A: 75 包海洛因
---	---	------------

附錄十 第二次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(2-p-16)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

5包李子100元爸爸和媽和力買了50包(送人的)那麼爸爸和媽媽各要付多少元？

視為平均分擔

我會把做法用算式記下來：

$$100 \div 5 \times 50 = 2 = 500$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 5 \overline{)100} \\ \underline{100} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \times 50 \\ \hline 1000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5.0 \\ 2 \overline{)1000} \\ \underline{1000} \\ 0 \end{array}$$

A. 爸：500元
媽：500元

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—數字除不盡】(2-p-29)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

70包米粉的售價是1891元，爸爸、媽媽都想要5包米粉，共是需要多少元呢？

我會把做法用算式記下來：

$$(1891 \div 70) \times 5 \times 5 = \square$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 70 \overline{)1891} \\ \underline{140} \\ 491 \\ \underline{420} \\ 71 \\ \underline{70} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ + \frac{1}{30} \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ \times 5 \\ \hline 150 \\ \times 5 \\ \hline 750 \end{array}$$

A: 750元

附錄十一 第三次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(3-p-15)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

糖果每箱有五盒每盒 8 顆
爸爸買了 2 箱分給 2 個小孩
每人得幾顆？

2

我會把做法用算式記下來：

$$(8 \times 5 \times 2) \div 2 = (40)$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 5 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 2 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \times 2 \\ \hline 160 \end{array}$$

10

△: 40 個

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—計算未完成】(3-p-4)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

整版每張 5 元，鉛筆盒每盒 30 元，小珍買了
150 張整版和 35 盒鉛筆盒共要付多少元？

我會把做法用算式記下來：

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 5 \\ \hline 750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 30 \\ \hline 100 \\ 105 \\ \hline 1050 \end{array}$$

$$150 \times 5 + 35 \times 30 = (1050)$$

少做第三個算式

附錄十二 第四次擬題學習單舉隅

買 10 張才有減價 500 元，買 2 張仍要依原價。

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(4-p-12)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

R0 月費卡 10 張 3000 元有優價 500 元，blue 身上有 548 元，他要買 2 張，請問夠不夠？夠的話還剩多少元？不夠的話還差多少元？

我會把做法用算式記下來：

$$(3000 + 500) \div 10 \times 2 - 548 = (152)$$

$$\begin{array}{r} 3000 \\ - 500 \\ \hline 3500 \end{array} \quad \begin{array}{r} 350 \\ \times 2 \\ \hline 700 \end{array} \quad \begin{array}{r} 700 \\ - 548 \\ \hline 152 \end{array} \quad A: \text{① 不夠 ② 152 元}$$

筆誤成減號，仍視為成功。

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—解題策略錯誤】(4-p-35)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

買 3 隻娃娃 369 元，妹妹有 300 元，夠不夠買？不夠的話還差幾元？

我會把做法用算式記下來：

$$3 \overline{) 369} \quad \begin{array}{r} 369 \\ - 300 \\ \hline 69 \end{array} \quad 369 \div 3 = 300 = 69$$

A: ① 夠 ② 69 元

附錄十三 第五次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(5-p-26)

題目是寫
5 瓶，不是
8 瓶。

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：
麥香奶茶和 5 瓶 輕鬆小品(咖啡口味)去遊樂園玩，買門票花了 600 元，平均分攤後，麥香奶茶跑去買了六包爆米花，一包 500 元，還剩下 5000 元，請問麥香奶茶出門帶多少錢？

我會把做法用一個算式填充題記下來：

$$600 \div 6 + 500 \times 6 + 5000 = (8100)$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 6 \overline{)600} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 500 \\ \times 6 \\ \hline 3000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3000 \\ + 100 \\ \hline 3100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3100 \\ + 5000 \\ \hline 8100 \end{array} \quad A=8100 \text{元}$$

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗】(5-p-9)

