



國立中山大學 教育研究所

碩士論文

國小一般智能資優資源班新生數學解題歷程之分析

研究生：黃家杰撰

指導教授：梁淑坤博士

中華民國 九十三年 六月

# 國小一般智能資優資源班新生數學解題歷程之分析

黃家杰

國立中山大學教育研究所

## 摘 要

本研究透過 Schoenfeld 數學解題歷程，分析國小一般智能資優生數學解題歷程、解題策略、及情意特質，再提供資優班與普通班教師具體的教學建議。六位參與者為高雄市某國小三年級表達能力較佳的資優生。以專家效度方式篩選出四題非例行性數學問題，再讓學生以放聲思考的方式進行數學解題，並採專家信度進行原案分析。

研究結果發現，第一，資優生數學解題大都符合解題歷程六階段，其中四位呈現較多歷程階段比較會解題；更有一位在各題解題過程皆無驗證階段，答對二題；還有一位則較少出現分析、計畫、探討、與驗證階段，僅答對一題。第二，資優生的解題策略具多元性且靈活，資優生在各題解題過程中靈活運用抽象表徵、繪圖表徵、逆推、替代、及嘗試錯誤等策略，來輔助瞭解及探索題意完成解題。第三，資優生的情意特質均具正向態度。六位解題者均具毅力及堅持態度；另外，有四位對數學感到有興趣；有四位對自己具有信心。這些正向態度的情意特質符合 Sternberg 的創造力特質與 Krutetskii 的數學天才特質。

教學建議方面，雖然六位學生皆為資優生，但並未所有的一般智

能資優生其探討、計畫、與驗證等後設認知都具備。所以，建議資優班教師，可利用數學來訓練學生探討、計畫與驗證等後設認知的能力；善用團體討論的方式，讓學生獲得更多的解題策略；普通班教師可利用資優生的解題思考特質，塑造同儕相互學習的機會與空間。

**關鍵字：**一般智能資優生、解題歷程、解題策略、情意特質



An analysis of Mathematics Problem-solving Processes of Gifted  
Primary School Children with General Intelligent Ability

Huang Chia-Chieh

Graduate Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Abstract

The purpose of this research is to use Schoenfeld's mathematics problem-solving model to analyze processes, strategies, and affective characteristics of children in a gifted primary program, and then, to propose concrete suggestions for gifted class and general class teachers. Participants were six third-grade gifted children who were great in articulation, and enrolled in one primary school in Kaohsiung. The investigator analyzed think-aloud protocols of them who solved four non-routine problems selected by several expert teachers.

The findings of this study were three. First, all six gifted students' thought processes mostly conformed to Schoenfeld's problem-solving model, though with various differences by individuals, and by problems. One of them provided two correct answers, having no verification stage in all problems. And one only provided one correct answer, had less analysis,

exploration, design, and verification stage in solving all problems. Second, children exhibited diversified and flexible strategies. They used representing, drawing figures, working backward, introducing auxiliary element, and attempting mistakes to solve four non-routine mathematical problems. Last, the affective characteristics of students were positive. They were patient and perseverant and showed personal mathematics curiosity, excitement, and confidence, which were given as creative characteristics by Sternberg, and as mathematical talent or characteristics by Krutetskii.

The investigator concluded that not all gifted students possessed meta-cognition ability: including exploration, design, and verification. The gifted class teachers could use non-routine mathematics problems to discipline students' meta-cognitive ability, including exploration, design, and verification, and encourage them to generate more solving strategies by group discussion in class. Finally, the general class teachers could adopt problem-solving characteristics of gifted students as materials for gifted students and general students to learn together in class.

**Keywords: gifted children with general intelligent ability, problem-solving processes, problem-solving strategies, affective characteristics**

# 目 錄

<b>第一章 緒論</b>	<b>1</b>
第一節 研究背景與動機	1
第二節 研究目的與待答問題	8
第三節 名詞釋意	9
<b>第二章 文獻探討</b>	<b>11</b>
第一節 數學解題的意義	12
第二節 解題歷程與相關研究	15
第三節 解題策略與相關研究	34
第四節 資優生解題特質與相關研究	38
<b>第三章 研究方法與設計</b>	<b>43</b>
第一節 研究方法	43
第二節 研究架構	45
第三節 研究對象	48
第四節 研究工具	49
第五節 資料蒐集與分析	55
第六節 研究步驟與流程	58

<b>第四章</b>	<b>研究結果與分析</b>	<b>60</b>
第一節	一般智能資優生數學解題歷程分析	60
第二節	一般智能資優生數學解題策略之分析	102
第三節	一般智能資優生數學解題之情意特質分析	108
<b>第五章</b>	<b>結論與建議</b>	<b>113</b>
第一節	有關資優生解題的發現	113
第二節	資優生教學與研究方向建議	115
<b>參考書目</b>		<b>118</b>
一、	中文部分	118
二、	英文部分	121
<b>附錄</b>		<b>127</b>
附錄一	專家篩選非例行性數學題目題本	127
附錄二	正式研究之情境佈題題本	129
附錄三	逐字稿	131

## 表目次

表 1-1	數學解題相關研究比較	7
表 2-1	經常使用的探索法(Heuristics)	20
表 2-2	數學解題歷程理論比較表	30
表 2-3	數學解題策略	37
表 2-4	資優生正向情意特質	42
表 2-5	正負向情意特質	42
表 3-1	Schoenfeld 六大階段及其各階段之任務分析表	45
表 3-2	專家勾選非例行性問題之數學能力分析表	50
表 3-3	專家選題結果分析表	50
表 3-4	情境問題分析表	54
表 3-5	研究流程與時間表	59
表 4-1	解題歷程階段統計表	97
表 4-2	解題者在各題使用的解題策略	102
表 4-3	六位解題者使用的解題策略	107
表 4-4	六位解題者的情意特質	108



## 圖目次

圖 2-1	Schoenfeld 解題基模大綱	19
圖 2-2	數學解題模式的基模表徵	25
圖 3-1	研究架構	47
圖 3-2	S01 第二題「直式加法題」解題歷程與時間量表	57
圖 4-1	小姮解題歷程圖	62
圖 4-2	小茹解題歷程圖	68
圖 4-3	小茹蝸牛題繪圖表徵	70
圖 4-4	小珍解題歷程圖	75
圖 4-5	小迅解題歷程圖	80
圖 4-6	小揚解題歷程圖	85
圖 4-7	小涂蝸牛題繪圖表徵	90
圖 4-8	小涂解題歷程圖	91
圖 4-9	蝸牛題解題歷程圖	98
圖 4-10	直式加法題解題歷程圖	99
圖 4-11	月曆題題解題歷程圖	100
圖 4-12	九宮格題題解題歷程圖	101

# 第一章 緒論

本章共分三節，分別為「研究背景與動機」、「研究目的與待答問題」與「名詞釋意」。詳述本研究之研究動機與目的，以及針對「一般智能資優生」與「數學解題」下操作定義。

## 第一節 研究背景與動機

我國資優教育自 1973 年實驗計畫至今，歷經三十年。吳武典（2003）提到特殊教育基本理念在因材施教，注重個別化教學，無論是能力分班、分化性課程或加速，均可提高資優教育這一類「特殊教育需求」，學生挑戰性經驗或充實的機會，以盡展所能。我國特殊教育法（1997）第一條開宗明義說明「為使身心障礙及資賦優異之國民，均有接受適性教育之權利，充分發展身心潛能，培養健全人格，增進服務社會能力，特制定本法。」資優教育以適性教育為出發點，以學生為中心，重視因材施教與個別化教育的精神，在我國特殊教育法（1984，1997）中明確地給予資優教育政策與制度的法源依據。

依據特殊教育法，資賦優異可區分為一般智能、學術性向、藝術才能、創造能力、領導能力及其他特殊才能等方面。現今國小階段大都由以往集中式的數理資優班轉為招收一般智能（general

intelligent ability) 資優資源班，採分散式的模式來進行教學，而不再以「數理」資優生為主。以高雄市為例，根據高雄市 2003 年特殊教育通報系統統計資料顯示，一共成立八十九班一般智能資優資源班，約 2079 位學生接受該教育方案的服務。所謂的一般智能資優生 (gifted student) 依據教育部頒鑑定標準第十四條規定是指在記憶、理解、分析、綜合、推理、評鑑等方面較同年齡具有卓越潛能或傑出表現者，其智力或綜合性向測驗得分在平均數正一點五個標準差或百分等級九十三以上者。在國小階段以發展資優生潛能，拓展資優生在應用、分析、綜合、評鑑等方面高層次的思考能力訓練，而不應僅停留於知識記憶與理解的課程訓練。

強調以個別化與高層次思考能力訓練的資優教育觀點，我們發現在國內外資優教育文獻 (Gallagher, 1985; 毛連溫, 2001) 都強調學生問題解決 (problem-solving) 能力的培養，它是一種思考能力的訓練。因此，有學者建議採行問題解決的評量，作為鑑定的依據。如 Reid 和 Romanoff (1997) 提出要確認較小的資優生我們應採取問題解決的評量 (problem-solving assessment)，這樣的評量透過創造力、分析、實踐 (practical) 問題解決等能力的活動，去測量出語言 (linguistic)、邏輯數學 (logical-mathematical)、特殊智能 (spatial intelligences) 等方面的能力，不同於傳統採行標準智

力測驗及成就測驗來鑑定資優生。Reid 和 Romanoff 提出這樣的論點乃是強調資優生在思考能力上的鑑定。

在資優教育教學歷程當中，「數學」也用來訓練學生問題解決與發現問題的能力（Gallagher, 1985）。美國學者 Gallagher（1985）提到「數學不只是計算、測量、運用公式（manipulating formulas），而且就本質來說它是思考的方式—演繹（deductive）及歸納（inductive）的推理。」例如，香港特別行政區教育統籌局（2003）為資優生設計數學教育的理念中提到：「數學是一種思考方式。…數學教育的目的旨在培養學生構思、探究、推理、傳意、建立及解決問題。…教師設計一些具挑戰性的活動，讓能力高的學生去探究及發現一些數學規律，以擴展他們的知識領域及思考能力。施教時，教師可因應情況在適當時機鼓勵學生對問題提出多種不同的解法，要對學習過程、解題方法與答案同樣重視，並從解題的過程中，讓學生的高層次思維能力得以提升。」我們可以看出美國與華人地區（如香港）在資優教育方面，都應用「數學」來訓練學生的思考能力，發現數學的規律性，養成學生去構思、探究、推理、及解決問題的能力。

數學大師 Polya（1945）強調「人是解題（problem-solving）的動物」。數學解題的相關研究，深受到在 1975 年五月於 Georgia 大學

成立的「數學解題教育研究工作坊」(Research Workshop on Problem Solving in Mathematics Education)所影響(Lester, 1994)。Lester (1994)提到「大部分的數學教育者同意學生的解題能力發展是數學主要的教學目標。」

美國全國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)在所訂定的學校數學教育的原則與標準(The Principles and Standards for School Mathematics)中強調以幫助學生發展精密(sophistication)數學解題(problem-solving)歷程為目標,如表述(representation)、數學推理(mathematical reasoning)、抽象化(abstraction)及類化(generalization)等能力是數學能力的重要因子。

由於資優生的培育重視個別化與高層思考能力的訓練,在國小各領域中,「數學」是適合培育資優生該能力的領域。在國外,Greenes (1981)曾指出數學資優生與非數學資優生之差異在於數學資優生具有簡化(formulate)問題的能力、活化(flexibility)資料的管理能力、抽象符號化(abstract)及類化(generalize)數學概念(concepts)的能力。也有的實驗研究證實學前資優與非資優學習者最大的差別在於類化能力(generalization)(Kanevsky, 1990)。蘇

俄學者 Krutetskii (1976)以臨床晤談法針對 19 位不同數學能力的學生研究發現，數學能力強的學生 (gifted)，在形成數學類化 (generalization) 又快又廣，並且在解題前能分辨出問題的結構；一般的學生 (average) 總是無法覺察數學問題的要素；較差的學生 (incapable) 則完全無法完成這項任務 (task)。Sriraman (2003) 針對九位九年級新生進行數學資優生與非資優生之數學解題歷程與數學概念形成之差異性比較。

在國內，孫達剛 (1992) 以雄中、雄女兩校學生為研究對象，發現數學高成就組學生的解題風格十分接近 Polya 所認為的解題四階段。謝淡宜 (1998, 1999) 針對五年級 (研究對象共 23 名) 及四年級 (研究對象共 44 名) 資優生與普通生 (非資優生) 在數學解題歷程的比較，其藉由放聲思考法 (thinking aloud) 來了解學生的解題歷程，該研究之資優生與普通生 (非資優生) 的區別乃針對學生的數學總平均成績及瑞文氏智力測驗，並進行學業性向測驗綜合判斷出所謂的數學資優生與普通生，其資料分析方式是依使用的策略、有效性及答對率以不同層次解題品質分出十個等級標準，之後，再依該十等級給予學生解題情形分類，並作各等級的次數統計。劉貞宜 (2001) 以建中三位不同能力數學資優生的解題歷程作分析，主要探討解題之認知特質、情意特質與社會資源之利用情形，執行方式採取讓學生當

場無法解完的題目帶回家繼續完成，並要作解題日誌，以了解回家後是否尋求資源及情緒狀況，事後進行面談。

由上述數學解題相關研究（孫達剛，1992；謝淡宜，1998，1999；劉貞宜，2001；Sriraman, 2003）發現（表 1-1），研究議題乃針對數學資優（能力佳）與非數學資優生（能力差）的比較，而研究對象大都以高年級以上的學生為對象，未針對中低年級一般智能資優生作過相關研究。另外，許多的研究一再強調「探究解題歷程」，但在其結果分析不是將資料量化就是未深入分析研究對象的解題歷程。本研究則依據 Schoenfeld (1985, 1989)解題歷程的六階段，以質性研究的方法分析學生的解題歷程，以探索學生解題的思考歷程。

本研究針對一般智能資優班作為研究對象，這些學生，是由高雄市經一定程序（團體智力測驗與性向測驗）鑑定出來的國小中年級學生，取樣本之範圍以三年級新生為對象，而非僅以數學單科較強者為對象。在研究方法取質性，試以了解經過鑑定，在「記憶、理解、分析、綜合、推理、評鑑」等方面較同年齡具有卓越潛能或傑出表現的一般智能資優生，其數學解題能力的表現為何？探究資優生在數學的解題歷程、解題策略、及解題歷程中所呈現的情意特質。

本研究主要探究國小資優班新生在數學解題上的表現，有利於未來資優教班教師在規劃從數學解題來訓練國小資優生問題解決思考能力的課程，並讓普通班教師了解資優生在數學解題方面的思考模式，以建議普通教師如何擅用資優生之特質，輔助一般班級的數學教學。

表 1-1 數學解題相關研究比較

研究者	研究題目	研究對象	解題理論
孫達剛(1992)	雄中、雄女學生數學解題之研究	高中生	Polya
謝淡宜(1998)	小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程之比較	五年級	
謝淡宜(1999)	國小數學資優生及普通生「數學解題」歷程之比較(四年級)	四年級	
劉貞宜(2001)	數學資優生的解題歷程分析—以建中三位不同能力的數學資優生為例	高中生	Schoenfeld
Siraman (2003)	Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of four Gifted Students.	九年級 (國中生)	Lester



## 第二節 研究目的與待答問題

### 壹、研究目的

根據上述研究背景與動機，本研究針對高雄市經一定程序鑑定出來國小一般智能資優班新生，在數學解題能力的表現為何？本研究之研究目的如下：

- 一、 探究資優生數學解題歷程 (processes)。
- 二、 探究資優生數學解題的策略 (strategies)。
- 三、 探究資優生在過程中所展現的情意特質 (affective characteristics)。

### 貳、待答問題

本研究採行質性研究的方法探究其如何進行數學解題，分別就歷程、策略及情意特質等方面來分析，所以依據研究目的在資優生的解題歷程中有以下幾項待答問題：

- 一、 資優生的解題的歷程為何？
- 二、 使用哪些解題策略？
- 三、 展現情意特質為何？

### 第三節 名詞釋意

#### 一、國小一般智能資優生 (gifted primary school children with general intelligent ability)

所謂的國小一般智能資優生，是依據教育部頒鑑定標準第十四條規定，係指在記憶、理解、分析、綜合、推理、評鑑等方面較同年齡具有卓越潛能或傑出表現者。這一些資優生，其智力或綜合性向測驗得分在平均數正一點五個標準差或百分等級九十三以上的國小學童。

本研究之一般智能資優生乃是經高雄市九十二學年度一般智能資優生鑑定合格之三年級學生。其在二年級經班級級任老師或家長推薦，參加資賦優異鑑定初選「團體智力測驗」（佔錄取總成績 40%）及複選「綜合性向測驗」（佔錄取總成績 60%），其二項成績加權總合在平均數正 1.5 個標準差以上。

## 二、數學解題 (problem solving)

本研究之數學解題指的就是非例行性問題 (non-routine problem) 的數學解題能力。所謂非例行性問題，就是解題者未曾練習過的問題，或者是曾經練習過，時間已久而全然忘記的問題。由於是非例行性問題，解題者不能直接由題目馬上找到解題的途徑，需應用曾經所學的數學知識或技能，並透過分析、綜合、評鑑等高層次的思考活動，來解決目前新情境的問題。所以，本研究數學解題之非例行性題目包含邏輯推理、數的概念、尋求規律性等數學能力。

## 第二章 文獻探討

美國數學教育強調解題能力，以發展學生的表述、抽象化、邏輯推理、歸納、尋找規律性的數學能力，其是一種思考能力的訓練(NCTM, 2000)。

國內的數學教育也強調以解題為目標，在八二年國小數學課程標準的修訂，將數學視為溝通工具，學生以自己的經驗來建構數學概念，數學可說是「推理」能力的訓練的工具，也就是著重於數學解題能力。而今，九年一貫教育改革強調學生問題解決的能力，黃敏晃(1991)提到「解題(problem solving)就是解決問題。」所以數學解題，可以訓練學生的思考並增進其問題解決的能力。

所謂解題或問題解決，在九年一貫課程綱要中，強調「問題解決，就是運用個人先前已備的經驗、知識、技能和了解，去思索、探索、推理，到新的或不熟悉的情境，去尋求解答的歷程。」(教育部，2000)解題者對他所面臨的問題，可憑其自然的推理能力，先前學過的知識或獲得的能力，或藉此問題之組織安排而加以了解，解題就是解題者如何把自己從困境中解脫出來的過程(黃敏晃，1991)。

本章共分四節，主要根據國內外文獻探究「數學解題的意義」、各專家學者的「解題歷程與相關研究」、「解題策略與相關研究」及「資優生解題特質與相關研究」。

## 第一節 數學解題的意義

美國數學督導協會 (The National Council of Supervisors of Mathematic [NCSM], 1977) 將數學解題界定為「運用個人先前獲得的知識，去解決一個未知或不熟悉問題之歷程。Polya (1945) 認為解決問題就是為了要達到一個被清楚地意識到但又不能立即達到的目標，期間沒有方法被告知，但卻要克服困難，繞過障礙去發現達到此目標的方法。

Lester (1980) 認為數學解題是指「個人面臨一種情境，在此種情境下並沒有算式可以保證解答，個人必須利用所擁有的相關知識或訊息，去獲得問題解答的過程。情境 (situation) 是否成為問題端賴個人對情境反應 (individual' s reactions) 而定。Lester 進一步說明，情境對個人來說若要形成問題的話，則個人必須要(1)覺知這情境 (be aware of the situation) (2)對解決這情境有興趣 (be interested in resolving the situation) (3)不能直接找到解答 (be unable to proceed directly to a solution) (4)有意圖去發現解

答 (to make a deliberate attempt to find a solution)。

Mayer (1985)認為解題就是從已知情境移動到目標情境的過程，一連串心智運作的活動。數學解題就是解題者試圖透過問題空間 (problem space) 去尋求一條路徑。問題陳述轉換成內在心智表徵 (an internal mental representation)，包括給予狀態 (state)、目標狀態 (state)、及允許的操作者及運思者 (allowable operator)。問題空間能建立對主題 (subject) 的問題理解。解題者應用操作者/運思者 (operators) 在問題的狀態 (states)，直到達到目標 (Mayer, 1982)。

美國學者 Kilpatrick (1985)指出「所有的數學都是數學家們在形成問題及解題的過程中創造出來的。曾用以下三個不同觀點來敘述數學解題：

#### 一、 心理學觀點

數學解題常被定義為一個情境，在此情境中某人想要達到某一目標，但直接通往此目標的路徑已經被阻塞了，也就是問題產生了，當然在尋求答案的過程中，需要用到一些數學概念、原理、及方法等，亦即把解題看成達到某種目的而做的一些活動。

## 二、 社會人類學觀點

把一個數學問題當作是老師給學生的一項任務，學生在接受此項任務時與老師所產生的微妙關係，互相猜測對方的心意，即從自我觀點出發來解釋對方的行為。

## 三、 數學及數學教學觀點

將數學問題當作是數學建構的泉源，以及數學教學進行的思考工具，因為所有的數學，都是數學家們在形成問題及解題的過程中創造出來的，所以，數學解題正是讓學生搭起數學鷹架很重要的工具。

綜合以上所述，數學解題就是「個人面臨一個問題情境或困境，利用自己所擁有數學的知識與能力，透過心智運作善用推理、歸納、尋求規律性等能力，將所面臨的問題解決，獲得答案的過程，其過程未必需應用算式始能求得解答」。在此解題觀點，就是將數學視為思考訓練的工具。當然，我們亦可利用數學來了解學生問題解決能力與思考能力的工具，也就是了解學生在解題過程中的思考歷程、如何利用策略、及面臨問題情境到解決問題過程中的特質。

## 第二節 解題歷程與相關研究

本節先後參考 Polya (1945)、Schoenfeld (1985)、Lester (1980) 等學者對解題歷程的論說，最後探討國內外解題歷程研究成果。將本節分為 Polya 的數學解題歷程、Schoenfeld 的數學解題歷程、lester 的數學解題歷程、及數學解題歷程相關研究等四個部分。

### 壹、Polya 的數學解題歷程

Polya (1945) 針對解題歷程提出了四個階段：(1) 了解問題 (understanding the problem) (2) 擬定計畫 (devising a plan) (3) 執行計畫 (carrying out the plan) (4) 回顧 (looking back)。Polya 的解題模式建議透這四解題階段是透過成功解題者所執行 (Lester, 1980)。Polya (1945) 解題歷程四階段說明如下：

#### 一、 了解問題

Polya 認為解題的時候，解題者必須了解問題，其內容包括：

1. 未知數是什麼？已知數 (data) 是什麼？條件是什麼？
2. 是否滿足條件？要確定未知數，條件是否充足？還是不夠？過多？或是矛盾？



3. 畫一個圖，引入適當的符號。

4. 把條件的各部分分開，解題者能否將他們寫下來？

## 二、 擬定計畫

找出資料和未知數間的關係，如果找不到，可能要考慮輔助問題，解題者應該有解決問題的計畫。

1. 解題者以前看過這個問題嗎？或看過形式稍微不同的問題？

2. 解題者知道相關的問題嗎？解題者知道可以派上用場的定理？

3. 注視未知數！嘗試去想一個有相同或類似未知數的熟悉問題。

4. 這裏有一個解題者以前解過的相關問題，解題者能應用它嗎？  
能應用它的結果嗎？能應用它的方法嗎？是否能引入輔助元素？

5. 解題者能重述問題嗎？能用不同的方式來重新敘述它嗎？

6. 如果解題者不能解這個問題，嘗試去先解相關的問題。解題可以想到一個更容易著手的相關問題？一個更普遍的問題？一

個更特殊的問題？一個相類似的問題？解題者能解這個問題的一部分嗎？保留已知條件的一部分，捨去其他部分，這樣對於未知數能確定到什麼程度？它會怎樣的變化？解題者能從已知條件導出有用的結果嗎？能考慮其他已知數去決定未知數？解題者能改變已知數和未知數嗎？如果必要的話兩個都改變，如此新的未知數和已知數會更接近？

7. 解題者使用了所有的已知數嗎？使用了所有的條件嗎？解題者已經考慮過這個問題所涉及的所有概念嗎？

### 三、 執行計畫

執行計畫，檢查每一步驟。解題者能清楚地知道每一步驟都正確嗎？解題者能證明這一步驟是正確的嗎？

### 四、 回顧

1. 解題者能檢驗結果嗎？能檢驗論證嗎？
2. 解題者能用不同方法導出這個結果嗎？能一下子就了解他嗎？
3. 解題者能把這結果或方法應用到別的問題嗎？

## 貳、Schoenfeld 數學解題歷程

Schoenfeld (1985)更進一步把 Polya 四階段解題歷程增加為讀題、分析、探討、擬定計畫、執行、驗證六大階段，可參閱圖 2-1、表 2-1。Schoenfeld (1985)在各階段也提出一些注意的相關問題：

### 一、 讀題

R1：注意到問題的所有條件嗎？

R2：正確了解目標狀態嗎？

R3：是否評估解題者自己現有知識與問題的關係？

### 二、 分析

A1：選擇什麼觀點？

A2：根據問題條件採取行動嗎？

A3：根據問題目標採取行動嗎？

A4：搜尋條件和目標間是否有關聯？

A5：解題者所採取的行動（A1-A5）是否合理？

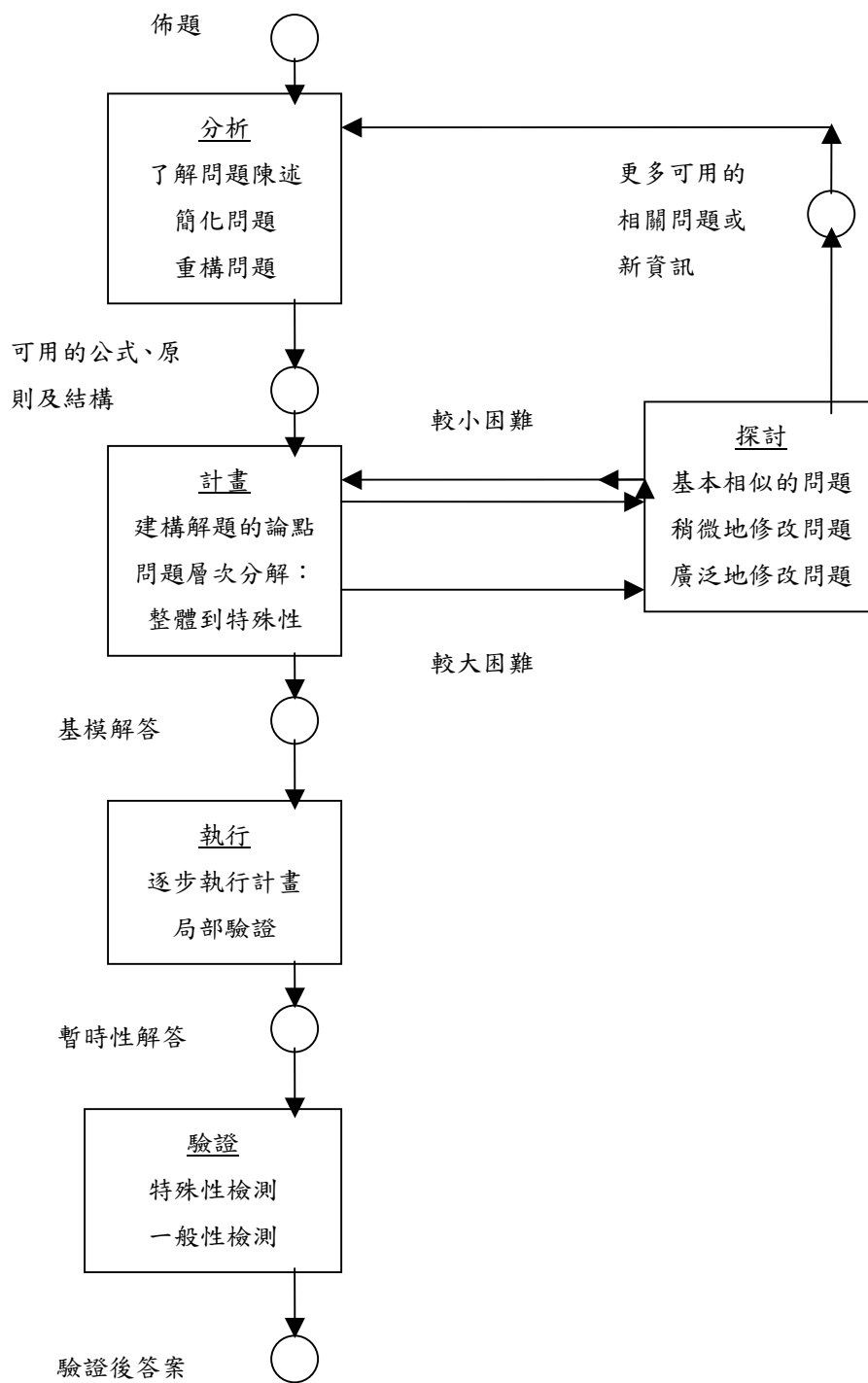


圖 2-1 Schoenfeld 解題基模大綱

資料來源：Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving* (p. 110).  
Orlando, Fl.: Academic Press.

