

第一章 緒論

第一節 研究動機與目的

壹、研究動機

教育改革成功與否是一項變革措施逐步匯集而成的歷程，非徒以官方的宣稱與行政形式表象的改變，就能落實教育的本質與目的，重要的是教室裡的師生要能理解時代的需求與教學的新理念，累積踏實的脚步與努力的痕跡，理想的教育願景方能實現。這樣的教育願景包含落實有意義的學習，讓學生透過知識的認知、運用、分享與反省，積極發展「帶得走的能力」。我國從 1993 年新數學課程綱要修訂開始，延續迄今《九年一貫課程綱要》的頒佈，一直朝此基調邁進。其理念要點主張以生活為中心，配合學生身心發展，培養學習領域相關的基本能力；在課程方面，提升教材系統性的結構與品質；在教學要求上，構築以學生為主體有意義知識的學習。總之，教育改革的目標，重視培養跨領域所需要的普遍能力，希望學生能在生活情境中，展現知識、技能的運用以解決問題的能力。因此，發展學生的知能，使其透過學習、統整、內化，適時地運用於學習、工作、生活與解決問題，就成為學校教育目標重要的議題。以學生為主體的課程內涵設計，教師除需瞭解課程學科知識與學生的認知與學習特性，尚具備教學的技巧與導引的策略，因此，結合課程綱要、相關學理研究與瞭解學習者特性就為課程實施前必備的基礎。

根據《九年一貫課程綱要》數學領域學習階段特性的描述：數學的學習，注重循序累進的邏輯結構，小學學生主要學習方式與思考型態的特徵，為具體操作→具體表徵→類化表徵的認知歷程（教育部，2003），

這樣的模式呈現出兒童概念學習的發展趨向。根據綱要中的基本理念說明，數學是人類理性與自然界對話時最自然的語言，然而數學語言的型塑需經過文明累積的陶冶與教育，才得以具體延伸為數學知識，形成更有力量的思維能力。數學教育學者（English, 2004）認為，兒童在建構概念的初步階段，對數學語言意義的瞭解，可透過推理、類比的活動加以培養。因此，相當倚重知覺相似性，而非功能相似性，藉著對知覺相似性的專注，幫助兒童學習事物的類屬。隨著學習時間的增加，以及對某類屬性知識的熟悉程度提升，兒童逐漸超越對知覺相似性的依賴，能根據不同知識所包含的關係與功能，擴增概念基模（Clements, Wilson & Sarama, 2004；Imai, Gentner & Uchida, 1994）。從具體形象的知覺，逐步歸納與認知事物屬性關係的認知學習，此種語意概念發展的現象，特別見之於數學概念的學習與問題解決上（Lowrie & Clements, 2001；Mulligan & Wright, 2000）。

學校裡的數學學習內容中，「面積」可謂是一項重要的學習材料，它除了是幾何概念中重要的內涵之外，也是使用測量部分，或被教師和教科書用來解釋乘法結構和代數關係的一種基礎模式，甚至也有學者（Simon & Blume, 1994）認為面積的測量若能從分割而至單位量組合的運用時，面積的模式也可以自然的變成教導分數或乘法的一種手段。由於面積概念的內涵具有「數」、「量」與「形」等複雜的數學特徵，對於學生數學知識的發展與提升具有重大影響，因此，在數學教學活動的安排上可謂是項重要的題材。長久以來，教室實務普遍地獨尊「量與實測」，致使學生「面積」概念的教學與幾何推理等相關能力的發展，在國小數

學課程上受到忽略，因此面積概念文本的設計、內容的編排及教學方法的探討，在研究文獻上甚少提及；相較之下，學童在面積概念成就上的表現也就乏善可陳、未盡人意(林碧珍、蔡文煥，2003；陳嘉皇，2003a；2004；譚寧君，1998；1999；Battista & Clements, 1996；Clements, 1992)。

研究者受到閱讀相關文獻的影響，盱衡教室實際情形，反思自己教學經驗，乃興起對面積教學與面積概念發展研究的興趣與動機。這些動機可將之總結歸納成為：一、對國小數學課堂上偏重「數與量」教學的省思；二、對面積概念如何發展的探究；三、對面積公式學習意義化的詮釋，四、對面積學習經驗範疇的擴展。茲分述四個動機如下：

一、對國小數學課堂上偏重「數與量」教學的省思

近年來，為了要改變教室裡數學教學的困境與缺失，一些教育社群人士大力地鼓勵教師們應該積極地調適其教室裡的教學實務，將偏重於計算的正確性與速度之觀點，轉化成能同時觀照數學概念、關係和樣式(pattern)之間等較具深層意義的理解，來解決上述的偏頗和困境(Hiebert & Carpenter, 1992; National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000)。我國教育部(2003)頒佈的《九年一貫課程綱要》在數學學習領域「基本理念」，開宗明義就呼應了這樣的需要。綱要內文裡提到，在我們周遭的環境裡，數學的內容除了「數與量」之外，尚有「形」的學問，透過數與形的訊息，才能清楚、充分地認識環境。唯有透過「數與量」和「形」結合的探究活動，我們才能培養出具備分析資料、形成臆測、驗證與判斷能力，藉以提升生活品質，改善生

活環境，進而養成關懷環境、尊重自然情操等素養的國民。「數」和「形」是自然界和人類社會中既有的現象，而且都具有規律性，因此在數學學習的材料中，兩者都應加以融合與重視。為了要均衡對「數」與「形」學習的重視，一些教師在教學的心態上也隨著新課程的要求而有所轉化：在課程安排方面，他們會給予學生生活經驗「數」和「形」相關聯的多層面問題，針對學生的運思歷程，鼓勵進行實作測量、操弄、以及概念的連結，進而驗證理論，並建立代數的關係；在師生互動的歷程方面，則能提供機會讓學生配對或形成小團體的方式進行合作學習，要求課堂上能夠運用辯證、討論的對話、擬題的進行 (leung, 1996;1997)，激發出解題的策略及方式，以了解學生概念的發展；在數學教材設計方面，創造有趣的數學遊戲，包括刺激學生有關「數」和「形」的概念性理解等活動(Ball, 1993; Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1993; Fennema, Carpenter, Franke, & Carey, 1993; Prawat, 1992)，面積概念的教學必須具有上述強調的特色。

二、對面積概念如何發展的探究

面積概念的發展與學習，需要將空間予以統整，置計算的概念於核心，利用可重複測量的單位進行概念的組合，也就是將部分的單位量集合在一起，能夠系統化的計算。因此，整個歷程所需具備的能力和知識是非常的複雜且多變化。在中小學裡，有許多的學生對於面積的知識及面積的測量產生不正確的概念(吳德邦、馬秀蘭、朱芳謀、簡秀儀，1997；許嵐婷，2002；陳鈺逸，1996；張英傑、謝貞秀，2003；譚寧君，1998；1999；Clements & Ellerton, 1995; Hart, 1993)，舉例來說，研究報告

就指出學生所犯的一些共同錯誤，包括面積與周長概念的混淆、運用公式直接計算矩形的面積，但卻不知矩形是個平面圖形。令人驚訝的是許多實習教師在進行面積測量時，使用直線而非以正方形為單位量來進行推論，並且相信正方形邊長變為兩倍時，其面積也正好變成兩倍(Simon & Blume, 1994; Tierney, Boyd, & Davis, 1990)。為何會形成這種現象？研究者的解釋，皆將學生或實習教師貧乏的作業成績，歸因於教師只教導學生利用背誦公式來學習面積的解題，忽略了面積空間結構與數字間關係的連結，以致於學生無法理解這些公式所代表的基本概念，造成對未來學習歷程的類化產生了困難。

由於面積概念的理解，在學習歷程上牽涉到的影響因素十分複雜，這些因素可將之歸納為學生個體的知識、教師的幾何知識以及教學引導的方法。其中值得一提的是有關教師對於面積概念所擁有的知識背景與教學能力，許多研究（譚寧君，1998，1999；Clements, 1992；Clements, 1999；Simon, 1995）就直言不諱的指出，教師本身與對學生面積概念發展專業知識嚴重的不足，實在無法協助及要求學生參與數學原初觀念的探究以及支持他們超越自己所學；另外，文本內容設計的貧乏與教學模式強調公式為唯一目的的誤導，也導致了學生面積概念錯誤的表現（Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998；Clements, 1992；1999；Outhred & Battista, 2000）。為了要提昇學生對於面積概念的理解和有效的發展，上述教室實務所顯示之問題，不僅是現今課程改革的核心重點，也是本研究亟欲解決的研究議題。

三、對面積公式學習意義化的詮釋

面積公式的學習雖然是面積概念發展的最後目標 (Outhred & Battista, 2000)，但面積概念的學習是需要經過學生操弄、測量的實作經驗、將圖形表徵內化再加以詮釋等循序漸進的步驟，才能理解公式的意義。有關面積概念的學習，有些學者 (Battista & Clements, 1996; Clements, 1992; Clements, 1999) 認為最初的經驗需源自於利用正方形覆蓋矩形的物理性活動，只是這個活動屬於單維度層面而已，還需補充額外的歷程。其次，面積的公式屬於二維度並具有乘積性，孩子們必須要從強調表面的覆蓋這種直覺的取向上，轉移到將面積與圖形線性維度的關係更加形式化的取向上，亦即可藉由正方形單位量的覆蓋，連結排列的形式，形成矩形的結構。但這其間需注意兩個問題，其一，學生是否充分地瞭解乘法與加法之間的關係 (Mulligan & Mitchelmore, 1997)；其二，很明顯的是，矩形排列的結構對孩子而言並非如直覺般顯而易見 (Battista et al., 1998)。因此，有關矩形覆蓋學習資料的分析研究，還需特別強調單位量的大小及矩形維度之間的關係，並且釐清乘法所扮演的角色，以及確認長度測量的關係理解之重要性。由此可知，面積概念的形成必須包含空間結構、測量能力與數字關係的發展與結合，若面積概念的教學歷程中，只是一昧的強調公式概念的習得，而忽略其他能力的培養與提昇，那麼面積概念的教學，最終會因基礎能力的不足而心血付諸流水，一無所獲。

四、對面積學習經驗範疇的擴展

在文本設計方面，矩形面積的公式可謂是幾何學習中最基本的單位形式，很多課程的內涵以此延伸將之擴展到不同的圖形面積的求法。在

我國中小學的教科書裡，有關三角形及特殊四邊形面積的解題，即以矩形面積為基礎，先導出直角三角形的面積，再轉化至特殊四邊形面積的求法。三角形及特殊四邊形之面積學習可由矩形面積概念轉化而來，透過切割、拼湊、合成、複製等策略，可以形成與矩形全等的區域，藉由這種「等積異形」概念操作的歷程，可以協助學生解決日常生活中面積的問題。許多學生不需再藉由公式的演算就能輕易的辨識圖形的形狀，利用最簡捷的方式正確的計算出面積的大小，對於面積公式的意義也能更加深入的理解。這些利用理解描繪呈現覆蓋的單位量的轉化，可以幫助孩子們用新的方法檢驗其經驗，並引導其產生新的啟示。單位量的理解描繪表現是具有教育價值的，尤其是對於三角形及特殊四邊形面積公式的導出具有重大的意義，但在教育文獻上卻很少有關這樣的議題討論。因此，有必要將矩形面積的議題延伸至三角形與特殊四邊形面積公式的探討，以發現其意義來源。

基於上述四項研究動機，均有提及教室裡面積教學方式的偏頗、文本設計特別強調公式記憶背誦等問題，以及測量能力與解題策略的運用是學生學習面積概念的重要基礎，對面積概念的形成影響頗巨，此乃激起研究者對於幾何圖形中面積與學生認知發展程度之關係，產生強烈的研究興趣。因此，本研究擬藉由學生參與研究者精心設計的面積概念轉化文本教學，探討其是否會利用簡單的正方形方瓦排列覆蓋活動，靈活的連結到特殊形狀圖形面積的測量與計算。另外，研究者可從中瞭解學生在各類型面積解題能力與策略之表現與發展，以做為日後面積課程設計的參考。

貳、研究目的

基於上述研究動機，本研究依據相關理論基礎，建構面積概念轉化文本，然後進行教學實驗，從教學實驗過程中檢驗教學效果，並探討五年級學生平面圖形面積概念的發展，從而修正合適之面積教學模式。

簡要言之，本研究的目的如下：

- 一、設計國小學童「面積概念轉化文本」。
- 二、經由課程教學實驗，驗證國小學童「面積概念轉化文本」之教學效果。
- 三、探究實驗組學生教學後，在面積概念轉化歷程所運用的解題策略與方法。
- 四、建構國小學童面積概念教學的模式。

第二節 名詞釋義

本研究之重要名詞有「面積概念轉化文本」、「一般文本」、「圖形與面積解題能力」與「面積教學設計」，茲就其定義分別說明如下：

壹、面積概念轉化文本

「文本」(text)指的是教學或學習時，所呈現的一種範本，亦即將某一結構概念必須具備的知識內涵，透過單元組織的方式教導學生理解。在學習歷程中，學生將這些內涵，經過整理、組織，以其相關與對應的規則和意義形成單元活動的方式，利於概念或技能連結的學習範本稱之。

本研究的「面積概念轉化文本」係指學生在學習平行四邊形、三角形與梯形等面積概念的活動歷程中，透過圖形的知覺進行比對、測量和策略運用的活動，致使圖形空間要素的關係重新轉換結構，進而瞭解公式之意義的學習內容設計。包括

(一)「圖形視覺比對與表徵」：透過一些如三角形與四邊形圖形加以比對，進而將其相關要素抽離後加以分類命名，進而獲得圖形概念名稱，並在空間描繪出圖形之指定特徵來。

(二)「方瓦排列與覆蓋」：透過方瓦之排列覆蓋，理解圖形之空間大小與行、列之間所排列方瓦多少的關係，進而形成乘法結構概念，而作為理解面積公式發展基礎。

(三)「面積圖形重構」：透過三角形、平行四邊形、梯形與矩形圖形煎要素的比對與測量，配合分割移補策略，發現「等積異形」面積概念的保留。

(四)「公式理解與運用」：以矩形圖形公式為基礎，將其它典型圖形如平行四邊形、三角形等與其要素進行比對、測量，進而理解公式之由來，並能運用至日常生活情境解決困難。

貳、一般文本

本研究之「一般文本」係指教師在學校依據教科書選用辦法所選用提供該年段學生學習之「南一版」(2000, 2001)第九冊、第十冊數學課本，經研究者依照各單元圖形型態之特徵予以重新安排、整合後，分為「平行四邊形的面積公式」、「三角形的面積公式」、「梯形的面積公式」

與「綜合練習」四項單元活動。

參、圖形與面積解題能力

「圖形與面積解題能力」是指學生面對有關圖形面積概念的問題情境時，能夠利用已經學過且獲得的圖形面積知識和策略去理解和簡化問題，並從情境中探索、組織及運用相關線索計算解決面積大小的問題。本研究的「圖形與面積解題能力」，是指受試學生在研究者編製之「圖形與面積解題成就測驗」上的得分，包括：

- 一、「面積視覺比對與表徵能力」：指能透過視知覺對各類圖形進行辨識與分類，並能選擇圖形另一外在特徵，加以固定作為各式圖樣面積大小比較的基礎，並將這些圖形特徵內化成心像後，依指示描繪出既定條件之圖像。
- 二、「面積相關要素測量」：指能透過測量工具測量出圖形相關要素之長度與角度，並能利用方瓦或百格板排列、覆蓋與比對計算出圖形面積大小。
- 三、「面積圖形重構策略」：指利用視知覺或測量工具將複雜圖形予以切割、移補形成一利於方瓦排列覆蓋或計算的較「範例」的圖形。
- 四、「面積公式理解與運用策略」：指以長方形圖形面積公式為基礎，透過圖形要素長度的測量或視知覺的比對，理解其面積大小與長方形面積公式之關係，進而習得該圖形面積公式之概念與意義。

這些能力的檢驗，除了利用紙筆測驗工具進行團體施測以蒐集量化之資料外，尚配合「圖形與面積解題實作」問卷的個別訪談資料，探討

受試者的作業表現。

肆、面積教學模式設計

「面積教學模式設計」係指為促進學童面積概念發展，所安排實施的課堂教學材料、活動。本研究主張面積教學應該以合適的文本設計和教學策略活動的配合為基礎，以導引學生面積概念的發展。因此面積教學設計的內涵包含了概念轉化文本、教學歷程活動、概念發展與學習目標四個部分。

一、概念轉化文本：包含了「圖形視覺比對與表徵」、「方瓦排列覆蓋」、「面積圖形重構」與「公式連結與運用」等四項內容材料。

二、教學歷程活動：則包括了「圖形面積視覺化比對」、「表徵圖形面積的要素」、「討論與辯證面積解題策略」、「監控及執行面積解題策略」、「檢核及修正面積解題策略」等。

三、概念發展：包含了Pirie和Kieren (1992a; 1992b; 1994) 所提倡的「數學概念理解動態理論」中的八個潛在的層次所呈現出關於面積概念發展的語言或行為表現，包括「初步了解」、「心像塑造」、「心像具備」、「特性注意」、「形式化」、「觀察」、「結構化」與「創造」，分別連結面積相關概念的轉化。

四、學習目標：則根據能力指標所訂學生應達成之相關能力層次（教育部，2000）。

本研究之面積教學模式設計呈現出概念/脈絡/學習者三者間的辯證關係，透過教學者策略適當的引導，可明瞭學生在幾何面積概念上發展

的認知層次，以作為教師設計課程與教學實施之參考。

第三節 研究範圍與限制

壹、就研究對象而言

本研究僅以國民小學五年級學生為研究的對象，故研究結果不宜推論至其它地區、學校、年級的學生。

貳、就研究內容而言

本研究在教學的內涵以及測驗工具題目的編選上，以不同圖形之面積題目為主，較偏重情境操作且不易以單一步驟求出解答的問題，如此考量主要在配合國小面積解題的目標，故研究結果不宜推論至計算題以及單一步驟可求解的題目。

參、就控制變項而言

本研究之控制變項，以文本教學實驗效果之教學情境及課程內涵等相關因素的控制為主，例如教室布置、作業分派及學習時間的安排為考量，涉及學生背景變項如家庭社經地位、智力發展、性別等並未納入研究重點，因此在個別差異的比較上，無法做深入探討及詮釋。

肆、就結果變項而言

本研究強調學生認知與後設認知方面的發展，同時並重特殊領域之先備知識（事實、概念、理解）、解題策略、以及計畫和監控等。至於情意方面，則將數學信念、價值觀等非本研究範圍所欲探究的內容，故視為無關變項。

第二章 文獻探討

本章內容主要進行概念轉化文本設計、面積概念教學模式的構築與兒童面積概念發展研究之相關文獻與理論之探討，文中分六節予以論述。第一節探討面積概念的內涵架構與發展；第二節則探討學生圖形辨識與表徵的理論學說；第三節則從解題能力發展的觀點，探討學生面積概念轉化的歷程，第三節連同第二節所論述之理論基礎，將作為本研究文本設計內涵發展的基本架構；至於第四節則探討與面積概念學習之相關因素的研究，以瞭解學生學習限制之處；而第五節則探討面積概念轉化的教學理論和觀點，發展有效的教學模式，作為實驗教學的架構；最後，第六節則探討面積概念轉化的文本設計，並綜合上述文獻分析。

第一節 面積概念的架構與發展

為什麼要學習面積呢？面積概念對於數學能力的提昇有何幫助？面積概念指的是什麼？包含哪些素材？這些問題都是教師、家長在指導學生學習面積概念的歷程中，常產生的疑惑，也是一些教育專家和數學家們在設計數學課程時必須釐清的議題。為了一窺面積概念的內涵與其研究發展的趨勢，本節依序討論：壹、面積概念的功能與內涵；貳、探究學生面積概念內涵能力的發展；參、整理出我國實施九年一貫課程有關面積概念教學強調的能力指標與重點，並將其與 1993 年版課程進行比較，以瞭解面積概念課程設計之變動情形；最後，依據面積概念課程內涵範圍的演變，分析面積概念研究未來的發展取向。