學生表示題
意，是每人
各有 2000
元。

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：
我和四位朋友去逛夜市，我們有萬元，每人買 1 本筆記簿 500 和 10 枝鉛筆 50 元每枝，還有鉛筆盒 25 元，每個人還剩多少元？

我會把做法用一個算式填充題記下來：

$$10000 \div 5 - 1250 = 1740$$

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 5 \overline{)10000} \\ \underline{10} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2000 \\ - 1250 \\ \hline 750 \end{array} \quad A=1740 \text{元}$$

附錄十四 第六次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(6-p-32)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：一束鮮花要 800 元，小尹想買 4 束鮮花，可是現在小尹只有 200 元，所以小尹計畫每天存 20 元，請問需要存幾天錢才夠？

我會把做法用一個算式填充題記下來：

$$\begin{array}{r} 800 \\ \times 4 \\ \hline 3200 \end{array} \quad (800 \times 4 - 200) \div 20 = (3200 - 200) \div 20 = 150$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ 20 \overline{) 3000} \\ \underline{200} \\ 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array} \quad A: 150 \text{天}$$

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—解題策略錯誤】(6-p-27)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：一件洋裝 560 元，姊姊原來有 1000 元，但是買了 CD 花了 360 元和買文具花掉 100 元，當她看到洋裝時，便開始存錢，一天會存 60 元，要存幾天？

我會把做法用一個算式填充題記下來：

$$1000 - (360 + 100) \div 60 = (940) \div 60 = 15 \text{ 天}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ + 100 \\ \hline 460 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1000 \\ - 460 \\ \hline 540 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 60 \overline{) 540} \\ \underline{540} \\ 0 \end{array} \quad A: 9 \text{天}$$

附錄十五 第七次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(7-p-28)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

A 是梯形，上底是 3 公分，下底是 5 公分，高是 2 公分，
 B 是圓形半徑是 5 公分 (圓率 3)，單位 cm，
 二個圖形相差多少平方公分？



我會把做法用一個算式填充題記下來： $5 \times 5 \times 3 - (3+5) \times 2 \div 2 = (?)$

$(3+5) \times 2 \div 2 = 8$ $75 - 8 = 67$
 $5 \times 5 \times 3 = 75$

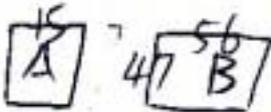
A: 67 公分

單位寫錯，仍視為成功。

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—乘法錯誤】(7-p-24)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：

A 是正方形，邊長是 15 公分，B 是長方形，長是 56 公分，
 寬是 47 公分二個圖形總共多少公分？



A: 3057 公分

我會把做法用一個算式填充題記下來： $(15 \times 15) + (56 \times 47) = ?$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 150 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 47 \\ \hline 392 \\ 2240 \\ \hline 2632 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2832 \\ + 225 \\ \hline 3057 \end{array}$$

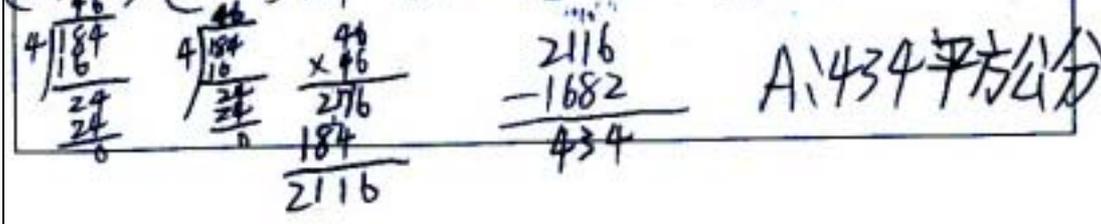
附錄十六 第八次擬題學習單舉隅

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題成功】(8-p-5)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：
 有四個一樣的正方形，每一個的周長是184公分，全部正方形合起來的面積是多少平方公分，在和一個面積是1682平方公分的長方形，求二個圖形面積相差多少？