## 表 2-1 經常使用的探索法 (Heuristics)

---

### 分析 (Analysis)

1. 盡所能地畫圖表 (diagram)
2. 檢查 (examine) 特殊案例 (special case)
  - (1) 選擇特殊評估 (value) 去例示 (exemplify) 問題並得到「感覺 (feel)」
  - (2) 檢查案例的限制去拓展可能性的範圍
  - (3) 設定整數參數為 1, 2, 3...，有順序性的，歸納成一個題組 (pattern)
3. 設法簡化問題
  - (1) 開拓對稱性 (symmetry)
  - (2) 「不要失去普遍性 (generality)」的論據 (arguments)

### 探討 (Exploration)

1. 考慮到同等的 (equivalent) 問題
  - (1) 藉由同等的問題替代情境
  - (2) 再次結合問題的要素用不同的方式
  - (3) 導入輔助的要素
  - (4) 再簡潔的陳述 (re-formulate) 問題
    - a. 改變看法 (perspective) 或標記符號 (notation)
    - b. 藉由矛盾 (contradiction) 與負面 (contrapositive) 來思考衝突爭論 (arguments)
    - c. 假設你有答案並決定他的性質 (properties)
2. 考慮稍微修改問題
  - (1) 選擇次目標
  - (2) 鬆解 (relax) 情境然後設法重新加以利用 (re-impose)
  - (3) 分解問題範圍並一步接著一步來處理
3. 考慮廣度的修改問題
  - (1) 建構些許變項的類似問題
  - (2) 掌握全部僅以其中一變項去決定變項的影響
  - (3) 設法開拓任何有關問題的相似性 (similar)
    - a. 形式 (form)
    - b. 已知 (givens)
    - c. 結論 (conclusions)

記住：當處理較簡單有相關的問題，設法拓展答案的結果 (result) 與方法 (method)。

### 驗證答案

1. 你的答案有通過特殊 (specific) 的檢測嗎？
  - (1) 有使用所有相關的 (pertinent) 資料嗎？
  - (2) 有合乎合理的檢查或預測 (predictions)？
  - (3) 經得起對稱 (symmetry)、容積分析 (dimension analysis)、尺規 (scaling) 的檢測？
2. 能通過普遍性 (general) 的檢測？
  - (1) 能被獲得差異性嗎？
  - (2) 能被特殊案例證實？
  - (3) 能被處於 (be reduced) 已知的結果？
  - (4) 能被使用在你所知的事情？

---

資料來源：Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving* (p.109). Orlando, Fl.: Academic Press.

### 三、 探討

E1：本階段是問題的條件導向？或目標導向？

E2：所採取的行動有方向或重點？

E3：有無監控行為？監控行為的有無對答案的結果有何影響？

E4：解題者所採取的行動（E1-E3）是否合理？

### 四、 計畫

P1：是否有計畫行為？

P2：計畫與解題間有關係嗎？是否有良好的架構？

P3：解題者是否評估計畫的相關性及結構性？

### 五、 執行

I1：執行是否依計畫有系統的進行？

I2：是否在局部或整體層次評估執行？

I3：答案的評估之有無對結果的影響如何？

## 六、 驗證

V1：是否重新檢查計算過程？

V2：有無驗證答案？如何驗證？

V3：是否對計算過程或對結果的信心程度作評估？

Schoenfeld (1985)除了提及以上六個階段之外，更提出數學解題表現具備的知識與行為，如資源、啟發策略、控制力與信念信系統，說明如下：

### 一、 資源 (resource)：

就是個人所擁有的數學知識，能夠處理手邊的問題。包括：解題領域的直覺 (intuitions) 與非正式的知識；已知的事實；運算的程序 (algorithmic procedures)；例行性非運算程序 ( “Routine” non-algorithmic procedures)；及對解題領域公認規則的了解或命題知識。

### 二、 啟發策略 (heuristics)：

就是用來解不熟悉或非標準問題的策略與技巧；也就是有效率的

解題主要法則，包括利用畫圖引入適當的符號 (notation)；尋找相關問題；重構問題 (reformulating problem)；逆推 (working backwards)；及檢測與查證歷程 (testing and verification procedures)。

### 三、 控制力 (control)：

就是有關於資源與策略的選擇與執行全面性的決斷力 (global decisions)，包括計畫；監控和評估；決策 (decision-making)；及有意識的後設認知行動。

### 四、 信念系統 (belief systems)：

就是個人數學世界觀點，也就是一連串的个人行為決定，包括對自己、環境、主題、及數學的觀點。

## 參、Lester 數學解題歷程

Lester (1980)以(1)問題的覺察 (problem awareness)；(2)問題理解 (problem comprehension)；(3)目標分析 (goal analysis)；(4)計劃的發展 (plan development)；(5)計畫的執行 (plan implementation)；(6)程序和解答的評估 (procedures and solution



evaluation) 等六階段來描述數學解題。Lester 強調這六個階段是不同但卻互相關聯的 (distinct but interrelated)，圖 2-2 說明每階段之間相關性。依據 Lester 的解題六階段，說明如下：

### 第一階段：問題的覺察

情境展示給學生，在這情境被當作問題前，學生必須了解困難的存在，這情境並非立即且快速可解決的。這樣的認知通常從最初的失敗到預達到的成功目標之間的感受。第二個覺察階段的要素，學生有意願去解決這個問題。如果學生沒有意識到困難或沒意願去解決問題，這整個歷程是無意義的。

### 第二階段：問題理解

一旦學生覺察到問題情境以及有意願視為問題排除它，學生就會開始去對這問題產生感覺 (making sense out of the problem)。這階段包含 (involve) 至少二個次階段：一為遷移 (translation) 二為內化 (internalization)。遷移包括詮釋由問題提供的資訊 (information) 到對學生有意義的術語。內化需要解題者把相關資訊分類及決定如何使資訊彼此相互關連。

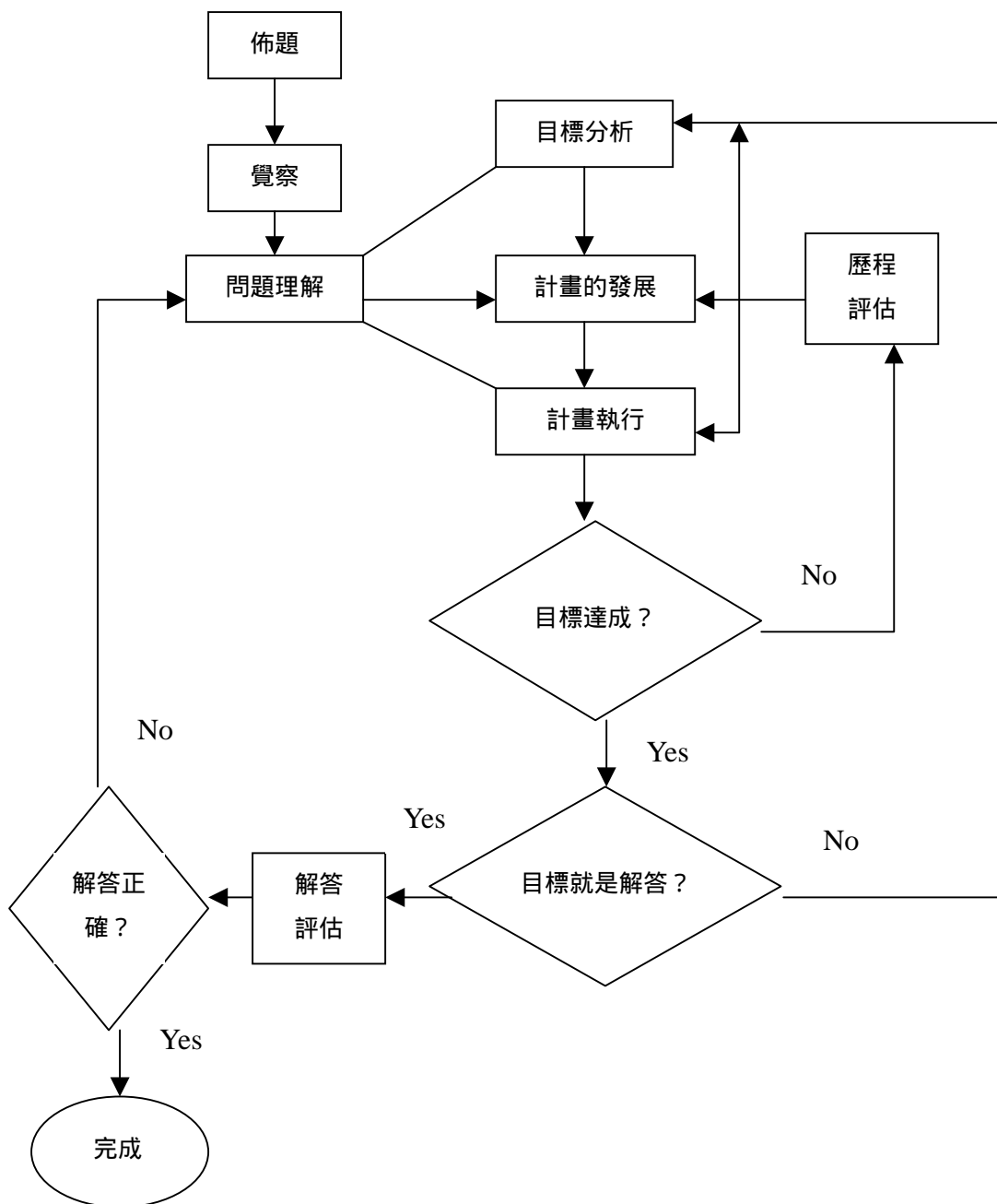


圖 2-2 數學解題模式的基礎表徵

資料來源：F. K. Lester (1980). *Problem Solving: Is it a problem?* (p. 36). In M. M. Lindquist (Eds.), *Selected issues in mathematics education*. Berkeley, Calif: McC

更重要的，在這個階段個體形成內在問題描述/表徵(an internal representation of the problem)，這樣的描述/表徵在第一次可能是不正確的，但卻是提供了建立解決問題的目標或優勢(priorities)的工具。解題者在尋求解答的過程中，其內在描述/表徵的準確性會增加。因此，問題理解是解題歷程階段中的其中一項因子。

### 第三階段：目標分析

似乎解題者能夠來回地從這個階段跳到另一個階段。對於某些問題適合建立次目標(subgoals)，有些則不需建立次目標。這樣次目標的確認(identification)及隨之的成就(subsequent attainment)通常有助於問題理解及歷程發展。

目標分析被認為是試圖再將問題公式化表述，以至於能使用熟悉的策略與技巧。這也包含了問題組成部分的確認(identification of the component parts of a problem)。這就是這樣的一個步驟，從目標本身回溯，以達到能區分出問題不同的組成份子。因此，目標分析包含了更多資訊的簡單詳述(simple specification of given information)、相互關係的詳述(specification of the interrelationship of information)、運作的詳述(specification of the operations)都是需要的。

#### 第四階段：計畫的發展

計畫的發展包括了辨認更多可能性的策略（例如題組的發現及解一個簡單相關的問題）這也包含次目標的安排及詳述（specify）運作方法。或許在這階段對學生來說會產生困難，這也就是一般學生在看完老師解題後會大喊著「他是如何想的？我從來沒想過那樣的方法。」這困難的主要來源是如何從學生無法很容易的完成任務傾向放棄的事實中規劃（formulate）出一個攻擊（attack）計畫。當然，如果問題很容易解出，那就不是真正的問題。好的問題會產生最初的失敗，常會導致拒絕繼續完成。這也是事實，學生無法策劃計畫，因為在他們的處置過程中太少計畫了。

另一困難的來源是安置可被用的次目標及規劃運作方法，對許多學生來說解題最難的部分是知道第一步該做什麼及組織他們的構想（ideas）。教導學生策略，他們必須被幫助去組織他們的思考與計畫。

#### 第五階段：計畫的執行

在這階段解題者試驗其已策劃出的計畫。執行錯誤的可能性提升會混淆（confound）情境。學生正確地決定製作圖表及尋找組群（pattern），會因為簡單計算錯誤而無法找到組群。

## 第六階段：程序和解答的評估

成功的解題通常會在解題歷程做系統性評估的決定及結果的檢測。

另外，Lester (1980)在每一階段提出相關問題如下：

### 一、問題理解

(a)在問題當中相關與非相關的資料 (data) 是什麼？ (b)了解資訊 (information) 間的關係嗎？ (c)了解當中所有術語 (terms) 的意思嗎？

目標分析：(a)有任何次目標能幫助我達到目標嗎？ (b) 能安排 (order) 這些次目標嗎？ (c)次目標的安排正確嗎？ (d)有正確地確認出問題的操作情境嗎？

### 二、計畫的發展

(a)有其他的方法能解這個問題嗎？ (b)有最好的方法嗎？ (c)我曾經解過這樣的類似題目嗎？ (d)這樣的計畫將會達到目標或次目標？

### 三、計畫執行

(a)使用的策略正確嗎？ (b)在計畫中每一步驟的安排 (ordering) 適當嗎？或是能使用不同的安排方式？

### 四、解答的評估

(a)解答是否具一般性 (generalizable) (b)解答是否符合問題的條件 (conditions) (c)解題者所學的能幫助我解其他的問題嗎？

除了 Polya、Schoenfeld、Lester 的數學解題歷程理論外，另外還有一些學者對數學解題歷程的看法，例如，Mason (1985)把解題過程分成進入 (Entry)、攻擊 (Attack)、回顧 (Review) 三個階段。進入 (Entry) 階段思考的是「我的已知是什麼？」、「我的所求是什麼？」、「我能引入些什麼？」；攻擊 (Attack) 階段會去「嘗試」、推測「可能是…」、想著「為什麼？」；回顧 (Review) 階段則是會有「檢查」、「反思」、「推展應用」等行為。

另外，如 Mayer (1992)從問題解決認知的觀點指出，解題包含兩個步驟，第一步驟為「問題表徵」，其內涵包含問題的轉譯，及問題整合二部分；第二步驟為「問題解決」，包括了計畫與監控，以及實施。與 Schoenfeld (1985)數學解題六階段來比較，問題轉譯相當於

讀題階段，問題整合相當於分析階段，解題計畫與監控相當於探討與計畫階段，實施則相當於執行階段。而 Schoenfeld 的驗證階段則包含在計畫與監控階段的監控階段。

綜合以上所述，將 Polya (1945)、Schoenfeld (1985)、Lester (1985)、Mason (1985)及 Mayer (1992)之數學解題歷程列表比較如表 2-2。以上各學者所提之歷程，研究者深入各學者所提出的解題歷程的內容發現，其實彼此之間是相似的，只是階段分類不同。以 Schoenfeld 的解題歷程六階段的分類較為詳細，適合作為資優生數學解題歷程分析的理論依據。

表 2-2 數學解題歷程理論比較表

理論提出者	階段一	階段二	階段三	階段四	階段五	階段六
Schoenfeld (1985)	讀題	分析	探討	計畫	執行	驗證
Polya (1945)	了解問題		擬定計畫		執行計畫	回顧解答
Lester (1985)	定向			組織	執行	驗證
	問題覺察	目標分析	問題理解 歷程評估	計畫發展	執行	解答評估
Mason (1985)	進入			攻擊	回顧	
Mayer (1992)	問題轉譯	問題整合	解題計畫與監控		實施	

## 肆、數學解題歷程相關研究

孫達剛（1992）以雄中、雄女兩校數學科高成就組學生 93 名、低成就組學生 77 名為研究對象，並採用「紙筆測驗和面談」，相互配合的方式進行，其研究結果發現：高成就組學生的解題風格十分地接近 Polya 所認為的解題四階段。

劉貞宜（2001）將數學解題區分為「閱讀題目、分析題目、整合及探索問題、擬定計畫、執行計畫」等五個解題歷程階段，研究建中三位不同能力的數學資優生發現，數學資優生解題歷程階段有其相同及不同之處，大都在第二階段分析題目及第三整合及探索階段有所不同。能力較高的學生解題路徑越多，其中能力最高的學生最能覺知、掌握及分析題目與自己的能力；而能力中上的學生常透過具體表徵及探索後，才會決定解題方法或方向；而能力較弱的學生則常使用無系統的假設或嘗試錯誤來探索題目。

Sriraman（2003）就 Lester（1985）定向、組織、執行、驗證等四個數學解題歷程來分析，以九位九年級新生（4 位數學資優生，5 位非資優生）為研究對象，發現資優生在各階段表現的行為：



## 一、 定向（問題覺察、目標分析、歷程評估）

能理解問題情境、檢核適合問題情境的資訊、確認了解問題情境的假設、能區別疑問（interrogative）與敘述（declarative）的句子。

## 二、 組織（計畫發展）

全盤性的計畫、堅信著手執行（consistently planning to work their “way up” or “starting out small”）、控制問題的變項。

## 三、 執行

正確局部行動（local action）的表現、監控歷程與一貫的計畫。

## 四、 驗證（解答評估）

局部行動結果的檢查、驗證執行計畫的結果、使用特殊案例更加了解現象發生的原因。

從上述數學解題歷程相關研究發現，數學能力高的學生都能符合數學家所提出的解題歷程。就 Schoenfeld (1985)的解題六階段而言，一般智能的資優生，其思考能力優於一般人，在普通班的數學成績亦在全班前 20%，所以，資優生的解題歷程也應該符合讀題、分析、

探索、計畫、執行、驗證等六階段。

### 第三節 解題策略與相關研究

數學解題策略的相關研究中，Schoenfeld (1985) 在 *Mathematical problem solving* 一書提到，他在 Berkeley 大學針對大學生所做的解題相關研究發現，這群大學生常用的解題策略包括：類推 (exploiting analogies)、引入輔助元素 (introducing auxiliary element)、輔助問題 (working auxiliary problem)、歸謬法 (arguing by contradiction)、由已知來推論 (working forward from data)、分解或重組 (decomposing and recombining)、執行相關問題 (exploiting related problems)、畫圖 (drawing figures)、類化 (generalizing)、使用反論 (inventors paradox)、特殊化 (specializing)、簡化 (using reduction and absurdum)、間接證明 (indirect proof)、變化問題 (varying the problem)、逆推 (working backward)。

劉貞宜(2001)綜合 Kilpatrick (1967)的解題策略、Webb (1975)的特殊解題策略、及 Cyert (1980)解題的啟發策略後，將解題策略歸納如下：(1)畫圖表徵；(2)以字詞、圖形、或符號等方式來簡化問題；(3)回憶相關問題；(4)嘗試錯誤；(5)應用特殊化；(6)使用連續漸進法；(7)從現狀向目標倒退思考；(8)使用演繹法；(9)使用歸納

推理法；(10)運用類化和隱喻法；(11)常常詢問自己問題解決方法的存在性與唯一性；(12)以不同的方式提出問題，並口述問題；(13)常自問所提問題的前提是否具有可靠性；(14)以算式檢查解答是合乎條件；(15)與人談論問題解題方法。

除此之外，劉貞宜（2001）針對建中三位數理資優生研究發現，數學資優生常利用解題策略來理解、探索方向及突破困難，且解題策略的使用多元，也常利用解題策略來幫助自己理解、思考、探索、聯結及推理，讓整個解題變得更順暢及快速。另外，劉貞宜發現能力特優的數學資優生使用策略明顯多於能力中上及能力稍弱的資優生。另外，Cohen 和 Stover (1981)發現，資優學生在解題時，會自行將較難的字彙換掉，將句子的長度縮短，將無關資料刪除及作出輔助圖表。

綜合以上所述，可以瞭解解題策略的應用主要是幫助解題者對於問題的瞭解，輔助解題的思考，有助於問題的解決。解題策略越能靈活應用就越能幫助解題的流暢。研究者彙整上述學者（Kilpatrick, 1967; Webb, 1975; Cyert, 1980; Cohen & Stover, 1981; Schoenfeld, 1985）所提及到的解題策略如：繪圖表徵、逆推、引入輔助元素（替代）、歸納找尋規律及嘗試錯誤等策略（見表 2-3）。說明如下：

## 一、繪圖表徵

所謂繪圖表徵就是以繪圖的方式來了解題意及輔助解題。如研究者所蒐集的題目「一個井有 10 公尺深，一個蝸牛總是在白天爬升 5 公尺，而在夜晚時滑下 4 公尺。如果這個青蛙從井底爬起，則幾天後牠可爬出井外？」解題者會先畫出一口井，接著以每一公尺劃上刻度，來呈現題意。之後，依題意先畫五公尺，在向下畫四公尺，如此將問題解出。

## 二、逆推

逆推就是「由果推因」，也就是由結論倒推得已知條件的逆向思考方式，有助於解題。如「正方形加 1 再減 2 等於 9」則我們可以先將 9 加 2 等於 11，再將 11 減 1，求得正方形為 10。由結論求得已知的方法。

## 三、引入輔助元素（替代）

引入輔助元素就是將某一元素放入問題中，以便於解題者解題。如「星星加正方形等於星星」，以上皆為抽象符號，解題者會引入一元素，如假設星星為五，則五加正方形等於五，則可以很容易推得正方形為零。

#### 四、歸納找尋規律性

在數學問題有很多是具有規律性的線索，如九宮格，可以先觀察其數字間的關係，如 9 加 1、8 加 2、7 加 3、6 加 4 等大數加小數的和相等。如計算星期幾，則我們可以覺查到日曆是以七日為一週的週期性，來輔助解題。

#### 五、嘗試錯誤

數學解題另一種策略，乃是嘗試錯誤。所謂嘗試錯誤就是試探性的解題方式，從嘗試錯誤的解題過程中再去尋求解題的線索性。如將 1 至 9 等九個數字填入九宮格內，使橫直斜的和相等，解題者依題意，由數字「1」開始將數字逐一填入，或開始填入其他數字。

表 2-3 數學解題策略

學者 \ 策略	繪圖表	逆推	替代	尋求 規律性	嘗試 錯誤
Schoenfeld (1985)	*	*	*	*	
Cohen, & Stover (1981)	*				
劉貞宜(2001)彙整	*			*	*