壹、面積概念的功能與內涵

一、面積概念的功能

面積概念的學習是數學知識學習的一項重要活動。不論中外，面積概念的教材在數學的課程中，自始迄終都是不可或缺的基礎知能，也是探究幾何理論的認知之鑰。學生經過面積概念的研究後，可以學到幾何的圖形與結構，明瞭如何去分析它們的特徵和關係，將空間視覺化—建構與操弄二維和三維物體的心智表徵，並且可從不同的觀點來知覺物體，促進幾何觀點的思考。另外，針對增進學生的推理與辨明技巧的發展而言，面積概念的學習也是種很自然的素材之一，它的幾何模式和空間推理也能擴展學生對物體環境詮釋的經驗和描述的方法，而能在生活情境解題的歷程中變成重要的工具（NCTM, 2000）。

對於在其他數學領域和真實世界情境上的解題和表徵能力的發展而言，面積概念的學習也是項很有用處的理念。面積幾何圖形的表徵可以幫助學生在乘法或分數的練習上形成意義的連結，學生可經由視覺比對的學習，看見環繞在它們之間結構的相似性和對稱性，在使用地圖、安排行進路線、設計樓層藍圖以及藝術創造上，都是非常有用的。只要經由良好的活動設計、合適的工具運用，像是使用具體的模型、圖畫和動態幾何的軟體，以及教師的支持，學生便能夠積極的產生與探索面積公式概念有關的推論，且從早期受教的時段開始就能學習到精細的幾何推理的概念。

二、面積概念的內涵

面積概念理解的建構這個議題，是需要橫跨不同的年級，歷經幾個

年段，從非形式到更加形式的思考與操作練習才能完成的，這個論點與一些研究者的思考和建議是一致的（高敬文，1988；譚寧君，1995；Burger & Shaughnessy, 1986；Clements & Sarama, 2004；Fuys, Geddes, & Tischler, 1988；Senk, 1989；van Hiele, 1986）。

面積概念的學習已被視為是學校數學課程中，學生學習理解以及尋找數學公理結構的重要領域。幾何中面積概念的學習能力指標重點，不僅強調圖形空間表徵能力的發展，更將重心集中在精細的推理和證明、定義使用與事實探索的發展上（教育部，2003；NCTM, 2000）。所以，幾何面積概念的教導與學習，在學生數學能力的增進上就必須扮演一項重要的角色。不少研究者將面積概念的研究焦點集中於「量與實測」的活動與教學上（王勝弘，2001；朱玉如，2002；吳德邦、馬秀蘭、朱芳謀、簡秀儀，1997；高敬文，1988；許嵐婷，2002；陳建誠，1997；楊瑞智，1996；Piaget, Inhelder, 1967），探討面積保留概念和測量能力的發展對面積概念的影響與相互之間的關係，或是探究面積與周長概念的發展情況，以作為教學和課程設計的參考。另有學者（陳銜逸，1996；譚寧君，1995；Battista & Clements, 1996；Outhred & Mitchelmore, 2000）則認為面積概念的學習除了是「量」的學習之外，其重點尚包含了對圖形的辨識、分解與合成，且當圖形形狀的特徵確認後，還可選用最抽象的形式，即用不同的公式計算以求出面積大小之解答。由此可知，面積的學習內容是與數學教材中的「數」、「量」與「形」三個範疇密切結合，彼此相輔相成、互為表裡的，且學習的內涵之間是持續不斷的成長擴充、交織影響著面積概念的習得與發展，其關係如圖 1 所示。也就是說，面

積概念的教學除了強調量感與實測能力的培養和量概念的建立外，仍須教導學生可比較、分割、合併等解題策略特性的了解，亦能運用個別單位量進行空間的實測和估測，及進行各量間的轉換與推理，最後以抽象的符號呈現出幾何空間結構與代數之間的關係，所以面積概念也是幾何與代數之間溝通和連結的橋樑。

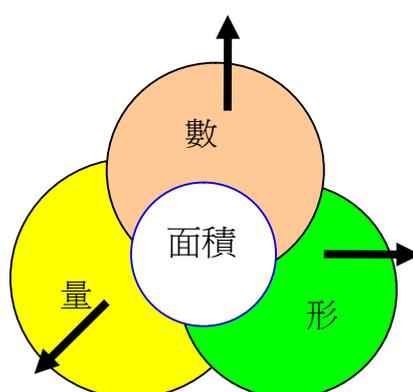


圖 1 面積與數、量、形的關係

對於面積概念中各方所提及之「數」、「量」、「形」的內涵主張，研究者將之整合後，可作為面積概念文本設計包含的內涵參考。

(一) 譚寧君的測量與保留概念主張

面積概念的理解與發展是需要配合許多「數」、「量」與「形」能力與技巧的成熟演練才能有所進展。譚寧君（1995）認為面積概念包含了保留概念和測量概念兩部分，

1. 保留概念：

指的是當兒童面對物體的某種轉換時，如位置的移動、方向的轉動、形狀的改變或切割活動等，能了解其原有的特質仍然保留不變的認知能力。保留概念的形成是需要經歷「圖形的辨識與表徵」、「空間推理」等

能力作為基礎，才能領悟到邏輯的原則，是種影響「形」學習的重要因素。面積保留概念是面積概念學習的先決條件，兒童需要經驗到「等積異形」的事實後，才能進行測量的活動，所以也是「數」與「量」學習的基本要素。

2. 測量概念：

面積概念所包含的測量概念並非只是操作、比較、計算等，還包括了代數中的遞移律、交換率、等量公理和分解合成性等律則的理解。兒童需先了解全體乃由許多部分構成的總合；其次，學童必須要了解遞移律和倍數的觀念，才能將某量移轉到另一量，且將某量重複使用於另一量上。基於這樣的觀點，面積的測量乃是一種結合了位置的改變，倍數與等分合成觀念的綜合能力，這些能力的培養需要教師安排充分的機會，讓兒童經由「分、合、移、補」等圖形分割和重構策略的運用，將空間結構和乘法關係理解之後，才能達成，所以是學習面積概念中「量」與「數」內涵必要的特徵。

(二) Leinhardt 與 Baturu, Nason 的知識類型主張

針對面積本身或是面積測量究竟需包含何種相關實質知識的要素而言，Leinhardt (1988) 依據其所建立的理解理論所進行的分類模式，區分了四種有關面積知識的類型，亦即 1. 直覺型 (intuitive)、2. 具體型 (concrete)、3. 計算型 (computational) 與 4. 法則概念型 (principled conceptual)，雖然這些知識被區隔分類了，但本質上，這些知識類型並無階層之分，甚至彼此之間仍有交集重疊、相互影響之處，當要理解面積課程的領域，我們可以將它們連結組合起來，做一統整之解釋。根據

Leinhardt (1988) 的看法，認為直覺型的面積知識需要歷經十年的學習經驗才有可能產生，不適合一般的研究，因此 Baturó 和 Nason (1996) 依據面積概念與發展歷程的觀點，將此模式化約為三種知識內涵，如表 1 所示：

表 1 面積測量概念與歷程發展之知識類型

知識類型	面積概念與歷程發展的內涵
1. 具體型知識 (concrete knowledge)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 知道如何藉由覆蓋的方式對有規則與無規則的圖形，進行沒有重疊或間隙的面積測量。 2. 知道如何運用一些自設的平面單位或是標準單位進行面積測量。 3. 知道如何計算測量單位的數量進行面積測量。 4. 知道圖形經由分割或重新組合改變後，其面積的大小依然是相同的。
2. 計算型知識 (computational knowledge)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 使用公式或是針對面積的測量運用大小形狀適合的單位進行計算。 2. 知道並理解面積測量使用之標準單位間的關係，明瞭並會使用小數。
3. 法則概念型知識 (principled conceptual knowledge)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 知道測量必備的屬性（例如面積是指封閉的圖形）。 2. 能夠辨認一些形狀的屬性（如規則或非規則的平面圖形、柱體的表面），理解為什麼面積是能測量的？ 3. 面積的長度與關係的屬性是源自於正方形，為了要進行面積的間接比較，必須使用標準單位；所用的測量單位越大，所需的單位數量越少；一些圖形的面積是無法精確的計算出。 4. 知道以下的公式： <ol style="list-style-type: none"> (1) 圓周率是什麼，它的來源以及何種圖形與之有關？ (2) 公式是如何形成的？ (3) 不同的公式之間是如何連結的？

(採自 Baturó & Nason, 1996 : 235-268.)

從表中可以很清楚的瞭解，面積概念的發展是需要具備多種知識內涵組合才能完備的，為了進行教學之便，我們可以從中再將這些面積概

念知識細分歸納為： 圖形特徵辨識與表徵的知識； 測量與方瓦排列覆蓋的知識； 空間推理與圖形轉換的知識； 面積公式推理與運用的知識。這四種知識都可說是面積教學歷程中學生不可或缺的概念與技巧，教師應積極的設計合適的文本、安排操弄的情境，讓學生在學校裡即能學會完整的知識體系。惟令人遺憾的是，此四種知識在現今的教學實務中尚呈現出缺乏、不足的現象，頗值課程設計專家與教學實務者加以思考反省之處。Leinhardt (1988), Baturu 和 Nason (1996) 的面積知識模式正可以喚醒我們對面積教學的重視，也可以模塑出一種充實的面積學習內涵，指示我們在面積教學的歷程中應強調的重點與目標。

(三) Outhred 和 Mitchelmore 的面積公式理解歷程主張

面積概念中「數」、「量」與「形」內涵的複雜性和其交錯影響的特質，就如 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 所強調的，要對面積概念的學習有所理解，則需增進對測量時單位量如何完全覆蓋圖形、利用線性測量理解空間的結構特徵，並能藉由排列關係計算單位量及矩形的維度兩者之間的關係，進而形成面積公式之複雜等式一切有關的知識。Outhred 和 Mitchelmore (2000) 除了重視圖形既有特徵的比對和分析外，特別重視測量能力的發展與空間推理策略的運用，並且強調面積概念學習的最終目標在於抽象公式的理解與獲得。

三、面積概念的架構

由上述學者針對面積概念學習所提供的內涵建議予以總結歸納，面積概念的架構應該包括「數」、「量」與「形」三個範疇，若再將之細分則應包含視覺辨識與表徵、面積保留概念、幾何空間推理能力、線性測

量能力與技巧、問題解決的能力與策略、以及代數等學習材料，這些材料可以嵌合構成了一個六角錐體，如圖 2 所示：

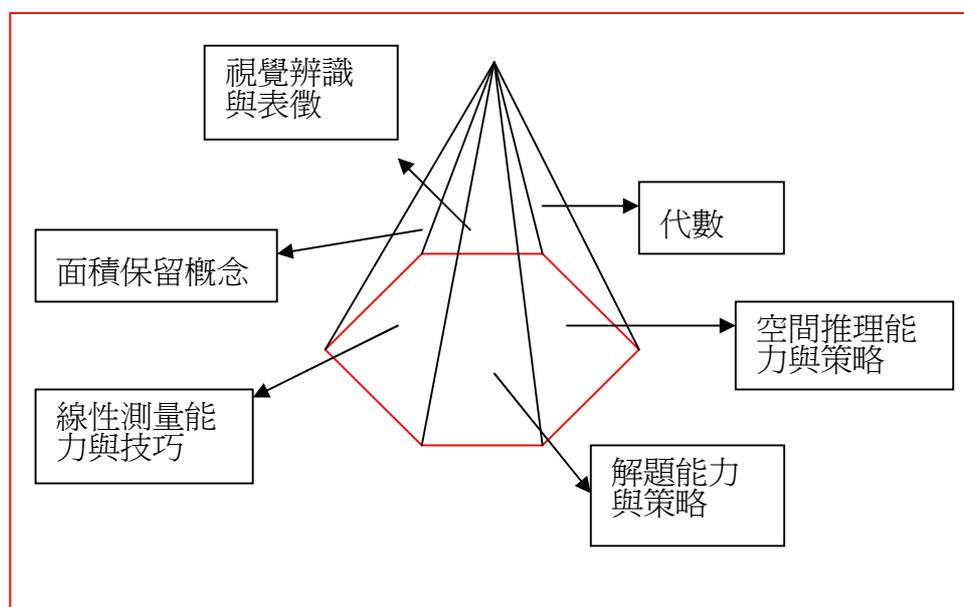


圖 2 面積概念的內涵架構

此架構之每個側立面代表構成面積概念內涵的重要材料，彼此支撐配合。這個錐體以結構體上面交接的頂點為起始往下同時進展，表示學生在面積概念發展之初，其知識與能力是片段、粗淺的，隨著每個範疇的知識與能力之充分發展而往下擴張，各範疇的知識與技能越充實、完善，則所構成的面積概念結構體益形堅固、壯大。面積概念學習的內涵所應具備的能力與發展，在不同的年齡階段有不同的發展重點。學生在年齡很小時，就已發展出視覺辨識與表徵和幾何空間推理的能力，可以透過圖形的特徵將之區別進行分類，並明辨物體位置及其空間的關係；隨著認知發展的成熟，透過操弄，進而發現面積保留概念與執行線性測量的能力與技巧；並經由教導或是模仿，學到問題解決的能力與策略；年齡稍長，透過關係的驗證與規則的演繹和歸納，形成了代數觀念。面積概念所包含的這些能力，有的需事先具備，例如保留概念、辨識能力

與標準單位的測量技巧，這些都是學習面積概念的先備知識。俟這些能力與技巧成熟完善或達到某一學習年段後，此時透過解題策略與邏輯的推論指導，學生將能掌握到空間結構與公式間的關聯性，進而了解代數符號的意義。需注意的是，這些範疇所包含的能力並非單獨的發展，而是彼此交錯纏繞、扶搖直上的，缺乏了某項能力，連帶的將會影響其它能力的發展，例如缺乏空間推理能力，學生日後可能無法利用分割移補的方式簡化圖形，採用最便捷的方式測量出圖形面積的大小，因此，每種範疇的能力都是缺一不可的。

為了達成面積概念學習的目標，對於學生各項能力的發展與精熟程度的理解，可謂是教師必須優先知曉的，如此才能安排合適的學習文本，透過良好的教學技巧引導，才能讓學生理解每個面積公式的意義及推算過程，如此的面積概念教學才能有效運用而增進日常生活的解題能力。(

貳、 面積概念內涵能力的發展

面積概念學習的內涵是複雜且呈現多元面向的，每個層面所需的能力與技巧是由點至線至面逐次發展累積而成，最後形塑成一個廣泛且綜合的面積概念知識實體。面積概念的發展在不同年齡、不同層級各有不同的要求重點。我國《九年一貫課程綱要》(教育部，2003)與美國「學校數學原則與標準」(NCTM，2000)在各學年學生應該發展的各項數學能力與標準，皆有詳盡的闡述說明，也詳列了教師應該考量的教學法則和策略，以作為面積概念發展的序階與課程設計的參考。了解國小學生面積概念「數」、「量」與「形」各內涵能力發展的狀況，是安排面積概念文本設計的基礎。因此，本節重點以學生之面積空間推理、測量、代

數運用、以及表徵的能力發展的指標作為探討「量」、「數」與「形」學習內涵的核心，明瞭學生各年齡階段應具備何種的能力，以為面積概念文本設計的參考。

一、面積空間推理能力的發展

與面積概念「形」發展關係最密切的能力就是空間推理能力，根據美國 NCTM (2000) 提供的學生必備的數學標準能力加以分析，從幼稚園至高中的學生必須具備以下四項面積空間推理的能力：

(一) 分析二維和三維幾何圖形的特徵和特質，發展幾何關係的數學論述

孩子在年幼尚未進入小學就讀之前，很自然的就傾向能觀察和描述各種圖形的形狀，並且開始注意他們的特徵。圖形形狀的辨識雖然很重要，但必須將重點集中在圖形的特徵和其之間的關係。在幼稚園至二年級此階段，學生能使用可以看到、掌握以及操弄的物體來學習幾何的形狀。之後，所研究的形狀屬性和特質會變得更加地抽象。到了國小高年級階段，學生能夠將學習重點集中在形狀的要素上，並且進行討論，像是邊長和角度，以及形狀類別的特徵等。從國小高年級到國、高中階段，針對相似性 (similarity) 和全等 (congruence) 議題的研究，學生則必須要學習演繹推理以及更形式證明的技術去解決問題及論證推演。在所有的年齡階段，學生必須學習對其推論以及解題方式作出正確的解釋。最後，他們必須能夠描述、表徵以及探究幾何系統內的關係，並且在邏輯的鎖鏈關係裡進行表達和調整。學生也要能理解定義、通則以及理論所扮演的角色，並且能夠建構其自己的證明。

(二) 使用座標幾何與其他的表徵系統區別物體的位置以及描述空間的關係

年幼的孩子首先必須學習相關位置的概念，像是上下、前後、遠近以及之間的關係。稍後，他們才能夠使用矩形的方格去置放物體，並且利用直角座標去測量兩點之間的距離。座標的經驗對於學生在解決幾何與代數等較廣泛的問題上是非常有用的。在國小高年級階段，對於學生進行發現與分析圖形形狀特徵的作業，座標是非常有幫助的。另外，在平面上藉由地圖上的刻度或是畢氏定理的關係發現兩點之間的距離也是很重要的。幾何圖式像是國小高年級的線段，或是國、高中的三角形和圓形，都能進行表徵性的分析，而建立起代數和幾何之間的基礎連結。

(三) 運用變換與使用對稱分析數學的情境

年幼的孩子是帶著形狀如何被轉移的直覺進到學校的，學生能夠藉由鏡子的使用、紙張的覆蓋或是追蹤探索像滑行、跳動以及轉動等動作進行學習。稍後，他們轉化的知識必須要變成更形式化和系統化。三到五年級的學生能夠探究轉化的效果，並且開始用數學的術語去描述它們，藉由動態幾何軟體的運用，他們可以開始學習去定義轉化屬性的需要，例如使用旋轉來轉換圖形時，它們需要訂定旋轉的中心點、旋轉的方向以及旋轉的角度。對於三至五年級的學生而言，他們必須學習理解保留距離的轉化像是轉換旋轉或是反射處理的意義是什麼。國、高中學生必須學習表達轉化的多種方式，包括使用矩陣去顯示圖形在組合平面或是方程式上是如何轉化的。他們必須開始理解座標轉化的效果。在每個年級的階段，對稱的合適性思考可以將數學提供給藝術和美學重要的

啟示。

(四) 使用視覺化、空間推理和幾何模式解決問題

在每學年的開始，學生必須要從操作不同幾何物體的經驗，以及一些允許他們可以轉動、移動或是改變二維或三維物體的技術去發展視覺化的技巧。

二、測量能力的發展

測量指的是將數字值對物體屬性的一種安置，像是面積的大小有多少一樣。在更具哲思的層次來說，測量也能說包含了對一個情境的特徵安排一個數字。了解可測量的屬性是什麼與將它變成熟悉的單位和步驟，是測量屬性的能力指標上最主要的重點。經由學校學習的經驗，從最初的幼稚園時期到國中的階段，學生在一些情境範圍下，必須要能夠充分的使用測量的工具、技術與公式。事實上，學生若沒有經歷材料的操弄、作物理比對和使用工具進行測量，那麼是無法深入地理解測量的。測量概念的發展是需經歷不同年級的思辨和擴展的，且教學的計劃是不需年年重複相似的測量課程，但值得注意的是，測量能力與概念的發展在小學低年級階段就要重視的。根據學者（高敬文，1988；陳銜逸，1996；譚寧君，1998；1999；Battista & Clements, 1996；Outhred & Mitchelmore, 2000）的研究，為了要發展面積概念，學生必須要具備以下兩種能力，才足以進行面積問題的探究。