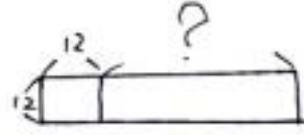
我會把做法用一個算式填充題式記下來：
 $(184 \div 4) \times (184 \div 4) \times 4 - 1682 = (434)$



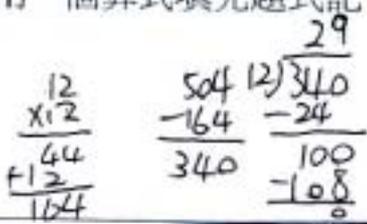
A: 434平方公分

【第 5 類：題目可行，資料適中】【解題失敗—乘法錯誤】(8-p-19)

我做完前一個問題後，我可以想出另一個題目：
 H.P圖面積是504平方公分，H是正方形邊長是2公分，P是長方形寬是12公分，求P的長是多少？



我會把做法用一個算式填充題式記下來：



A: 29

附錄十七 學習日記舉隅一

(p-m-15)

今天數學課的活動，我覺得： 這堂課很好玩，因為老師用了 別的方法上課，使得課程不會無聊。
今天的數學課，我有學習到： 這堂課學到了很多算式， 也使我更了解數學的重要性， 也能知道數學的用法了。知道什麼時候 該用什麼算式做答，因為這樣才是數學真正意義。 學

(1-m-16)

今天數學課的活動，我覺得： 很好玩，我看到很多奇怪又很誇張又有趣的 題目非常好像我希望數學課時可以用這種方法來教我們。
今天的數學課，我有學習到： 要注意看題目，還可以學會自問自答的樂趣學會 更多數學的知識。

(2-m-28)

今天數學課的活動，我覺得： 今天的數學課，非常非常的有趣，好玩，還可 以大家一起討論。
今天的數學課，我有學習到： 今天我學到，很多很多的題目出的方式和算題 目的方式。

附錄十八 學習日記舉隅二

(3-m-14)

今天數學課的活動，我覺得：非常好玩，同學還出的很有趣，像小新去偷媽媽私房錢，非常的 不錯好玩有趣了。☺☺
今天的數學課，我有學習到：出題目要合理，像有些人亂 出題目真讓人傷腦筋，如果不合理的話， 就算不出來。

(4-m-11)

今天數學課的活動，我覺得：我學到了很多題目，有些題 目很有趣，可以從數學中找到許多奧秘 數學課也變得有趣多了。
今天的數學課，我有學習到：許多出題所題材，也有好玩 的題目，現在馬上就可以解題了，希望 還有題目。

(5-m-35)

今天數學課的活動，我覺得： 最近老師常常給我們出題目，讓我們學到 怎麼列算式還可以檢查題目有沒有出錯。
今天的數學課，我有學習到： 出題目完還要馬驗算算式有算式或是題目有沒有出問題 或是題目的答案算錯。

附錄十九 學習日記舉隅三

(6-m-32)

今天數學課的活動，我覺得：很好玩 很有趣，不會像別班一樣單純，今天數學課的活動很好玩，希望六年級也能像今天一樣有趣的上課。
今天的數學課，我有學習到：今天的數學課我有學習到「四則運算」，我也把今天的數學課當復習，也讓我的數學能更上一層樓，比別人好！

(7-m-29)

今天數學課的活動，我覺得： 非常棒很好是一個考驗您會不會自己算自己出而可以幫且為您運算進步。
今天的數學課，我有學習到： 如何自己考馬會自己算出白算而幫且力自運算有沒有進步呢？

(8-m-36)

今天數學課的活動，我覺得： 非常好玩因為可以讓每位同學上台寫字，學習到了很多不同的做法了解更多的不同。
今天的數學課，我有學習到： 很多不同的方法比如說：出一個題目數字非常大。題目出了太誇張和離譜。