註：劉貞宜(2001)彙整 Kilpatrick (1967)、Webb (1975)、Cyert (1980)之解題策略。

## 第四節 資優生解題特質與相關研究

### 壹、資優生創造力的特質

Renzulli (1978)提出資賦優異者三種具有條件：中等以上智能、工作熱忱、及高創造力。在創造力方面，Sternberg (1987, 2000)提出的資優生具創造力的特質：

#### 1. 受內在動機的驅策

具有創造性的人較不依賴外在的增強，雖然沒有別人注意，仍專注於正在創作的事物。願意讓自己成長及相信自己有能力完成。並且會適時地出售自己的創意點子。

#### 2. 願意克服障礙

具有創造性的人，較有毅力與克服障礙與困難的意願。在過程中他會分析自己的想法，並針對問題會重新定義問題，有助於期能順利克服障礙。

### 3. 肯冒合理的風險

具有創造性的人，為了表現創造，必須做某種程度的冒險，且能夠決定與判斷什麼是自己能夠承受的冒險。

### 4. 容忍模糊

Sternber 同意 Vernon (1970)、Gruber (1986)等人的見解，認為創造性意念很少以成熟的形式出現，大部分有創意性的人，需要忍受在發展創造性產品時，所必然面臨的模糊和不完全。之後，再逐漸將作品精進，讓創意性的產品能更加完美。

### 5. 願意為爭取被認可而努力

有創造力的人雖然在作品的創造上被依賴內在動機，但他們也期待別人欣賞、肯定與認可。當他們發現自己喜歡的事物，就會付諸實踐，以爭取他人的認同。除此之外，具有創造性的人，期望作品被接受，也會努力創造和改進作品，使自己的作品能夠被再接受。

## 貳、數學解題特質的相關研究

在資優生數學解題特質的相關研究方面，Krutetskii (1963)在研究中指出，數學教師認為其有數學潛力學的特徵為(1)超強的記



憶；(2)求知的好奇心；(3)抽象思維的能力；(4)運用知識的能力；(5)洞察答案的能力。研究中發現好的解題者：(1)從看似不相關的訊息中區別出相關訊息的能力；(2)能很快而正確的看出問題的數學結構；(3)能將大範圍類似問題一般化；(4)在經過一段很長的時間後，仍能記住問題的正式結構。

Krutetskii (1976)在數學天才兒童的個案研究中亦指出：數學天才在解答數學題時，有下列一些心理特點：(1)具有敏捷的推理和心理定向；(2)具有邏思維，以及有系統、有順序的思考能力；(3)具有數學抽象思考的能力，且能迅速面廣泛地組織材料；(4)具有靈活的思維；(5)能自如地從正面的思維歷程轉換到反面的思維歷程；(6)解答問題時，具有迅速且簡捷的推理能力，亦具有「壓縮」的傾向；(7)對數學材料能夠迅速而牢固的記憶；(8)對數學作業很少感到疲勞。另外，在解題之前，在初步分析階段，能力較佳的學生就迅速地看出這一題目與那一題目之間類型上的相似處。另外，學生能抓到題目結構一般性值得基礎上對這些題目作概括(Krutetskii, 1976)。

Vlahovic-Stetic 等 (1999) 針對 9 到 10 歲的 31 位數學高成就資優生、31 位數學低成就的資優生及 85 位非數學資優生在數學成就與動機特質的研究中發現，數學高成就的資優生有高層次的內在數學

傾向、低數學焦慮、低外控成敗歸因。

劉貞宜(2001)針對建中三位數理資優生研究發現，數學資優生在歷程中遇到卡住或挫折時，大多抱持積極正向的態度及信念，且自情緒反應方面大多無出現較大的負面情緒，有時反而覺得有趣及有挑戰性，縱使出現負面情緒，也能很快的將其轉化。

Sriraman (2003)就 Lester (1985)定向、組織、執行、驗證等四個數學解題歷程來分析，以九位九年級新生(4位數學資優生，5位非資優生)為研究對象，發現資優生在解題歷程中所展現的情意特質(affective characteristics)包括堅持(perseverance)、自信(confidence)、興奮(excitement)、好奇(curiosity)、挫敗(frustration)、尊重溝通(valuing communication)、將數學視為一種思考的方式(mathematics as a “way of thinking”)。其中還是有學生缺乏自信心。另外，根據研究者的教學經驗發現，資優生勇於挑戰困難，不輕易放棄；很有自信；對於很多事是充滿好奇心、有興趣的。

綜合以上所述，學生在解題歷程中遇到非例行性問題時，其態度可分為正向或負向的態度及信念。在正向方態度或信念面，如「堅持、想繼續挑戰、有信心、興奮、情緒起伏低、好奇」；負向態度或信念

方面，如「覺得問題很難立即放棄、疲勞、挫敗、焦慮、沮喪、沒自信、無聊」。(見表 2-4；表 2-5)

表 2-4 資優生正向情意特質

相關研究 \ 特質	堅持、毅力	自信	情緒起伏低	好奇、有興趣
Krutetskii (1963)				*
Krutetskii (1976)	*			
Vlahovic-Stetic 等(1999)		*	*	
劉貞宜(2001)	*	*	*	
Sriraman (2003)	*	*	*	*

表 2-5 正負向情意特質

	情意特質			
正向	堅持、毅力	自信	情緒起伏低	好奇、有興趣
負向	放棄、疲勞	沒自信	沮喪、挫敗、焦慮	無聊

## 第三章 研究方法與設計

本章研究方法與設計，一共分為六節。第一節「研究方法」部分，本研究主要採質性的研究法，分析學生解題的思考歷程；第二節「研究架構」主要是依據 Schoenfeld (1985)數學解題歷程六大階段為分析架構，並探究資優生的解題策略及其情意特質；第三節「研究對象」是針對高雄市九十二學年度資優班新生，採立意取樣選取六名學生為對象；第四節「研究工具」部分主要依據佈題設計、與研究者本身為工具之探討；第五節「資料蒐集與分析」，就是將蒐集到的學生解題思考歷程資料轉為逐字稿來進行資料分析。第六節「研究步驟與流程」，說明本研究之步驟與流程時間表。

### 第一節 研究方法

本研究之研究方法採質性研究的方法，以放聲思考 (thinking aloud) 與紙筆測驗蒐集學生解題歷程的資料，並輔以隨機訪談蒐集相關資料。將資料依據 Schoenfeld (1985)的「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」等數學解題六階段編碼分析以了解學生的解題歷程，並分析學生解題歷程中所使用的策略與情意特質。在信效度方面，情境問題的效度採專家效度，另外，採專家評量一致性來增加原案分析之信度。

質性研究的資料蒐集方面，研究者可仰賴案主 (subjects) 的放聲思考活動紀錄及觀察結果來判斷解題歷程 (Goldin, 1982, in Lester & Garofalo)。國內也有許多研究 (劉貞宜, 2001; 謝淡宜, 1998, 1999) 採行這種放聲思考法 (thinking aloud)，蒐集解題歷程的內部思考資料。例如，謝淡宜 (1998, 1999) 在國小數學資優生及普通生「數學解題」歷程之比較的二年期的研究中，以兒童解題策略、解題行為、所使用的思考方式及答題比率作為探討的重點，採質性為主，量化為輔的研究方向，實驗進行過程，學童被要求以放聲思考 (thinking aloud) 方式來解釋其所有的解題活動及內在思考歷程。

研究工具的信效度方面，研究者可使用不同的方法蒐集不同來源的資料，將可減低或避免研究者的偏見，而增進質性研究方法的信效度。另外，研究者亦可將蒐集的資料請數位專家評量，由專家一致的看法中，可確立問題之所在 (黃瑞琴, 1994)，亦是增加研究的信效度。此種方法就是所謂的三角檢證 (triangulation)，三角檢證首先被社會科學所借用，其目的是要傳達一個重要的理念，就是為了建構事實 (黃光雄等譯, 2001)。為了使質的研究更趨嚴謹，研究者以三角檢證法作為提升研究的信度與效度。

## 第二節 研究架構

根據相關研究文獻分析與研究目的，本研究主要探討一般智能資優生在解題歷程、解題策略、及情意特質等三方面為主要架構。在解題歷程方面，探究國小一般智能資優新生在各階段解題歷程表現情形。解題歷程依據 Schoenfeld (1985)「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」六大階段為主要觀察分析架構。如表 3-1：

表 3-1 Schoenfeld 六大階段及其各階段之任務分析表

階段	任務
讀題 (R)	閱讀題目，了解題意與問題所在。
分析 (A)	1. 了解未知數是什麼？已知數 (data) 是什麼？條件是什麼？注意到問題的所有條件。 2. 畫一個圖，或引入適當的符號重構或簡化問題。如「蝸牛問題」用圖表示出「題意」。「直式加法問題」以「幾十加幾十」詮釋題意。
探討 (E)	1. 探討檢視以前是否看過相類似問題問題嗎？或相關經驗。如解「日期問題」可以聯想到平時看過的「月曆」。 2. 有無監控行為？檢視解題每一步驟。如「三月是大月還是小月」；「四月好像是 30 天我多加了一天」。 3. 探索嘗試錯誤，以數字代入抽象符號。
計畫 (P)	1. 確認目標擬定計畫。 2. 根據已知條件，列出算式或解題計畫。
執行 (I)	1. 執行計畫 2. 能清楚地知道每一步驟的執行。
驗證 (V)	在解題結束後，檢驗結果。如用不同方法驗證這個結果；重新檢查計算過程。

在數學策略方面，主要是分析學生在解題歷程中擅用哪些策略輔助解題，根據文獻整理在數學解題方面的策略包括：抽象表徵、繪圖表徵、逆推、歸納找尋規律、嘗試錯誤及替代等。

在情意特質方面，透過學生解題歷程中分析學生情意方面所表現的行為，而情意特質在文獻資料整理其包括遇到問題困境時所展現的「堅持、自信、受挫力（情緒起伏）」等，對於問題本身的「好奇心、是否感到興奮」。研究架構請參閱圖 3-1。

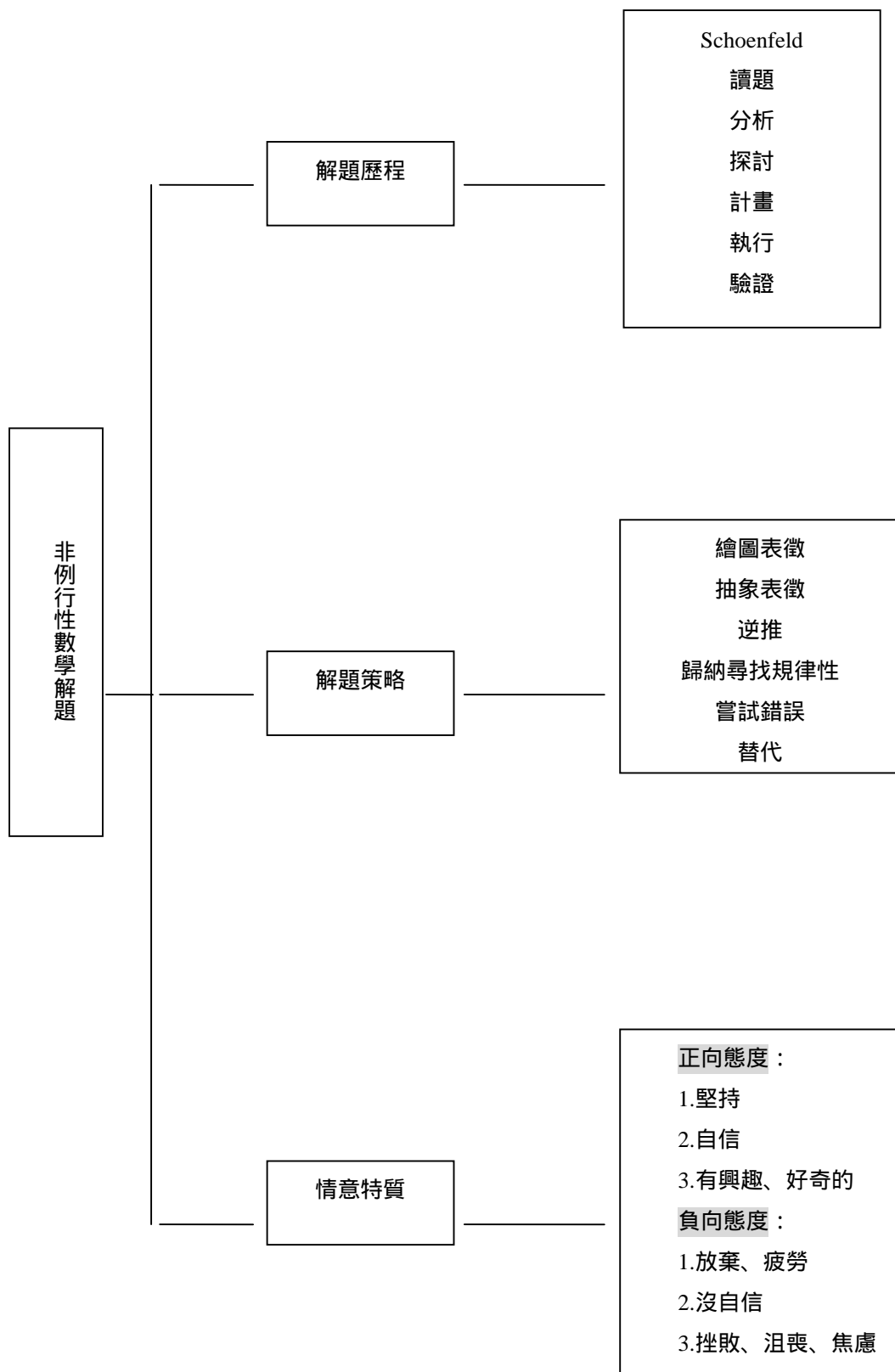


圖 3-1 研究架構



### 第三節 研究對象

本研究以高雄市九十二學年度鑑定合格的某國小三年級資優生為對象。考量研究之方便性，以研究者任教學校為取樣之樣本對象。因學生為鑑定合格之一般智能資優生，其成績表現皆在班級前 20%，團體智力測驗在 1.5 個標準差以上。所以，研究對象挑選以語言表達能力較佳的學生為主，有利於放聲思考之資料蒐集。研究對象一共挑選六位學生，其中有小迅、小揚、小涂等三位男生，及小姮、小茹、小珍等三位女生。

研究對象命名原則是以前解題者特徵給予命名。如小迅則是因為其解題過程迅速，故以迅速的「迅」命名；小揚則是有新的發現或解題完成時就會「啊哈！」上揚的聲調，故以「揚」命名；小涂（圖）則是常利用繪圖表徵來進行解題，故以諧音「涂」命名；小姮（恆）相當有恆心堅持一定要解出來才可離開，故以「姮」諧音命名；小茹（如）則是在解題過程常有假設性語氣「如果…」，故以諧音「茹」命名；小珍則是解題失敗或放棄，依然開朗天真地說「沒關係回家問媽媽就好了！」，所以就以「珍」諧音命名之。

## 第四節 研究工具

### 壹、 非例行性數學問題設計

#### 一、 佈題設計

##### (一) 問題來源與專家效度

問題以非例行問題為主，所謂非例行性問題，就是解題者未曾練習過的問題，或者是曾經練習過但時間已久而全然忘記的問題。問題設計主要參考二年級及三年級數學奧林匹克（徐則洲、陳潔雲、李金生、李濟元，2000a, 2000b）、黃敏晃（2000）規律的尋求，解題相關研究文獻（Schoenfeld, 1985; 謝淡宜，1998, 1999）等。挑選出十題非例行性問題如附錄一，該十題問題之數學能力區分為：尋求規律、數的概念、邏輯推理等三類（詳見表 3-2）。

接著，研究者請三位任教於國小低年級五年以上且具碩士學位之教師，依據「問題篩選標準」及學生語文能力與數學能力，篩選出適合且非學校內數學教學的例行性問題，也就是非例行性問題。從三位教師勾選的八題題目中挑選六題得票數較高的問題（見表 3-3）進行預測。在進行預測之前，研究者先

請六位三年級普通班學生進行數學題目語意的修正，以符合三年級學生在數學問題題意的理解。題意修正完畢後，研究者請二位資優生進行預測 (pilot study) 篩選出四題題目作為本研究解題佈題的「情境問題」。

表 3-2 專家勾選非例行性問題之數學能力分析表

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數學能力	九宮格	數三 角形	月曆	鷄生蛋	直式 加法	運算 符號	兄弟	蝸牛	糖果	挑水
尋求規律		*	*							
邏輯推理					*					*
數的概念	*			*			*	*	*	

表 3-3 專家選題結果分析表

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
專家	九宮格	數三 角形	月曆	鷄生蛋	直式 加法	運算 符號	兄弟	蝸牛	糖果	挑水
甲	*	*	*		*	*		*	*	*
乙	*	*	*	*	*			*	*	*
丙	*	*	*		*	*	*	*		*

## (二)非例行性問題的篩選標準

謝淡宜（1998，1999）「在國小數學資優生及普通生數學解題歷程之比較」之問題篩選標準：

1. 題目的解決需具備多重的數學技巧，不是一步即成。
2. 學生無法用他們學過的數學知識立即答出。
3. 題目能激發並測出其天生的數學能力，如反推能力、綜合各條件能力、演繹能力、以大推小能力、應用能力以符合研究目的。
4. 題目必須具備適當的困難度及挑戰性來測出四、五年級，數學資優生及普通生的數學思考能力。

本研究參照謝淡宜（1998，1999）之問題篩選標準，並考量研究對象為三年級新生，且本研究著重解題歷程與策略之應用及解題歷程中的特質或態度，特訂定以下篩選非例行性問題標準：

1. 利用國小一、二年級所學的數學技巧即可解決問題，但不是利用已學過之數學知識看到題目立即可回答出來。

2. 符合完成國小一、二年級學業之學生的閱讀能力。
3. 題目必須具備適當的困難度及挑戰性來測出三年級資優生的數學思考能力。

### (三)專家選題結果

三位擔任低年級年資五年以上且具碩士學位之級任教師根據上述選題原則，挑選出六題。結果依數學能力區分大致可分為尋求規律性、數的概念、及邏輯推理等三類，而挑選出「數三角形、蝸牛、直式加法、月曆、九宮格、挑水」等六題得票數最高，進行題意修正與預試。

## 二、 預試 (Pilot study)

預試對象以高雄市資優班新生二名為對象，進行六題問題的預試，並分析其解題歷程與策略，及解題歷程中所表現的情意特質，選擇四題更符合本研究目的之問題為題本。

S1 及 S2 二位預試解題者在挑水題較會忽略兩個水桶公升數的意義，而自行決定要提多少公升的水，不受八公升與五公升水桶的限制，故決定刪除該題。三角形題，學生都看到問題圖形後，

就直接在數三角形，而未停下來思考，容易數錯，所以也放棄該題。另外，S2 常會忘記放聲思考，所以多設置一題「練習題」，讓解題者練習放聲思考，本研究選擇三角形題作為放聲思考練習題。並且適時地輔以訪談，以蒐集學生忘記放聲思考的部分，以充實資料的完整性。

### 三、 實施研究方案佈題的情境問題

經三位國小低年級老師勾選後，挑選六題情境問題，請六位三年級學生進行語意修正後，並請二位三年級資優生預測後，篩選出四題作為本研究佈題的情境問題。其中挑水題學生較易誤解題意，不列入本題研究。而三角形題，學生都看到問題圖形後，就直接在數三角形，而未停下來思考，容易數錯，所以也放棄該題，但將該題列入解題前的放聲思考練習題。其餘月曆、九宮格、蝸牛及直式加法等四題經預試後發現較適合本研究之情境問題。並依其難易度「蝸牛、直式加法、月曆、九宮格」為排序讓學生進行解題。情境問題分析如表 3-4，題目請參閱附錄二。

表 3-4 研究情境問題分析表

數學能力	題號	問題名稱	備註
尋求規律性	2	數三角形	練習放聲思考題
	3	月曆	本研究情境問題
數的概念	1	九宮格	本研究情境問題
	8	蝸牛	本研究情境問題
邏輯推理	5	直式加法	本研究情境問題
	10	挑水	學生常誤解題意，不列入本研究問題。

## 貳、 研究者本身

就質性研究而言，研究者本身即是工具。研究者本身所學是特殊教育系資優教育組，擔任資優教育工作第二年，在課程方面主要負責科學與數學領域之教學。在研究所進修亦修習過數學解題研究與質性研究之相關課程，且曾進行過教學相關的行動研究。就研究者的教學現場而言，我們應用數學來訓練學生的高層次思考，著重於數學解題能力的訓練。

## 第五節 資料蒐集與分析

本研究之資料蒐集主要是由學生解題過程的逐字稿，即所謂的原案，及訪談資料。解題過程的資料蒐集，本研究輔以 DV 攝影機紀錄學生解題歷程，請學生「將心中所想到的每一件事，都用聲音表達出來」的放聲思考法，以 DV 全程錄影紀錄。

另外，本研究為彌補學生在放聲思考過程中，未呈現的部分，輔以訪談來強化資料的蒐集。如學生被某一問題卡住超過五分鐘，研究者會提出「你要不要考慮放棄？」、「說說看你現在的感覺？」等問題；學生在過程中未放聲思考時，研究者適時提出問題如「你可以說說看剛剛你在想什麼？」、「說說看，你的解題方法。」、「你對於要解這個問題前有任何的想法嗎？說說看你的想法是什麼？」；在完成解題後，研究者會問「平常你遇到數學問題有困難時，你都會怎麼處理？」、「你平常會找一些很難的數學問題來做嗎？」、「你有覺得你會答對幾題？」

接著，根據原案及訪談資料進行解題歷程的編碼與分析，依據 Schoenfeld (1980)的解題歷程——讀題、分析、探討、擬定計畫、執行、驗證六大階段分析學生解題的思考歷程。另外，根據原案資料歸納學生在解題過程中所使用的策略。最後，進行情意特質的編碼，分



析學生在解題過程所展現在情意部分的特質。

為增加資料的信度，採三角檢證法。三角檢證法首先被社會科學所借用，其目的是要傳達一個重要的理念，就是為了建構事實，研究者需要不僅單一的資訊來源，多重資料的來源可以使研究者對研究現象事實的了解更為周全、及不同資料蒐集技術的使用（黃光雄等譯，2001）。所以，本研究將學生的解題歷程轉寫成逐字稿後，並立即給予初步的編碼分析，之後，請另一位曾修習過數學解題之研究生，隨機抽四題，讓研究生根據逐字稿進行分析，比較專家評量一致性，以增加學生解題歷程分析的信度。

除此之外，在逐字稿的撰寫部分，將每一逐字稿的區塊內容給予流水號，流水號第一碼為「研究對象的編號」，如 1；第二碼為「情境問題題號」，如 1 表示第一題；第三碼到第四碼為「逐字稿區塊編號」，如 01 為第一個區塊編號。舉例說明，流水號為 2-2-23 則表示該內容為第 2 號研究對象第二題第二十三個區塊的逐字稿編號。如此流水號編列以便資料分析與說明之方便性。

圖 3- 2 S01 第二題「直式加法題」解題歷程圖

V 驗證				
I 執行				
P 計畫				
E 探討				
A 分析				
R 讀題				

以預測對象 S1 為例，就解題歷程來分析，S1 的解題歷程為(圖 3-2)：讀題 (S1-2-01)、分析 (S1-2-02)、探討 (S1-2-03)、計畫 S1-2-04)、執行 (S1-2-05)、探討 (S1-2-06)、執行 (S1-2-07)、驗證 (S1-2-08)。S01 整個解題歷程符合 Schoenfeld 六個階段，其在解題過程中會有「探索」歷程，如在 S1-2-02 中，將直式加法算式轉譯為「現在是多少加多少等於多少」，除了分析題意外，還與 S1 原直式加法概念結合稍微修改問題的解釋方式。而在 S1-2-06「九三這邊就是二(框框)，丿！這樣就不對了」S1 有探索階段的監控行為，發現  $9+3=12$ ，「和」的十位數(框框)則為二，但其先前 S1-2-12~S1-2-14 以求得框框為「0」，所以，S1 發現「星星」不應該是「3」，而提出修正。最後解題完畢，S1 利用  $91+10=101$  來驗證，並再次用眼睛來回看著答案後，才提出完成解題。

就策略的使用來說，S1 在「直式加法」題當中，使用了替代、嘗試錯誤等策略。他用數字「3」暫時替代抽象符號「星星」進入式子中，以求得「框框」為「0」，這樣的策略除了是替代外，亦是一種嘗試錯誤的策略。在情意特質方面，S1 在解題歷程持之以恆，堅持完成這樣任務。在最後能很有自信地認為自己這題答案一定對。

## 第六節 研究步驟與流程

本研究利用四個月的時間蒐集相關文獻資料，接著撰寫研究計畫並編制非例行性的情境試題，情境試題的編制參考相關文獻資料的試題，並與指導教授及研究生們討論出十個非例行性問題，讓擔任國小低年級級任教師進行專家效度的勾選問題，選出六題後，再請三年級學生進行題意修正，修正完畢後進行二位三年級資優生的預試工作，挑選四題非例行性問題當作本研究放聲思考資料蒐集的試題。

進行正式施測蒐集資料，先讓學生做「數三角形」題練習放聲思考，接著再依序進行「蝸牛」、「直式加法」、「月曆」計算星期幾、與「九宮格」等四題，過程中若解題者未表達清楚的部分，研究者輔以適時地訪談也了解題解題的想法與過程。接著撰寫文字稿與分析，之後，隨機抽取四題，讓曾修習過數學解題的研究生進行分析，來與研究者分析的資料，作為信度檢驗，以提高資料分析的一致性。最後撰