(一) 了解物體可測量的屬性以及測量的單位、系統和歷程

可測量的屬性指的是一個物體的特徵是可以被量化的。需要注意的是，辨識物體是否具有可測量的屬性是做數學研究的第一個步驟。幼稚

園到國小二年級的學生開始藉由較長或較短的語言來比較和排列物體，在這個階段裡，長度的測量必須變成學習的重點，除此之外，重量、時間、面積以及體積的問題也需要被探索。到了國小三至五年級階段，學生更需徹底地學習面積以及周長、體積、溫度和角度的測量。在這個階段，他們已經不需要直接的採取測量的工具進行測量，而能採用公式進行計算。

在高中階段，學生必須要能夠理解影響測量的單位和刻度是如何決定的，然而不管任何年級，在使用工具進行測量或是依賴公式進行測量的計算之前，學生是需要許多非正式的經驗。在學校裡接受的教育，不僅要能擴展學生他們可測量屬性的架構，還要發展屬性之間關係的理解。小學階段的學生可以探索影響一定測量的物體屬性是如何改變，例如，藉由對形狀的分割和重新排列可以改變周長但不會影響面積的大小。從幼稚園至二年級的階段，學生必須要藉由非標準單位的使用開始測量的研究，他們必須被鼓勵使用寬廣多樣的物體，像是紙版去測量長度、正方形方瓦測量面積，以及紙杯測量容積。當學生從國中進展到高中階段，他們必須要學習如何使用標準單位去測量新的抽象屬性，像是體積和密度。

對於年幼的孩童而言，要理解不同的單位只能適合測量不同屬性物體這樣的概念是很困難的，學習如何去選擇一種合適的單位是理解測量最主要的重點。舉例來說，在幼稚園至二年級階段的學生必須要學習長度可以使用直線的工具來測量，但面積不能用此方法直接來測量。小朋友必須明瞭測量面積必須要使用面積的單位像是正方形區域才行，三至

五年級的學生必須要學習了解正方形區域不僅可以用來測量體積，並且需要對使用三維單位的探索。

(二) 運用合適的技術、工具和技術進行測量

測量的技術指的是用來決定測量的策略，像是計算、估算與使用公式或工具。當數值對於公式裡的變項是特殊的狀況時，公式是產生測量的一般性關係。在小學階段，學生必須開始發展求周長和算面積的公式，中年級的學生要會使用三角形和矩形的面積公式去發現梯形的面積，以及發展體積和物體像角柱或圓柱體的表面積公式，許多低年級和中年級的學生對於周長和面積概念的理解是很困難的 (Kenney & Kouby, 1997; Lindquist & Kouby, 1989; Simon & Blume, 1994)。雖然這些孩子可能會使用公式進行解題，但是無法理解這些公式與能被測量的屬性或是能被使用來測量的單位之間有何關係，因此，老師有必要幫助學生將公式和真實物體之間的關係進行連結。

三、代數能力的發展

代數的標準強調數量間的關係，包括函數、表徵數學的方法及分析其改變，使用代數可以簡化複雜的數學思考，並轉化成有效的分析。代數的許多符號與結構都強調建立在學生對於數的經驗上，代數也與幾何和資料分析密切的連結，因此代數也是面積概念學習課程材料與統整的一項要素。代數的課程在學齡前就應開始，老師應該要幫助學生建立一個具備理解能力與表達能力的穩固根基，以應付將來更複雜的學習。利用符號紀錄思考及情境中的洞察力，學生可以了解面積的概念、結構與符號操作的原則，但須具備以下四種代數基本的能力：

(一) 了解型態、關係和函數

早期分類及排列物件的經驗對兒童來說是自然而有趣的，教師可以協助兒童注意規則，並延伸到其它的變項序列上，到了國小三至五年級，兒童應會使用變數和代數的表示法來描述及延伸面積和周長所代表的型態；在中學結束前，學童應該能輕易的使用函數的標示法來描述這些關聯。

(二) 利用代數符號表徵及分析數學的情境與結構

學生對數字性質的理解是從幼稚園到高中逐步發展的，到國小三至五年級時，學生應超越加法的運算而使用乘法的分配律得出答案，當學生能操作複雜的代數符號時，就能理解幾何面積公式的論證，國中的學生可以瞭解圖表與圖表下等式的關係，高中的學生則可利用符號將此關係公式化，而且能證明所用公式的正確性。

(三) 使用數學模式來表徵及了解數量間的關係

數學最有力的用處之一是數學的模式化。低年級的學生可以使用物件、圖片和符號來塑造整數的加法和減法。國小三到五年級的學生需利用他們的模式去預測及描述結論，這些模式的使用會隨著年齡的成長而日趨複雜，到高中時，學生就能利用許多種類的函數知識發展自己的模式，並做決定。

(四) 分析不同情境中的轉變

理解能力的改變是十分重要的，特別是針對函數的理解及許多思考的呈現。從幼稚園的幼兒至國小二年級階段的學生，最初可以描述面積圖形質的改變，像是形狀不同，而後是量的改變。三到五年級的學生可

以使用圖表而開始注意及描述這些改變，中年級的學生將重點放在線性函數的學習上，學生可以利用面積學習關於線性函數中的固定比率變化，而採用斜率表示。

四、表徵能力的發展

表徵能幫助學生組織他們的思想，表徵的使用能幫助學生在數學上「數」、「量」、「形」的想法與運作更加具體，以及有效的回應。對於學生如何利用表徵能力呈現面積概念的學習結果，需要具備以下三種能力：

(一) 創造和使用表徵來組織、紀錄、和傳達溝通數學上的想法

在較低的年級，孩子會使用表徵做一紀錄，提供給他們的老師和同學對其努力了解數學所得到的成果。在中年級階段，學生會使用更多的表徵解決問題，描述、澄清並延伸數學上的想法。他們可以發展對真實的世界關係的代數表徵，例如，一個矩形游泳池的瓷磚數目，長 M 單位，寬 N 單位， M 和 N 是整數，開始認識並能使用不同的表徵方式分別敘述相同的現象。此時學生可以使用動態幾何軟體移動、旋轉、伸展和放大的方式，藉由操作來擴展對於面積概念的表徵。

(二) 選擇、運用和翻譯數學上的表徵來解決問題

不同的表徵通常會對一個複雜的概念啟發出不同的觀點。學生會使用物理模型積木的展示或傳達部分一整體的觀念。因此，使用多種表徵運用在數學教育上的重要性應該被強調。幼稚園至二年級的學生應該要知道透過重複的加法來表徵一個數組的物體，並能了解物體之間明顯的可交換性。在中年級階段，學生所存有的表徵項目將擴展到包含更加複雜的圖畫、數表、圖、以及文字來模擬設計問題和情境。中學學生，表

徵可有助於他們發展關於代數的構想，當數學問題變成複雜時，他們必須發展一個更大的表徵目錄以及豐富的知識庫，以利於挑選和思索表徵與問題的關係。從不同的數學背景之適用來解決不同的問題，可能會產生相類似的表徵，當問題被某種形式表徵出來時，這些形式所採用的優良方法，就能用來解決數學問題。

教師應提供機會讓學生擁有更多和不同的多重表徵經驗，幼稚園至小學二年級階段的學童，教師應鼓勵學生採用具體操作的方式，得到準確和直接的表徵回饋。利用動態幾何的軟體讓學生看到圖形、方程式的形式，檢驗表徵的變化，以作為面積概念推測的工具。

(三) 使用表徵來模擬和解釋自然的、社會的、和數學上的現象

學習數學最終在於建立模型，數學模型的意旨在於強調議題的前後關係，也就是能將數學的元素表徵，能夠理想化的關聯到一個複雜的現象，並能澄清和解釋這些現象以解決問題。

現今的科技工具可以允許學生在情境中反覆的探究模型，在幼稚園至二年級的學生，學生必須能夠使用方瓦或積木於各種的解題方法中，中年級的學生以這些材料來模擬他們所處的世界現象並且注意到定量的形式，國中階段，學生則需設計和解決源於實際生活的數學問題，使用變數代替未知數，同時也學習採用等式、表格與圖形來表徵和分析關係。

參、九年一貫課程有關面積教學的能力指標與重點

對於面積概念發展的研究，除了可以從上述學生面積解題能力的發展層面加以論述探討外，尚能從面積學習目標的演變著手加以分析。學

習材料的選擇與設計是受到教學目標與學生認知能力發展因素影響的，現行我國之教科書的編排或是教師自行設計的文本，皆以《九年一貫課程綱要》所列之學生能力發展指標為依據，作為學習材料發展的藍圖。因此，面積概念發展的研究趨勢可以從學生面積概念的能力指標予以探究分析，以理解學生學習的目標及內涵的範疇應包含哪些；其次，學生能力的發展與學習材料的變革在認知與心理層次的發展上，都具有連貫性的特質，因此，亦能從我國課程發展的情形，探討時、空背景的變化對學生認知能力發展產生的影響，以瞭解面積教學發展的重點。

一、九年一貫課程有關面積概念能力發展之重點

影響學生面積概念發展的影響因素，包含了文本設計的內涵與教學策略的引導，而影響這兩項因素對學生面積學習成就的表現，就在於是否能達成該目標所設定的能力指標的要求。本研究文本設計實驗教學的對象為國小五年級的學童，在學習面積概念的文本內涵之前，已經擁有某些與面積教學目標相關的重要能力與技巧，這些能力與技巧發展之良窳狀況，將會影響學生日後面積概念的習得與增進。另外，五年級的學生在此階段學了面積概念之後，應該達到何種能力指標才算合格，對於文本設計所應包含的內涵亦是非常重要的。因此，在文本設計之前，理應分析、探討受試者本身有關面積能力指標發展的狀況，明瞭其發展的層次，如此，根據指標發展出來的文本內容才能合乎教學目標，才能促進學生能力的獲得與提升。

我國教育部(2000)自頒佈《九年一貫課程暫行綱要》，開始實施「統整」課程至今，在數學方面，有關能力指標的配置頗受各界批評、攻訐，

認為綱要內指定的各年段所欲達成之能力指標太過淺顯，有引導學生能力下降之虞。因此，在多數教育學者與專家的壓力撻伐之下，於 2003 年 10 月又將數學能力指標重新修正編排，將各年段之能力發展導向較先前之課程更艱深、繁瑣的層次。但需加以說明的是，本研究之受試學生所接受之面積概念教學乃是以 2000 年頒佈之課程暫行綱要之內涵為主，因此不受 2003 年修正版本的影響。圖 3 為國小階段各年級學生面積能力指標發展的脈絡圖。

從這個面積概念發展的相關能力指標脈絡圖可以發現：

- (一) 面積概念本身即是一個複雜之能力與知識的綜合體，包含了「數與量」、「幾何」與「代數」等層面之能力的組合，雖以「幾何」能力的發展為核心，然各層面之能力在面積概念學習的初期，可謂是各自獨立影響面積概念的發展。
- (二) 至國小中、高年級階段，「數與量」、「幾何」與「代數」等各數學層面之能力除了會影響面積概念的發展與習得外，彼此亦會相互糾結影響對方。且年級越高，影響的層面越深遠，若某一層面能力發展不良，將會影響面積概念的發展。
- (三) 由於年級越高，學習的面積概念內涵越複雜，且各層面之能力相互影響，可謂牽一髮而動全局，因此相關層面之數學基礎能力就益形重要，所以在較低年級時，就應加強相關能力的培養與訓練，以作為日後學習高深面積概念的堅固磐石。

(四) 在面積「數與量」能力的發展方面，學生是從乘法意義的理解，轉化至利用常用的單位量，對物件進行實測與估測，並處理相關的計算問題，至五年級時，能以矩形為單位利用切割重組，理解三角形、平行四邊形、梯形與菱形的面積公式；面積「幾何」能力的發展方面，學生從圖形要素的辨認與分類開始，經由對稱平分的理解，利用切割重組，理解三角形、平行四邊形、梯形與菱形的面積公式，至五年級時，應能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題；面積「代數」能力發展方面，學生從認識加法、乘法之交換律、結合律與分配律作驗算和解題開始，逐步發展至能用未知數的等式或不等式，表示生活中或算數中的問題，至五年級時，應能理解生活中常用的數量關係，並恰當運用於解釋問題或將問題列乘算式。

二、九年一貫課程能力指標之啟示

從面積概念能力指標脈絡圖的分析，可以建立文本設計在「初始狀態」至「目標狀態」之間一個明喻，界定學童在學習歷程中一個目的論式的發展過程，朝向一個預先設定的目標前進，亦即表示學童的認知發展可以依循著一種合乎邏輯的「年齡與階段」的順序向前邁進，逐漸達到我們成人期望其在數學領域上所具有的成熟與理性，也幫助教師在選擇學習內涵與編排時數上有所憑藉，研創出合乎學習材料內容結構與配合學童心理發展的課程，這些課程內容所指涉的能力指標可以作為評估學童面積解題表現的行為依據，診斷出該能力指標行為與兒童的生物年齡是否相稱或不相稱，成熟或不成熟。另一方面，能力指標的發展會將

學生行為導向「標準化」，可作為評鑑學童學業表現的一項基準，但這種依據也可能導致學童在面積解題的過程上被塑造、訓練而產出某種單調、呆板的行為模式，抹殺了學童的創新與多元合適的解題方法，進而趨向於教師因時間與資源限制而認定的單一解答。能力指標畫出了面積概念文本設計的範疇與界線，相對的也侷限出學童解題的思考與能力發展的方向，學童在文本設計的導引下是否會達到國定能力指標的要求，是否在學習的歷程中也有超出既定標準行為的表現，呈現出另一風貌的解題模式和技巧，將是本研究在文本設計此議題下，特別想一探究竟的數學解題行為。

肆、2000 年課程與 1993 年版「量與實測」面積教材之比較分析

課程的編製與學習內涵的選擇受到社會文化、政治經濟、哲學思維等方面的影響。課程內涵可能是「文化複製」的一部份，亦可能為符應「資本主義工業發展」需求的一種手段，甚至可以當作一種「文化資產」的消費內容。不論作何解釋，課程可謂是學生「社會化」與承接成人要求的學習材料，課程的內容不僅呈現出時代的需求，亦能表現國家對於人力資源的培育與重視。我國數學課程改革經歷了 1975、1993 與 2000 年三次的修正編排，在歷程的發展上皆受到各方的重視與期待。尤其進入 1990 年代，各國競爭激烈，為了提升國力與創新能力，紛紛推動教育改革，特別是進行科技整合的課程，期望能培養出具有世界觀與研發能力的好公民。在此前提下，我國也參與此教改行列，推動「以學生為本位」的課程模式，其中轉變最激烈，對學生數學能力發展影響最深遠的

首推為 1993 年版的課程改革，此版本之數學內涵強調「建構」的教學概念，希望能透過實際操作而了解學生數學思考的模式與解題方法。九年一貫課程承襲此種精神，但其特色更加注重學科之間的整合關係，對學生的學習易造成莫大的影響，茲將兩版本有關面積概念發展的教材內涵作一整理比較如表 2。

表 2 1993 年版與 2000 年《九年一貫課程綱要》之「量與實測」
面積教學架構之比較分析

1993 年版課程標準	2000 《九年一貫課程暫行綱要》
<p>對於量感建基在「實物的感覺存在性質」的量，教材上的架構理念是由共具的使用與對物理現象的掌握齊頭入門的。教材上的發展則依據測量活動對物理現象的掌握之有效程度加以序列。具體言之，教材上的發展依其先後可以細分為以下幾個階段：</p> <p>1. 某量的初步概念 1-1 「某量的認識」： 此一階段是指透過具體的活動，使兒童能知道，例如像「長度」，到底在量「什麼」。例如：「長度的認識」。</p> <p>1-2 「某量的直接比較」： 此一階段是指使兒童經由直接比對實物的同類量後，能描述比較的結果。例如：「長度的直接比較」。</p> <p>1-3 「使用以某量為刻度單位的工具」： 此一階段是指兒童經由直接比對工具上的刻度與實物的同類量後，能讀出工具上的刻度。例如：「使用以 10 公分為刻度單位的工具。」</p> <p>2. 某量的間接比較 2-1 「某量的間接比較」 此一階段是指兒童能運用「某量的保留概念」，透過媒介物或對實物的同類量予以變形後，再加以直接比較並描述比較的結果，例如：「長度的間接比較」。</p> <p>2-2 「某量的個別單位比較與實測」： 此一階段是指兒童能以一個量做為基準，去累積一個被測量的量，並用累積的次數報告測量的結果。比如說，一枝鉛筆有 5 個迴紋針長。</p> <p>3. 某量的普遍單位比較 3-1 「認識某普遍單位量的意義」： 此一階段是指兒童能把一個被普遍使用的單位量，例如長度中的公分，作為個別單位比較與實測的基準。在 1-3 中，普遍單位已出現，但是只被當作某特殊量的標籤，並不是個別單位比較的基準。</p>	<p>本領域包含長度、重量、容量、時間、角度、面積、體積等生活中常用的七種量，兒童對這些量(除了時間)概念的認知發展形成都要經歷下列五個階段才算完整：1. 量的初步概念；2. 量的間接比較；3. 個別單位的描述；4. 公制單位系統內的認識與換算(化聚)；5. 量的公式概念，但只有面積和體積有此階段。</p> <p>1. 初步概念 透過感官感覺一個量；能對兩個同類量做直接比較；能以整體、合成複製的方式複製一個量；利用刻度尺描述一個量。可以把平方公分板視為面積的刻度尺。</p> <p>2. 間接比較 對無法直接比較的兩個同類量，透過複製一個媒介量，利用此媒介量與另一輛進行直接比較，並把比較的結果推論成原兩量比較的結果(含量的保留概念、量的相等、大小的遞移律)。</p> <p>3. 個別單位 從等量的合成、複製的結果來描述一個量，並進行比較。能利用普遍單位的描述，對兩個同類量進行加減乘除運作。認識各類量的基本普遍單位(如長度的米、厘米、千米；容量的公升、分公升、毫公升、千公升；面積的平方厘米、平方米、百平方米、千平方米；體積的立方厘米、立方米；角度的度。</p>

(續表 2)

<p>3-2「以某普遍單位量為單位，進行實測及估測的活動」： 此一階段是指兒童習於使用一被普遍使用的單位量，例如長度中的公分，做單位比較的實測與估測活動，例如「以公分為單位，進行實測與估測的活動」。本階段強調的重點僅有一個單位實測或估測為原則。例如 100 公分可被命名為 1 公尺，但公尺只是一個標籤而已。</p> <p>4. 某量的測量單位制度概念</p> <p>4-1「認識甲普遍單位量及乙普遍單位量的關係」： 此一階段是指兒童能把甲普遍單位量，例如長度中的公分，和乙普遍單位量，例如長度中的毫米，兩者之間的關係，由實測活動中萃取出來，例如「認識公分及毫米的關係」。在 3-2 中，舉例來說，1 公尺就是 100 公分，但是如 101 公分等與一公尺之間，僅有大的比較關係；在此，如 101 公分也可以看成 1 公尺 1 公分等，本階段強調的是兩個或是兩個以上的同類單位量的同時使用。</p> <p>4-2「甲普遍單位量與乙普遍單位量的化聚」： 此一階段是指兒童能把甲普遍單位量，例如長度中的公分，和乙普遍單位量，例如長度中的毫米，兩者之間的關係使用於實測活動中，乙解決量的分解與合成問題。例如「公分及毫米的化聚」。</p> <p>5. 某量的測量公式概念</p> <p>5-1「透過對某平面圖形或立體的分析綜合，認識該平面圖形或立體上某量的求法」： 此一階段是指兒童能將「切割一平面圖形或立體的內部，例如矩形的內部，之後將切割的結果重組成一個或數個已知普遍單位量的平面圖形或立體的內部」，例如，每邊 1 公分的正方形內部，來求取此平面圖形或立體上的某量，例如，「面積」的方法，或將「分析一平面圖形或立體的邊界」，例如：矩形的邊界，之後將分析的結果重組成一個或數個已知的線段或平面圖形內部，例如長和寬，來求取此平面圖形或立體上的某量，例如：周長的方法，由實測活動中萃取出來。例如，「透過對矩形分析綜合，認識矩形面積求法」。</p> <p>5-2「用某平面圖形或立體上某量求法公式運用」： 此一階段是指兒童能把某平面圖形或立體上某量求法，例如矩形面積的求法公式，使用於實測活動中，以解決量的分解與合成問題。例如：「矩形面積求法公式的運用」。</p>	<p>4. 單位化聚 將用小單位描述的量，改用大單位來描述，這種運算叫做『聚』。如 12345 公尺可以聚成 12 公里 345 公尺或 12.345 公里，反之則叫做『化』。面積的化聚以平方公里、公頃、公畝、平方公尺的相鄰單位化聚較多。</p> <p>5. 公式化的概念 只有面積與體積兩量有此層次，此層次的要點是用公式來描述一個特定的幾何形體的體積和面積量，此層次包括三個階段，以面積來說明如下： (1) 利用乘法簡化點算的過程（一個矩形被多少個小正方形單位所覆蓋？） (2) 將平行四邊形、三角形、梯形切割重組成矩形而求其面積（此處包含進一步將多邊形切割成幾個三角形，求算這些三角形面積，算出其和）。 (3) 將（1）和（2）求算面積的過程中，以公式描述並將這些公式整合成一個概念。（在此整合概念中，梯形是一般形，三角形可視為是上底為 0 的梯形，而矩形、平行四邊形可被視為是上下底等長的梯形，在這種看法下，上述各形的公式，其實是互通的）。</p>
--	---