寫報告，完成本研究。(見表 3-5)

表 3-5 研究流程與時間表

時間 (年/月) 步驟	92/ 07	92/ 08	92/ 09	92/ 10	92/ 11	92/ 12	92/ 01	92/ 02	92/ 03	93/ 04	93/ 05	93/ 06
蒐集文獻												
撰寫研究計畫												
編製測驗題												
專家建議與修正												
實施預試												
蒐集資料 (正式施測)												
資料分析												
撰寫報告												

## 第四章 研究結果與分析

本研究針對六位三年級一般智能資優資源班學生為研究對象，採立意取樣選取三位女生：小姮、小茹、小珍等；三位男生：小迅、小揚、小涂等。施予四個非例行性問題：蝸牛、直式加法、月曆、九宮格等，並以放聲思考蒐集資料並撰寫文字稿（詳見附錄三）。

研究者根據逐字稿進行分析，為了進行專家一致性的信度檢定，抽取小姮回答的蝸牛題、小珍的月曆題、小涂的直式加法題、小迅的九宮格題等，再請曾修過數學解題之研究生分析定信度，結果二者分析完全一致。

本章研究結果與分析共分為三節報告，第一節分析一般智能資優生數學解題的歷程；第二節主要探討一般智能資優生數學解題的策略；第三節分析一般智能資優生數學解題之情意特質。

### 第一節 一般智能資優生數學解題歷程分析

一般智能資優生數學解題的歷程分析，本節主要分成二個部分，一為個別解題者的解題歷程分析，二為整組解題者的綜合分析。

#### 壹、資優生數學解題整體歷程分析

由於六位學生在解題的表現有其特色，所以研究者以學生個人特色取假名，並以代表性的形容詞說明六位學生的解題歷程，分別是：

堅持的小姮、頭痛的小茹、放棄的小珍、抽象表徵的小迅、從不驗證的小揚、繪圖表徵的小涂。本節將介紹個別學生四題解題歷程的綜合特色，再來分段說明學生在每一題的解題歷程。

### 一、堅持的小姮



小姮（恆）相當有恆心堅持一定要解出來才可離開，故以「姮」諧音命名。從圖 4-1，縱軸的六個歷程階段中，發現小姮整體解題過程有讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等階段。從逐字稿中，可以發現小姮在探索階段有監控行為出現，來檢視其過程是否有計算錯誤。在分析歷程階段部分，雖然未明顯聽到小姮分析問題的過程，但研究者猜測其應是在讀題過程或停下來思考階段中進行分析之工作。另外，圖 4-1 橫軸表示解題者的解題流程，可以發現小姮在過程中常常出現計畫與執行階段相互交錯的解題過程。

#### 第一題：用抽象表徵解蝸牛題

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

小姮本題的解題歷程是讀題、分析、執行，最後驗證。在過程中小姮未有較明確展現「計畫階段」的表達內容。

圖 4-1 小姪解題歷程圖

蝸牛題															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
直式加法題															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
月曆題															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
九宮格題															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
 解題成功  解題失敗                 * 給學生提示															

小姪讀題(1-1-01)完後，趴在桌上分析題目「應該是10公尺，一天爬五公尺的話，第二天就會爬6公尺，再滑下來就2公尺，一天1公尺。(1-1-02)」，研究者請小姪試著寫下來，小姪就開始執行，用抽象表徵的方式「5加1，6；6再減4，2；……；然後9減4等於5，還剩5公尺，再算一次，5加5等於10。」(1-1-03)之後，很懷疑已經解出答案了，「5加5等於10，到了啊！ㄟ~6天耶！」(1-1-04)小姪最後還做了二次的驗證才結束。

## 第二題：個位開始邏輯推理的直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r}
 \triangle \quad \star \\
 + \quad \star \quad \square \\
 \hline
 \star \quad \square \quad \star
 \end{array}$$

小姪無明顯的計畫階段，但解題過程都會「先分析再執行」。另外，在讀題時小姪會適時地縮減句子並探討與過去解題的經驗相結合。在本題中小姪無驗證之行為。

小姪讀題時縮減句子「下列直式加法算式中三角形、星星、正方形這三個符號代表，代表的數字不可以重複，請找出符號的代表哪一個數字？(1-2-01)」，探討問題與過去曾經做過的相似問題



(1-2-02)，停下來想一下後，小姪分析「這個星星加正方形等於星星。  
(1-2-04)」，接著執行「星星、正方形（在紙上畫星星、正方形），正  
方形等於『0』。(1-2-05)」分析「三角形加星星等於『0』（十位）。  
如果說是『0』的話，那幾加幾會等於『0』，這又不是減。(1-2-06)」  
小姪都分析後再執行來求得答案(1-2-07)。但是，小姪解題後並未驗  
證，以下是她的原案：「這裡是三角形跟星星（個位），這裡 1 個是 4，  
一個是 6（十位），如果這裡是 7 跟 3，如果星星（停下來在想），星  
星如果是 6，這樣就變六百多（停下來想一想）。可是我覺得這兩個  
（加數與被加數）加起來應該是一百多，那這裡就擺 1（和的百位數  
...星星）。這裡、這裡、這裡都是 1（星星的位置），三角形就是 9。  
對！就是這樣。」(1-2-07)

### 第三題：逐日計算月曆的星期幾

2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星  
期幾？

小姪讀題後(1-3-01)，想了一下，「如果三月一日是星期三，如  
果把中間這幾天都算出來應該容易找得到。(1-3-04)」計畫將三月一  
日至七月九日之間的天數計算出來，但小姪並未將其要如何計算天數  
的計畫表達出來。

小姪計畫後開始執行，利用各月份為大月或小月的天數來計算之  
間的總天數「三月是大月 31 天，減掉一號（三月一日）就是 30 天；

然後那個四月是小月所以是 30 天，所以等於 60；……；這中間一共有 129 天。(1-3-05)」

「我本來要用 100 除以 7，但是很難」(1-3-11)。小姪將 129 天先扣除剩 100 天，但她覺得用 100 除以 7 很難，而改用乘法的方式來逆推，「100 天，一個星期有 7 天(1-3-06)」；「如果 7 乘 9 是 63，再加 35 就是 98。(1-3-07)」；「如果 7 乘 5 等於 35，37 天有 2 天還沒算到(1-3-07)」。小姪想了一下(1-3-08)，「三月一日是星期三，如果再加 7 天還是星期三(1-3-12)」，計算出來的六月三日是星期三。但是三月一日至五月三十一日共 92 天，可推得出六月一日正確答案為星期四。小姪在此就計算錯誤。接著小姪由六月一日星期三，逐日計算至七月九日為星期六 (1-3-10)，比正確答案星期日少了 1 天。

後來，研究者請小姪在說明解題過程，小姪就從三月一日加 7 至五月三十一日。自己發現六月一日應該為星期四，所以將答案改為七月九日星期日(1-3-14)。

#### 第四題：一定可以試出九宮格的答案

請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

小姮很有恆心，堅持要完成。在解題過程可以看到小姮的每一個歷程，讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證。並且小姮會將過程中發現的線索條件應用於之後的解題歷程當中。

小姮讀題後，畫了一個九空格，觀察一至九數字的關係並分析「九加一等於十，二加八等於十，三加七等於十，四加六等於十，剩下五。(1-4-02)」。計畫「把五放在這裡（中間格）看看。(1-4-03)」。接下來小姮將其餘空格以「一、九；二、八；…」加起來和為十的配對方式填入空格中，在執行過程中小姮會有監控行為檢視解題過程是否有誤，若發現有誤，小姮會再分析「八加一等於九、七加二等於九、六加三等於九、五加四等於九。(1-4-06)」且更改計畫「九在中間(1-4-07)」，之後才執行與監控(1-4-08)。

研究者提示小姮橫、直、斜的和為十五。小姮一聽到十五立刻與剛開始將五放在中間的計畫相結合，並探討與比較「每一個都一定要是十五。九加一會等於十，這個好像只是錯了一點點（指第一次做的九宮格，將五放在中間）。(1-4-10)」。計畫「把五還是放在中間，將這邊調整一下（指將周圍數字先湊成十五）。(1-4-11)」。依計畫執行，先將填入九宮空格周圍的數字和加起來為十五。「三個數字加起來是

十五，一加八是九，我再加一個六就可以了。二九四等於十五。七和三和五在一起。(1-4-12)」但小姮找到後，就趴在桌上。



「一定要寫出來才可以走！」(1-4-16)小姮堅持要完成解題，計畫要用嘗試錯誤的方式解題，一直到答案解出來為止，於是開始計算需要嘗試幾次來完成。「一個要排一次二次三次四次五次六次，一個要排六次的話，六乘以三就要排十八次我先寫十八個五(也就是十八個九宮格，而五在中間。小姮並無畫出九宮格只寫了十八個五)。因為一定有答案，所以我將所的都試試看」。(1-4-13)

小姮在執行與監控的過程會發現新線索，根據新線索，如「六跟九不能在一起」(1-4-14)、「九跟八不可能在一起」(1-4-17)等，來輔助解題。最後小姮還是完成了解題，完成解題後，計算橫、直、斜的和是否相等來驗證解題是否正確(1-4-18)。

## 二、頭痛的小茹

小茹(如)在解題過程常有假設性語氣「如果…」，故以諧音「茹」命名。小茹四題的解題，大致讀題、執行、驗證，而分析與計畫則非固定經常性的出現。在九宮格題發現，小茹就僅有一次地分析，之後就不斷地計畫執行，還說自己解題解到頭痛，一直堅持到最後未解題成功才宣告放棄。(圖 4-2)

圖 4-2 小茹解題歷程圖

蝸牛題																				
驗證																				
執行																				
計畫																				
探討																				
分析																				
讀題																				
直式加法題																				
驗證																				
執行																				
計畫																				
探討																				
分析																				
讀題																				
月曆題																				
驗證																				
執行																				
計畫																				
探討																				
分析																				
讀題																				
九宮格題																				
驗證																				
執行																				
計畫																				
探討																				
分析																				
讀題																				
 解題成功  解題失敗                 * 給學生提示																				

## 第一題：繪圖表徵的蝸牛

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

小茹在本題的解題歷程，以繪圖表徵（圖 4-3）的方式來分析、計畫與執行，過程中可以看到小茹會有監控行為，來監控自己所執行的行動，並有驗證行為。

小茹讀題後(2-1-01)，畫了一口井進行分析與計畫「所以一口井有 10 公尺深，畫長一點。…三、四……。(2-1-02)」、「一隻蝸牛每天往上爬 5 公尺。夜晚掉了 4 公尺(2-1-03)」，並解開始執行「所以他到了這邊。然後他早上又爬了 5 公尺，後來晚上又掉了 4 公尺，4 公尺到這邊。……(2-1-04)」最後 5 公尺爬到井口。此時，小茹滿臉疑惑地回頭看自己的解題過程，並說「ㄟ～好像已經爬上了耶？(2-1-05)」又再回頭監控一次自己的解題過程，接著「一二三四五～六，就出來了。(2-1-08)」蝸牛一共花了 6 天的時間爬出井外。小茹又再數了一次天數(驗證)，很沒信心地說「好像 6 天耶！(2-1-09)」

圖 4-3 小茹蝸牛題繪圖表徵

(1) 一個井有 10 公尺深。一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？(蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了)。



## 第二題：以假設性語氣計畫的直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r} \triangle \quad \star \\ + \quad \star \quad \square \\ \hline \star \quad \square \quad \star \end{array}$$

小茹就解題歷程來說，都可以看到讀題、分析、計畫、執行、驗證、探討監控等階段。一開始是讀題後就執行(2-2-04)，發現自己嘗試錯誤後。我們可以看到小茹開始會以「假設性的語氣」先提出計畫，如「如果把他變成 13（加數為 13）的話(2-2-07)」、「那『1』呢？(2-2-12)」，之後，再執行計畫。

小茹在讀題時將某些內容略讀，「請找出（略讀）這三個符號各代表哪一個數字？(2-2-02)」而不影響其了解題意。讀完題後，小茹停了一下(2-2-03)，立即執行將加數的個位數星星填「9」，被加數個位數正方形填「1」，「9 加 1，10。嗯！ㄟ～好像不對喔！星星不可以是 10。(2-2-04)」小茹監控到「和」加起來星星是「10」，與原本的「9」不同，於是又回到題目分析「星星是（停下來在想）中的某一個數字喔！(2-2-06)」，接著又提出計畫「如果把他變成 13（加數為 13）的話(2-2-07)」，但是小茹執行時只有將加數的個位數星星寫



上 3(2-2-08)，之後，將所有的星星都填上 3，「然後…那 3（被加數的十位星星）會加什麼等於 10（和的百位是一與十位是零）？(2-2-09)」

後來，小茹自己監控到這樣是錯誤的，因為「我假設這個（被加數十位正方形）是零的話。那三角形（加數十位）是 7。73 加 30 等於……。ㄟ！那也不可能變成 303，也不可能變 30（指被加數）啊！所以這個是不對的。(2-2-10)」。

「那『1』呢？(2-2-11)」小茹又提出一個計畫就是星星為「1」，於是小茹就開始執行寫上星星為「1」，正方形為「0」(2-2-12)。當星星與正方形數字都填上時，小茹就發現三角形為「9」。並將 91 加上 10 等於 101 確定後，再將所有解題過程檢視一遍，驗證確定後宣告完成(2-2-13)。

### 第三題：先一再七的月曆

2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？

小茹在本題的歷程表現，主要是讀題、執行、監控與驗證。並無看到有分析與計畫的歷程。而小茹以抽象表徵的方式，記下日期，並非畫下月曆。

小茹讀題(2-3-01)後就立即執行，以逐日計算的方式進行，到了

三月十二日(2-3-03)，小茹回頭監控了之前所做的歷程(2-3-04)，之後就改以七日為單位進行解題(2-3-05)，到了三月二十七日又開始逐日計算至四月九日(2-3-07)，接著又改為以七日為單位計算(2-3-08)。小茹先以逐日再以七日為單位來解題(2-3-08~2-3-13)，並且日期都控制在星期日。七月時，小茹發現星期日的日期與四月相同(2-3-14)，就直接比對四月的紀錄，將答案求出七月九日為星期日。小茹在回頭驗證確定後，結束該題的解題。

#### 第四題：從總和十開始嘗試錯誤的九宮格

請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

小茹從總和「十」開始嘗試錯誤尋求解答。雖然小茹從依讀題、分析、計畫、執行等歷程來進行解題，但其缺乏方向或重點地去解題，只是一味地湊數字來符合原先計畫的總和，當遇到湊起來的數字無法符合原先計畫的總和時，就立刻宣稱放棄，而無再進一步地分析與探討。即使後來發現「一加九，二加八，三加七，四加六。都可以變成十。(2-4-14)」的關係，但仍未善用此線索關係時，就放棄了。

小茹在讀題階段常會有略讀的部分「請將(省略)這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來和相等(2-4-01)。」接著分析「橫的、斜的…，橫直斜加起來都要相等。(2-4-02)」確認解題的目標。暫停的一會，小茹提出計畫「當(作)加起來是十好了。(2-4-04)」，

先假設橫直斜的和為「十」，依照計畫開始執行(2-4-05)。後來遇到湊不成和為十的數字時，就立即更改計畫「那要改成十一。(2-4-06)」。

從和為「十」一直試探到和為「十六」的更改計畫與執行過程中，研究者發現小茹依循著一定的流程：暫停、執行、失敗、更改計畫。小茹只要遇到一次失敗就立刻宣告「不行」而更改計畫，不會再試探其他的組合。後來研究者給於提示「和為十五」，小茹居然以二個二個相加和為十五在計算(2-4-13)，之後，又重回題目觀察一至九的關係，發現「一加九，二加八，三加七，四加六。都可以變成十。(2-4-14)」但未善用所發現的關係，最後小茹仍選擇放棄。

### 三、放棄的小珍

小珍解題失敗或放棄時，依然開朗天真地說「沒關係回家問媽媽就好了！」，所以就以「珍」諧音命名之。小珍的解題歷程可以說就是讀題後就執行，很少有分析與計畫的階段，更無探討監控與驗證，而小珍的解題，也只有對一題。(圖 4-4)

圖 4-4 小珍解題歷程圖

蝸牛題																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
直式加法題																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
月曆題																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
九宮格題																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
解題成功       解題失敗      * 給學生提示																			

## 第一題：五天爬出來的蝸牛

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

小珍第一次與第二次解題的整個過程只有讀題與執行，在第一次解題有驗證階段，而第二次解題就沒驗證的歷程。小珍最後的答案是 5 天，與本題答案 6 天差一天。但其計算過程是對的，只是在計算天數時，小珍為逐日計算，僅看到最後 5 加 5，就認定蝸牛爬行為 5 天就到井口。

小珍讀題(3-1-01)後立即執行，「5 減 4 等於 1；1 加 5 等於 6；6 減 4 等於 2；……；14 減 4 等於 10。算完了十天。(3-1-02)」接著，將整個算式過程驗證一次(3-1-03)。立刻回頭再將題目讀題一次，發現題目寫著「蝸牛爬到井口就不會在滑下(3-1-06)」，於是再執行，將「5 加 5 等於 10」之後的計算式全部擦掉(3-1-05)。就立刻寫上答案為 5 天。

## 第二題：隨便猜的直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r} \triangle \quad \star \\ + \quad \star \quad \square \\ \hline \star \quad \square \quad \star \end{array}$$

小珍讀題後就立即執行，並無分析、計畫、探討與驗證等階段。用「猜的」的方式去嘗試錯誤求得答案，無計畫性的解題。

小珍讀題(3-2-01)後，停了一下，就開始執行(3-2-02)，他以推理方式推得正方形為零「不管幾加零都會一樣，所以正方形是零。(3-2-02)」接著用猜的(3-2-04)，先在加數十位數字三角形上填「1」，之後，又改成「9」，然後，在被加數十位數星形的位置填上「1」。最後，在將所有數字寫上實際計算一次，用比對的方式確定三角形為「9」、星形為「1」、正方形為「0」(3-2-05)。結束後並無進一步的驗證。

## 第三題：一直加七的當機月曆

2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？

小珍讀完題後，就立即執行，用不同「加七」的四種方式來執行，

最後小珍也不知道為什麼求出來的答案為「星期三」。解題歷程中完全沒有分析、計畫、探討、驗證等歷程。

小珍在讀題(3-3-01)後立即執行，她先將「1加7等於8；8加7等於15。(3-3-02)」。「算錯了！(3-3-03)」，又執行另一方式「1加30等於31，31加31等於62，62加30等於92。(3-3-04)」。「算錯了！」，又執行另一方式「7乘以4等於28(3-3-07)」。「算錯了！」，再執行另一方式「1加7等於8，8加7等於15，……，113加7等於120，120加7等於127，127加7等於134。(3-3-09)」接著以四周為單位標上三月、四月、五月、六月、七月(3-3-10)，標完後將「120加7等於127，127加七7等於134。」擦掉(3-3-11)，最後答案寫「星期三」並補上一句「老師我不會算這一題」(3-3-12)。

#### 第四題：中間數字一個一個慢慢試的九宮格

請將1、2、3、4、5、6、7、8、9這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

小珍未仔細分析數字的關係，整個解題歷程可以說就是讀題後，接著都是執行，很少有分析與計畫的歷程。經過幾次的嘗試錯誤，小珍還是放棄了。

小珍讀題(3-4-01)後，停了一下，分析「五是一到九排列的中間(3-4-05)」，就執行將五放在中間(3-4-03)，接著其他數字任意填上

使和為十二。發現無法執行，又改為「中間放一(3-4-07)」，接著亦是任意填上其他數字，又發現無法執行。如此，中間嘗試過「九」、「七」、「四」，但都未成功。最後宣告放棄。

#### 四、抽象表徵的小迅

小迅則是因為其解題過程迅速，故以迅速的「迅」命名。就小迅四題的解題過程，可以發現，其符合 Schoenfeld(1985)讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等六個階段，唯計畫階段較不明顯。我們亦可發現，小迅依循著讀題、分析、計畫、執行、驗證之順序進行。小迅都以抽象表徵的方式來完成。如「先扣除最後一次直接跳上去的蝸牛」、「十位數著手邏輯推理的直式加法」、「除七餘五的月曆」、「九八七要分開的九宮格」等四題（圖 4-5）。



##### 第一題：先扣除最後一次直接跳上去的蝸牛

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

小迅在蝸牛題的解題歷程依循著讀題、分析、計畫、執行、驗證等歷程與順序進行，並在過程中展現監控探索階段的行為。



圖 4-5 小迅解題歷程圖

蝸牛題																
驗證																
執行																
計畫																
探討																
分析																
讀題																
直式加法題																
驗證																
執行																
計畫																
探討																
分析																
讀題																
月曆題																
驗證																
執行																
計畫																
探討																
分析																
讀題																
九宮格題																
驗證																
執行																
計畫																
探討																
分析																
讀題																
 解題成功  解題失敗                * 給學生提示																

在小迅的解題歷程逐字稿中發現，其讀題(4-1-01)後，停了一會，就分析並提出計畫說「他說一個井有 10 公尺，可是蝸牛白天往上爬 5 公尺」(4-1-03)，「那他最後一次要爬的時候他直接跳上去，就不會再往下滑了」(4-1-04)，小迅注意到問題的所有條件，亦搜尋條件和目標的關連性。於是小迅以抽象表徵的方式執行，先將他認為最後一次會直接跳上去的計畫，將 10 公尺先減掉最後一次白天往上爬的 5 公尺(4-1-05)。

接著以白天所爬的距離 5 公尺，減掉晚上滑下的 4 公尺，得到每天早晚僅能上升 1 公尺，將扣除最後一次白天爬升 5 公尺所剩餘的距離，除以每天僅能上升的 1 公尺，求得剩餘距離需花 5 天的時間來完成。將 5 天再加上最後一次往上爬的時間，所以共花費 6 天時間來完成(4-1-06)。之後，小迅重新檢查其整個計算過程，驗證確定無誤後，表示完成。

小迅在整個蝸牛題的解題過程，已覺察並瞭解到題目強調的「蝸牛爬到井口後就不會再往下滑」，並依照其一定計畫，先扣除最後一次白天往上爬的距離來執行完成解題，其所採取的行動具有方向與重點，符合探討階段之行為。

另外，筆者發現，小迅在看完題目後，停了一會才進行，筆者認為小迅在那個時間，針對題目進行初步分析與計畫。

## 第二題：十位數著手邏輯推理的直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r} \triangle \quad \star \\ + \quad \star \quad \square \\ \hline \star \quad \square \quad \star \end{array}$$

小迅在本題的解題過程，在讀題(4-2-01)後，以分析與執行等二階段相互交替的方式進行解題。

小迅從十位數著手，分析發現二個十位數字相加，其進位不會超過「2」(4-2-03)，於是執行推得和的百位數字星形為「1」(4-2-04)。接著分析個位數的線索以尋求正方形的答案為目標，小迅提出「1加多少會是一樣？」，接著執行求得正方形為「0」。最後再依據三角形加1等於10的方式，求得三角形為9。

整體解題行動而言，具有一定的方向，且有掌握到該題解題之重點，符合探討之行為，另外，小迅還是會將整個解題過程再檢查一次後，結束其解題活動。唯在本題解題歷程中，未明顯見到小迅有計畫之行為。

### 第三題：除七餘五的月曆

2003年3月1日是星期三，請問2003年7月9日是星期幾？

小迅在本題的表現，亦未聽到明顯的計畫階段，但其仍可依照一定的方向與重點的探討監控階段特質來進行解題。整個解題歷程大至仍依循著讀題、分析、執行、驗證等順序與階段。

小迅讀題(4-3-01)後，並未立即解題，其停了一下，分析探討大月、小月的日數，與月曆經驗相結合(4-3-02)。執行由三月一日到七月九日一共有131天，以每週七日為單位，將131除以7，餘5。小迅由星期四開始分配剩餘的五日，答案為星期一(4-3-04)。最後小迅檢視自己的計算過程驗證後，並未覺察131天包含三月一日，剩餘的五日應由星期三開始計算，本題正確答案應為星期日，而非小迅所計算的星期一(4-3-05)。

### 第四題：九八七要分開的九宮格

請將1、2、3、4、5、6、7、8、9這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

小迅在本題的解題歷程，可以看出其充分表現出讀題、分析、計畫、執行、驗證、探討監控等六個階段。

小迅讀題後，想了一下，分析「一」到「九」數字間的關係(4-4-07)，因為五在這列數字的中間位置，於是決定將五放置在九宮

格中間，並計畫從九、八、七等三個較大數字著手(4-4-03)，認為這三個數字不會在同一線上。依據此目標開始執行其計畫，一開始尋求以和為十六的組合，不斷地嘗試各種組合尋求解答(4-4-04~4-4-12)，後來更改和為十五(4-4-13)一次就成功解出。在過程中，小迅不斷地監控其計算過程是否有誤(4-4-8、4-4-9、4-4-10、4-4-11、4-4-12)。並且在最後解出答案時，仍將橫直斜再加總一次，以驗證答案是否正確(4-4-14)。

## 五、從不驗證的小揚


小揚當有新的發現或解題完成時就會「啊哈！」上揚的聲調，故以「揚」命名。小揚的解題歷程可以看到他會讀題、分析、計畫、執行，但就是不見其有驗證之行為。(圖 4-6)

### 第一題：爬了十天的蝸牛

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？(蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了)。