(採自 臺灣省國民學校教師研習會, 2001: 7-10)

從上表的比較可以發現，九年一貫課程除了上述所言的具有「統整」學科的教學特色外，尚重視學生數學上心理的表徵與發展，因此特別加強解題策略的引導與說明。為了要讓教師了解學童能力的發展，順利達成能力指標的規定，教師則需對學生學習的教材內容作精細的分析，所

以文本設計與教材編選自然而然就成為教師應有的基礎能力，且需對學生學習的順序與步驟作適切的安排與配對，如此學生才能經由學習而具備「帶得走的能力」，認知技能才能益形堅固。

伍、面積概念發展的研究取向

面積概念學習的內涵是擁有複雜性與關聯性的特徵，以往的學者大多將面積概念學習的重點聚焦於「量與實測」此層面上。另外，對於大多數的教師而言，他們在「量」的教學上也多偏重在「重量」與「長度」的指導，對於「量的總類及其性質」、「量與量的關係」並不多（陳鉅逸，1996），這對於學生數學概念的發展，實有偏頗且不完全之處。面積概念的學習與生活經驗息息相關，關係最為密切，對於面積概念的學習要有完整的架構，那麼數學上「量」、「形」與「數」內涵的整合，益形重要，缺一不可。根據吳德邦等人（1997）的研究指出，學生若要對面積概念產生良好的成就表現，教師就需要教授學生完善的面積課程，輔助其靈活運用已經具備的幾何知識，並且積極地理解學生間的個別差異、作答態度以及學習記憶的影響因素，培養學生幾何解題的能力，如此才能導正學生學習面積概念的效用與意義。Clements（1992）也提及學習材料的安排設計與教師的教學引導二者對於學生面積概念的發展，扮演著非常重要的角色，教育者須重視這些條件與因素，如此才能協助學生獲得連貫且有意義的面積知識，學生才能有效的運用於日常生活，解決情境中面對的問題。另外，一些研究者（高敬文，1989；陳鉅逸，1996；趙育敏，1996；譚寧君，1994，1998，1999； Battista & Clements, 1996）；

Fennema, Carpenter & Peterson, 1989; Outhred & Mitchelmore, 2000 ; Swafford, Jones & Thornton, 1997) 也針對面積概念的研究，提出幾何認知發展的建議與教學模式，他們大聲疾呼，希冀能藉由結合面積文本設計和教學策略的發展，提升學生面積公式與幾何的知識和能力。

文本設計與教學策略的整合是面積概念教學未來的發展趨勢，也是必要的手段。鑑此，研究者認為，若要提升學生在面積概念學習上的效能與成就，教師的任務：

1. 首先須對面積概念複雜的內涵加以理解與分析、妥當的篩選與嚴密的組織不可。教師要連結面積概念學習歷程上有關「數」、「量」與「形」的材料，配合學生能力的發展情形，做一適性且連貫的文本設計。
2. 需將有效的教學策略與步驟融入面積學習的課程，引導學生將面積概念有關的知識做一「轉化」，即將學生數學「數」、「量」與「形」知識的「理解」與「詮釋」之間做一溝通、整合，以利面積概念的內化和類化。

基於面積概念文本設計與教學策略指導對於概念轉化的重要性，本研究整合了學童在「數」、「量」與「形」能力層次發展的指標，安排了「圖形視覺辨識與表徵」、「單位量方瓦排列覆蓋」、「面積圖形重構」、「面積公式連結與運用」等四項學習活動內涵，作為學生面積概念學習的架構，並融入比對、測量、分割與組合的學習策略，結合面積概念理解教學模式，以探討學生在面積概念上的表現，並將發現的結果提供教師作為改善教學與設計優質課程的參考。

為了達成本研究結合文本設計與教學策略作為面積概念課程與教學發展的目的，以下各節則依序將面積概念內涵有關的理論基礎加以論述，整合後做為本研究文本設計的核心與實驗教學的重點。首先，探討圖形視覺辨識與表徵理論學說，其次探討面積測量與解題能力的發展理論，進而將二者組合延伸探討面積概念文本設計的內涵；再者，分析面積概念教學有效的理論模式與學習策略，以形成本研究實驗設計的內容與待答問題。

第二節 圖形辨識與表徵發展的理論基礎

幾何圖形包括了「被數學化的空間物件、物件間的關係和轉化及被建構出用來表徵它們的公設化數學系統」(Clements & Battista, 1992)。要了解圖形面積的概念，首先就需知曉物件在空間的形狀、位置、範圍大小以及與空間的關係，而這些概念的產生與獲得就得靠視覺的辨識與表徵不可。因此，學生視覺辨識與表徵的發展，可謂是學生面積概念發展最基礎的要素，也是面積學習的認知之鑰。數學學習之視覺化 (visualization) 與表徵 (representation) 是指我們藉由紙張、技術性的工具去描述學習材料的目的及資訊的溝通，思考和發展先前未知的理念和進一步的理解，然後將烙印在我們心中的圖像、影像或圖畫進行創造、詮釋的能力、歷程或是結果 (Arcavi, 2003; Zimmermann & Cunningham, 1991)。數學領域上有關兒童圖形視覺辨識與表徵的探究，已經有不少的研究提供有用的論述，可作為面積課程內涵的發展和教學

改善的參考。Clements, Swaminathan, Hannibal 和 Sarama (1999) 等人認為，這其中影響最為深遠的研究派典可以 1. 皮亞傑(Piaget)學派、2. 泛希里(Van Hiele)等人提出的主張與 3. 一些認知心理學家的理論為代表，它們對面積概念的發展各自提出見解，研究者予以探索分析後，可將之統合作為面積課程設計與教學導引的參考。以下則分述其理論觀點，進而提出對本研究的啟示。

壹、皮亞傑有關視覺辨識與表徵發展之理論

Piaget 和 Inhelder(1967)提出對影響兒童有關空間概念發展的理論，他們認為：空間物件的辨識與表徵的建構是經由孩子的動作和內化的行為逐漸組織而成的，是兒童自己初始的行動作用中最重要的一部分，此種行動逐漸會變成內在的聚集，在內心中形成和外界互相呼應的一種延伸的構造物。因此，孩子空間物件的辨識與表徵並不只是針對空間環境作知覺性的閱讀而已，尚且包含了對環境中一些變項做積極的操弄，這些主張已被日後的相關研究一一的證實支持。

皮亞傑認為，空間物件視覺辨識與表徵發展研究最大的障礙，在於其牽涉到兩個層面，一為知覺，一為思考或想像，而大部分的數學家和心理學家，也都假設學童空間物件視覺辨識與表徵的發展，是受到動作及知覺機制的影響，而決定對圖形面積日後的成就表現。有關皮亞傑對於視覺辨識的觀點可藉由其提出的認知發展階段論加以闡述：

一、感覺動作期與操作前期的辨識行為

皮亞傑的視覺辨識與表徵的研究對於瞭解兒童面積的發展，是非常

有用的，他的理論認為個體在出生時，並沒有帶來空間物件的模式，而是從出生之後開始一件一件逐漸構築起來的。皮亞傑提出智力發展層次的最初構造，認為，兒童最早對於物體的反應並未顯示任何連續的概念，也無最基本的空間概念。但不久之後，兒童會把空間中物件的特徵記憶下來，直到心裡有了和環境一致而又很清楚的印象。此時，可以看到兒童怎樣去辨認各種不同形狀的圖形，這些圖形並能在兒童心中產生保留的概念，也可以看到兒童進行空間的活動，展現空間的性質和關係。

當兒童到了十八個月大時，對世界已經具有的內在模式，正在無休止的擴展和充實、徹底檢查、組織了再組織，空間關係的感覺更富於變化和有條不紊。稍長，四至五歲具有一般智慧的兒童，在空間、運動、測量與基本的邏輯關係場域上已具有初步能力的發展，但受到圖形變化時特徵的轉變而產生疑問，尚不能獲得穩定的觀念。

二、具體運思期的辨識行為

到了七、八歲時，在處理大部分實際試驗的情況，就如同成人一樣，對於每個基本結構的概念已經具備清晰和穩定，也就是兒童具有「保留」(conservation)的概念標準。距離、長度、面積、容積、歸類等，不論構成怎樣的圖形，不論怎樣地被分類，不論在空間的排列是集中或分散，此時都代表著一種固定的東西。此外，還可以和較大一點的結構相連結形成另外的觀念，這些結構必然也有著同樣「保留」的性質。這些一套一套的觀念結合在一起時，便形成了連續且整體運作性思想(operational thought)的特殊圖案，也就是所謂的「基模」。這個意義顯示：連結在一起的互相有關的推理圖案，不論數學或是邏輯，最後都

可促進形成幾何、算數等正式邏輯觀點的發展。

皮亞傑發現八歲的兒童可以將直角三角形作為面積測量的單位，並宣稱在測量長度與面積時，他們的測量能力與其面積的保留概念是同時產生的。八歲兒童的面積保留概念是以他們的計數來比較兩個不同形狀圖形產生的結果。在此認知發展的層次中，兒童能將一個完整的區域分割成為一些較小區域面積的總和，這表示在此層次的兒童已經明瞭面積的加法性質。

三、形式運思期的辨識行為

兒童大約在 11 至 12 歲時才有利用長乘以寬計算面積大小的能力。皮亞傑分析發現此期的兒童為了要去理解長和面積，或最簡單的正方形的面積間的關係時，自己能發現，當一個正方形如果邊長兩倍於另一個正方形的邊長，則其面積會等於原來正方形面積的四倍。因此，他們很清楚面積應該是邊的某種倍數關係，這種關係是種幾何乘法的關係，而不是一個簡單的比例關係。且透過數與量關係中的遞移律、交換律和等量公理的概念，可以理解到等積異形的意義。

四、面積概念學習的主張

從皮亞傑對兒童圖形視覺辨識與表徵認知概念發展的觀點來看，對於面積概念的學習主張可以歸納出以下幾項要點：

- (一) 空間概念或圖形結構的發展是個體與環境交互作用產生的結果，為了產生適應，會利用「調適」和「同化」的機制與環境互動。也就是兒童空間圖形與面積概念的發展必須先經由個體外在的視覺感受，加以操弄比對、辨識後，再內化到心中，進

而形成表徵，最後再將概念加以保留，以便日後提取利用。整個圖形概念的轉化是需經由具體事物的比對與概念意義的抽離後，才能在腦海中形成圖像的保留。

(二) 增進學童空間與幾何圖形概念的保留，除了個體本身成熟度的因素之外，尚可藉由個體對具體事物的「相似性」特質，不斷的對物件進行物理活動接觸與操弄，而獲得有效的發展。

(三) 兒童幾何圖形的視覺辨識、表徵與空間保留概念的發展，在兒童時期即已蓬勃的進行，而且依據個體生理、心理發展的層次性、持續性的延伸擴展，但與面積有關的乘法結構概念連結的部分，除了圖形表徵與要素的抽離能力外，尚需配合長度測量、單位量倍數計算等相關能力完備後，才能轉化圖形的結構關係成為面積公式的代數概念，而這個年齡約在國小較高年級層次才能發生。

(四) 測量能力、空間要素的抽離與面積概念的保留是同時發展的，因此兒童若能完善的發展其「量」—測量能力與對「形」—空間關係意義的理解，將能增進面積公式概念—「數」的學習。

雖說皮亞傑的認知發展論提供了我們對於兒童幾何圖形發展視覺辨識與表徵的初步瞭解，開啟對兒童幾何與空間圖形面積研究的重視，也幫助我們瞭解個體測量能力與保留概念的發生，是需透過與環境交互作用才能內化形成有意義的物體結構。皮亞傑之理論著重於個體心理機制成熟的等待，對於圖形物件本身之結構要素與個體之視覺辨識和表徵經歷操作後如何轉化、如何發生關聯作用，在概念轉化機制的運用上很少

加以分析討論。另外，皮亞傑雖認為兒童對於圖形辨識、表徵與空間的保留概念在很早的階段就存在，但甚少提及教育與訓練的方法對兒童幾何概念發展有何重要性。這些不及之處，尚待本研究加以深入探索與解釋。

貳、Van Hiele 的幾何發展層次觀

雖然皮亞傑對於兒童幾何圖形的視覺辨識、表徵和空間結構概念發展令吾人存有疑惑之處，但其理論帶來新的研究方法論，卻為未來的研究者開啟另一扇斐頁。Van Hiele 及其追隨者就將此種研究方法帶進了教室實際的情境，針對兒童幾何概念的發展進行了實地的訪談與分析，建構了幾何發展層次的觀點，讓我們更能清楚、明確地了解到在特殊文化脈絡及教師知識引導之下，孩子的視覺辨識與表徵發展是受到何種的影響。針對 Van Hiele 等人的理論來說，孩子幾何思考的進步是需要透過教學的協助才能有所成就(Van Hiele, 1986)。Van Hiele 提出幾何思考的發展，是從最初整體視覺觀的層次，逐漸發展成會描述與分析、抽離與關係化、形式演繹與數學證明等複雜的層次，如表 3 所示：

一、在視覺層次上

孩子是根據物體的外表來辨識，使用視覺的原型做整體的辨認。然而孩子在此層次上並無法充分地獲得幾何的特性或描繪出圖形所呈現的特徵，因此 Battista 和 Clements(1996)則建議應再提供一個層次，即所謂的「前認知層次」(在視覺層次之前)以作為視覺感受發展之前提條件。在這層次，孩子僅能獲得視覺的形狀特徵的次集合，雖無法辨認相

似的形狀與進行圖形的區別，但這卻是引導孩子建構其腦中圖式模型之先決條件。思考方式處於視覺層次的學生，需要有大量操作的經驗，而且每一種形狀的變化越大越好。讓學生能從比較、比對、建造、畫圖、「走出形狀來」，或是在環境中找出形狀。視覺層次的學生尤其需要模仿、區分並將形狀歸類。

表 3 Van Hiele 的幾何概念發展層次與其特徵

階段	特 徵
層次 0： 視覺	學生能夠根據外表（例如形狀、角度、交叉或是平行線條）辨識、命名、比較與操弄幾何圖形。
層次 1： 分析	學生能夠透過要素和要素間的關係分析圖形，並能實證而發現形狀的特徵和規則（例如藉由覆蓋、測量使用方瓦或是畫圖）。
層次 2：非形 式的演繹	學生能夠藉由所給予或遵循非形式的爭論而邏輯性的連結先前發現的圖形特徵和規則。
層次 3： 形式的演繹	學生能夠利用演繹的方式證明理論以與建立理論網絡之間的內在關係。
層次 4： 數學證明	學生利用不同的假設性系統建立理論，並能分析／比較這些系統。

（引自 Fuys, Geddes & Tischler, 1988: 5）

二、分析層次

Van Hiele 認為兒童具有足夠的、完整的視覺辨別層次的特徵後，即進展到次層次的分析期，這層次的兒童能開始分析幾何的概念，透過觀察與實際驗證的方法，分析圖形的組成要素與圖形的性質。運用此層次思考方式的學生需要根據圖形的特定性質，來區分和分類：例如是否封閉？是否對稱？有幾個平行的邊？有幾個直角等等。對於多邊形和三角形，可以探索特定的次分類，此時期可以讓學生製作、繪圖或測量這些形狀。

三、非形式演繹層次

在非形式演繹層次上，兒童能建立性質之間的關係及與圖形之間的關係。但此層次的學生不太能了解演繹的整體定義或公設的角色，具體獲得的結論往往先是經由技巧的猜測而來，再經由形式的證明。然而兒童較看不到邏輯次序可被改變，也不能瞭解如何從一個不同的或不熟悉的情境中去建構或證明。

四、形式演繹層次

在演繹推理時期，兒童能瞭解到推論的重要性，瞭解到定理的不同證明方法。除了能夠證明之外，而且發展至能瞭解一個證明的可能性往往不只一種方法，也能瞭解其充分或必要條件的內在關係，可發現正、逆命題之間的差異性。

五、數學證明層次

最後層次是具備嚴密性的思考層次，此層次的兒童可以學習不同的幾何系統，並在不同系統之間作相互比較，同時能瞭解抽象推理幾何。

由 Van Hiele 的幾何思考層次的理論可以理解孩子幾何概念的發展也像皮亞傑一樣，是以視覺化與圖形表徵的能力完備為基礎，若學生在此階段欠缺必要的技巧與能力，那麼將影響日後各階段能力的轉換與增進。值得一提的是，Van Hiele 的幾何思考層次的理論發展是針對老師和學生之間「溝通失敗」的好奇而產生的，他經由實驗觀察，發現兒童面積概念的發展遲緩，受到教師不正確與匱乏的幾何知識影響有關，所以教師在教學歷程上所承擔的職責和扮演的角色是非常重要的。

六、面積概念學習的主張

分析 Van Hiele 其理論對於兒童幾何面積概念發展的主張，具有以

下幾項教學上的涵義：

- (一) 學生的幾何概念和面積測量的能力是需要教導才能增進。許多學生無法達到較高層次，就是因為他們早期有許多幾何問題沒有解決，這些問題與成人知識的引導有關。因此，要讓學童獲得完整及正確的面積概念，妥善且適性的面積概念文本設計與教學策略的整合是有其必要性、不可缺少的，尤其是視覺化階段的教學，著實影響學生日後幾何概念的發展，老師實有必要在初始階段即應加強重視。
- (二) 根據學生的幾何思考層次教學。和所有的數學一樣，仔細聆聽學生的想法是很重要的，以瞭解他們所使用的數學語言有何意義。他們從一個圖形「看到」什麼？這代表的是哪一層次的思考？學生對於不同的主題會有不同層次的思考，所以我們不能認定某個學生是「視覺層次的思考者」。然而，某個學生在某個主題達到「視覺思考」，他們面對下個主題時，會更快地進入第一層次的思考。最重要的是，不可以將學生本身定義成「屬於」某層次。
- (三) 每層次的目標為加深此層次的思考，並朝下一層次邁進。進入下一個層次思考可能要經過幾年的發展，朝下層次發展是個目標，但必須有耐心的慢慢前進，此外每一個層次都可以再加深。例如，視覺推論可以更活潑、有彈性。
- (四) 採取認知建構取向的方式教學，不應受教科書的限制。Van Hiele 認為要發展到高層次的幾何概念，不是光靠老師直接講

述，而是在老師細心安排情境下，學生能從解決的問題中建構出想法與策略。此外，建構取向的教學也包括讓學生動手、利用實物、手工、紙筆、和電腦程式進行操作與概念的探索。由於教科書面積內涵的偏頗與教師對面積解題策略所擁有的知識、技能的不足和這類活動的必要性，教師在教幾何和面積測量時，實在必須走出課本，配合生活經驗，尋找額外資源，以提昇學生和自己本身有關面積的知能。