小揚一拿到題目讀完題就立即執行，並未有任何停下來思考的時間來進行分析或計畫。最後解題完畢亦未進行驗證之工作。其答案是錯誤的，認為一天僅爬 1 公尺，10 公尺一共需要爬行 10 天始能完成。完全忽略「蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了」之條件。

圖 4-6 小揚解題歷程圖

蝸牛題															
驗證															
執行			☹️												
計畫															
探討															
分析															
讀題															
直式加法題															
驗證															
執行									😊						
計畫															
探討															
分析															
讀題															
月曆題															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
九宮格題															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
 解題成功  解題失敗                * 給學生提示															

小揚整個的解題過程是，讀題(5-1-01)後，就直接執行(5-1-02)寫著「5 減 4 等於 1，1 加 5 等於 6，…，5 減 4 等於 1。」接著就突然說自己全部寫錯了。而更改為「5 減 4 等於 1，10 減 1 等於 9，5 減 1 等於 4，9 減 1 等於 8，…(5-1-04)」也就是將每天早晚所能爬行的距離一公尺算出，用井深 10 公尺的距離來求出每日剩餘多少距離。如此計算，其答案為十天。最後並無驗證行為。

## 第二題：代入法的直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r}
 \triangle \quad \star \\
 + \quad \star \quad \square \\
 \hline
 \star \quad \square \quad \star
 \end{array}$$

小揚的解題過程，在讀題後，大都呈現在分析與執行交互作用的階段，計畫部分僅能由其按一定步驟來解題，看出其具計畫性地解題。但在解題後，仍無驗證之行為出現。

小揚一開始讀題，此次小揚在讀題部分會將某些不重要的內容略讀，如題目「這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字」。小揚則略讀為「這三個符號各代表 0 到 9 中某一個

數字」，將「零一二三四五六七八九」直接讀為「零到九」，不影響其對題意的瞭解，簡潔地陳述問題（探討階段）。此次小揚在讀題後，停了一下，分析個位數加法之題意「多少加多少等於多少，譬如說六要加多少等於六(5-2-03)，直接執行求得正方形答案為零。按一定程序（計畫）來分析與執行(5-2-06~5-2-10)解題活動。在歷程中亦能發現自己探索嘗試錯誤(5-2-08)，提出修正。

### 第三題：每個月少一天的月曆

2003年3月1日是星期三，請問2003年7月9日是星期幾？

小揚在本題歷程中，讀題後，停了一下後就開始依一定的方向（探討）執行過程中未明顯聽到學生有分析與計畫的階段，但經研究者過程中的詢問後(5-3-03)，仍可瞭解小揚在執行前停下來的未表達的時間，應是進行分析與計畫(5-3-03)。最後小揚仍無驗證之行為。

小揚讀題(5-3-01)後，分析一週有七天(5-3-03)，於是計畫且執行「1加7等於8，8加7等於15…」(5-3-04)，如此規律性地以七為單位累加，一直到每個月月底時，小揚則會「22加7等於29，因為剩下二天，所以先加2，29加2等於31，這是三月。因為這裡只有加了二，所以還有五天，所以要1加5等於6」(5-3-04~5-3-05)。先補足至三十或三十一日後，也就是將一週七天先加足至三十或三十一天，再將剩餘的天數補到下個月，讓日期一直保持在星期三。



但是，小揚在每個月底與月初計算日子時，都少加了一天。以四月份(5-3-04)為例，小揚以七日為單位計算，至三月二十九日皆可得知為星期三。而小揚就加上二天將二十九日補至三十一日，求得三十一日為星期五。接著又將七日中扣除二日而剩餘的五日，算至四月份當中，由此我們可以推得四月五日為星期三。但是，小揚是從四月一日「再加五天」，則星期三就變成四月六日。如此，四月份就少了一天。小揚五月、六月、七月皆是如此，所以，一共少了四天。因此，小揚最後得到的答案為星期三與正確答案星期日相差了四天。

#### 第四題：直覺中間就是 5 的九宮格

請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

小揚採用嘗試錯誤的方式來進行解題，但可以發現其依循著數字的關係，採用數字配對，如「九與一」、「八與二」、「七與三」、「六與四」或其他配對方式來進行試探。在解題過程中小揚強調他的直覺，較未有謹慎的分析與計畫，所以過程中不斷地嘗試。所以小揚在本題的解題過程，其探討監控的行為較少，在解題後亦無驗證之行為。

讀題後，停了一下，執行「這邊放五（中間）」(5-4-03)，小揚分析完九個數字後，將九個數字前後配對「因為九對一、八對二、七對三、六對四，只剩下五，所以中間一定是五。」(5-4-04)計畫將五放在中間。接著分析「因為只有五沒對嘛。其他都有，加起來剛好是

十。」(5-4-07)計畫且執行「旁邊都可以隨便填，只要加起來是十就對了。」(5-4-05、5-4-06)之後，就宣告「算完了！」(5-4-08)無做任何驗證工作。

研究者請小揚檢查一次，小揚發現只有六條橫、直、斜的和為十五(5-4-09)。接著又將三(右上)與四(左上)的位置調換，藉著又將六四三九一七擦掉(5-4-10)，研究者判定小揚未加思索就立即執行。小揚憑自己的直覺強調「我確定中間這一定是對的！」(5-4-11)接下來不斷地嘗試錯誤(5-4-12)，之後也將中間數字「五」更改為「一」(5-4-13)，原因也是「直覺」。接下來亦是不斷地嘗試錯誤，最後大喊「現在中間就是五～～」(5-4-15)，又決定將中間數字「一」改回原來堅持的「五」，接著依「九與一」、「八與二」、「七與三」、「六與四」配對的方式將所有數字填上，赫然發現自己成功了，而產了「啊哈！」的反應高喊「耶！～～～完成了！」(5-4-17)

## 六、繪圖表徵的小涂

小涂(圖)常利用繪圖表徵來進行解題，故以諧音「涂」命名。小涂在蝸牛題與月曆題都採繪圖表徵(圖4-7)的方式來進行解題。整個解題歷程小涂大致是讀題、分析、計畫、執行、探討、驗證，但也不是每一題小涂都會出現這六個歷程。(圖4-8)

圖 4-7 小涂蝸牛題繪圖表徵

(1) 一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。



5-4=(1)  
1+5=(6)  
6-4=(2)  
2+5=(7)  
7-4=(3)  
3+5=(8)  
8-4=(4)  
4+5=(9)  
9-4=(5)  
5+5=(10)  
A: 6天



### 第一題：繪圖與抽象表徵相互驗證的蝸牛

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

本題小涂是以繪圖表徵的方式來進行解題。整個解題歷程，在讀題後，停了一下，他就以繪圖表徵的方式來進行分析與稍微修改問題地探索，並依一定方向來執行解題。最後不但檢視自己的解題過程並用抽象表徵的方式來驗證。唯本題解題過程中，未見小涂有明顯展現出計畫階段。

由小涂所畫了一個井及標示出一至十公尺的刻度位置的圖，並在執行時往上畫五公尺，再往下畫四公尺，可以知道他在讀題時皆已掌握了問題的所有條件，以畫圖表的方式來進行分析、探討(6-1-03)，接著「就照他說的，往上爬五公尺，再往下四公尺。每天都這樣爬。」(6-1-05)以繪圖的方式來執行(6-1-04)。求得蝸牛需花六天時間來爬行。小涂先瀏覽整個過程驗證(6-1-06)，之後，再以「五減四，一；一加五，六；六減四，二……」(6-1-07)抽象表徵的方式驗證一次，以確定答案正確。

## 第二題：從零或一開始嘗試錯誤的直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r} \triangle \quad \star \\ + \quad \star \quad \square \\ \hline \star \quad \square \quad \star \end{array}$$

小涂從零、一開始嘗試錯誤的方式來進行解題，其歷程包含了讀題、執行、探討監控、驗證依序順序進行。唯分析、計畫歷程較不明顯，但我們亦可從他解題的過程中發現，小涂仍有分析與計畫的階段，如：他知道未知數為三角形、星形、正方形等三個符號，其條件範圍在零到九等十個數字，計畫將這十個數字逐一代入以求得解答。只是其在過程中並未明顯表達出來。

小涂讀題後，停了一會，就開始執行，「因為他說從零開始嘛！」(6-2-04)於是先將「1」代入加數的個位數字星形(6-2-03)，接著將「0」放入加數的十位數字三角形(6-2-05)。然後發現加數的十位數字為「0」，趕緊將「0」填入被加數的正方形中(6-2-06)，但其監控到錯誤的理由為：若加數的十位數三角形為「0」，加上被加數的十位數字星形為「1」，則和的十位數字正方形就等於「1」，因為星形已經是「1」了，所以正方形不能為「1」(6-2-07)，由此推得三角形為「0」

是錯誤的。小涂發現錯誤並非因為加數是二位數，而三角形是加數的十位數字不得為「0」。

接下來，小涂執行十位數的相加，將「9」填入加數十位數字三角形中，「9 加 1……」(6-2-08)停了一下，「十！零就進一了！」突然間產生「啊哈！」的反應，興奮地喊著「老師我找出答案了！」(6-2-09)由此可推得小涂是用嘗試錯誤的方式在試探，令他驚訝的是，沒想到「9」填入三角形就成功了。小涂瀏覽整個解題過程，並將 91 加 10 等於 101，驗證後才宣告完成。

### 第三題：畫一個月曆

2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？

小涂與其經驗中的月曆相結合，以繪圖表徵的方式來完成解題，其歷程為讀題、探討、計畫、執行、驗證。從其解題的過程具一定的目標與方向性，可推得其分析階段應已融入在讀題過程中。

小涂讀題後(6-3-01)，停了一下(6-3-02)，探討階段將問題與其生活經驗中的月曆相結合(6-3-03)，計畫畫下月曆來計算七月九日是星期幾？(6-3-03)並「從三月一日開始算。」(6-3-04)畫好月曆後，就依計畫執行，由三月一日星期三開始寫起，「1 (寫在星期三的位置)、2、3、4、……、31 (星期五)。……」一日一日地填入月曆中。

解題過程亦會與既有的認知相互結合，如「三月大、四月小、五月大、六月小、七月大」(6-3-06~6-3-08)等既有的認知，探討監控該月月曆是三十一天或三十天。另外，也隨時回頭檢視過程是否有錯誤的地方(6-3-09)。最後，小涂重新驗證整個過程，並在檢視過的月份旁，標示該月的月份(6-3-11)。

#### 第四題：由大至小填入數字的九宮格

請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

小涂在本題解題過程，雖有讀題、分析、計畫、執行、驗證、探討監控等階段，也勇於嘗試錯誤地去探究答案。但可以發現小涂未深入進行問題分析與計畫，僅是朝著錯誤的方向不斷地嘗試錯誤，如九八七六要在中間(6-4-07)。但最後經其深入思考後(6-4-16)，其解題就較有朝著條件線索與目標來進行解題。

小涂讀題後(6-4-01)立即執行將「一」填在中間(6-4-02)，後來分析題目「一二三四五六七八九填入空格。橫、直、斜和相等」(6-4-03)。來回觀察分析一到九的數字間的關係(6-4-05)，將「九與六」、「八與七」相互連線在一起(6-4-06)。停了一會，提出計畫「把九八七六寫在中間，其他的寫在旁邊。」(6-4-07)根據計畫執行把「九寫在中上，八寫在中下，七寫在右中，六寫在左中」；「五寫在右上，四寫在右下，三寫在左下，二寫在左上」(6-4-08)，接著將橫、直、



斜加總，監控自己之前的解題行為發現有誤(6-4-09)。

於是提出修正計畫「就是把剛剛的五四三二把他移位置(擦掉五四三二)」、「把九八移位置，七六移位置」(6-4-10)。之後，不斷地執行、監控，小涂堅持「九八七六安排在中間」的位置，再加加看總和是否會一樣。一直到了研究者問「你的和是多少？」小涂才回答說「十五」(6-4-11)，改變策略進行嘗試，但仍無法求得解答(6-4-11~6-4-12)。

之後，研究者詢問其是否有意願要繼續解題嗎？小涂想要繼續完成，但經過一次嘗試仍未成功(6-4-15)，小涂突然停住(6-4-16)，過了一會，計畫「把中間換成五」(6-4-17)，因為小涂分析「如果把五放在中間的話，六加四等於十，十再加五等於十五。(6-4-18)」接著繼續執行「將五寫在中間，六寫在中上，四寫在中下，八寫在右中，二寫在左中(6-4-19)」。

依此計畫不地嘗試錯誤，最後一次還是讓小涂試探成功(6-4-20)，驗證後，很疑惑地表示完成(6-4-21)。

## 貳、整組學生解題歷程綜合分析

依據表 4-1，本研究發現，三年級資優班新生在解題過程，解題成功較多者，如小姮、小茹、小迅、小涂，他們大都會出現較多 Schoenfeld (1985) 所題的讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等階段。而解題成功機率較少的小珍可以發現，較少有分析、計畫、探

討、與驗證的階段。小揚在四題解題過程中皆無驗證階段。另外，就整體而言，研究者發現，這六位資優生在解題時，不是每次都會出現分析、計畫與驗證等後設認知的階段（圖 4-9~圖 4-12）。

就以上所述，本研究結果與劉貞宜（2001）針對三位建中數學資優生的研究結果發現相同，也就是，能力越高的學生解題路徑越多，所呈現的歷程階段越多，而能力較弱的如小珍則常常使用無系統的假設或嘗試錯誤來探索題目。

表 4-1 解題歷程階段統計表

題號 學生	一						二						三						四					
	姁	茹	珍	迅	揚	涂	姁	茹	珍	迅	揚	涂	姁	茹	珍	迅	揚	涂	姁	茹	珍	迅	揚	涂
成敗	成	成	敗	成	敗	成	成	成	成	成	成	成	成	成	敗	敗	敗	成	成	成	敗	敗	成	成
讀題	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
分析	*	*		*		*	*	*		*	*		*			*	*		*	*	*	*	*	*
探討	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*		*		*	*	*		*	*	*
計畫		*		*			*			*		*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*
執行	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
驗證	*	*		*		*	*	*		*		*		*		*		*				*		*

圖 4-9 蝸牛題解題歷程圖



小垣															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
小茹															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
小珍															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
小迅															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
小揚															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
小涂															
驗證															
執行															
計畫															
探討															
分析															
讀題															
 解題成功  解題失敗           *給學生提示															

圖 4-10 直式加法題解題歷程圖



<b>小姮</b>																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
<b>小茹</b>																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
<b>小珍</b>																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
<b>小迅</b>																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
<b>小揚</b>																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
<b>小涂</b>																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
 解題成功  解題失敗                 * 給學生提示																			

圖 4-11 月曆題題解題歷程圖



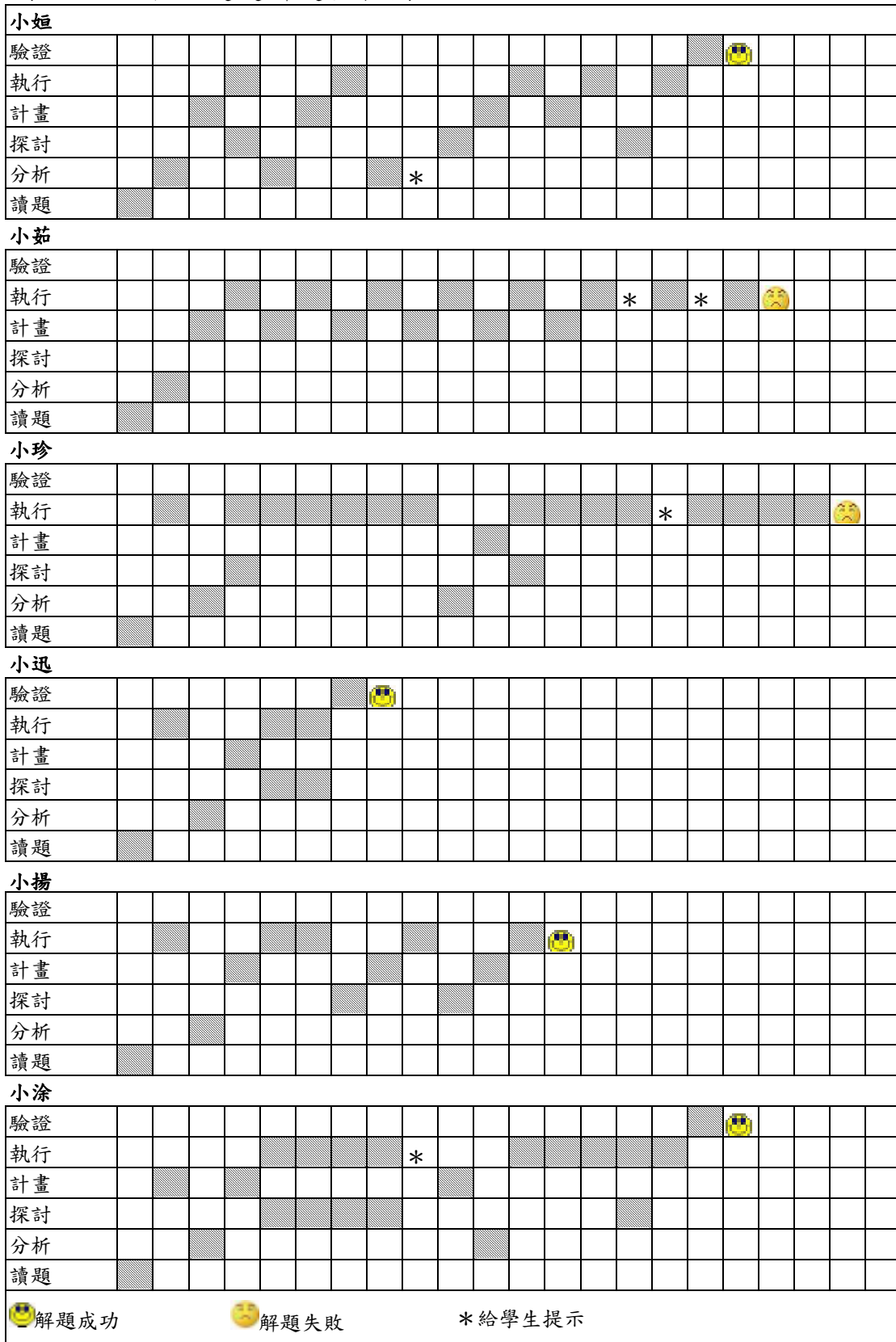
小婭																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
小茹																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
小珍																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
小迅																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
小揚																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
小涂																			
驗證																			
執行																			
計畫																			
探討																			
分析																			
讀題																			
 解題成功  解題失敗                * 給學生提示																			

圖 4-12 九宮格題題解題歷程圖



## 第二節 一般智能資優生數學解題策略之分析

本研究發現這六位一般智能資優班新生最常善用的策略為抽象表徵、逆推、歸納尋找規律性、及嘗試錯誤（表 4-2）。針對蝸牛、直式加法、月曆、九宮格等四題，說明解題者所使用的策略如下：

表 4-2 解題者在各題使用的解題策略

策略 \ 題號 學生	蝸牛	直式加法	月曆	九宮格
抽象表徵	姮、珍、迅、涂、揚			
繪圖表徵	茹、涂		涂	
逆推	迅	茹、迅	姮	
歸納尋找規律性			姮、茹、迅、揚	姮、珍、迅、揚、涂
嘗試錯誤		茹、珍、涂	珍	姮、茹、珍、迅、揚、涂
替代		姮、茹、揚		

## 一、蝸牛題

一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

六位解題者在本題的解題策略大致可分為二類：一為抽象表徵；二為繪圖表徵。另外，還有應用逆推的策略。

- (一) 抽象表徵：小姮、小珍、小迅、小揚利用抽象表徵的方式進行解題，根據問題「蝸牛白天往上爬五公尺，夜晚往下滑四公尺」，以「加五」代表往上爬五公尺；以「減四」代表往下滑四公尺。另外，小涂雖以繪圖表徵來進行解題，但其亦採用抽象表徵的方式來進行驗證。
- (二) 繪圖表徵：小茹、小涂以繪圖表徵的方式進行解題，他們依題意先畫下一口十公尺的井，再從井底每日往上畫五公尺、往下畫四公尺，以求得答案為六天。
- (三) 逆推：這六位解題者當中，小迅還應用了逆推的策略。小迅「那他最後一次要爬的時候他直接跳上去，就不會再往下滑了。(4-1-04)他之前無法一口氣跳到上面去，一次只能先跳五公尺，所以十要先減五。



(4-1-05)」。以目標十公尺先扣除最後一次往上爬行的距離五公尺。剩餘的五日再逐日爬行。

## 二、直式加法

下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r}
 \triangle \quad \star \\
 + \quad \star \quad \square \\
 \hline
 \star \quad \square \quad \star
 \end{array}$$

六位解題者在本題的解題策略的應用大致可分為三類：一為逆推；二為嘗試錯誤；三為替代。

(一) 逆推：小茹、小迅使用逆推策略，如小茹「三加多少等於十？(2-2-10)」，小迅「一加多少等於一？(4-2-04)」。

(二) 嘗試錯誤：小茹、小珍、小涂會嘗試將所有可能的答案填入的方式來進行解題。如：小茹「九（個位數字星星是九）加一（被加數的個位數正方形）(2-2-04)」；小珍「三角形是9，隨便猜的(3-2-04)」；小涂「先把一放在星星（加數的個位）的中間（星星為一）。因為他說從零開始嘛！所以把零先放在三角形（加數的十

位)這邊。(6-2-03~6-2-05)」

- (三) 替代：小姮、小茹、小揚以假設性的數字當作輔助元素填入，以幫助解題。如：小姮「星星如果是六，這樣就變六百多(1-2-07)」；小茹「我假設這個(被加數十位正方形)是零的話。那三角形(加數十位)是七(2-2-10)」；小揚「多少加多少等於多少，譬如說六要加多少等於六(5-2-03)」。

### 三、月曆

2003年3月1日是星期三，請問2003年7月9日是星期幾？

六位解題者在本題的解題策略的應用大致可分為四類：一為繪圖表徵；二為逆推；三為歸納尋求規律性；四為嘗試錯誤。

- (一) 繪圖表徵：小涂以繪製月曆的方式來求得七月九日為星期日。
- (二) 逆推：小姮「我本來要用一百除以七，但是這樣很難，所以我就改成七乘以九等於六十三，然後七乘以五等於三十五，然後加二等於一百，再加二十九天就是一百二十九，這樣就可以開始算是星期幾。(1-3-11)」
- (三) 歸納尋求規律性：小姮、小茹、小迅、小揚皆以一週

有七天的週期規律性來解題。如小姮、小迅以除七的方式，而小茹、小揚則以加七的方式來解題。

- (四) 嘗試錯誤：小珍以嘗試錯誤的方式解題，有時加七，有時加每個月的天數，用直覺在解題(3-3-13)。

#### 四、九宮格：

請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

六位解題者在本題的解題策略的應用大致可分為二類：一為歸納尋求規律性；二為嘗試錯誤。

- (一) 歸納尋求規律性：小姮、小珍、小迅、小揚、小涂等，大都會先觀察數字間的關係再進行解題，如「一加九、二加八、三加七、四加六都等於十，只有五未配對，所以選擇五為中間。」或其他的配對組合。
- (二) 嘗試錯誤：因為沒有解題者針對九宮格的橫、直、斜的「和」先做計算，所以大都是用猜的嘗試錯誤法進行解題。

從表 4-2，研究者發現，蝸牛題六位解題者以抽象表徵的方式進行解題者較多，如小姮、小珍、小迅、小揚。小涂除了利用繪圖表徵的方式解題外，還應用抽象表徵的方式來進行驗證。而小茹採用繪圖

表徵的方式來進行解題。小迅亦採取逆推的方式來完成解題。

在直式加法題方面，解題者大多採用嘗試錯誤和替代的策略來輔助解題，僅有小茹與小迅應用逆推的方式協助解題。在月曆題方面，則以歸納尋找規律性的策略來進行解題，只有小涂以繪製月曆的方式進行解題。在九宮格題方面，則以嘗試錯誤與尋求數字間的規律性來進行解題的策略應用。

從以上結果及表 4-3，可以發現六位資優生的解題過程中，在解題策略方面的應用，是具多元與靈活。資優生利用多元解題策略來理解問題、探索方向，與劉貞宜（2001）針對建中三位數學資優生的研究結果相符合，他們的解題策略也是較為多元與靈活。劉貞宜表示資優生利用解題策略來幫助自己理解、思考、探索、聯結及推理，讓整個解題更舒暢與快速。

表 4-3 六位解題者使用的解題策略

學生 策略	小姮	小茹	小珍	小迅	小揚	小涂
抽象表徵	*		*	*	*	*
繪圖表徵		*				*
逆推	*	*		*		
歸納尋找規律性	*	*	*	*	*	*
嘗試錯誤	*	*	*	*	*	*
替代	*	*			*	

### 第三節 一般智能資優生數學解題之情意特質分析

研究者將最難的「九宮格」設計在最後一題，目的亦是要更易於觀察學生的情意特質的展現，並輔以適時的訪談來蒐集情意方面的資料。這六位解題者，皆有一個共通特質，就是在解題過程相當有毅力，不論是否有把握完成，但他們都「堅持」完成。大部分的解題者對自己部分的答案無十足的把握，但是整體來說，仍對自己有些許的信心。另外，大部分解題者覺得數學是「有趣的」。整體看來這六位資優班新生在情意方面的表現大致是呈現「正向的態度—堅持、信心、有興趣」。以下說明六位解題者的情意特質表現（表 4-4）：

表 4-4 六位解題者的情意特質

特質		學生					
		小姮	小茹	小珍	小迅	小揚	小涂
正向態度	毅力、堅持	*	*	*	*	*	*
	自信	*			*	*	*
	有興趣的	*		*	*	*	
負向態度	感到挫敗						
	立即放棄						
	沒自信		*				