(五) 實施層次性教學。Van Hiele 認為幾個教學的層次有助於學生轉化概念，發展下一個層次的幾何思考。首先，應讓學生利用視覺觀察與比對熟悉新的主題，讓他們積極地探索主題，例如，用折疊和測量的方式。讓學生熟悉內容的場域，教師根據學生的需求來設定教學內容、討論並釐清觀念。藉由這樣的討論，教師瞭解學生對語言的詮釋，並提供解題的策略讓學生的行動和意義的接收之間具有目的性。接下來，教師幫助學生意識到重要的問題和概念結構的關聯。當學生用自己的話描述概念以後，教師才介紹專有名詞。最後，學生必須能夠把這些概念和關聯做連結和運用，才能解決複雜的問題，他們才能將所學用精簡的方式（公式）呈現。

參、認知心理學之圖形視覺化理論

除了上述皮亞傑學派對於圖形辨識認知發展論強調以視覺的操弄作為空間物件型態產生保留基礎的觀點，以及 Van Hiele 主張利用學生幾

何發展的層次設計合適的文本教導學生以提升面積測量能力的建議外，認知心理學家亦提供了許多型態知覺與形成特徵分析的資料，特別是有關於直覺方面，即使孩子已經擁有所知覺物體的宣稱性知識，他們還是認為特徵的分析是無意識與混亂的行為。這些針對孩子研究所發展出的理論，都支持幾何圖形與面積概念思考的發展和轉化都植基於視覺的反應。

型態辨識(pattern recognition)是現代認知心理學的一個重要的研究場域，我們對於面積圖形的訊息處理是從型態辨識開始的。型態辨識是指對刺激模式的察覺、分辨和確認，一般可分為感官登錄、知覺分析和綜合、語意分析和綜合、決策和核證等層次(彭聃齡、張必隱,2000)。型態辨識既依賴於從感覺輸入的訊息，即由下而上的處理(bottom-up processing)；也依賴於人腦中已經儲存的訊息，即由上而下的處理(top-down processing)。型態辨識是人類的一種特殊能力，在適應行為中起著重要的作用，尤其關於圖形的辨認與要素的抽離、表徵關係非常密切。本節將依序討論型態辨識的意義，分析型態辨識需經歷何種過程，進而探討型態辨識有哪些影響的因素，進而論述型態辨識與面積概念學習的關係。

一、型態與型態辨識

(一) 型態的意義

型態具有圖樣、式樣、榜樣的意思，在認知心理學中則專指模式或形狀。廣義的說，一個型態就是一組刺激或刺激特性，按照一定的關係(如空間)構成一個有結構的整體，例如三條直線就組成一個三角形。

從狹義上說，型態僅是指視覺刺激物的整體結構，在這個意義上，把型態稱為圖形或是形狀也可以。

(二) 型態辨識的意義

型態傳遞著外部世界的訊息，當一個型態作用於人的感覺器官時，便在人腦中引起一系列複雜的活動，人能夠察覺(detection)到型態的存在，把一個型態與另一個型態加以分辨(discrimination)，並進而確認(identification)它是什麼或代表什麼，這就是對型態的辨識，因此，型態辨識的定義就是對型態的察覺、分辨和確認的過程。

二、型態辨識的歷程

要知覺環繞我們周遭的事物，需要包含許多複雜和交互作用的程序，要理解這些程序與它們之間是如何交互作用，Payne 和 Wenger(1998)提供了一個訊息處理的模式，這個模式將型態的辨識分為三個階段（如圖 4 所示），包括了感覺（sensation）、知覺（perception）與辨識（identification/recognition）階段：

(一) 感覺階段

指的是將外界環境中的物理能量刺激轉化為神經反應的歷程，這些刺激包含了能經由感官接收的符碼(code)、表徵（representation）與基礎的訊息。進而在人的大腦中形成外部信息的符碼。

(二) 知覺階段

指的是創造出環境中有關物體或事件內在表徵的歷程，這些內在表徵可以將之視為知覺的對象，可以被想像成是觀察者對於物體本質的作業描述，所以三條線的組合可被知覺為一個三角形，字母是 A 或是 H，

也可由其筆劃在情境中的位置安排而被辨認。

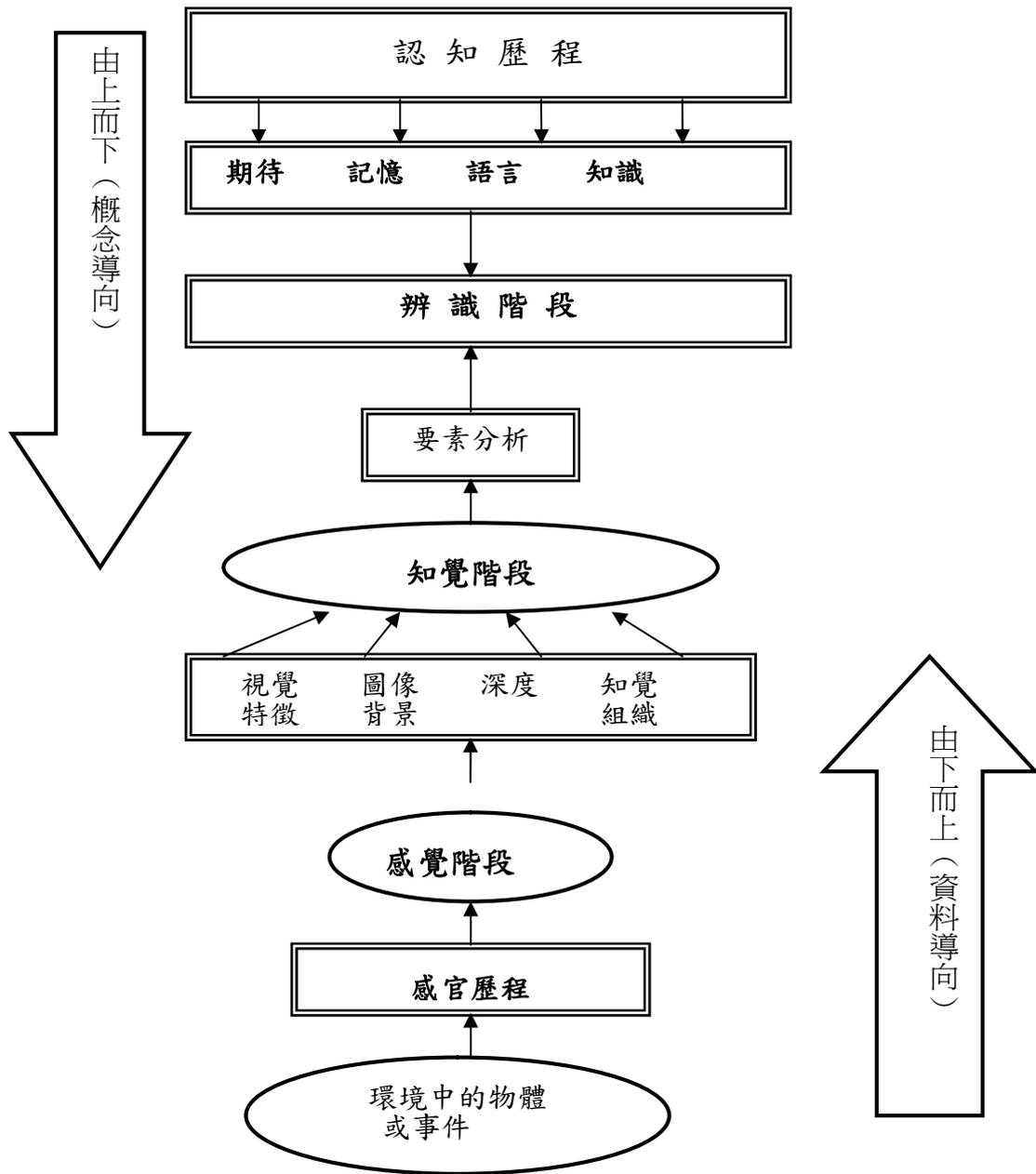


圖 4 型態辨識的歷程

(採自 Payne & Wenger 1998 : 100)

這種處理是通過不同層次的分析綜合活動來完成的，它包括從完整的感覺形象或圖形中提取不同的特徵或要素；將這些特徵或要素聯合為統一的整體；發現個別對象的聯繫和關係；構成更大的知覺單元；對個

別對象或知覺範疇進行命名等。知覺的分析與綜合表現了一定的層次性。前一層次是後一層次的前提和基礎，後一層次是前一層次的深化和發展。這種層次或層次的聯合就如神經網絡一般，Martindale(1991)即根據這樣的研究，提出了心理模組(mental modules)的概念，並且依據這個概念來建構人的認知的整個基模(schema)或圖式(scheme)。

(三) 辨識階段

包含了對知覺的物體或事件予以分類或賦予意義，在對刺激型態進行知覺分析的同時，已經進行了某種形式的語意分析(semantic analysis)，這包括對物體命名、轉化個別單詞的意義，將物體分類、建立有關的語意圖式等。

知覺與型態辨識不僅依賴從外部輸入的感覺訊息，而且也受到人的假設、期待、推理等內部機制的作用，換句話說，知覺和型態辨識的過程是由下而上與由上而下交互作用的歷程。

三、影響型態辨識的因素

知覺系統對於圖形所要面對的第一項工作是如何將視覺的場域進行分割或是藉由圖形物體的外觀，將之區分成不同的形狀，這些形狀可以藉由視覺系統加以辨認，但要強調的是這些形狀尚未被命名歸類為三角形或是四邊形等等的型態，而是簡單的將之聚合當成某些相似的物體來辨識而已，要將物體精細的歸類，尚須配合一些特徵的屬性，像是顏色或是動作等，才能達成(Payne & Wenger, 1998)。型態辨識依賴知覺的文本情境和頭腦中已有的知識表徵，這些是型態辨識中的認知因素，除此之外，型態辨識還受到知覺者的需要、動機、對知識所持的觀點與態度、情緒狀況、價值觀念等學習信念與人格特性的影響，這些統稱為型

態辨識中的非認知因素。本節專注討論影響型態辨識有關的認知因素，而有關非認知部分的人格因素非本研究重點，因此不予討論。

（一）視覺特徵

在認知心理學界，已經有不少的嘗試探究如何在知覺的歷程上，使用基礎的刺激特徵去辨識物體。辨識特徵對於視覺系統的反應而言是非常重要的，主要原因，是這些特徵被提供當成型態或物體辨識的基礎要件，除非視覺系統能夠對刺激的特徵屬性做出反應，否則個體就無法清楚的理解從刺激處所具有的特徵屬性是如何形成知覺的一部份。辨識圖形特徵最常採用的方法有兩種，一種稱為「視覺探究作業」(visual search task)，就是要求受試者從一組分散的圖形題目中，去尋找一個或更多的目標；另一種辨識特徵的作業稱為「紋理分割作業」(texture segregation task)，就是呈現許多相互包含的圖形要素，要求受試者從中辨識並區分其種類。視覺的特徵包含了亮度、顏色、空間方向、長度以及外觀曲直的程度 (Cavanagh, 1988)。

（二）圖像或背景的區分

視知覺的歷程中有項很重要的步驟，就是包含了將視覺場域分割為兩個部分：分別為在前景中不同的形狀及場域中剩下的部分，這兩者分別稱為圖像和背景。關於圖像和背景的區分有項很重要的事實需提及，就是這種區分是種心理學現象，與將刺激完全的呈現給觀察者是相反的歷程。有一些研究者探索圖像與背景如何區分，已經獲得了一些發現，對於影響其之間的區別因素也已經有了充分的理解，當圖形是對稱、突出的、較背景小、且具有水平或垂直的方向，那麼就較容易辨認

(Goldstein, 1984)。這些知識可以提供視覺歷程較高的法則基礎，像是建立型態或是物體辨識部分的基礎要素。

(三) 知覺的組織

我們已經瞭解到知覺系統可以反應刺激的基本特徵，並能將物體置放於空間，但我們如何從簡單的視覺特徵和物體的位置進行物體的知覺和場景的組織呢？其中最具有解釋力的就是「完形組織法則」(Gestalt laws of organization)，這是描述知覺系統如何採用知覺訊息及顯現在組織上的活動。完形心理學所提出的知覺組織法則中，最主要的有下列五項法則 (張春興，2003)：

1. 接近法則(law of proximity)

刺激的要素如果緊密連在一起 (如封閉的圖形或空間)，那麼就容易組織形成一個單元。

2. 類似法則(law of similarity)

看起來相似的要素可將之組合成一類。

3. 連續法則(law of continuation)

要素若能形成直線或是平滑曲線的關係，就能將之組合形成一類。

4. 閉合法則(law of closure)

當某個刺激包含了破裂、間隙，我們傾向於將此圖形知覺為一個緊閉、完整的圖形。

5. 整體法則 (law of pragnanz)

是指面對刺激情境時，個體在心理上傾向於忽略感覺經驗到的零碎部分資料，而從資料形成的整體特徵去組織成完整性知覺。

以上五個法則對於圖形的辨識可產生助益的功能，它可以幫助學生抽離出圖形的相關要素，經由比對分析後形成圖形特徵屬性的符碼。有研究者已經發現年幼的孩子會根據完形法則來對物體進行分類組合（Quinn, Burke & Rush, 1993）。一般說來，在型態辨識的早期層次，由下而上的訊息處理起著主要作用，而在型態辨識的後期，由上而下的訊息處理起主要作用，但並非絕對的。當外界輸入的感覺訊息較充分時，型態辨識更多地依賴於輸入的感覺訊息的直接作用，因此，由上而下的處理作用減弱；相反，當外界輸入的感覺訊息不充分或遭到干擾時，由上而下的處理就顯得更重要了。

四、面積概念學習的主張

由上述說明，可以瞭解個體對於圖形型態辨識的歷程，包含了對圖形要素的感覺、知覺、表徵，並能利用文字語彙表達出圖形空間的結構關係，可謂是面積概念發展的先備基礎能力，對於面積公式與圖形要素關係的連結，是一項重要的媒介。面積是一封閉圖形在空間所佔據的範圍大小，如果學生無法利用視覺辨識的認知法則抽離圖形的要素，並將相似特徵屬性歸類組合成某一單元，那麼圖形是無法辨認且予以命名的，這對日後工作記憶訊息的處理與表徵，將形成阻礙。因此，論及面積概念的形成，在圖形要素視覺辨識之初，應注重圖形特徵屬性選擇、組織與統整的活動安排，讓學生從操弄的經驗中，經由視覺比對與辨認，獲知圖形組成要素的知識與典型的概念。圖形辨識能力的發展受到文本情境與個體認知能力的影響，因此要提升學生對於圖形要素的型態辨識能力，以下幾項教學安排的主張是值得重視的。

1. 圖形的視覺辨識活動應優先提供特徵差異性大者的文本情境為主，讓學生藉由強烈的認知衝突，進而明瞭各類圖形顯著的要素，能從中予以辨識分類，進而利用相似性的特徵形成概念。
2. 鼓勵學生對於圖形型態辨識後，能將圖形的要素加以內化，形成表徵，並能透過數學語言表達這些表徵的特性，以強化記憶的效果，以作為日後面積概念學習基礎的能力。
3. 型態辨識因文本情境與個人表徵能力的不同而呈現個別差異，因此經驗與策略的分享是建立相似圖形基模的良好方法，教師應鼓勵兒童對圖形訊息的交流，以減少衝突帶來的挫折。

本節綜要與評析

一、綜要

綜合上述有關兒童面積圖形視覺化概念發展各家派典的主張，可將其理論重點之間的異同加以比較，整理如表 4 所示：

這些派典雖各有其強調之焦點重心，但亦有其缺陷不足之處，例如，Van Hiele 的理論偏重幾何知識內容系統的建構，但未能深究各層次所涉及的認知歷程；皮亞傑重視個體認知層次的發展，但甚少談與教學對圖形視覺認知的效果；認知心理學派則太強調大腦結構與訊息處理的歷程，忽略了環境與個體產生的交互作用。從表中我們可以明瞭，三個派典所強調之重點雖各有不同，然可結合互補形成一堅實之架構，提供有

效的面積課程與教學方式所應具備的特徵。

表 4 有關兒童面積圖形視覺發展各派點理論異同之比較

派典 比較重點	皮亞傑學派	Van Hiele 學派	認知心理學派
理論要點	強調兒童圖形視覺的發展隨著年齡的增長而更加成熟，幼兒繪將視覺所接觸的圖形藉由記憶而形成保留概念，作為日後辨識與比對圖形的基礎。	強調兒童幾何概念的發展會隨著層次而逐漸提昇，教師應透過實作及適當的情境安排，協助兒童從生活經驗中獲得圖形的要素概念。	以訊息處理理論探索兒童對於圖形如何經由視覺的輸入，而後在大腦中形成表徵的機制，強調個體對圖形心理認知的作用。
對課程與教學的啟示	<ol style="list-style-type: none"> 1. 注意情境的安排，提供個體與環境事物交互作用的機會，鼓勵兒童藉由操弄獲致圖形的概念。 2. 積極培養兒童保留概念，作為學習基礎能力，以利日後類化與轉換的發展。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師應針對學童不同層次的幾何能力，透過不同教學技巧與概念的引導，激發學生往更高層次的發展。 2. 教師應擁有豐富的幾何基本知能，並能與學生做適切的溝通，進行有意義的概念傳達。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 課程的安排應強調物體要素的特性，以利這些特徵經由視覺的登入而形成表徵。 2. 個體認知能力對訊息的傳導與概念的轉化影響重大，教學前應先了解學生認知能力發展的程度，安排合宜的學習材料，激發學生學習的動機和興趣。
理論之評析	<ol style="list-style-type: none"> 1. 忽略教學產生的正面效果與可能的發展。 2. 忽略了學習材料組織與個體心理作用之間的連結關係。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 對於學生幾何概念層次間之轉換歷程關係不明確。 2. 個體心智能力發展之差異性無法與各層次所符應之幾何概念相配合。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 忽略學習材料與教學對個體幾何概念發展的效用。 2. 簡化了學生面積圖形概念形成的機制，忽略了文化層面的影響。

二、評析

圖形要素的辨識與概念的保留是面積解題能力發展的先決條件，所以兒童需要經驗到圖形的辨識、比對，了解到面積圖形是由許多不同的特徵屬性組合而成的事實後，才能進行圖形歸類與命名的活動，進而探討面積的解題。上述皮亞傑、Van Hiele 及認知心理學各派典所提出之知覺辨識理論的主張各有所長，在面積概念的教學上可以提供以下的啟

示：

- (一) 面積概念的發展應以具體的事物為基礎，利用視覺的比對與實物的操弄，讓學生建立圖式的基模後，再提供多元的解題策略，以探索圖形結構之間的關係，最後找出規律而形成公式。
- (二) 面積概念的教學宜採取層次方式逐步實施，主要的原因牽涉到面積概念的習得需歷經將物體結構要素的抽離，這除了需要視覺辨識外，尚須配合測量技術與計算能力的發展，才能明瞭空間結構的意義而後將空間圖像與抽象符號結合。這歷程不僅關係到兒童認知能力的發展，也與學生對於外在知識表徵的內化與統整、轉化與類化有關，因此面積概念呈現的訊息需具有連貫持續的特質外，教學方式宜採取分段漸進取向，讓學生具備了基礎的基模後，才足以提升和整合其片段的觀念為整體結構的知識。
- (三) 面積概念的轉化與習得和教師的教學方法息息相關，教師除了要明瞭學生幾何概念轉化層次的發展外，尚需運用有效的認知策略像是辨識、分類、監控等方法輔導學生，讓其瞭解到面積公式、乘法關係與圖形結構要素之間是處於「辯證」的關係，而這可利用討論、對話等引起認知衝突的方式釐清面積概念的本質。
- (四) 面積概念的習得與保留和兒童本身的文化以及所接觸的環境內容有關，教師應鼓勵學生勇於操弄、從嘗試中轉化解題策略對於面積概念發展的重要性，透過面積空間結構

的重構，不必一味依循公式而能探索出面積概念的意義。因此，教室裡的佈置應配合面積教學豐富的文本情境，並能讓兒童將其在課堂裡所學的面積概念適時地運用，解決生活上的問題。

本節論述之圖形視覺化發展的理論基礎是為面積概念理解與習得的入口，學生若能具備完善的圖形視覺能力，將有助於面積解題成就的提昇。唯面積概念的發展牽涉到複雜的能力表現，面積解題乃是一種位置的改變，倍數觀念與等分觀念的綜合能力，是空間結構邏輯關係領悟的表現。除了圖形視覺保留概念外，尚且包含了測量概念、空間結構轉換與象徵符號抽離等。下節將論述的重心移至面積概念所牽涉的解題能力，繼續進行空間要素抽離、面積相關要素測量等相關理論的探討與分析。

第三節 面積問題解決能力發展理論

面積概念的學習除了受到上節所論述的圖形知覺辨識、表徵等基礎能力的發展影響之外，尚且包含了圖形要素的抽離、測量概念、空間與乘法結構關係、以及抽象符號組織等綜合邏輯思考的問題解決能力。關於學童面積概念解題能力發展的研究，不少學者針對其研究的取向與興趣，提供了諸多的理論主張，對於學生面積解題表現的探討，激發了不少重要的啟示。本節茲將這些學者針對面積解題能力發展研究相關的主張要點，歸類為：1. 面積空間要素抽離理論；2. 單位量排列能力理論與3. 面積覆蓋策略發展理論等三個部分加以論述，以比較其對面積概念發展的主張，作為本研究形成文本設計架構的參考，最後則對三個理論的

見解提出綜要與評析。

壹、面積空間要素抽離理論

圖形要素特徵的抽離是學習面積概念的前置作業，因此，教師應安排顯著的圖形要素讓學生從操弄的過程中，經由比對、分析與辨識而了解各種圖形形狀的要素與特徵，才能將面積公式的概念從具體的層次類化到具有更複雜關係的面積公式學習問題上。由前節圖形辨識與表徵理論的分析可以理解，面積概念的發展是先經由視覺化的過程，抽取圖形有關的要素，經過比對、轉換、組織與連結之後，才能明瞭要素與其之間的關係，進而明瞭面積空間結構與代數的意義。因此，面積圖形要素的抽離是學習面積概念最基本的作業。有關空間要素抽離理論此學說的代表人物可以 Piaget, Inhelder (1967) 及 Clements, Swaminathan, Hannibal 與 Sarama (1999) 的理論為主，以下分別予以闡述：

一、Piaget 和 Inhelder 之要素抽離主張

Piaget 宣稱：形狀的抽離是依賴於一種提出物件之間關係的活動歷程，這種關係則植基於孩童的行動，並逐步組合而成。此理論主張空間要素的結構化是針對物件或是一組物件的組織體或形式加以建構而產生的心智運作，這種心智運作歷程的基礎，強調學生要以計算或點數的方式處理空間情境要素的問題。面積概念的形成模式，是一種從視覺操弄進展到代數模式的學習理論，因此，從圖形特徵的辨識，經由正方形單位量覆蓋的操弄作為矩形面積長寬要素的抽離，以及計算出其所需的單

位置數目，是瞭解兒童面積要素結構化發展的良好活動(Battista & Clements, 1996)。要瞭解物體的結構化，則需藉由物體空間要素的辨識，將之抽離轉化後與複合體組合，並且建立起內在的關係，才能決定出結構的形狀及特徵，並推演出代數的模式。當一個議題或行動的要素能夠完全地被抽離，必須經歷以下幾個不同的層次運作：

- (一) 能區隔出不同流動的經驗並將相似的要素瞭解其為一個單元(視覺化)。
- (二) 轉化並將物件的要素或單元儲存於大腦的工作記憶裡，即使當此議題或行動消失了，依然可以從腦海中重複的出現及進行操作(表徵化)。
- (三) 釐清此議題或行動的基本感官內容與其間的關係，整理出清晰可以轉化的要素，並予以交互組合，運用於新奇的情境(Steffe & Cobb, 1988; Van Glasersfeld, 1995)。亦即可以統整先前抽離及結構化所形成的新結構，並做為未來行動的內容(轉化與類化)。

二、Clements, Swaminathan, Hannibal 與 Sarama 的抽離層次主張

Clements 等人(1999)的研究歸納出學生的空間視覺要素抽離能力的發展可以分為以下兩種層次：

(1) 層次 0：視覺特徵(visual level)

這個層次的兒童只可以注意到某些特殊圖形的視覺特徵，而不能區辨很多一般的圖形特徵的關係。

(2) 層次 1：整體融合(syncretic level)

這個層次的兒童能透過圖形的整體輪廓辨認，去學習詞彙，即辨認或再造出一個與指定的圖形相同的圖形，但不能利用圖形的特徵或組成要素來分析。

綜上所述，可知 Piaget 和 Clements 等人的理論皆提出空間要素的抽離具有不同的層次，且層次等級不同，但總體來看，空間要素的抽離歷程是必需從圖形部分的特徵辨識開始，經由要素的區分與組合，進而理解要素整體的關係才能形成面積的結構概念。由於面積的內涵結構包含了「數」、「量」與「形」等數學範疇交織而成，因此要素抽離的作業將益形地複雜與變化。茲分述如下：

- (一) 在「形」方面，面積指的是對某一特定區域的覆蓋形狀，這個區域是封閉的，如此才可以辨識出覆蓋面的特徵。要從形狀進入面積概念的轉換，圖形有關的要素抽離就得包含邊、角、頂點、對稱、平行與垂直等特徵，學生進而才能理解面積有關的高、底邊、對應等概念。隨著認知的發展，學生能將圖形特徵加以比對、儲存，甚至可伴隨普遍的單位量進行實測及估測能力的發展，進行「量」的要素抽離及各量間的轉換。
- (二) 因為面積是圖形被覆蓋的程度，經由視覺可判斷出大小，因此具有可測量的要素存在，有關面積「量」的要素方面，學童要進行抽離的概念，包含了長度測量、角度測量與單位量的覆蓋排列，經由要素的抽離後，學童不僅可以培養量的概念，尚且能夠了解面積與空間結構的關係。另外，經由量與

量之間的轉換，學童可以發現幾何圖形「等積異形」共構的特徵，進而推論形成「代數」的模式來解決面積的問題。這種轉換之間要素的抽離則包含圖形位置的移動、方向的轉動、形狀的改變或切割等不影響原有圖形大小的技巧與策略的運用。

(三)「公式」是面積概念學習的目標，因此有關「數」要素的抽離則包含了一些規則像是遞增、遞減、遞移律、交換律與加法倍數的關係，經由這些關係的理解，學生才能理解圖形結構與「數」之間的意義。所以，從面積教學「數」要素抽離的歷程來說，經由矩形面積的覆蓋活動中進行學習，對於瞭解正方形單位量的性質、大小和矩形的維度關係，以及長度測量關係的辨識，釐清乘法運用所代表的角色，是非常重要的。

但是學童對於面積概念相關要素的抽離並非一蹴可幾、渾然天成的，這些能力尚需透過合適的情境設計及教學引導，才容易讓學童對面積有關的要素進行有效的抽離。

三、面積概念學習的主張

由上述圖形要素抽離的理論可以瞭解，面積概念結構要素的抽離，實仍需經過「視覺化」、「表徵化」、「轉化」與「類化」等認知的過程，才能確認面積概念是否習得。研究者認為面積概念學習的文本與策略的設計除了優先考量面積圖形特徵的「辨識」外，尚可配合「比對」、「類比推論」及「關係轉換」等機制，進行各種抽離能力更細緻的發展，如

圖 5 所示：

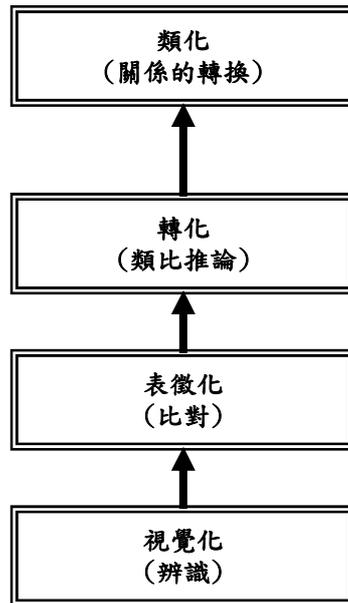


圖 5 面積概念要素的抽離歷程

- (一)「比對」是圖形辨識之外最基本的方式，透過比對，學童可以經由特徵的相似性，抽離出相同類疇圖形的特徵以及重要的因子而加以表徵，在腦中形成有意義的符碼，以便於資訊的儲存和提取。例如學童看到有四個邊、四個角的封閉圖形，可以馬上知曉是個四邊形，且與三角形進行區隔。
- (二)「類比推論」可以透過學習經驗的擴展，將一圖形物件的要素轉移至另外的物件上，形成相同的結構概念。舉例來說，正方形是菱形也是矩形的一種，因為正方形有四個等長的邊，所以屬於菱形；另外，它又有四個直角，因此也是矩形。
- (三)「關係轉換」則指學生經由上述能力發展後，對於圖形的概念能夠保留，而進行物件之間關係的組合。例如，正方形可以分為兩個三角形，正方形的面積為邊長 \times 邊長，因為三角形的面

積為正方形一半，因此其面積就可由邊長 \times 邊長 $\div 2$ 得到。

Del Grande (1987) 的觀點可支持上述抽離機制的作用，他的研究發現，兒童在早期是透過視覺、聽覺、觸覺與移動方式之活動經驗來探索它們的思考，這種對空間的知覺是很直覺的。空間的知覺是指兒童能認知及辨別在空間之中或從空間得到刺激的能力，並且會透過它們以前相關的經驗去解釋這些現象 (林碧珍, 1992)，這與辨識、比對、類比推論與關係轉換的作用是一致的。空間要素抽離理論是以圖形「形」的特徵辨識作為學習的基礎，經由視覺化、表徵化、轉化與類化等認知機制的歷程，最後可以理解到面積的概念，此理論的觀點有其優點存在的，亦即面積概念的習得可以透過圖形物件之操弄，將有關的要素予以抽離、整合，最後能達到公式結構的形成。這種由具體到抽象、部分到整體的歷程，頗合乎學童認知發展的順序，可作為概念文本設計的基礎。

貳、空間單位量排列能力發展理論

對於面積概念的發展除了上述空間要素抽離的主張外，另有學者採取測量的觀點來闡述面積概念的發展，他們認為面積是由許多部份的小單位量組合，透過完全的排列覆蓋就能得知面積的大小。Battista 和 Clements (1996) 等人就持著此種論點，茲概述其觀點如下：

一、Battista 和 Clements 的排列能力發展層次觀

空間單位量排列能力的發展，指的是學生透過視覺和移動的方式來探索面積概念的建構活動，Battista 和 Clements (1996) 從學生以正方形排列建構二維度面積的活動中，發現排列的過程必須遵循著三個認知能力發展的複雜層次：

層次一：學生排列的建構先從單維度的層次來做思考，他們會依循這些層次，沿著它做旅遊，但並不瞭解其周遭的其它關係，宛如在地道中摸索前進一般。

層次二：當學生能夠步出地道，且不再注意這些層次時，他們能將單維度的層次作連續的組織，採取不理會或消除這些層次所包含的要素，而嘗試去探索適配二維度空間的要素。這個省思性的消解歷程需要學生將其創造性層次的改變抽離化，如此，他們才能思考、安排，以及在二維度空間有關的架構內，連結這些動作。

層次三 A：此層次的轉化需要學生將排列概念化，藉著將行、列二維度的要素複製而將矩形填滿。很明顯的，這個轉化似乎有派典轉移的特徵，需要學生放棄思考排列時部分的重點，轉而支持行或列整體排列所創造、連結所形成的架構。

層次三 B：此層次的轉化是將行或列當成結構的要素，它是歷程中複雜結構化約縮減後可重複測量使用的單位。其功能好比是象徵性的指標一般，這些小正方形單位量不需要在行或列中另外的重複呈現，就能指出行或列間構成的成分(Van Glasersfeld, 1995)。事實上，它具有這樣的功能指示的運用：當需要採取多元複雜的基模時，可以將這種成分要素，分配到其它的因素之中。

層次三 C：在此層次上，是以「行×列」所建構的行動，因此就無須再以知覺性的材料做為測量的基礎，但學生需要將行、列

間的成分要素，此種可重複測量的刻度做為內部整體的連結。「行×列」此種基模結構的運作，可以促進學生從一開始時閱讀面積文本時就能看到整個基模的計畫，並能在最初之知覺型態材料缺乏的情況下加以使用；再者，透過內部的連結可以精細化「計劃」這個機制。由於學生能夠針對文本中語文資訊的解釋而建構心智的模式，所以行、列關係基模的內在連結，其功用就在於提供這個心智材料。

學生空間結構排列的產生，是以正方形幾何關係進行組織行動的結果，也就是針對物體集合，透過心智行動的操作而創造空間結構，他們並沒有從物體裡讀取這些結構，反而是使用一種「建構式的結構」(constructive structurization)，一種非知覺性的方式，豐富物體的內容。這種歷程，積極地建立物體和以個體的生理與注意的行為為基礎逐漸連結的內在關係(Kosslyn, 1995)。結構化抽離了用來組織物體的集合，進而創造實體行動連結的順序，在以後如計算方面的操作，可被當作是基模的內容。

二、面積概念學習的主張

此派理論特別重視「心像」的形成與運用，以作為面積「量」的間接比較能力發展的基礎。間接比較的能力分為兩個層次：

- (一) 初步的間接比較就是複製後，再直接比較，例如：因 A 物件、B 物件不可移動，無法直接比較面的大小，故對 A 物件以疊合方式複製一個面積相同的物件或單位稱為 C，以 C 和 B 物件直接比較的結果，當作 A 物件和 B 物件的比較結果。

(二) 另一個層次是個別單位比較與實測，在描述面積的大小時，學生會利用一個個的個別單位以記號的形式紀錄在所欲描述的物件上，這種做法不是個別單位比較的原型，而是將個別單位形成心像後的省略做法。

為了要達成這樣的能力發展，繪圖或許能被視為是將心像結構化的思考，或被視為是學生「做」排列結構心智影像的引導，Reynolds 和 Wheatly (1996) 根據學生鋪蓋方瓦作業的發現，發展出五個「心像」的階段，他們相信這對於解釋孩子們在描繪相同區域的覆蓋活動上是非常重要的，這些階段包括：

1. 建構物體形狀的心像；
2. 針對所要描繪的圖形建立有效的覆蓋步驟；
3. 進行覆蓋；
4. 建立重複型態的覆蓋；
5. 連結型態和覆蓋的關係。

依據此派理論的論述，要讓兒童能夠清晰的理解空間結構與面積概念的連結，唯有透過單位量覆蓋的操弄與排列能力的提昇，才能形成面積概念的「心像」表徵，才能利於面積公式抽象符號意義的習得。此外，Simon 和 Blume(1994)也建議：學習者必須要藉由單位量的排列，將矩形的面積視覺化為可以測量的方式，從中探索面積圖形與單位量的關係，如此才能增進乘法結構關係的轉化。面積的測量公式概念，就在以長度的數值作為變數加以運算去描述特殊的平面圖形的面積，而其基本是密合為矩形的單位計數，面積單位量排列能力發展的理論正可以提供我們

理解孩子在此方面能力發展的層次，以作為面積概念文本設計的依據。

參、面積覆蓋策略發展理論

影響兒童面積解題能力的提昇，除了面積空間要素抽離及單位量排列認知能力的發展外，覆蓋策略的使用亦是一重要因素，因為要讓學童將特殊的平面圖形利用普遍的單位量計算出其數量，則需將此平面圖形先形成密合為矩形的單位計數，因此就得利用分割拼湊把圖形變為矩形的技巧和策略不可。

一、Outhred 和 Mitchelmore 公式轉化的階段模式

Outhred 和 Mitchelmore (2000) 針對孩子矩形面積測量的活動，設計了一系列的測驗，藉由訪談者從孩子利用繪圖、計算及測量的作業，連結觀察和所關心的問題進而推論孩子們所使用的策略。解題的作業強迫學生使用估量或是測量以決定覆蓋矩形所需單位量的數量，從中發現了解題作業的成功是依賴孩子對於直線及其排列的單位和直線測量技術兩者之間關係的知識，並且發現了四種可辨識的策略：(1) 不完全的覆蓋；(2) 視覺估算的覆蓋；(3) 具體單位的覆蓋；(4) 及沿著邊長發現單位數量的覆蓋。這些策略表現的作業如圖 6 所示：

從這些策略的分析可知：學生最初的反應是將單位量的正方形以間隔或重疊的方式散佈於矩形內，雖然可以覆蓋，但是卻無法擴展出矩形的型態；接著，學生能夠正確的呈現排列的結構，但無法確認矩形邊上依單位量大小所劃分的單位量數目和矩形每一邊的長度之間是具有關聯性；最後學生學習使用測量的方式，發現排列的單位量大小，可以決定排列數量的計算。Outhred 和 Mitchelmore (2000) 針對這些反應，思考

學生的覆蓋策略的發展將它分成五個階段(如圖 7)：

沿著邊長發現單數數量的覆蓋

圖 6 學童進行覆蓋作業觀察到使用的策略

(採自 Outhred & Mitchelmore, 2000 : 144-167.)

階段 0 不完全的覆蓋：此階段單位量以間隙或重疊的方式覆蓋住矩形，部分學生在「做」排列時，傾向於只注重矩形的邊緣，並非其內在的結構。

階段 1 基本的覆蓋：此階段是以沒有重疊的方式將單位量完全地覆蓋住矩形，在其組織是非系統性的，單位量的大小和形狀有不一樣的思考或形成不正確的排列。此階段的覆蓋，除非意外，否則無法顯示出正確的單位量數目。

階段 2 從單位量的建構進行排列的覆蓋：此階段顯示出正確的排列結構，但是矩形行列之間的單位量數目相等，因為每一行列間單位量的大小主要是由既定的單位量所決定，與矩形維度間沒有產生關聯，以致於這些單位量只能藉由視覺作簡單的估算、從具體材料拷貝或是以單邊或是雙邊進行測量。

階段 3 經由測量後做排列的覆蓋：每一方向上的單位量數目可用測量及描繪獲得。利用單邊測量的方式去發現行列中單位量的數目是最常用的方式，且以點數的方式發現單位量的數目，年齡較長的孩子則會採用重複的加法或乘法的方式算出單位量的個數。

階段 4 藉由排列關係計算解決：在此階段，單位量的數目是由單位

量的大小及矩形的維度兩者之間的關係計算得出，而不用描繪的方式，此階段解題的反應指出，面積公式之複雜等式的知識已在運作。

在階段 0，沒有可識別的策略被用於矩形的覆蓋，在階段 1 和階段 2 所建構的覆蓋策略只能稱為部分的而不是整體的 (Outhred & Mitchelmore, 2000)，孩子只注意到結構的部分。在階段 3，一種可類化組合的策略產生，但仍屬於圖像式的架構，在階段 4，這種架構就變成了符號式的。

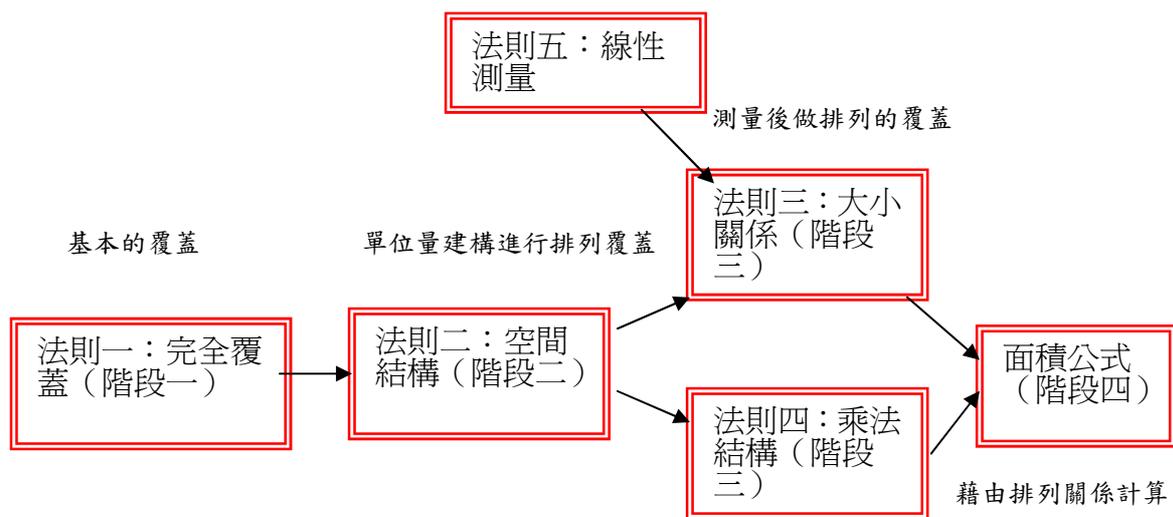


圖 7 面積公式理解之關係性階段及法則之發展

(採自 Outhred & Mitchelmore, 2000 : 163.)