## 一、自信又愛數學的小姮

小姮在四題問題的解題過程，她都能堅持完成，研究者提醒她可以放棄，他堅持「一定要寫出來才可以走。(1-4-16)」在自信方面，他僅有把握三題會對(1-4-19)，而實際上小姮四題都答對了。在訪談中，小姮表示喜歡數學，因為爸爸重視(1-4-20)。若遇到不會數學問題，小姮還是會主動尋求支援協助(1-4-21)。

## 二、沒信心但堅持完成的小茹

從蝸牛題的解題過程就可推得小茹相當沒有信心，當她求得蝸牛六天就可爬出來，內心產生很大的懷疑「ㄟ～好像已經爬上了耶？(2-1-06)」，並做了二次的驗證(2-1-07、2-1-09)。小茹也表示對數學沒興趣(2-4-17)，覺得好難。雖然小茹覺得困難，但一心一意「就是想把牠做好！(2-4-16)」，具有毅力與堅持來完成解題，所以在九宮格，他也經過數次的嘗試後才宣告放棄(2-4-19)。

## 三、樂觀的小珍

小珍的毅力與堅持方面，在四題解題過程還算有毅力與堅持要完成解題，但是以月曆題來說，小珍卻不願嘗試較慢而有機會達成的解題方案，「老師我還有一個方法，但是會很慢，就是一天一天的算，我不想寫，因為這樣手會很酸。(3-3-14)」。而在九宮格題小珍一直

解不出來，研究者提醒小珍可以放棄，但小珍卻搖頭表示要繼續完成解題(3-4-24)，可以見其有某程度的堅持。小珍四題問題當中錯三題，正符合其猜測僅對一題(3-4-31)，但小珍不會因此而感到挫折，仍表示「數學很好玩(3-4-29)」。仍然覺得數學是有趣的。

#### 四、情緒穩健的小迅

小迅在解題過程情緒相當穩健，遇到很難的數學問題，小迅唯一想法就是想要把它解出來(4-4-15)，其毅力與堅持度相當高的。另外，小迅也相當有信心自己至少對三題以上(4-4-18)，平時會自己拿數學題來練習(4-4-17)，表示小迅對於數學是有興趣的。

#### 五、不厭其煩的小揚

小揚在九宮格題不厭其煩地嘗試錯誤，希望將答案解出，可看出題堅持度高。在自信方面，他自認為自己可以對三題以上，而實際上他僅對了二題，不過其對自己是有信心的。小揚當他解題出來時都會很高興地歡呼。如果一直解不出來會令他覺得很煩。

#### 六、有自信但不愛數學的小涂

小涂能堅持完成四題解題，且自我評估四題中能答對三題，實際上，小涂四題都答對了。對自己的表現仍是呈現有信心的。但小涂對數學無特別的喜愛。

從表 4-4，這六位一般智能資優生的情意特質的表現皆呈現正向的態度或信念，研究發現不論其解題結果成功與否，可以看出他們共同的特徵就是「堅持」，如小茹雖然過程中一直喊著「頭痛」，但她仍堅持完成解題，不會一遇到問題就放棄。

另外，在訪談過程中意發現，這六位資優生遇到困難的數學問題時，除了會試著解決問題外，還會是時地尋求支援協助。在自信心部分，大致上還算具有自信心，另外也不會因為解題失敗而喪志。如小珍最後雖然放棄，但其未因此而感到喪志，只說「沒關係，回家問媽媽就好了！」瞭解自己的能力，且會尋求相關支援來彌補其所不能的部分；對於數學的興趣的方面，本研究發現並非每一位一般智能資優生對於數學都是有興趣的，如小涂，雖然可以完成解題但並非那麼喜歡數學，只覺得還好而已。而小茹就很堅定的說他不喜歡數學。所以並非一般人認為資優生在數理方面都有興趣。

整體來說，六位資優生在數學解題的情意特質表現符合 Sternberg (1987, 2000) 資優生在創造力方面的特質，如有意願克服障礙、適度的冒險、期望被認可等。亦符合 Krutetskii (1976) 數學天才在解答數學題時的心理特點之一，對數學作業很少感到疲勞等。一般智能資優生在解題的情意特質結果亦如劉貞宜 (2001) 與 Sriraman (2003) 的研究，大多抱持正向積極的態度與信念，如堅持、



興奮、自信，且情緒反應大多無出現較大的負向情緒與行為，如趴在桌上、想睡覺。

綜合以上三節研究結果所述，研究者發現，資優生除了具備 Schoenfeld(1985)提及的解題六階段外，還具備資源、啟發策略、控制力與信念系統等知識與行為。就資源來說，他們會使用其所擁有的數學知識，處理這些非例行性的問題，如小揚常會說是「直覺」。就啟發策略，他們靈活應用策略與技巧來解不熟悉非例行性問題。就控制力來說，大部分都有解題過程中的監控行為，及驗證之後設認知行動，唯計畫行為較少。在信念系統方面，大部分都能呈現一連串個人解題行為的決定。

## 第五章 結論與建議

本章主要分為二大節：第一節有關資優生解題的發現；第二節根據研究結果針對教學方面與未來研究方面的建議。

### 第一節 有關資優生解題的發現

本研究之主要待答問題為：在資優生的解題歷程中，根據 Schoenfeld (1985)的數學解題六階段，資優生的解題的歷程為何？使用哪些解題策略？展現情意特質 (affective characteristics) 為何？說明如下：

#### 一、資優生數學解題符合解題歷程六階段

六位資優生的數學解題歷程大都會出現如 Schoenfeld (1985) 所提出的讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等階段。其中，小姮、小茹、小迅、小涂四位解題成功率高的學生，所呈現的歷程階段較多；小揚在四題解題過程中皆無驗證階段，僅答對二題；另外，還有小珍解題成功率較低，僅答對一題，從小珍的解題歷程可以發現其較少有分析、計畫、探討、與驗證等階段。

#### 二、資優生的解題策略靈活且多元

本研究發現這六位一般智能資優班新生善用的策略為抽象表

徵、繪圖表徵、逆推、替代、及嘗試錯誤。另外，研究者發現，在解題過程中，解題者是交互應用這些解題策略，來輔助瞭解題意，與幫助自己完成解題。其解題策略應用上是較為多樣性且靈活運用解題策略。

另外，研究者發現，蝸牛題六位解題者以抽象表徵的方式進行解題者較多，其次為繪圖表徵的方式來進行解題。其中一位解題者採取逆推的方式來完成解題。在直式加法題方面，解題者大多採用嘗試錯誤替代的策略來輔助解題，僅有二位解題者應用逆推的方式協助解題。在月曆題方面，則以歸納尋找規律性的策略來進行解題，只有一位解題者以繪製月曆的方式進行解題。在九宮格題方面，則皆以嘗試錯誤與尋求數字間的規律性來進行解題的策略應用。所以，解題者在各題的解題策略應用亦有所差異。

### 三、資優生的情意特質均具正向態度

這六位資優班新生在解題情意方面的表現大致是呈現「正向的態度或信念—堅持、信心、有興趣」。即使如小茹在解題過程中直喊「頭痛」，但她仍堅持完成解題。另外，如小珍，雖然解題的成功率相當低，但她也並非一開始就放棄解題，也是到最後才宣告放棄，即使放棄了她也不覺得挫敗，認為只要再去請教媽媽就好了，也不會因此而喪志，依然表示其喜愛數學，覺得數學是有趣的。所以，整體來看，

六位資優生在解題過程較少出現負向的態度或信念—挫敗、放棄、沒自信。他們的情意特質均趨向正向態度或信念。這樣的正向態度的情意特質表現符合 Sternberg (1987) 創造力的人格特質，如有意願克服障礙、適度的冒險等。亦符合 Krutetskii (1976) 數學天才在解答數學題時的心理特點之一，對數學作業很少感到疲勞等。

## 第二節 資優生教學與研究方向建議

本節主要是根據研究結果，給予教學方面的建議，並根據本研究在進行過程中的問題與限制來給予未來研究方面的建議。

### 壹、教學方面的建議

#### 一、加強訓練探討、計畫、與驗證等後設認知的能力

本研究發現，雖然這六位學生皆為資優生，但並未所有的一般智能資優生其探討、計畫、與驗證等後設認知能力都具備。然而，資優教育著重思考能力的訓練，後設認知在思考訓練中又是相當重要的。所以，在數學方面的教學，可加強訓練學生探討、計畫與驗證等後設認知的能力。

#### 二、課堂討論提供解題策略相互學習的機會

資優生的解題策略較為多元且靈活，可藉由討論分享的機會來促進其他成員藉由同儕學習的方式獲得更多的解題策略。學生

能解此搭便車的方式增廣其解題策略的能力與應用。在普通班亦可利用討論分享的機會，藉由發表的機會，讓這些資優生或其他學生能提供其解題策略，讓其他同學有相互學習的機會。

### 三、賦予資優生責任感擔任數學小老師

資優生在解題思考較為靈活，面臨一個問題情境或困境，利用自己所擁有數學的知識與能力，透過心智運作善用推理、歸納、尋求規律性等能力，將所面臨的問題解決，獲得答案的過程，其過程未必需應用算式始能求得解答。一般智能資優資源班學生平時是在普通班與其他同儕互動學習，普通班教師可利用資優生此項特質，塑造同儕相互學習的機會與空間。善用資優生的能力，賦予資優生責任感，成為數學教學的小老師，協助教師輔助班上數學學習能力較弱的同學，並藉由擔任小老師的機會，讓資優生學習服務的精神。更符合資優教育發展的目標與精神。

### 貳、未來研究方面的建議

在本研究進行中的問題與限制，若能加以改善，能使研究進一步的成果。以下提出對研究對象、方法、工具、與內容的建議，以做為未來研究之參考。

## 一、研究對象

本研究因限於時間、人力之限制，故在研究樣本的抽樣採立意抽樣。且針對六位個案作解題歷程分析。因此，建議往後研究對象可擴大人數，擴大區域。另外，也可增加對普通班學生數學解題的研究，可以比較資優生與普通生的數學解題能力。探討兩群體的研究對象間在數學解題的歷程是否有差異？

## 二、研究內容

本研究主要是分析瞭解國小三年級資優班新生的數學解題的歷程。建議往後可針 Schoenfeld (1985)的讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等數學解題歷程階段，針對一般智能資優生，依 Schoenfeld 數學解題歷程的六階段，採問題引導的方式進行教學實驗研究，以探究其數學解題的能力是否有改變？進而發展出一套可執行的教學方案。

## 參考書目

### 中文部分：

毛連塹(2001)。如何實施資優教育。台北：心理出版社。

吳武典(2003)。三十年來的台灣資優教育。資優教育季刊，88，1-5。

吳武雄(2001)。資優學生的情緒特質與輔導。資優教育簡訊，3，1-4。

李伯黍等譯(1983)(Krutetskii 著)。中小學生數學能力心理學。

上海：上海教育出版社。(原著出版年：1976年)。

汪榮才(1990)。增進智力的教學：Sternberg 智力三層面論的應用。

台南師院學報，23，29-42。

香港特別行政區教育統籌局(2003)。校本資優課程教師培訓教材。

2003年9月2日，取自：

[http://prod1.e1.com.hk/education5/Maths\\_TTP/pii.htm](http://prod1.e1.com.hk/education5/Maths_TTP/pii.htm)。

孫達剛(1992)。雄中、雄女學生數學解題之研究。國立高雄師範大

學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。

徐則洲、陳潔雲、李金生、李濟元(2000a)。小學奧林匹克讀本(二年級)。新竹市：凡異出版社。

徐則洲、陳潔雲、李金生、李濟元(2000b)。小學奧林匹克讀本(三年級)。新竹市：凡異出版社。

中華民國特殊教育法 (1984)。

中華民國特殊教育法 (1997)。

高雄市特殊教育資訊網(2003)。特教班統計概況。2003年9月5日，  
取自：<http://www.spec.kh.edu.tw>。

教育部(2000)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。

黃光雄等譯(2001)。Bogdan R. C. & Biklen S. K. 著。質性教育研究  
理論與方法。嘉義：濤石文化。(原著出版年：2001年)

黃敏晃 (1991)。淺談數學解題。教與學，23，2-15。

黃敏晃(2000)。規律的尋求。台北：心理出版社。

黃瑞琴 (1994)。質的教育研究方法。台北：心理出版社。



劉貞宜(2001)。數學資優生的解題歷程分析—以建中三位不同能力的  
數學資優生為例。資優教育研究，2(1)，97-120。

謝淡宜(1998)。小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程  
之比較。臺南師院學報，31, 225-268。

謝淡宜(1999)。國小數學資優生及普通生「數學解題」歷程之比較(四  
年級)。臺南師院學報，32, 297-367。

## 英文部分：

Cohen, S. A., & Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly, 16*, 175-199.

Gallagher J. J. (1985). *Teaching the Gifted* (3<sup>rd</sup>). Newton, MA:Allpn and Bacon Inc.

Goldin G. A. (1982). Department of Mathematical Sciences Northern Illinois University. In F.K. Lester, & J. Garofalo, *Mathematical Problem Solving Issues in Research* (pp.87-101) . Philadelphia, Pa. : Franklin Institute Press.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*, 14-18.

Gruber, H. E. (1986). The self-construction of the extraordinary. In R. J. Sternberg and J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions*

*of giftedness*. Cambridge University Press.

Johnson, H. A. (1980). The nature of student monitoring process in mathematical problem solving tasks. (Doctoral Dissertation, Cloumbia University.) *University Microfilms International*.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. *Dissertation Abstracts International*, 28(11), 4380A.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.1-15). Hillsdale, N. J. : Erlbaum.

Krutetskii, M. A. (1963). Some characteristics of the thinking of pupils with little capacity for mathematics. In B. Simon, & J. Simon (Eds.), *Educational psychology in the USSR*. Stanford, Calif. : Stanford University Press.

Krutetskii, V.A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in school children. In J. Kilpatrick, & I. Wirszup (Eds), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol.2). Stanford, Calif.: School Mathematics Study Group.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Lester, F.K. (1980) . Problem Solving: Is it a problem? In M. M. Lindquist (Eds. ), *Selected issues in mathematics education* (pp. 29-45). Berkeley, Calif: McCutchan Pub. Co.

Lester, F.K. (1994) . Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660-675.

Mayer, R.E. (1982). The Psychology of Mathematical Problem Solving. In F.K. Lester, & J. Garofalo, *Mathematical*

*Problem Solving Issues in Research*. Philadelphia, Pa. :  
Franklin Institute Press.

Mayer, R.E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem. In E. A. Silver (Ed. ), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.123-138). Hillsdale, N. J. : Erlbaum.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977).  
Position paper on basic mathematical skill. *Arithmetic Teacher*, 25, 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000).  
*Principles and standards for school mathematics*.

Retrieved November 20, 2003 from

<http://standards.nctm.org/document/prepost/cover.htm>.

Polya, G. (1945) . *How to solve it*. New York: Doubleday.

Reid, C., & Romanoff, B. (1997). Using multiple intelligence theory to identify gifted children. *Educational*

*Leadership*, 55(1), 71-74.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Re-examining a definition. *PhiDelta Kappan*, 60, 180-184.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Fla. : Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355.

Sriraman B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of four Gifted Students. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 3(14), 151-165.

Sternberg, R. J. (1987). Teaching intelligence: The application of cognitive psychology to the improvement of intellectual skills. In Baron and R. J. Sternberg (Eds. ), *Teaching thinking skills: Theory and practice*. New York: W. H. Freeman and Company.

Sternberg, R. J. (2000). Identifying and developing creative giftedness. *Roeper Review*, 23(2), 60–84.

Sullivan, P. (1997). *Open-ended maths activities: Using good questions to enhance learning*. New York: Oxford University Press.

Vernon, P. E. (1970). *The structure of human abilities* (2<sup>nd</sup> ed). London: Methuen.

Vlahovic-Stetic V., Vidovic V.V., Arambasic L. (1999). Motivational Characteristics in Mathematical Achievement: a study of gifted high-achieving, gifted underachieving and non-gifted pupils. *High Ability Studies*, 10(1), 37–49.

Webb, Norman. L. (1975). *An Exploration of Mathematical Problem Solving Processes*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED106148)

附錄一：專家非例行性問題勾選題

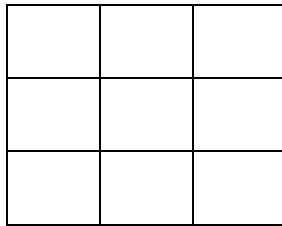
篩選題目原則


1. 利用國小一、二年級所學的數學技巧即可解決問題，但不是利用已學過之數學知識看到題目立即可回答出來。
2. 符合完成國小一、二年級學業之學生的閱讀能力
3. 請勾選八題

各題型分析：

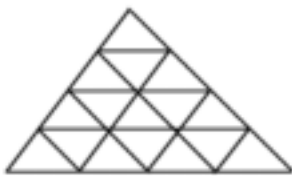
數學能力	尋求規律	邏輯推理	數的概念
題目題號	2、3	5、10	1、4、6、7、8、9

(1) 請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。(Schoenfeld, 1985, p82) (數的概念)



(2) 在這個圖形「」，一共有 5 個三角形，請你先找一找是哪五個三角形。

找到之後，接著請找一找下面的圖形裡一共有多少個三角形？(徐澤洲等，2000b, p7) (尋求規律)



(3) 2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？(徐澤洲等，2000b, p50) (尋求規律)

(4) 白母雞生 3 個蛋休息 1 天，黑母雞生 1 個蛋休息 3 天，兩隻雞一共生了 100 個蛋，需要多少天？(徐澤洲等，2000a, p86) (數的概念)



□ (5) 下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？（徐澤洲等，2000a，p109）  
（邏輯推理）

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad \bigcirc \quad \star \\
 + \quad \quad \star \quad \square \\
 \hline
 \quad \star \quad \square \quad \star
 \end{array}$$

○ = (            )            ☆ = (            )            □ = (            )

□ (6) 請在□裡填上+、-、×、或÷的運算符號，使得數等於 2。而+、-、×、÷運算符號是可以重複出現的，記住在做四則運算要先乘除後在做加減。（徐澤洲等，2000b，p79）（數的概念）

$$2 \square 2 \square 2 = 2 \qquad 2 \square 2 \square 2 = 2$$

$$2 \square 2 \square 2 = 2 \qquad 2 \square 2 \square 2 = 2$$

□ (7) 兩兄弟共有 140 元，如果哥哥給弟弟 15 元，則他們擁有的錢數相同，請問兩兄弟原來各有多少元？（謝淡宜，1999）（數的概念）


□ (8) 一個井有 10 公尺深，一個蝸牛總是在白天爬升 5 公尺，而在夜晚時滑下 4 公尺。如果這個青蛙從井底爬起，則幾天後牠可爬出井外？（謝淡宜，1999）（數的概念）

□ (9) 老師準備了一些糖果要分給小朋友，他如果每人給 3 顆糖果，則有 14 顆糖果餘下，每人分 5 顆糖果則剛好，請問老師共準備了多少糖果又分給多少小朋友？（謝淡宜，1999）（數的概念）

□ (10) 小明的媽媽請小明去河邊裝回 11 公升的水，媽媽給了小明一個 8 公升及一個 5 公升的水桶。水桶上沒有刻度，也沒有辦法作記號，請問小明如何利用這二個水桶帶回剛剛好 11 公升的水？（注意喔！小明只有二個水桶喔！）（謝淡宜，1999）（邏輯推理）

## 附錄二：佈題的情境問題

### 練習題

在這個圖形「」，一共有 5 個三角形，請你先找一找是哪五個三角形。

找到之後，接著請找一找下面的圖形裡一共有多少個三角形？



※我的答案：(        ) 個三角形

(1) 一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。

(2) 下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？

$$\begin{array}{r}
 \triangle \quad \star \\
 + \quad \star \quad \square \\
 \hline
 \star \quad \square \quad \star
 \end{array}$$

※我的答案：△=( )； ☆=( )； □=( )

(3) 2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？

※我的答案：2003 年 7 月 9 日是星期 ( )

(4) 請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。

※我的答案：


## 小姮

### 附錄三：逐字稿

流水號	原案	備註
1-1-01	S：一個井有十公尺深，有一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，在夜晚時會往下滑 4 公尺，如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬井外？然後蝸牛爬到井外後就不會再往下滑。	讀題
1-1-02	S：( 趴在桌上想 ) 白天往上爬 S：( 停了一下 ) 應該是十公尺，一天爬五公尺的話，第二天就會爬六公尺，再滑下來就二公尺，一天一公尺。	分析
1-1-03	R：試試看寫下來 S：第一天就是爬五公尺，再往下滑四公尺就是一公尺；五加一，六，六再減四，二；然後第三天，五加二，七，七減四三；第三天又爬五公尺要加五公尺，五加三，八，減四是四；第二天、第三天、第四天，五加四等於九，然後九減四等於五，還剩五公尺，再算一次，五加五等於十。	執行
1-1-04	S：\ 爬出來了？ S：( 又回頭看計算是一次 ) 五加五等於十，到了啊！\ 六天耶！ S：( 很懷疑又再看了一次 ) R：要交了嗎？ S：( 又再看一次 )。	監視 驗證 驗證

## 小姮

流水號	原案	備註
1-2-01	S：下列直式加法算式中三角形、星星、正方形這三個符號代表，代表的數字不可以重複，請找出符號的代表哪一個數字？（縮減句子）	讀題
1-2-02	S：好像以前算過的但是又不一樣，三角形加星星等於正方形。	探討
1-2-03	S：（停下來思考中）	暫停
1-2-04	S：這個星星加正方形等於星星。	分析
1-2-05	S：星星、正方形（在紙上畫星星、正方形），正方形等於零。 R：正方形等於零怎麼算出來的？ S：星星加零等於星星。	執行
1-2-06	S：三角形加星星等於零（十位）。 S：（一直在想）如果說是零的話，那幾加幾會等於零，這又不是減。	分析
1-2-07	S：（停下來在想）這裡是三角形跟星星（個位），這裡一個是四，一個是六（十位），如果這裡是七跟三，如果星星（停下來在想），星星如果是六，這樣就變六百多（停下來想一想）。 S：可是我覺得這兩個（加數與被加數）加起來應該是一百多，那這裡就擺一（和的百位數...星星），這裡、這裡、這裡都是一（星星的位置），三角形就是九。對！就是這樣。	分析執行 (替代)

小姮

流水號	原案	備註
1-3-01	S：二零零三年三月一日是星期三，請問二零零三年七月九日是星期幾？	讀題
1-3-02	S：(在想)	(暫停)
1-3-03	S：我覺得有點難，	(感覺困難)
1-3-04	S：如果三月一日是星期三，如果把中間這幾天都算出來應該容易找得到(其意指將三月一日到七月有九日之間共有幾天)。	計畫
1-3-05	S：(仰頭嘴巴在唸著) R：你嘴巴一直在唸是在唸些什麼？ S：我在數有幾天。(還是在用嘴巴默數)三月是大月31天，減掉一號(三月一日)就是三十天； S：然後那個四月是小月所以是三十天，所以等於六十； S：然後五月是大月，所以六十加三十一等於九十一； S：然後九十一再加六月三十天是一百二十一； S：然後一百二十一再加七月12345678，八天，這樣就一百二十九，所以這中間一共有一百二十九天。 S：(又停頓在想)如果扣掉這個九的話，還有一百二十，	執行
1-3-06	S：三月一日是星期三的話，那七月九日會是星期幾？ S：一百天，一個星期有七天。	分析 (確認目標)
1-3-07	S：(停下來在想)如果七乘九是六十三，再加三十五是九十八。 S：(停下來在想)如果七乘五等於三五，三十七天有二天還沒有算(差二天就是一百天了)。	執行 (逆推)
1-3-08	S：(停了一下)	
1-3-09	S： <u>六月一日星期三</u> (不知該如何一直揮動著雙臂) 六月二日星期四、六月三日星期五、六月四日星期六、六月五日星期日、六月六日星期一、六月七日星期二、六月八日星期三、六月九日星期四、六月十日星期五、六月十一日星期六、六月十二日星期日、六月十三日星期一、六月十四日星期二、六月十五日星期三、六月十六日星期四、六月十六日星	(錯誤) (三至五月共九十二天，可推得六月一日為星期四，但S計算的六月三日是星期三)

## 小姮

流水號	原案	備註
	<p>期四、六月十七日星期五、六月十八日星期六、六月十九日星期日、六月二十日星期一、六月二十一禮拜二。</p> <p>S:(停了一下)六月二十二是星期三、六月二十三是星期四、六月二十四是星期五、六月二十五是星期六、六月二十六是星期日、六月二十七是星期一、六月二十八是星期二、六月二十九是星期三、六月三十是星期四、七月一日是星期五、七月二日是星期六、七月三日是星期三、七月四日是星期一、七月五日星期二、七月六日是星期三、七月七日星期四、七月八日是星期五、</p>	(逐日計算)
1-3-10	<p>S:七月九日應該是星期六。</p> <p>R:可以請你再說一次剛剛是怎麼算的。</p> <p>S:三月是大月,三月一日去掉就是三十天,再加上四月的三十天就是六十天,再加上五月的三十一天就是九十一天,六月的三十天一共一百二十一天,七月的話就加八天就是一百二十九天。</p>	(完成解題)
1-3-11	<p>S:<u>我本來要用一百除以七</u>,但是這樣很難,所以我就改成七乘以九等於六十三,然後七乘以五,三十五,然後加二等於一百,再加二十九天就是一百二十九,這樣就可以開始算是星期幾。</p> <p>R:你從哪一天開始算?</p> <p>S:六月二日星期四(剛剛S是從六月一日星期三開始算)</p>	(逆推說明)
1-3-12	<p>R:六月二日星期四是怎們知道的?</p> <p>S:三月一日是星期三,如果再加七天還是星期三,然後就<u>一天一天</u>寫下去(其意思是從六月二日起一天一天計算下去)。</p> <p>R:後面的是一天一天計算出來,那六月二日星期四是怎們知道的?</p>	(逐日計算說明)
1-3-13	<p>S:(雙手往後彎,又彎到地上)<u>就是加七一直加</u>。</p> <p>R:你是怎麼加的加一次給我看。</p> <p>S:就是這裡(三月一日)加七是八日,再加七是十五日,再加七就是二十二,再加七就是二十九,這些都是三月。</p> <p>S:那二十九再加七的話就變成四月,二十九、三十、三一所以是四月五日,十二日星期三、加七,</p>	(七日計算說明)