很清楚的，在策略的使用上，孩子並不一致，但在任何既定的時程裡，孩子們能藉操弄提升至一定的階段，隨著時間可至最高階段。但是真正使用特別的技巧解決問題的階段，仍須依賴解題特殊條件的要求。從解題觀察所區分出的五個階段的策略指出：孩子使用描繪或是心智影

像推論所呈現的矩形覆蓋作業能力是逐步發展出來的，這個發展的中心可以形成四個操作型的法則，這些法則具有學習的順序之分：

法則一：矩形必須由單位量完全的覆蓋，不能有重疊或縫隙。

法則二：每列的單位量數目要相同，並能一線排列。

法則三：每一列單位量的數目和和列之間的數目兩者是由矩形的邊長所決定。

法則四：矩形排列的單位量數目，可從行列單位量的數目計算得到。

圖 7 指出了法則四反應了排列的乘法結構，孩子可以運用這個法則而不需要使用複雜的操作進行計算(Mulligan & Mitchelmore, 1997)。雖然小朋友可以很快的將矩形填滿（若有充分的紙板），但對於法則一常常無法理解，理由是，

- （一）紙板預構了解題工作的原型（prototype），小朋友不必使用描繪的方式就可以完成覆蓋。
- （二）工作的新奇性，孩子需要經由幾次嘗試訓練後才能獲得經驗；
- （三）孩子必須在一條線上將呈現的紙板相鄰的兩邊做簡易方便的描繪，只有經過這種步驟後，才會顯現出排列的結構，而非只是個別的正方形而已。

在階段一，學生基本的安排只是單邊的配對，但逐漸會學習利用雙邊，法則三的學習需要孩子對於線性測量的瞭解，才能瞭解到單位量大與矩形維度的關係，因此可增加法則五，對於矩形覆蓋的運作，它是非常重要的。

法則五：能沿著直線指出單位量所區分的數目，他需具有尺規使用

步驟的瞭解。

二、面積概念學習的主張

Outhred 和 Mitchelmore (2000) 的模式也提出一些面積概念學習上重要的建議：

- (一) 在面積概念學習的歷程中，孩子需將空間結構的排列當成重要學習目標—公式習得的中間媒介。
- (二) 線性測量的相關性轉化是教學中最基本的。
- (三) 在面積公式學習之前，孩子需要將面積的測量與直線的測量和乘法的概念相互連結。

從模式歷程中的描繪及計算兩個活動來看，不管是否包含了測量的作業，當孩子開始經由每列單位量的思考，就產生了第一次及重要的數量學習，基本上每列的數目被重構當成幾何的等值面積，使每一列單位量的數目都一致，當發現了每一列的數量後，下一步計算全部需要多少數量的單位量就可解決了。經由覆蓋策略的發展，學生可以理解到空間結構的大小與乘法結構的關係，進而能推論出公式而解決問題。

本節綜要與評析

一、綜要

針對學生面積解題能力發展的部分，本節分別從空間要素抽離、單位量排列能力發展與覆蓋策略發展的面向加以區別論述，這只是便於文獻的探討與分析而已，從面積概念的發展而言，這三種論述在整個學習的歷程中是糾結交纏在一起的，無法區隔分離的。理論之間有許多要點

環繞重疊，且互為包容，在面積解題能力的發展上雖有先後順序之分，但統合之後，可在面積概念教學的歷程上，形成一完整有效的步驟，增進學生幾何概念發展的完整性，其要點整理如表 5 所示。

這個有效的教學歷程是透過認知心理學訊息處理的模式，將圖形物件的資訊透過感官的辨識、比對、抽離後，形成心像表徵，並且利用所建構的圖形表徵，做為空間推理及圖形結構連結的基礎，進而明瞭圖形要素與公式意義形成之間的關係，這種歷程即是概念從具體至抽象轉換的過程。綜合上述學者的理論觀點，可歸納本節的要點如下：

表 5 面積解題能力各學派理論要點之綜合比較

理論學說	空間要素抽離	面積相關要素測量能力	面積覆蓋策略
代表人物	1. Piaget 等人 2. Clements, Swaminathan, Hannibal 與 Sarama	Battista 和 Clements 等人	Outhred 和 Mitchelmore
學說主張	要瞭解物體的結構化，則需藉由物體空間要素的辨識，將之抽離轉化後與複合體組合，並且建立起內在的關係，才能決定出結構的形狀及特徵，並推演出代數的模式	是以正方形幾何關係進行組織行動的結果，也就是針對物體集合，透過心智行動的操作而創造的空間結構，但沒有從物體裡讀取這些結構，而是使用了一種「建構式的結構」，一種非知覺性的方式，豐富了物體的內容。從這種歷程，積極地建立物體和以個體的生理與注意的行為為基礎逐漸連結的內在關係	利用單位量的正方形以間隔或重疊的方式散佈於矩形內；接著，能夠正確的呈現排列的結構，但無法確認矩形邊上依單位量大小所劃分的單位量數目和矩形每一邊的長度之間是具有關聯性；最後學習使用測量的方式，發現排列的單位量大小，可以決定排列數量的計算
教學建議及運用	考量面積圖形特徵的「辨識」，配合「比對」、「類比推論」及「關係轉換」等機制，進行各種抽離能力更細緻的發展	透過單位量覆蓋的操弄與排列能力的提昇，形成面積概念的「心像」表徵，利於面積公式抽象符號意義的習得	使用描繪或是心智影像推論所呈現的矩形覆蓋作業能力，將面積的測量與直線的測量和乘法的概念相互連結

(一) 面積概念解題能力的發展是一項錯綜複雜的歷程，包含了對圖

形要素的抽離、單位量結構排列的計算，除此之外，尚且需要藉助覆蓋策略的運用才能順利無誤的了解面積空間大小與乘法結構間的關係。從面積概念解題能力的發展來看，兒童應先具備圖形要素抽離的能力後，進而才能操弄單位量排列及覆蓋的作業，了解行、列與空間結構的關係，最後才能習得公式的意義。所以，面積解題能力的發展是循序漸進的，可依能力分階段，從抽離到統整，透過文本設計和認知教學的引導，而獲致面積的概念。

(二) 面積概念有關解題能力的發展，雖可依循不同階段進行教學，惟各能力間之關係是相互依存，彼此關聯結合成一空間結構的系統，此系統內的各項能力的發展順序皆具有輕重緩急之分，不可躐等，也缺一不可。因此教師在面積概念轉化的歷程上，應協助學生認識面積學習的目標，將各種有關能力進行銜接與整合，作為面積概念學習的基礎。

(三) 要順利的達成面積概念習得的目標，面積概念轉化能力的內涵，應包含圖形要素的辨認、單位量覆蓋測量的歷程、以及空間結構與乘法關係的建立，另外，學習者會透過覆蓋策略運用的經驗，會將特殊性的圖形分解為簡化的圖形，例如矩形等而進行解題，進而發展出面積的公式概念。因此，面積概念轉化文本設計的內容，應包含上述的內涵，如此才算完整。

二、評析

經由上述理論的爬梳詮釋後，可以發現 Outhred 和 Mitchelmore

(2000)發展出的面積公式理解之關係性階段及法則之發展模式，統攝了要素抽離理論的精髓，並包含了排列、覆蓋以及測量和乘法結構等能力的內涵，可說最為完備，能將此模式作為本研究面積解題能力教學以及提升學童面積概念發展的參考架構。

Outhred 和 Mitchelmore (2000) 公式理解的階段模式是以典型的矩形覆蓋活動為主，經由測量活動的引導，發展出乘法結構的運用，進而轉化面積的公式意義，這係針對單純要素圖形所建構出的理論模式，這種文本設計適用於正方形或是矩形的解題活動上。陳嘉皇 (2003a, 2004) 以 Outhred 等人的理論為基礎，將之擴展至三角形和特殊四邊形公式理解活動的研究，發現若將解題圖形的條件要素複雜化後，學生除了利用測量與乘法關係計算的方式進行面積的解題外，在歷程中尚會採取圖形重構調和的策略，而這種多元解題的方式，將影響圖形空間結構轉化及計算方式的變化。因此，他認為 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 公式轉化的階段模式運用於國內學童面積的教學，建議除了前述五個法則外，可在乘法結構與公式形成的學習活動之間，擴展補充法則六：面積解題策略的運用 (如圖 8 所示)，形成另一教學階段模式，可使面積解題的概念轉化文本設計與教學實施更趨完備。

Outhred 和 Mitchelmore 的理論架構是集晚近所有面積概念發展與教學研究論述的大作，這個架構提出了能力發展必要的學習法則，也列出了學童在面積學習階段時序發展上的先後關係，雖然較適合矩形面積公式的演繹操弄，但對於面積概念文本設計與教學的引導，確切提供了基礎的理論依據和遵循標準。研究者將此模式擴充形成如圖 8 的教學階

段歷程模式，以簡潔的術語且容易識別的框架結構劃分了測量、重構與計算三階段，將 Outhred、Mitchelmore 原先提列和陳嘉皇增補之基本的法則重新安排納入到各階段歷程中，測量階段是以覆蓋排列為基礎能力，重構階段則深入探討圖形結構的轉換與空間位置的推理，計算階段則開啟了乘法結構與面積公式關係連結的機制作用。此模式顯示面積公式學習歷程中「數」、「量」、「形」內涵的複雜性特徵，教師在教學的歷程上不可躐等，必須循序漸進，俟學生基礎能力完備後，才能再向前進展，激發學生發展更高一層的幾何能力。

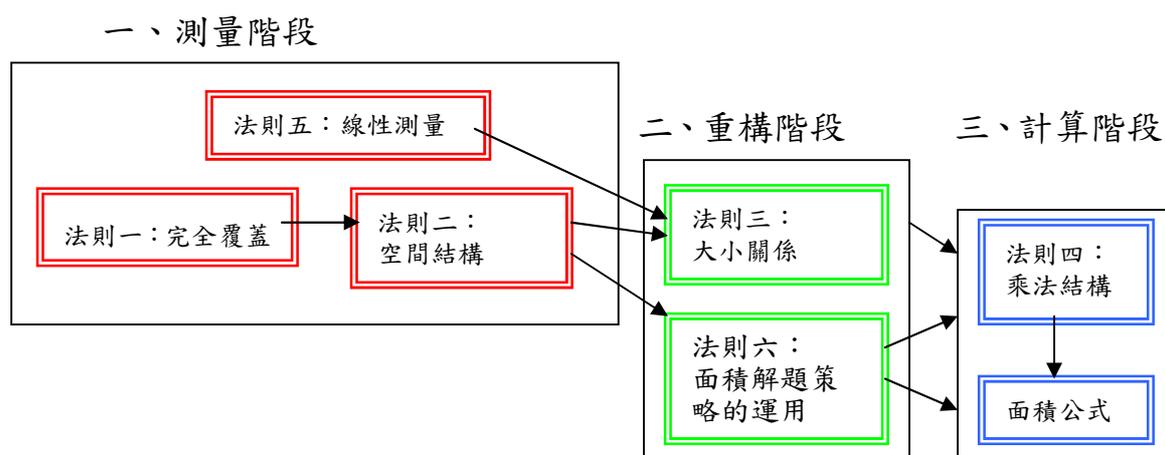


圖 8 面積公式教學階段模式

第四節 面積概念發展之相關研究探討

面積概念的內涵複雜且多元，學童除了需具備「數」、「量」、「形」等方面的知識與技能外，尚需擁有聰慧、敏銳的解題策略協助，才能促進面積概念學習完善的發展。鑑此，學校課堂裡的面積概念文本設計與

教學策略的引導將更形重要。因此，就有不少學者及教育人員針對學童本身面積概念的發展、課程內涵的設計與教學實務相關的影響因素，加以探討研究，希望能尋找出合適的學習脈絡，建構合適的教學模式，以利學生學習參考。本節主要內容，係針對現今學界與面積解題有關的議題研究作一爬梳整理，從中瞭解國內外學者對於學童面積概念發展的探討，及學童在面積解題上的表現狀況，以作為本研究設計與變項內涵連結之參考。本節首先探討圖形面積概念與解題能力發展之相關研究；其次，探討長度測量能力與認知發展的關係；接著，探討學生測量策略使用的研究；再者，為了理解學生是否學得面積概念的轉化，而能運用於日常情境，遂進行面積文本設計有關之研究探討；最後，針對前面各節的說明與闡述，提出本章的綜要與評析，作為探討面積概念研究未來之趨勢。

壹、圖形與面積解題能力發展之研究

一、圖形要素的辨識與抽離

針對學童圖形與面積解題能力的發展，首先需探討其對於面積圖形特徵屬性的理解層次，因為瞭解各種圖形的要素之後，才能對圖形加以分類、歸納，進而形成表徵，作為日後圖形轉移及空間推理的基礎。譚寧君（1998，1999）針對國小三至六年級學童面積迷失概念的分析研究，發現約有三至五成的三、四年級學生已經具備面積保留概念，而五、六年級學生解決面積問題時仍受視覺影響甚大，大約有九成的學生已能掌握個別單位的覆蓋意義及理解在有圖像下的化聚關係，並能透過切割活

動，計算出單位的個數，但仍有為數不少的學生在面積、周長與邊長的概念上混淆不清。

陳光勳（2003）進行兒童之面積概念調查及診斷教學之研究，發現國小四年級學童面積的迷思概念包含了：

- （一） 看不見的東西沒有面積。
- （二） 不規則的物體沒有面積。
- （三） 任何平面圖形均有面積。
- （四） 有規則的圖形（如矩形等），能用公式算出才有面積的存在。
- （五） 面積就是平面圖形中要有大的、小的圖案才有面積的存在。
- （六） 有生命的物體其局部平平的地方才有面積的存在。
- （七） 和長度、周長觀念相混淆。
- （八） 等周長等面積、等面積等周長。
- （九） 易犯線性 A 線性 B 直觀現象。
- （十） 認為「格子較大或高度、寬度較大者的面積為大」、「單位數量多的面積較大」、「圖形較完整的面積較大」。

另外，張英傑、謝貞秀（2003）針對國民小學三、四年級學生進行正方形、矩形與三角形與其它圖形概念的分析發現學生具有以下的迷思概念：

- （一）對於正方形封閉性的概念，三年級學生認為正方形一定是正正方方的，將斜放的正方形當成菱形。學生可能透過圖形的整體輪廓直接根據視覺辨認，但忽略了圖形的特徵和組成要

素。

- (二) 對於是正方形也是矩形的包含關係的圖形，其辨識通過的比例最低，可能受形狀「長長的」影響，而忽略了直角的性質。
- (三) 認為三角形一定是兩個邊一樣長，三角形的邊長比例相差較大，就不認為是三角形，把有曲線的圖形視為三角形。學童比較容易只以三個角和三個尖尖的來辨認三角形，不受圖形邊長比例的影響。
- (四) 對於四邊形的辨識，認為四個邊一樣長才是四邊形；四邊形是正正的；四邊形要有直角；對於一些特殊圖形：菱形、箏形、梯形或不規則的四邊形，不認為是四邊形。
- (五) 將平行四邊形認為是「四個邊一樣長」、「斜斜的邊」或「四個角都一樣的角度」才是平行四邊形；少數兒童不認為矩形、正方形是平行四邊形。

對於學生產生這樣的迷思概念，主要的原因是學生圖形要素辨識活動不足，若學生心中只有一些特定圖形的心像，很容易就受限於某個圖形一定是什麼形狀，這些圖例可能就會變成一種「原型」(prototype)，當圖形大小、方位或邊長比例改變時，就無法辨識圖形，所以圖形辨識的課程設計與教學引導的機會就益形重要。因此，張英傑和謝貞秀(2003)在圖形辨識的教學建議上提出：教師需多傾聽學生對圖形的想法和所提出的例子解說，並且提供合宜的教學步驟及策略，幫助修正學生的錯誤概念，學生和教師間的互動是很重要的。在課程設計方面：除了依循年級認知發展的順序提供一般合適之圖形辨識教材外，尚可補充一些特殊

圖形加以學習。

二、單位量覆蓋的原則

針對面積解題能力的發展來說，當兒童學習矩形面積利用覆蓋的方式發展公式結構，大部分的教育工作者或是學者都會要求學生在學習的歷程上遵循三項重要的法則（Battista & Clements, 1996；Outhred & Mitchelmore, 2000）：

- （一） 覆蓋時鋪蓋的方瓦和單位量不能重疊或有縫隙。
- （二） 需藉由正方形方瓦依序作棋盤分佈的覆蓋；
- （三） 能夠沿著每一邊的單位數量藉由線性維度的測量而發現長寬與單位量大小的關係，這樣才能觀察及明瞭兒童面積概念發展的情況。

學生將物件的形狀重疊在方格紙上，較給予邊長的測量方式成功的機率更大，主要是學生將方瓦透過連續的密接就能強調出面積覆蓋大小的觀點，而且能夠很簡單的就算出方格的數量，無須利用測量技術，抽離出單位量邊長與覆蓋圖形之間空間結構的關係。

兒童矩形面積概念的發展會產生困難的原因，有些看法認為是偏重於公式教學的強調所造成的，尤其是在兒童尚未瞭解利用正方形單位量作為分割區域的重要性時，就嘗試教導其公式的步驟來計算面積，認為藉由背誦公式的學習就能解決情境中所有面積的問題。一些研究已經指出，年幼的兒童對於數學理念的表徵形式是很難理解的，特別是，包含覆蓋矩形圖形的具體活動和矩形面積公式之間的關係（Dickson, 1989；

Hart, 1993)。因此，具體材料的操弄對於表徵的形成就益形重要。但是，一些被用來測量面積的材料也會影響兒童的理解思考能力的發展。Doig, Cheeseman 和 Lindsey(1995)針對一項八歲兒童的研究就發現，在面積作業的表現上，使用木板覆蓋圖形表面成功的兒童是使用紙板作業兒童的兩倍。因為使用木板可以避免許多潛在的問題，像是重疊或有縫隙的情況發生，甚至於不需要對面積的計算進行轉化，兒童就能夠發現覆蓋圖形所需單位量方瓦的數量(Bell, Costello, & Kuchemann, 1983)。

三、繪圖測量抽離空間關係

兒童的繪圖是測量能力發展的重點，對於面積基本概念的轉化也帶來重大的啟示，是提升學童相關要素測量必需的手段。在一項牙買加六歲和七歲兒童的小型研究上，Mitchelmore(1983)發現，當要求大多數的兒童回答不同形狀面積的正確值時，沒有一個兒童能夠在所給於的圖形區域內畫出所需要的單位正方形數量，而且經過覆蓋和拼貼的教學活動後還是感到困難。Mitchelmore 建議學習者需要將這些特殊的圖形區域轉化成矩形的面積，並將之當成是圖形表面上的量，且將它視覺化當成可由矩形單位的排列加以測量。有了矩形排列結構的感覺後，兒童似乎能夠思考將各列面積單位量的組合當成排列的主要數量，但必要的條件是，應提供學習者如何進行線性測量和決定圖形面積單位列與排列的大小之機會。