## 小姮

流水號	原案	備註
1-3-14	<p>十九日、加七、二八減二 (S 加七加成九所以再扣二), 二十六日, 二七、二八、二九、三十, 五月三日星期三, 十日、十七日、十七加七二十四, 五月三十一。</p> <p>S: <u>六月 (將答案改成星期日), 六月一日是星期四。</u></p>	(修正答案)



## 小姮

流水號	原案	備註
1-4-01	S：請將一、二、三、四、五、六、七、八、九這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來和相等。	讀題
1-4-02	S：(自行再畫了一個九宮格) S：(一直在觀察題目上一至九等九個數字) S：\ 九加一等於十，二加八等於十，三加七等於十，四加六等於十，剩下五。	分析
1-4-03	S：那五放在這裡(中間格)看看。	計畫
1-4-04	S：九(中上)一(中下)，二(左中)八(右中)，(停下來在想)。	執行
1-4-05	S：七加八不對， S：(將七寫在左下)，三(右上)加九等於十二。(停了一下) S：\ 不對！ R：為什麼？ S：如果四跟六放在這裡(分別為左上、右下)，加起來就不會是同一個數字。	監視
1-4-06	S：(又畫另一個九宮格)(停下來在想，眼睛看著題目一至九的數字) S：八加一等於九、七加二等於九、六加三等於九、五加四等於九，	分析
1-4-07	S：九在中間。	計畫
1-4-08	S：八(左上)一(右下)，七(右上)二(左下)，(又將七與二擦掉)。	執行
1-4-09	S：七和二應該放在哪裡？八加七(中上)是十五，十五的話，那我還有三，三(右上)六(左下)。 S：這一條線十八。三加一等於四，十四加四是十八。這樣都太少了(意指數字太小而導致要加到十四這麼大的數字，將所有數字擦掉，畫一個九宮格。) S：到底要怎麼做？ R：提示你，每一個和加起來都是十五。	分析
1-4-10	S：每一個都一定要是十五。九加一會等於十，這個好像只是錯了一點點(指第一次做的九宮格，將五放在中間)。	(提示) 探討
1-4-11	S：把五還是放在中間，將這邊調整一下(指將周圍數字先湊成十五)。	計畫

流水號	原案	備註									
1-4-12	<p>S：三個數字加起來是十五，一加八是九，我再加一個六就可以了。</p> <p>S：二九四等於十五。七和三和五在一起。</p> <p>S：(S 整個趴在桌上，一副想睡覺的樣子。)</p> <p>R：以前有沒有遇過這麼難問題？</p> <p>S：有！</p> <p>R：遇到的時候會不會想睡覺？</p> <p>S：大部分。</p> <p>R：有沒有想把他解出來？</p> <p>S：會想，但是想慢慢地解出來。</p> <p>R：那這題你也可以慢慢解啊！</p> <p>S：解完之後可能是明天了。</p> <p>R：喔！就明天了。</p> <p>S：(S 接著又再解題)</p>	<p>執行</p> <p>(疲勞)</p>									
1-4-13	<p>S：一個要排一次二次三次四次五次六次，一個要排六次的話，六乘以三就要排十八次。(接著將之前所寫的全部擦掉。)</p> <p>S：我先寫十八個五(也就是十八個九宮格，而五在中間。S 並無畫出九宮格只寫了十八個五。)</p> <p>S：因為一定有答案，所以我將所的都試試看。</p> <p>S：三(中上)七(中下)</p> <p>S：一跟六跟八。一(右上)六(右中)八(右下)</p> <p>一六八已經有了，現在是二四九，二(左上)四(左中)九(左下)(又將一九擦掉互換，變成一在左下，九在右上)</p> <table border="1" data-bbox="882 1444 1070 1592"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td>8</td></tr> </table> <p>S：二加四加一不對。</p>	2	3	9	4	5	6	1	7	8	<p>計畫</p> <p>執行</p>
2	3	9									
4	5	6									
1	7	8									
1-4-14	<p>S：三跟七，八跟二，六跟四，九跟一。不可能的！九加六等於十五。</p> <table border="1" data-bbox="858 1709 1046 1856"> <tr><td>8</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <p>S：所以六跟九不能在一起。</p> <p>R：你又發現了新線索，不過你好像快睡著了。</p>	8	7	1	6	5	4	9	3	2	<p>新線索</p> <p>(疲勞)</p>
8	7	1									
6	5	4									
9	3	2									

# 小姮

流水號	原案	備註																		
1-4-15	<p>S：嗯！ R：起來動一動。 S：現在回來了！ S：那我把七跟三調到這邊（七在左中，三在右中）。那這個（另一九宮格組合，S同時進行二個九宮格的組合）三在這裡（左中），七在這裡（右中）。 S：然後一跟二跟四，一（左上）二（中上）四（右上）。（又擦掉） R：要不要放棄。 S：不要！ R：不要喔！</p>	執行																		
1-4-16	<p>S：一定要寫出來才可以走。（S對自己的要求） R：啊！一定要寫出來才可以走喔？（驚訝！） S：二（左上）四（中上）九（右上） S：七三五（原本就已寫上） S：一（左下）六（中下）八（右下）</p>	(堅持) 執行																		
1-4-17	<p>S：九跟八不可能在一起，九跟六不可能在一起。 （停了一下） S：啊！有了！把他調換（S將一八調換） S：九加一加三又不可能。 S：對喔！九跟一。七跟三和五是一對。七（中上）三（中下）（口中唸唸有詞，後來又將七三擦掉。） S：二（左下）九（中下）四（右下） S：七（左中）跟三（右中），七跟二的話就九，就再加六（寫在左上），四（寫在右上），還有一，（又將右上的四擦掉，改寫八） S：（S橫直斜檢查，和皆為十五，在將答案填入九宮格中。S很高興並笑著哼著旋律。）</p> <table border="1" data-bbox="906 1167 1093 1317" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>9</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>1</td></tr> </table> <table border="1" data-bbox="858 1541 1045 1691" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>9</td><td>4</td></tr> </table>	2	4	9	7	5	3	8	6	1	6	1	8	7	5	3	2	9	4	(條件線索)
2	4	9																		
7	5	3																		
8	6	1																		
6	1	8																		
7	5	3																		
2	9	4																		
1-4-18	<p>S：（S接著又再將橫直斜加總。）</p>	驗證																		

## 小姮

流水號	原案	備註
	R：現在解出來的感覺是什麼？ S：終於解出來了（充滿笑臉）。 R：會不會覺得數學很難？ S：還好（搖頭）。 R：覺得自己會對幾題？	
1-4-19	S：嗯 三題吧？七月九日的我不知道會不會對？ R：喜歡數學嗎？	
1-4-20	S：喜歡！因為爸爸教數學。爸爸比較在乎數學和自然。 R：遇到不會的會不會去問爸爸？	
1-4-21	S：會！ R：爸爸會告訴你答案嗎？ S：不會！都叫我自己去想。 R：你都會自己去想囉！ S：對！	

## 小茹

流水號	原案	備註
2-1-01	S：一口井有十公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬五公尺，而在夜晚時往下滑四公尺。如果這隻蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出這井外？到井口就不會往下。	讀題
2-1-02	S：所以一口井有十公尺深，畫長一點。三、四。ㄟ！多畫一個。一二三四五六七八九，少了一格。	(繪圖表徵) 分析
2-1-03	S：一隻蝸牛每天往上爬五公尺。夜晚掉了四公尺，	計畫
2-1-04	S：所以他到了這邊。 S：然後他早上又爬了五公尺，後來晚上又掉了四公尺，四公尺到這邊。 S：這隻蝸牛早上又再爬了五公尺，到這邊。晚上掉了四公尺，四公尺是這邊。S：那早上又爬了五公尺，掉下來是這邊。 S：再上去五公尺，ㄟ！在來到這邊了。 S：然後再往上爬了五公尺。	執行
2-1-05	S：(停下來回頭看)	(監視)
2-1-06	S：ㄟ 好像已經爬上了耶？(疑問語氣)	(沒自信)
2-1-07	S：(再回頭看一次)	驗證
2-1-08	S：一二三四五 六就出來了。	
2-1-09	S：(又數了一次天數) S：好像六天耶！	驗證

小茹

流水號	原案	備註
2-2-01	S：下面直式加法算式中三角形、星星、正方形這三個符號代表 0123456789 中的某一個數字，三角形、星星、跟正方形這三個符號代表的數字不可以重複，	讀題
2-2-02	S：請找出（略讀）這三個符號各代表哪一個數字？	（略讀題目）
2-2-03	S：（停下暫停） S：嗯	（暫停）
2-2-04	S：九加一，十 R：九加一，十。你的意思是說個位數字星星是九，加這個正方形（被加數的個位數）是一，等於十。	執行（嘗試）
2-2-05	S：嗯！ㄟ 好像不對喔！ S：星星不可以是十。	監視
2-2-06	S：星星是（停下來在想） S：中的某一個數字喔！	分析
2-2-07	S：如果把他變成十三（加數為十三）的話 R：哪個變成十三？	計畫
2-2-08	S：三（加數十位三角形的「一」沒寫上） R：星星是三 S： .. R：你將四個星星都寫上三。	執行（嘗試）
2-2-09	S：然後 .那三（被加數的十位星星）會加什麼等於十（和的百位是一與十位是零）？	分析
2-2-10	S：這樣也是不對啊？ S：我假設這個（被加數十位正方形）是零的話。 S：那三角形（加數十位）是七 S：七十三加三十等於 S：ㄟ！那也不可能變成三百零三，也不可能變三十（指被加數）啊！所以這個是不對的。 S：（停了一下）	監視 （替代）
2-2-11	S：那「一」呢？	計畫
2-2-12	R：你現在將星星改為是一，正方形是零 S：九 R：這個（三角形）是為九 S：這樣就是一百零一 S：九十三加十，就是一百零一。 S：所以這樣的話，三角形是九，星星是一，正方形是零。	執行
2-2-13	S：（回頭看了一下解題過程） S：好了！	驗證

小茹

流水號	原案	備註
2-3-01	S：2003年3月1日是星期三，請問2003年7月9日是星期幾？	讀題
2-3-02	S：三月	執行
2-3-03	S：2日是星期四，3日是星期五，4日是星期六，5日是星期日，6日是星期一，七日二，八日三，九日四，十日五，十一日六，十二日日	(逐日計算)
2-3-04	S：(回頭檢查 並將一週用手畫了個圈表之)	監視
2-3-05	S：十九日日，十九加七等於二十六(在旁邊寫了個直式加法)，二十六日日，二十六加七等於三十八	(七日計算)
	S：(停了一下)	
	S：還是從四月一日開始算	
2-3-06	S：二十七日星期一，二十八日星期二，二十九日星期三，三十日星期四	(逐日計算)
	S：一月大、二月小、三月大	
	S：三十一日星期五	
	S：這邊是三月的	
2-3-07	S：四月一日星期六，四月二日星期日，四月三日星期一，四月三日星期一，四日星期二，五日星期三，六日星期四，七日星期五，八日星期六九日星期日，	(逐日計算)
2-3-08	S：十六日星期日，二十三日星期日，三十日星期天。	(七日計算)
2-3-09	S：五月七日星期日，十四日星期日，二十一日星期日，二十八日星期日	(七日計算)
2-3-10	S：二十九日星期一，三十日星期二，三十一日星期三	(逐日計算)
	S：六月小	
2-3-11	S：一日星期四，二日星期五，三日星期六，四日星期日。	(逐日計算)
2-3-12	S：十一日星期日，十八日星期日，二十五日星期日	(七日計算)
2-3-13	S：二十六日星期一，十七日星期二，二十八日星期三，二十九日星期四，三十日星期五	(逐日計算)
2-3-14	S：(直接比對四月份)	(月比對)
	S：七月九日是星期天	
2-3-15	S：(再回頭看一次)	驗證

小茹

流水號	原案	備註
2-4-01	S：請將（省略）這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來和相等。	讀題
2-4-02	S：橫的、斜的 .，橫直斜加起來都要相等。	分析
2-4-03	S： .	暫停
2-4-04	S：所以當（作）加起來是十好了。（和為十）	計畫
2-4-05	S：一加二加七等於十。 S：嗯 S：\ 一加八好了。 S：把這個用成四好了。 S：六加四 \！不行！	執行
2-4-06	S：一二三都用掉了， .十都不能用。 S：那要改成十一（指總和） S： . S：改成六九二 S：六加五	(失敗) 更改計畫 暫停 執行
2-4-07	S：總和是十一也不行。 S：總和是十二呢？ S： .. R：右邊一直行你寫九一二加起來是十二 S：嗯 S：一加？二加什麼？再加什麼？ S：二加四、再加六。 R：二加四加六 S：一加 .八等於九 S：一加九 不行，九用掉了	(失敗) 更改計畫 暫停
2-4-08	S：所以現在要用 什麼呢？ S：可能是十三 S：五、六七八 R：加起來是十三 S：對！ S：如果這個跟七加起來是九。 S：九加四。 S：七加五加一 S：八加一等於九，九又四 S：三加五等於八 S：八加五。 ..一沒用到。 S：\！這二個等於九，這二個等於九，九加四等於十三。 S： .. S：總和是十三好像也不行。 S： .	(失敗) 更改計畫 執行
2-4-09	S：總和是十四的話	(失敗) (暫停) 更改計畫





## 小茹

流水號	原案	備註
2-4-15	R：你現在會不會覺得很頭痛？ S：會！ R：有沒有做過這麼難的數學？ S：沒有！ R：可不可以告訴我你現在的感覺？	
2-4-16	S：就是想把牠做好！ R：覺得很難！ S：對啊！都不知道要怎麼做啊！ R：你平常會找一些學校沒教過的數學來做嗎？ S：不會！ R：只有將學校教的數學拿來練習？ S：對！ R：你覺得從以前到現在學習數學為你有什麼幫助？	(堅持)
2-4-17	S：嗯 好像沒什麼幫助。 R：你有興趣寫數學嗎？ S：沒有！ R：你覺得你會對幾題？ S：一題！	(沒興趣)
2-4-18	R：這題在給你一個提示，中間寫五。 S： S：四加八等於十二，十二要加三，九，九要加	(提示)
2-4-19	S：我真的想不出來，好難喔！ R：你要不要放棄？ S：好！	(放棄)

## 小珍

流水號	原案	備註
3-1-01	S：一個井有十公尺深，一隻蝸牛總共是在白天往上爬 5 公尺，在夜晚時滑下 4 公尺，如果蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後會爬出來？	讀題
3-1-02	S：（S 邊寫邊說） 5-4=1 1+5=6 6-4=2 2+5=7 7-4=3 3+5=8 8-4=4 4+5=9 9-4=5 5+5=10 10-4=6 6+5=11 11-4=7 7+5=12 12-4=8 8+5=13 13-4=9 9+5=14 14-4=10 S：算完了，十天。	執行
3-1-03	S：（檢查算式是否有錯）	驗證
3-1-04	S：（後還又看了一次題目）	讀題
3-1-05	S：（就開始擦掉刪除的部分） 5-4=1 1+5=6 6-4=2 2+5=7 7-4=3 3+5=8 8-4=4 4+5=9 9-4=5 5+5=10	執行

小珍

流水號	原案	備註
	<del>10-4-6</del> <del>6+5-11</del> <del>11-4-7</del> <del>7+5-12</del> <del>12-4-8</del> <del>8+5-13</del> <del>13-4-9</del> <del>9+5-14</del> <del>14-4-10</del>	
3-1-06	S：蝸牛爬到井口就不會在滑下。	(執行的理由)
3-1-07	S：答案是五天。	

小珍

流水號	原案	備註
3-2-01	S：下列直式加法算式中三角形、星形、正方形這三個符號代表 0 到 9 中某一個數字，三角形、星形、正方形這三個符號代表的的數字不可以重複，請找出這三個符號各代表哪一個數字？ S：	讀題
3-2-02	S：不管幾加零都會一樣，所以正方形是零。	暫停執行
3-2-03	S：這個是 1（想了許久，在三角形處寫 1，之後又擦掉） S：三角形是 9	
3-2-04	S：隨便猜的 S：9+1（被加數十位數字的星形）。 S：個位都是 1；1(和的個位星形)；1(和的百位星形)。	(猜的)
3-2-05	S：（直式加法） $91+10=$ ， $9+1$ 0， $1+0$ 1，就跟這個(原題目直式加法所填的數字)一樣， $9+1$ 的 1 寫上去。 S：答案就是 101，所以三角形是 9，星形是 1，正方形是 0。	

小珍

流水號	原案	備註
3-3-01	S : 2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？	讀題
3-3-02	S : $1+7=8+7=15$ 。	執行一
3-3-03	S : $\backslash$ 算錯了 (擦掉)	(錯了)
3-3-04	S : $1+30=31+31=62+30=92$	執行二
3-3-05	S : $\backslash$ 又算錯了。	(錯了)
3-3-06	S : 我只有算日沒有算星期幾。	
3-3-07	S : $7 \times 4 = 28$	執行三
3-3-08	S : 又算錯了 (擦掉)。	(錯了)
3-3-09	S : $1+7=8+7=15+7=22+7=29$ S : (停頓許久) S : 加 7 S : (停頓許久，又全部擦掉)。 S : $1+7=8+7=15+7=22+7=29+7$ S : (停頓許久) S : $36+7=43+7=50+7=57+7=64+7=71+7=78+7=86+7=92+7=99+7=106+7=113+7=120+7=127+7=134+7=141+7=148$	執行四
3-3-10	S : (以每四周為單位分別寫上，3 月、4 月、5 月、6 月、7 月)。	
3-3-11	S : (又擦掉只剩 $113+7=120$ )	
3-3-12	S : 星期三。 S : 老師我不會算這一題。 R : 你是怎樣想到用這樣的方法。	
3-3-13	S : <u>直覺告訴我這樣算</u> 。但是這樣算還是不能確定 7 月 9 日是星期幾。	(直覺)
3-3-14	S : 老師我還有一個方法，但是會很慢，就是一天一天的算，我不想寫，因為這樣手會很酸。 S : 我都喜歡會用又快又簡單的方法。 R : 平常你遇到不會的題目，你都怎麼辦？ S : 沒有遇到不會的。 R : 如果真的遇到不會的呢？	
3-3-15	S : 就找人教我。	(尋求支援)

# 小珍

流水號	原案	備註
3-4-01	S：請將一二三四五六七八九這九個數字填入空格中，使橫直斜加起來數字的和相等。	讀題
3-4-02	S：我要先想一想。	(暫停)
	R：好！	
3-4-03	S：（寫五在中間）	執行一
	R：為什麼把五寫在中間？	
3-4-05	S：因為五就在中間啊！（五是一到九排列的中間）	分析
	S：（在中上寫上六，在中上寫一）	執行
	S：（想了一下，在左中寫二，右中寫九）	
	R：說說看，為什麼這樣寫？	
	S：因為這樣（中直行）	
	加起來是十二，這樣二加	
	五加九也是， $\searrow$ 不對！	
3-4-06	S：（將九擦掉改寫七）那二加五加七等於 . （又將七擦掉，想了一下改寫四）。	監視
	S：（想了一下，覺得怪怪的）啊！這些全都寫錯了（將全部擦掉）。	
	R：你現在打算怎麼做？	
3-4-07	S：中間放一啊！	執行二
	R：為什麼放一？	
	S： <u>就是一個一個慢慢試。</u>	
	R：一個一個慢慢試。	
	S：放三（右中）跟二（左中）。	
	R：三跟二跟一加起來多少？	
	S：六。	
	R：所以加起來都要六囉！	
	S：嗯！	
3-4-08	S：（全部擦掉，中間改寫九）	執行三
	R：你在旁邊寫十二（S預設的和為十二）	
	S：二（中上）	
	S：（全部擦掉）	
	S：三（右中）、四（左中）（旁邊寫十六）；五（中上）、二（中下）（下面寫十六）；八（右上）	
	S：（停了很久）	
	S：（全部擦掉）	
	R：為什麼全部擦掉？	
	S：因為沒有十六了。	
	S：	

小珍

流水號	原案	備註									
3-4-09	S：中間放七，五（中上） R：你準備怎麼做？ S：嗯 R：你準備全部加起來多少？ S：十八 R：為什麼加起來要十八？	執行四									
3-4-10	S： <u>隨便亂猜的。</u> R：所以剛剛加起來十六也是隨便亂猜的嗎？ S：嗯！ S： S：我覺得要在放低一點。 R：為什麼？ S：因為十六都沒有，十八應該也沒有。（意指和要低於十六。）										
3-4-11	S：（中間寫上四）五（中上） R：你決定加起來的和多少？ S：十二。 S：嗯 嗯 嗯 。十一好了。 S：二（中下）、八（右下）、一（左下） S： <table border="1" data-bbox="880 1061 1072 1178"> <tr><td></td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>8</td></tr> </table> S：（將一二八全部擦掉） S：應該是三（中下） S：（又將三擦掉改為六）十五（在下面寫十五） S：八（右下）、一（左下）、三（右中）、八（左中） S：（又將八擦掉） R：為什麼擦掉？ S：因為這裡（右下）有八了啊！ S：		5			7	3	1	6	8	執行五
	5										
	7	3									
1	6	8									
3-4-12	S：九加一，十啊；八加二，十啊；七加三，十啊；六加四，十啊； S：（充滿笑臉地將之前所寫的全部擦掉） R：你很高興，你發現了什麼？	分析									
3-4-13	S：就是九加一；八加二；七加三；六加四，都是十啊；只剩下五，所以五就是中間。	計畫									
3-4-16	S：九（中上）、一（中下）（下面寫十五） S：二（右中）、八（左中）（旁邊寫十五） S：，這邊（左上）又不可以啦！ S：（將所有數字擦掉剩下五） S：換另外一種。	執行六									



小珍

流水號	原案	備註									
3-4-17	<p>S：七（中上）、三（中下）、六（右中）、四（左中）、八（右上）、一（左下）。</p> <table border="1" data-bbox="882 315 1074 432"> <tr><td></td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td></td></tr> </table> <p>S：可是又錯了！因為一加三四，但是沒有十一啊！</p> <p>S：（將一、八擦掉）</p> <p>S：二（右上）（將四擦掉）</p> <p>S：四（左上）</p> <p>S：加不起來（全部擦掉）</p>		7	8	4	5	6	1	3		監視
	7	8									
4	5	6									
1	3										
3-4-18	<p>S：六（左中）、四（右中）、八（中上）、二（中下）</p> <p>S：（將六擦掉改至左上）</p> <table border="1" data-bbox="882 712 1074 828"> <tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td></tr> </table> <p>S：這樣又不夠了</p> <p>R 你說什麼？</p> <p>S：這裡（左上）要六，這裡（左中）也要六，所以就不夠了。</p> <p>S：（將所有數字擦掉剩五）</p> <p>S：七（右中）、三（左中）、四（右上）</p> <p>S：</p>	6	8			5	4		2		執行七
6	8										
	5	4									
	2										
3-4-19	<p>S：想不出來（全部擦掉剩五在中間）</p> <p>S：八（左中）、二（右中）、六（右上）</p> <p>S：（全部擦掉）</p>	執行八									
3-4-20	<p>S：七（左中）、二（右中）（旁邊寫十四）</p> <p>R：現在和是不是改為十四</p> <p>S：對</p> <table border="1" data-bbox="882 1223 1074 1339"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p>R：為什麼改為十四？</p> <p>S：因為一直往下減啊！</p> <p>S：（全部擦掉）</p>				7	5	2				執行九
7	5	2									
3-4-21	<p>R：提示你，和是十五。</p>	(提示)									
3-4-22	<p>S：四（中上）、五（中）、六（中下）、七（右中）、三（左中）、一（右下）、八（左下）</p> <p>S：</p> <table border="1" data-bbox="882 1541 1074 1657"> <tr><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>1</td></tr> </table> <p>S：（將三、八、七、一擦掉）</p> <p>S：三（右中）、八（左中）</p> <p>S：（將三擦掉）</p> <p>S：</p>		4		3	5	7	8	6	1	執行十
	4										
3	5	7									
8	6	1									
3-4-23	<p>S：（全部擦掉）</p> <table border="1" data-bbox="903 1756 1094 1872"> <tr><td>9</td><td></td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td></tr> </table> <p>S：四（左中）、五（中）、六（右中）、九（左上）、二（左下）、八（右上）、一（右下）</p> <p>S：</p>	9		8	4	5	6	1		2	執行十一
9		8									
4	5	6									
1		2									

小珍

流水號	原案	備註
3-4-24	R：這麼難的題目，可以放棄沒關係。 S：（搖頭）	(不願放棄)
3-4-25	S：（全部擦掉） S：六（左中）、五（中）、四（右中）、一（中上）、九（中下） S： S：二（左上）、七（左下） S：（把四、五互換） S：三（中上）、八（中下） S：（將中、右直線擦掉） S：九（中上）、一（中下）、三（右上） S：（全部擦掉） S：想起來了	
3-4-26	S：五（左上）、九（左中）、一（左下）、二（中）、八（中上） S： S：（將左上改為八，左中改為六，中改為四，五填在右中） S：一（右上）、九（右下） S： S：什麼都加不起來。 S：老師我想不出來 R：你要放棄了嗎？	執行十二
3-4-27	S：嗯！ R：有遇過這麼難的問題嗎？ S：沒有。 R：如果遇到困難問題你都怎麼辦？	
3-4-28	S：問媽媽。 R：你覺得數學會不會很難？	執行十三
3-4-29	S：不會啊！數學很好玩，有時候會講很好笑的故事，你就去給他算出來啊！ R：解不出來會不會很難過？	
3-4-30	S：不會啊！回家問媽媽就好啦！ R：你覺得你會對幾題？	(放棄)
3-4-31	S：不知道。嗯 一題吧？	
		(尋求支援)
		(樂觀)

## 小訊

流水號	原案	備註
4-1-01	S：一個井有十公尺，一隻蝸牛總是在白天往上爬五公尺，而在夜晚滑下四公尺。如果這隻蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？	讀題
4-1-02	S：	(暫停)
4-1-03	S：你看！他說一個井有十公尺，可是蝸牛白天往上爬五公尺。	分析
4-1-04	S：那他最後一次要爬的時候他直接跳上去，就不會再往下滑了。	計畫、探討
4-1-05	S：他之前無法一口氣跳到上面去，一次只能先跳五公尺，所以十要先減五，他說白天往上爬五公尺，晚上滑下四公尺，所以五減四等於一。	執行（抽象表徵-加減）
	S：五除以一就五天，最後還有一次就是五加一等於六，所以答案就是六天。	（抽象表徵-除法）
	R：你要交了嗎？	
4-1-06	S：檢查一下。	驗證
	S：好！	

## 小迅

流水號	原案	備註
4-2-01	S：下面直式加法算式中三角形、星星、框框正方形這三個符號各代表 0123456789 中的某一個數字，三角形、星星、正方形這三個符號代表的數字不可以重複，請找出三角形、星星、正方形這三個符號各代表哪一個數字？ S：（停了一下）	讀題  (暫停)
4-2-02	S：因為進位不可能進到二，	分析
4-2-03	S：所以星星（和的百位數字）一定是一。	執行
4-2-04	S：那一加多少會是一樣？	分析
4-2-04	S：（遲疑了一下）。零。	執行
4-2-05	S：這（被加數的個位數字）就是零，這也是零（和的十位數字）。	
4-2-06	S：那三角形要進位的話，可能要是九，因為八不可以。(確認後寫上答案)	分析、執行（邏輯推理）
4-2-07	S：（再看了一下過程） S：OK！	驗證

## 小訊

流水號	原案	備註
4-3-01	S：二零零三年三月一日是星期三，請問二零零三年七月九日是星期幾？	讀題
4-3-02	S： .	(暫停)
4-3-03	S：因為二零零三年三月是大月，所以是三十一 天；四月是小月，所以是三十天；	探討
4-3-04	S：五月加三十一，六月加三十，七月只有九天 所以加九，一共是一百三十一天。 S：那麼一星期有七天嘛！所以就除以七。（以 直式除法計算一百三十一除以七）餘下五。 S：那他星期三還有五天的話，就是星期四、星 期五、星期六、星期日、星期一。（因三月一日 計算在其中，應由星期二後開始算五天，答案為 星期日） S：所以他是星期一。	執行 (抽象表徵)
4-3-05	S：檢查一下。 S：嗯！可以了。	驗證

## 小迅

流水號	原案	備註
4-4-01	S：請將 123456789 這個數字填入空格，使橫、直、斜加起來的和相等。	讀題
4-4-02	S： .. R：你把五劃掉（題目上的數字），在中間填上五，把九劃掉（題目上的數字），在五的上方填上九，（S 又劃掉八，在九空格右中填上八）。講你嘴巴唸的說大聲點。	(暫停) 執行
4-4-03	S：九、八、七比較大，如果都排在一起的話就會加起來比較大。	分析計畫
4-4-04	S：所以先將他分開（劃掉七，在左下填上七）。 S：然後因為七跟五加起來就是十二，八加五等於十三，九加五，這個比較大。	執行
4-4-05	S：這個（七加五）比較小，就配六 S：（在右上填上六，後來加總後又想了一下，拿起橡皮擦將六擦掉）。 S：（計算了一下，在右上改填四，口中很小聲地唸著七加五加四等於十六）	監視
4-4-06	S：九、五，十四，加二（在中下填上二）。 S：四加八，十二（發現有問題，於是將四與二皆用橡皮擦擦掉）。 R：你說說看「五」為什麼你會放在正中間？	監視
4-4-07	S：因為他是他們的中間（五是數字一到九的中間）。 S：（在右上填上三，在中下填上一）三加八，十二（發現有問題，拿起橡皮擦將三與一擦掉）。 R：為什麼又擦掉？	(觀察數字間的關係)
4-4-08	S：因為八加三是十二，十二加四（S 加錯了，應該是三），四加七加一太小了所以不對。 S：（停了一下） S：再換換看一次（將九、八、七擦掉）。 S：（將八填在左上，九填在右中，七填在中下，將題目的數字的刪除線擦掉） S：（嘴巴唸唸有詞，但不知他在唸什麼？將三填在左中，將九五三加總，接著計算八加三，之後就將六填在左下）六加七，十三（填四在右下）。 S：四加九 S：（筆停在九的位置卡住了，之後就將四六三擦掉）。	監視

## 小迅

流水號	原案	備註
4-4-09	S：（將二填在左中）九加五加二，十六。（填六在左下，計算了一下，填三在右下）三加九，	執行
4-4-10	S：這裡放四，四加五加六這裡就不行。（拿起橡皮擦將三六二擦掉）。	監視
4-4-13	S：（將一填在左中）九加五加一，十五。八加一，再加六（填在左下）。六加五，再加四（右上）。四加九加二（右下），七加五加三（上中）。	驗證
4-4-14	S：好了！  R：你有遇過很難的數學解不出來？ S：有。 R：有啊！那你遇到的時候有怎樣的感覺？ S：很想把他解出來。	(堅持)
4-4-15	R：如果真的解不出來，你怎麼辦？ S：自己先試試看，是個十分鐘再去問媽媽或姊姊。	(尋求支援)
4-4-17	R：你認為學數學對你有什麼幫助？ S：可能是（說不出來） R：那你說說看為什麼要學數學？ S：因為以後會考數學。 R：你平常常常練習數學題目嗎？ S：媽媽都會買測驗題來給我寫。	(經常練習)
4-4-18	R：你覺得這次你會對幾題？ S：應該是三題以上吧？	(自信)

小揚

流水號	原案	備註
5-1-01	S：一個井有十公尺深，有一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，在晚上往下滑 4 公尺，如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後可以爬井外？	讀題  執行
5-1-02	S：五減四等於一 S：五加一等於六，六減四等於二。 S：. S：六加一等於七 S：七減四等於三 S：七加一等於八 S：八減四等於四 S：八加一等於九 S：九減四等於五 S：五加一等於六 S：五減四等於一	
5-1-03	S：寫錯了！全部寫錯了！	監視
5-1-04	S：五減四等於一 S：十減一等於九 S：五減四等於一 S：九減一等於八 S：五減四等於一 S：八減一等於七 S：五減四等於一 S：七減一等於六 S：五減四等於一 S：六減一等於五 S：五減四等於一 S：五減一等於四 S：五減四等於一 S：四減一等於三 S：五減四等於一 S：三減一等於二 S：五減四等於一 S：二減一等於一 S：五減四等於一 S：一減一等於零	執行
5-1-05	S：十天	(未進行驗證)



## 小揚

流水號	原案	備註
5-2-01	S：下列直式加法算是中三角形、星形、正方形這三個符號各代表 0 到 9 中某一個數字，三角形、星形、正方形這三個符號代表數字不可以重複，請找出三角形、星形、正方形這三個符號各代表哪一個數字？	讀題 (略讀)
5-2-02	S： ..	(暫停)
5-2-03	S：多少加多少等於多少，譬如說六要加多少等於六	分析
5-2-04	S：那一定是零（正方形）。	執行
5-2-05	S：然後來看三角形	計畫
5-2-06	S：三角形要加多少會等於零？ S：	分析
5-2-07	S：其實隨便擺一個數字就知道了。	(替代)
5-2-08	S：三角形是三，星形就是七（擦掉）	監視
5-2-09	S：這個星形一定是一 S：三角形一定是九 R：為什麼？	執行
5-2-10	S：因為九加一，一定是零。 S：九加一是十，十要進一位。 R：你怎麼知道星形是一？ S：因為我剛剛隨便亂擺，如果三角形是七，星形是三，他不可能一次進位就進到三百。所以一定是一。 S：ㄟ 我已經算好了。	分析 執行

小揚

流水號	原案	備註
5-3-01	S：二零零三年三月一日是星期三，請問二零零三年七月九日是星期幾？	讀題
5-3-02	S：哦 .. S：一加七等於八。 R：說說看為什麼這麼做？	執行
5-3-03	S：因為一個禮拜有七天	分析計畫
5-3-04	S：八再加七等於十五 S：十五加七等於二十二 S：二十二加七等於二十九 S：因為剩下二天，所以先加二 S：二十九加二等於三十一 S：這是三月	執行
5-3-05	S：因為這裡只有加了二，所以還有五天 S：所以要一加五等於六（錯誤） S：六再加七等於十三 S： .. R：現在在想什麼？ S：所剛剛只有算幾天，現在在算星期幾？ S： OK! S：這邊全部是星期三，這裡只有加二天所以是星期五。 S：到這邊又是加七，所以又是星期三。 S：二十加七等於二十七 S：四月只有三十天，二十七加三就是三十，這邊就是星期六。 S：這邊就是四月，先在是五月。 S：這邊只加三天，所以這邊只能加四天	(四月少一天)
5-3-06	S：一加四等於五，這邊還是星期三。（錯誤） S：五加七等於十二 S：十二加七等於十九，還是星期三。 S：十九加七等於二十六	(五月少一天)

## 小揚

流水號	原案	備註
5-3-07	S：因為五月要過完了。 S：二十六只能加五，等於三一星期一。 S：到六月 S：一加二等於三 S：三加七等於十 S：十加七等於十七 S：十七加七等於二十四 S：二十四只能加六等於三十	(六月少一天)
5-3-08	S：這裡的話就是星期二 S：七月一加一等於二 S：二加七等於九。 S：所以還是星期三 S：算完了。	(七月少一天)

# 小揚

流水號	原案	備註									
5-4-01	S：請將一到九這九個數字填入空格中，使橫直斜加起來的和相等。	讀題（略讀）									
5-4-02	S：.....	思考									
5-4-03	S：這邊放五（中間）	執行									
5-4-04	S：因為九對一、八對二、七對三、六對四，只剩下五，所以中間一定是五。	分析									
5-4-05	S：所以旁邊都可以隨便填，只要加起來是十就對了。	計畫									
5-4-06	S：一九八二七三六四 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>4</td> <td>8</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>2</td> <td>6</td> </tr> </table>	4	8	3	1	5	9	7	2	6	執行
4	8	3									
1	5	9									
7	2	6									
5-4-07	S：因為只有五沒對嘛。其他都有，加起來剛好是十。	（宣告算完未驗證，且答案錯誤）									
5-4-08	S：算完了！ R：你可不可以告訴我，這一行（右直行）加起來有沒有十五。 S：.....										
5-4-09	S：只有六個有（意指和為十五）	執行									
5-4-10	S：將三跟四調換										
5-4-11	S：（六四三九一七擦掉） S：我確定中間這一定是對的 R：為什麼？ S：直覺										
5-4-12	S：這邊放一（左上）這裡放九（右下） S：四（左下）六（右上）七（左中）三（右中） S：（將六四七三擦掉） S：（將一九擦掉） S：（將八二擦掉）	監控  改變計畫									
5-4-13	S：其實中間放一也可以 R：為什麼？ S：直覺！ S：（五也擦掉） S：中間放一 S：七（左中） S：.....	監控									
5-4-14	S：三（左下）五（左上）九（右下） S：（將三擦掉） S：二（中下）三（坐下） S：（將九擦掉） S：八（右下）										

小揚

流水號	原案	備註									
	<p>S: (將八, 三擦掉)</p> <p>S: 八(中下) 四(右下) 三(左下)</p> <p>S: (一再嘗試)</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>6</td><td>4</td></tr> </table> <p>S: 檢查</p> <p>S: 怎麼這麼難算</p> <p>S: (全部擦掉)</p>	5	7	3	1	2	8	9	6	4	<p>監控</p> <p>改變計畫</p>
5	7	3									
1	2	8									
9	6	4									
5-4-15	S: 現在中間就是五~~~~~ (大聲吶喊)										
5-4-16	S: 八(右上) 二(左下) 三(右中) 七(左中) 四(右下) 六(左上) 一(中上) 九(中下)	啊哈									
5-4-17	<p>S: 耶! ~~完成了!</p> <p>S: 怎麼說?</p> <p>S: 因為全部加起來都是十五。</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>4</td></tr> </table>	6	1	8	7	5	3	3	9	4	
6	1	8									
7	5	3									
3	9	4									
5-4-18	<p>R: 解出來的感覺怎樣?</p> <p>S: 很高興。</p> <p>R: 解不出來的時候感覺怎樣?</p> <p>S: 很煩!</p> <p>R: 會想放棄嗎?</p> <p>S: 會, 想要把他擦掉。</p> <p>R: 最後你是怎麼解出來的</p> <p>S: 每一邊都要是十五啊! 我就解出來啦!</p> <p>R: 你覺得學數學對你有什麼幫助?</p> <p>S: 寫數學考卷都會很快</p>										
5-4-19	<p>R: 如果遇到不會的都怎麼辦?</p> <p>S: 叫爸爸教我</p> <p>R: 算了多久不會才去問爸爸?</p> <p>S: 大概十分鐘。</p> <p>R: 你覺得自己會對幾題?</p>										
5-4-20	S: 至少三題, 算星期幾的比較不確定。										

## 小涂

流水號	原案	備註
6-1-01	S：一個井有十公尺深，有一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，在夜晚時會往下滑 4 公尺，如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬井外？蝸牛爬到井口後就不會再往下滑。	讀題
6-1-02	S：	(暫停)
6-1-03	S：(畫了一個井)	分析探討(繪圖表徵)
6-1-04	S：(由井底往上畫了五公尺，再往下畫四公尺，旁邊著記寫一。) S：(由一公尺處往上爬五公尺，再往下爬四公尺，至二公尺處，旁邊著記二。) S：(由二公尺處往上爬五公尺，再往下爬四公尺，至三公處，旁邊著記三。) R：可以說說看你是要怎麼做？	執行 (根據問題條件)
6-1-05	S：用畫的啊！就照他說的，往上爬五公尺，再往下四公尺。每天都這樣爬。 S：(由三公處處往上爬五公尺，再往下爬四公尺，至四公尺處，旁邊著記四。) S：(由四公尺處往上爬五公尺，再往下爬四公尺，至三公處，旁邊著記五。) S：(由五公尺處往上爬五公尺，畫到井口。) S：	
6-1-06	S：六天 S：(再檢查一次)	驗證
6-1-07	S：六天 S：五減四，一。 S：一加五，六。六減四，二。 S：二加五，七。七減四，三。 S：三加五，八。八減四，四。 S：四加五，九。九減四，五。 S：五加五，十。 S：一二三四五 六。 S：六天。	驗證 (抽象表徵)

## 小涂

流水號	原案	備註
6-2-01	S：下列直式加法算式中三角形、星形、正方形這三個符號代表 0123456789 中某一個數字，三角形、星形、正方形這三個符號代表數字不可以重複，請找出三角形、星形、正方形這三個符號各代表哪一個數字？	讀題
6-2-02	S：	(暫停)
6-2-03	S：先把一放在星星（加數的個位）的中間（星星為一）。	執行 (替代嘗試)
6-2-04	S：因為他說從零開始嘛！	
6-2-05	S：所以把零先放在三角形（加數的十位）這邊。	
6-2-06	S：然後 .（發現錯誤） S：三角形這個零改到正方形這裡。 R：為什麼？	監視
6-2-07	S：因為這邊的零（加數十位的三角形位置）加一（被加數十位的星星位置）等於一（和十位的正方形位置），他不可能，因為一就是星形了（意指星形為一，正方形就不能為一）。 S：如果零放進來的話（放進正方形），一加零還是一（個位數相加）。 S： ..	(暫停)
6-2-08	S：然後把九擺到裡面（指加數十位的三角形位置），九加一 . S：十。零就進一了。 S：（停頓一下）	執行
6-2-09	S：老師我找出答案了！（突然頓悟的樣子，充滿笑臉） S：你看！一加零等於還是一，九加一等於十。 S：（又再看了一次） S：好了！	啊哈！  驗證

小涂

流水號	原案	備註
6-3-01	S：二零零三年三月一日是星期三，請問二零零三年七月九日是星期幾？	讀題
6-3-02	S： ..	(暫停)
6-3-03	S：我想先把日曆畫出來 R：你想先把日曆畫出來	探討(畫月曆圖像表徵)
6-3-04	S：對！因為三月一日是星期三，從三月一日開始算。	計畫
6-3-05	S：一、二、三、四、五、六（左至右寫）。 S：丿 日（寫在一的左邊） S：1（寫在星期三的位置）、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31（星期五）。	執行 (逐日將日期填入月曆中)
6-3-06	S：三月大，四月小嘛！ S：1（星期六）、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30（星期日）	探討
6-3-07	S：五月大 S：1（星期一）、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31（星期三）	探討
6-3-08	S：六月小 S：1（星期四）、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30（星期五）	探討
6-3-09	S：（回頭看一下剛剛寫的各月份）	監視
6-3-10	S：1（星期六）、2、3、4、5、6、7、8、9（星期日） S：星期日	
6-3-11	S：（重新檢查一次過程，並在每個月標上月份） S：好了！ R：你寫這麼多，會不會覺得很煩？ S：還好！	驗證



小涂

流水號	原案	備註									
6-4-01	S：請將一二三四五六七八九這九個數字填入空格中，使橫直斜加起來的和相等。	讀題									
6-4-02	S：我們先把一放在中間。	計畫 分析									
6-4-03	S：一二三四五六七八九填入空格。橫直斜和相等										
6-4-04	S：	(暫停) 分析									
6-4-05	S：（來回觀察題目一至九的數字）										
6-4-06	S：九加六，八加七（相互連線畫在一起）										
6-4-07	S：把九八七六寫在中間，其他的寫在旁邊。	計畫 執行									
6-4-08	S：九（中上）八（中下）七（右中）六（左中） S：五到這邊來（右上） S：四到這邊來（右下） S：把三放到這邊來（左上） S：（把三擦掉）三（改到左下） S：二（左上）										
	<table border="1" style="margin-left: 40px;"> <tr><td>2</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>4</td></tr> </table>		2	9	5	6	1	7	3	8	4
2	9		5								
6	1		7								
3	8		4								
6-4-09	S：二加一加四，可以。 S：二加九加五，不可以。 S：（手撥算盤動作計算總和）										
6-4-10	S：就是把剛剛的五四三二把他移位置（擦掉五四三二） S：二（右上）、三（右下） S：（手撥算盤動作計算總和） S：把剛才的五四三二再把他擦掉 S：把九八移位置，七六移位置 S：九（右中）八（左中）七（中上）六（中下） S：之前的五四三二再把他放回去										
	<table border="1" style="margin-left: 40px;"> <tr><td>2</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr> </table>		2	7	5	8	1	9	3	6	4
2	7		5								
8	1	9									
3	6	4									
	S：（手撥算盤動作計算總和）										
		監視									
		監視									

流水號	原案	備註																		
6-4-11	<p>S：四和三調換                      S：五加九再加四就太多了（S 並未將四三調換，只用橡皮擦擦掉而以）                      R：你的和是多少？                      S：十五（手撥算盤動作計算總和）                      S：把一調到四的位置。                      S：把六放到一的位置                      S：（二跟八擦掉，在左上寫上八）                      S：把之前的四放到三的位置                      S：（趴在桌上）                      S：把二放到七的位置                      S：三和七就先看看這二格（左中、中下）那個要放三或七                      S：把三放在這邊（左中）                      S：七就這裡（中下）                      S：（手撥算盤動作計算總和）</p> <table border="1" data-bbox="411 943 707 1070"> <tr><td>8</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>1</td></tr> </table> <p>S：再把他們的位置換一下                      S：（將右直行整個擦掉，將五寫在右中的位置，二寫在右上的位置，九寫在右下的位置）                      S：（擦掉二、八）                      S：六就不要動。                      S：（八寫在中上的位置，三寫在左上的位置）                      S：（擦掉原在左中的三與左下的四）                      S：（將四寫在左中，七寫在左下，發現中下有一個七，於是將中下的七擦掉）                      S：（將一寫在中下的位置）                      S：（手撥算盤動作計算總和）</p> <table border="1" data-bbox="411 1532 707 1659"> <tr><td>3</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>9</td></tr> </table>	8	2	5	3	6	9	4	7	1	3	8	2	4	6	5	7	1	9	<p>執行三</p> <p>監視</p> <p>執行四</p> <p>監視</p>
8	2	5																		
3	6	9																		
4	7	1																		
3	8	2																		
4	6	5																		
7	1	9																		
6-4-12	<p>S：</p>																			

流水號	原案	備註									
6-4-13	R：你平常有遇過這麼難的數學問題？ S：沒有 R：哪你現在遇到這樣的問題，你的感覺是什麼？ S：很想趕快解出來。										
6-4-14	R：你平常會找一些比課本難的數學題來練習嗎？ S：不會 R：那你覺得數學對你有什麼幫助？ S：算數 R：算數										
6-4-15	R：你想再試試看嗎？ S：（點頭） S： S：（全部擦掉） S：（又嘗試錯誤了一次） <table border="1" data-bbox="411 981 699 1137"> <tr><td></td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td></td><td>8</td><td>2</td></tr> </table>		6	4	5	1	9		8	2	堅持
	6	4									
5	1	9									
	8	2									
6-4-16	S：（卡住許久）										
6-4-17	S：把中間換成五	計畫									
6-4-18	R：為什麼？										
6-4-18	S：因為如果把五放在中間的話，六加四等於十，十再加五等於十五。	分析									
6-4-19	S：（將五寫在中間，六寫在中上，四寫在中下，八寫在右中，二寫在左中） S：八六四二也就沒有了，五也沒有了。 S： S：把七放在這邊（左上）等於十五，所以不可以。 S：放三（左上），三加八，十一。 S：十一加四，不可以（發現四已在中下） S：放一（左下），九加。（將一擦掉） S：九放在這邊，九加六等於十五。（將九擦掉） S：七，七加六，十三。二也有了。 <table border="1" data-bbox="411 1845 705 1975"> <tr><td></td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td></td></tr> </table>		6		2	5	8		4		執行五
	6										
2	5	8									
	4										

## 小涂

流水號	原案	備註									
6-4-20	<p>S：（一再嘗試）</p> <p>S：二跟八不要（擦掉改為九（左中）與一（右中））</p> <p>S：八（左下）加四加三（右下），三不可以。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;"></td><td style="width: 20px; text-align: center;">6</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">4</td><td></td></tr> </table>		6		9	5	1		4		執行六
		6									
	9	5	1								
		4									
	<p>S：（一再嘗試）</p> <p>S：（將八寫在中上，二寫在中下）</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;"></td><td style="width: 20px; text-align: center;">8</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td></td></tr> </table>		8		9	5	1		2		執行七
		8									
	9	5	1								
		2									
	<p>S：六（左下）加二等於八，七（右下）加九，十六（將七擦掉）。</p> <p>S：六加五，十一。十一加四（寫在左上）。</p> <p>S：四加九，十三，十三加二，不可以。</p> <p>S：（一再嘗試）</p> <p>S：把他們換個位置（九寫在中上，二寫在左中，一寫在中下，八寫在右中）</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;"></td><td style="width: 20px; text-align: center;">9</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td></td></tr> </table>		9		8	5	2		1		
		9									
8	5	2									
	1										
<p>S： ..</p> <p>S：（將八一二擦掉）</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;"></td><td style="width: 20px; text-align: center;">9</td><td style="width: 20px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">5</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		9			5					執行八	
	9										
	5										
<p>S：四（右上）加九加二（左上）</p> <p>S：九加五加一（中下）</p> <p>S：把八放在這邊（右下），八加一等於九，九加六（左下）等於十五。</p> <p>S：（將七寫在右中的位置，三寫在左中的位置）</p> <p>S：（手撥算盤動作計算總和）</p>	監視										

小涂

流水號	原案	備註									
6-4-21	<p>S：把七換另外一邊</p> <table border="1" data-bbox="414 358 710 492"> <tr> <td>2</td> <td>9</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>5</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> </table>	2	9	4	7	5	3	6	1	8	執行九
	2	9	4								
7	5	3									
6	1	8									
	<p>S：（手撥算盤動作計算總和） S：ㄟ！好了！</p> <p>R：你覺得自己會對幾題？ S：三題 R：哪一題最沒信心？ S：這一題。 R：你喜歡數學嗎？ S：還好。</p>	<p>驗證</p> <p>自信</p>									