Battista 等人最近關於二年級學生如何學習上述概念公式理解模式法則四的長期研究報告指出，很多學生對於採用方瓦為單位量進行覆蓋矩形的活動，並沒有注意到面積排列時行與列的結構性問題(Battista &

Clements, 1996)。Outhred 和 Mitchelmore(2000)也針對排列時的結構問題做研究，發現國小學生已經逐漸使用乘法的策略解決問題，而且為數不少；但是 Vergnaud(1983)的研究發現，七年級的學生對於利用乘法結構解決面積問題卻感到很困難，這些困難在於學生對於覆蓋時矩形圖形面積行、列與單位量方瓦排列數量的關係不明瞭所致，因此造成空間結構無法與乘法關係做連結。

根據林碧珍和蔡文煥（2003）的研究發現，若讓四年級的學生在方格紙上畫出邊長為 4 單位的正方形，學生的通過率只有 30.3%，但確有 38.1%的學生畫出面積為 4 平方單位的正方形，可見學生對周長和面積兩個概念無法釐清。尤其是操作性牽涉到程序性知識描述的題目，學生解題成功的機會不高，像是在方格紙上畫出一條與非水平及非垂直的水平線及垂直線，其答對率分別為 32.3%及 64.2%。

四、圖形與面積測量策略的發展

為了瞭解學生對於面積解題時所採用策略的情形，陳嘉皇（2004）也針對國小三至六年級學童進行有關「直角三角形與特殊四邊形面積解題策略之分析研究」，從中發現了以下幾項現象：

- （一）隨著年級的增長，學生在試題上的解題正確率越高；以題型而言，學生在等腰直角三角形的解題正確率為 74.3%，其次為梯形和平行四邊形，分別為 65.4%和 63.2%，最困難者為直角三角形，正確率為 44.1%。
- （二）學生對於面積測量的方式可以歸納為：1. 利用單位量的邊長測量，2. 以單位量的面積覆蓋測量，3. 以單位量面積進行目測，

4. 以小單位面積進行測量，5. 以自訂的單位量進行測量。大多數的三至六年級學童都採取第一種方式進行面積的測量，其正確率最高，但同時產生的錯誤率亦最高。

(三) 學生對於面積測量錯誤的策略類型可歸納為：1. 不明瞭線性測量的技巧，2. 使用錯誤的單位量邊長進行測量，3. 不完全覆蓋，4. 採用不精準的視覺覆蓋，5. 估算排列。

(四) 學生對於面積圖形重構採取的策略可歸類為：1. 直接採用公式計算，2. 公式與分割方式相互驗證，3. 大塊面積先行移補後，再行小塊分割，4. 小塊分割後再行移補，5. 先行複製後再分割。此部分學生採行策略的分析，與 Kordaki (2003) 利用電腦軟體研究學生「等積異形」概念圖形操弄的方式所發現的結果一致，只是陳嘉皇將 Kordaki 的結果有關「直覺取向」的策略，所強調的分割方式，再細分為上述 3、4、5、的類型。

(五) 學生對於面積計算採取的策略可以歸納為：1. 分割後進行點數，2. 分割移補後，利用長寬兩邊的個數相乘，3. 求出圖形邊長的單位量比例後，再予相乘，4. 直接採用面積公式計算。

針對研究的發現，陳嘉皇認為面積教學宜從單位量的覆蓋朝向公式轉化活動的設計，並採取視覺比對、測量、重構及計算的順序步驟，提供學生面積解題完整的程序，才有助於轉化面積公式的意義，進而理解、類化。面積測量階段的教學，應以線性測量能力的培養為基礎，然後加以擴展至二維、三維空間的測量，並加強圖形特殊條件要素的觀察、辨識，以瞭解單位量和圖形空間結構的關係。面積重構階段，教師應安排

多元解題策略的圖形，讓學生操作練習，以發現公式之意義和解題策略之間轉化與變化的關係。面積計算階段，應鼓勵學生採取多方驗證的態度，加強對公式意義的瞭解，避免強記公式而忽略題意及情境要素關係的重要。課程的設計應提供充分的時間讓學生從操作及空間的建構上解決認知之衝突，不能過度強調公式的教學，鼓勵學生自行解題，建立思考路線，培養學生觀察比較、分析，建立解題經驗與信心。

五、圖形重構與面積保留概念之關係研究

「保留概念」意指面積的量值不會因為它的圖像的改變而產生變化，依然會保持而不會有所增減。要理解面積保留概念則必須要針對圖形的不同表徵，像是數字的、視覺的與符號等表徵，賦予它的意義這樣的歷程，才能達成。如果學生能夠獲得從上述這些表徵加以選擇，進而表達自己有關面積概念的知識這樣的機會，那麼對其面積概念認知的發展是非常適宜的，因為學生可以藉由多種表徵系統的選擇，建構出更廣泛、更抽象的概念。

先前有關面積的研究是以 Piaget, Inhelder 和 Szeminska (1981) 為基礎，探究學生面積保留概念的思考，並且將面積保留概念視為是面積測量的先決條件。這個觀點反映在學生使用紙張和剪刀，進行分割、移補、黏貼圖形部分的形狀，重構成一新的、但具有等積異形的圖形，所連結的感官—動作行為作為重點 (Hiebert, 1981; Liebeck, 1987; Rahim & Sawada, 1990)，因此，面積保留概念的研究可以從面積測量與面積公式的概念分別加以探討。

不同形式之個別形狀的圖形，已經被用來探究學生在面積保留概念

上的思考，但是遺漏了等積異形此部分的探究，像三角形或平行四邊形等具有同的高或是底，那麼這些圖形的面積是一樣的，這方面的議題研究者尚未加以探究 (Kordaki, 2003)。等積異形的操作可被視為是面積保留概念的動態視覺表徵。在學校裡，學生很早就被教導面積公式的使用，但是面積保留概念卻被忽略了，雖然學生可從不同圖形形狀的研究，以及使用不同的技巧達成這目的，但是這種機會畢竟是少數；或是所使用之技巧，並無法支持此種概念不同表徵的建構，甚至，他們所研究的圖形是可被用來研究的眾多形式的小部分而已。面積具有一致的屬性，是有限的、可測量其大小的封閉圖形。當圖形的形狀改變時，面積可被保留，面積保留的意義指的是一完整的面積，可由一些小面積透過同一種方式組合而成，雖然經過部分的重新安排，依然可以保留其不變性，重新安排則與部分和整體的保留有關。利用重新安排圖形進而分析完整面積的能力是面積測量的先決條件，因為面積的測量與其它我們所能進行的測量一樣，皆需要保留部分的單位量、利用不同的方式組合形成不變的整體 (Piaget et al., 1981)。理解面積保留概念的基本觀點是補償的概念以及部分—整體的觀點。可逆性 (reversibility) 和轉化 (transitivity) 與概念的保留之間互有關聯，學生可以透過對圖形的分割、移補及黏貼，重新安排部分的圖形產生一個新的但具相同面積的圖形的行為，熟悉上述的這些概念。教師從這些歷程而理解學生保留的概念是需要的，且是學生理解面積測量概念與乘法結構先決的條件 (Douady & Perrin, 1986)。

學生對於理解「等積異形」以不同形式呈現出來的可能性是非常困

難的 (Carpenter, Coburn, Reys, & Wilson, 1975)，而且，要理解面積等於部分的總和也是有問題的 (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988)，更甚者，以知覺為基礎所得到的結論，因為無法將圖形有關的數字資訊與視覺接收的資訊相配對，因而阻礙了面積保留概念的發展，也因為只注重面積有關圖形較顯著的因素，而阻擾了面積正確的比對 (Hughes & Rogers, 1979)。另外，學生會混淆面積與周長的關係而任意的使用 (Kidman & Cooper, 1997)，因此認為圖形周長概念的保留就是面積概念的保留，也認為面積概念的保留也就是周長概念的保留 (Hart, 1989)。利用面積有關的單位量進而理解面積保留概念也是有困難的，Hart 認為這是因為學生無法將部分的面積視為單位量而加以保留。在一些研究的例子裡發現學生只能數數完整的單位量；在一些例子則發現，學生只會將超過一半的單位量視為完整的單位量加以計數，而忽略其它剩餘的小部分單位量。

面積保留概念也與圖形形式的保留有關，大多數的研究大多偏向於像正方形、矩形與平行四邊形等典型幾何圖形的探討 (Johnson, 1986)。Hughes 和 Rogers (1979) 認為要理解這些圖形面積的保留概念較容易，但要對三角形的概念進行理解則困難度較高，尤其是「等積異形」有關其面積保留可逆的關係是更難理解。對於不規則圖形面積保留概念的理解也是一項困難之處，Maher 和 Beattys (1986)，以及 Liebeck (1987) 的研究發現，這些困難主要來自於學生遺漏了有關圖形面積保留的基本概念與面積測量的單位量，這些困難即使隨著年齡的增長也不容易克服。

雖然面積保留概念在中小學的數學課程裡是項重點，學生很快地就

被教導面積測量的運作，說明單位量方瓦的意義後，即導入面積公式的運用。很多研究發現，面積測量產生困難的原因來自於過早介紹使用面積公式的量化取向，而忽略了不必使用數字有關的面積保留概念的質化取向(Douady & Perrin, 1986; Hirstein, Lamb & Osborn, 1978; Johnson, 1986)。質化取向的明瞭，則需從學生針對圖形的分割移補，形成部分的單位量而重構成一個新的「等積異形」的步驟，才能理解面積保留概念的發展情形(Liebeck, 1987)。有關面積測量的困難也發生在以下兩種原因，一是採用片段的方式研究面積，而脫離了圖形邊長和周長的動態關係(Moreira Baltar, 1997)；另一則與無法填滿的文化鴻溝有關，即是注重面積公式的運用，而不強調質化取向的操作(Baturo & Nason, 1996)。

六、面積公式的運用

國內學者陳銜逸(1996)針對國小五、六年級的學童進行平面圖形面積概念的研究發現，國小六年級的學生對平面圖形的面積依賴公式解決的情形很普遍，不論可否使用公式來計算面積的圖形，學生一看到題目幾乎絕大部分的學生會開始找公式需要的條件，甚至為了遷就使用公式，不惜以無理方式自行改變已知條件，或勉強認定圖形為可用公式解決的圖形。研究結果指出約有83%的學生能以公式正確求出正方形與矩形的面積，但公式如何得來的問題，則沒有任何學生可以作答。另外對於三角形、平行四邊形與梯形面積的計算通過率並不高，認為學生解題能力薄弱也缺乏彈性思考的企圖心，很多仍然停留在個人的目測作為測量長短的方法。因此建議在數學教學中，「公式」的重要性不應該被過度

強調，而應加強面積單位量與測量時使用單位來作為表現面積量之必要性的瞭解。

譚寧君（1998;1999）的研究發現，五、六年級學生也以記憶面積公式解決面積問題，但卻常常造成面積公式的誤用，如果提供多餘資訊的問題，更造成學生判斷上的困難。尤其對於三角形面積的問題，邊與高的概念容易混淆。研究結果也建議，單位量的轉化是推理關係的基礎，應該多提供此類問題的操作與討論經驗，以增進學生單位量間的轉化能力，加強對公式意義的瞭解，避免將公式的記憶流於形式而忽略了題意的重要，且應經常提供多餘資訊的問題，培養學生判斷的能力與習慣。尤其我國學生計算能力較強，解題能力較弱，更應提供多元問題的類型，培養學生瞭解與分析題意的習慣。

從上述學者研究的資料分析可以得知，面積公式的運用是有其特殊之功能，尤其是對於一些複雜具繁瑣條件的特殊圖形而言，不啻是種解題有利的工具，唯要在特殊情境下產生轉化及類化的效用，非理解其意義和來源不可。要解決上述學者所言學生產生之學習的弊端，唯有充分的讓學生透過面積排列覆蓋的操作及教師適切的教學引導，幫助學生理解線性測量與空間結構的關係，才能讓學生面積概念的學習更加透徹。

七、幾何釘板推論面積大小之研究

幾何釘板的面積估算，事先需安排一些透明的細格覆蓋在有興趣探索的面積上，或是在置有規則排列的釘板上圍繞出所欲探究的圖形，然後藉由點數落在圖形範圍內的細格或點的數目來計算圖形的面積，這是一種很快及容易估算出面積或是物體密度的方法。根據刻度的影像來

源，每個點或是細格對面積而言都是比例關係，藉著刻度轉換的操弄，將所有圖形內所包含的點或細格的數目予以總和，可以允許我們很快地就估算出面積的大小。

利用幾何釘板覆蓋估算面積的方法，可以幫助學生明瞭物體的「面積」意義，也可以引導學生藉由「點」或是「點與點」之間所構成的單位量，探索發現解決圖形面積大小的策略，包含點數或用公式；另外，幾何釘板的使用，也可以促進學生經由操弄，而對圖形有關的「等積異形」概念深入理解。根據網站所刊載的釘板計算圖形面積的資料顯示（http://www.geog.ucsb.edu/~jeff/115a/lectures/scale_and_area_measurement.html），利用幾何釘板覆蓋圖形而推論其面積大小的策略可以歸納為以下四種：

（一）以圖形內之點數推論面積大小（如圖 9 所示）

利用此策略估算圖形面積大小方式又可分為兩種：

1. 將圖形範圍內所包含的點一一計算後，以其總和代表圖形的面積。因為不瞭解幾何釘板的點所代表的意義，因此，所得到的結果並非圖形的面積。
2. 學生已經理解點和點之間代表為 1 公分的單位量，並且學習過：兩個不完整部分可約略合成一完整單位的解題策略，利用：圖形內所包含的點數 + $1/2$ （圖形周圍上的點數） \times 單位量的值，就可以得到圖形面積的答案。如圖 9 所示，圖形內所包含的點數是 75 個，圖形周圍上的點數有 18 個，除以 2 之後為 9 個，釘數總和為 84 個，每個釘數代表 1 平方公分，所以此圖形面積為 84 平方

公分。

圖 9 以點數推論圖形面積大小

(二) 以細格作為單位量推論圖形面積

採用此策略估算圖形的面積是將各行列的點數予以連結或想像成一條線段，線段和線段垂直交接後可形成有規則的細格，這些細格單位量的面積都是 1 平方公分，然後連續且有規律的點數出圖形範圍內完整的細格，再將圖形周圍所通過的不完整細格點數出，兩個合為成一完整的細格，細格的總和就是圖形的面積。以圖 10 為例，圖形內完整的細格為 71 個，不完整的有 26 個，兩個合併成一個完整的細格，計有 13 個，所以圖形的面積總合為 84 平方公分。

圖 10 以細格作為單位量推論圖形面積大小

(三) 以列數總和估算圖形面積大小

採取此策略者，與上述類型者一樣，已經知道點與點之間的關係代表一個單位量，不同處在於將每單位量以「行」或「列」的方式呈現出來。以圖 11 為例，學生將圖形包含的點，採取「列」的方式，將所有橫的點連接起來，形成橫的線段，然後取圖形在線段上接觸邊的中點，再測量所有的線段的長度，予以總和後，乘以單位量的值，就是圖形面積的大小。圖 11 圖形圍繞所得線段的長為 84.2 公分，乘以單位量 1 平方公分後，得到圖形面積為 84.2 平方公分。

圖 11 以列數總長推論圖形面積大小

(四) 以各部分面積總和推論圖形面積大小

採用此策略估算圖形面積大小者，需先理解各圖面積公式的意義並能加以運用；其次，需在不完整的圖形上，選取某些「近似」直線的邊，

然後將這些直線的邊予以連結成為一具有可切割成典型圖形的多邊形，再依據圖形的特徵與個人對其詮釋，將多邊形切割為數個不同形狀的圖形，分別測量出面積公式相關因素的長度，利用公式計算其面積，再將各部分圖形的面積予以統合，就是該圖形的面積大小。以圖 12 為例，將原先不規則圖形進行「截彎取直」動作後，予以連結成一多邊形，再將圖形依其特徵切割為一個梯形，兩個直角三角形，三個矩形，再分別測量出面積公式相關的高或底的長度後，利用公式分別計算出各部分圖形的面積，予以統合，得到 81.8 平方公分，即為圖形的面積。

圖 12 以各部分面積總和推論圖形面積大小

可以瞭解的是，上述這些策略的運用，學生必須具備一些與面積估算有關的能力，像是細格的點數、公式的運用，這些技巧的發展，若只是依賴學生透過操弄而發現，實屬不易，因此需要借助教師的導引與說明，才能幫助學生有效的估算幾何釘板上圖形面積的大小。

貳、面積相關要素測量之研究

除了解題策略技巧的運用及解題能力的精進影響面積概念的學習之外，長度的測量也是影響面積學習效果良窳的重要因素。長度的測量需要數字、長度單位以及長度測量過程中這兩者的運用所需的知識 (Boulton-Lewis, 1987)。有關長度測量的議題可以 Case(1992)長度測量的認知發展理論，以及相關學者對於學童進行測量活動所發展的能力及技巧作為分析的基礎。

一、Case 的長度測量階段論

Case(1985, 1992)的理論假設學童有關長度測量的認知發展需要經

過四個階段（而非層次），包含了感覺動作(sensorimotor)、相互關係(interrelational)、層面或維度(dimensional)以及向量(vectorial)。Case 指出在每個階段裡也包含了四個次階段，並透過與他人合作運用其理論去預測以及測驗學童測量概念範圍的發展，但較少提到長度的測量。

Case(1992)將長度測量的認知發展描述為是一種循環式的發生，也就是早期為單獨的操作而後統整產生高階的操作。兒童在 3 歲半至 5 歲之間的作業會變成後來「相互關係」次階段的一部份，舉例來說，數字就能用來標記一組的物體，因此可以假設，根據長度的屬性，字詞(words)可以被用來標示物體。從 5 至 10 歲的年紀，兒童發展轉移到「維度」的次階段，他們可以辨認三階的關係。5 至 7 歲年紀（單維度次階段，unidimensional substage）的兒童能夠瞭解單維度中數字和量之間的關係(Case & Griffin, 1990; Case & Sowder, 1990)，因此可以推論他們已經可以轉化單維度中像那個較長等長度的關係。在下個維度的次階段中，7 至 9 歲的兒童就具有二元維度的想法，他們能夠聯合兩個操作的單位去瞭解部分／整體數字之間的關係，因此可以推論他們可以利用兩個物體和第三物體比較而發現它們之間長度的關係。最後的維度階段發生於 9 歲後，是將二元維度的思考統整起來，允許兒童從數字的操作結果去建構或比較實物，因此這種轉化能使用於長度測量的情境，可以經由數字和長度單位量的關係來比較物體的長度。

Boulton-Lewis(1996)和其同僚針對 3 至 7 歲的兒童根據測量理論、文獻研究以及上述 Case(1992)的資訊處理分析理論為邏輯分析的基礎，預測兒童長度測量知識發展的順序，發現兒童有關長度測量知識的發展

預測較符合資訊處理作業的要求，而且很清楚的可以發現三種不同的作業方式。在第一個層次裡包含的作業變項像是長度相等或不等的知識、藉由兩兩比較的長度排序以及相關的數字知識。在第二個長度變異數辨認的層次上，包含了傳遞作業的正確反應以及皮亞傑所言的長度保留概念；在第三個層次上，包含了用尺規測量、排序，長度測量的策略也包括任意單位量的使用，也具備推理轉化的能力。

從上述學者理論的說明，可以幫助我們預測兒童早期長度測量的認知發展情形，從 Case 理論的觀點我們可以保守的預測，從 1 歲半至 3 歲左右，兒童可以開始辨認及命名長度的屬性，4 至 5 歲可以進行長度比較，5 至 7 歲具有長度保留概念並能轉化推理，7 歲後則能轉化長度測量的歷程 (Clements, 1999)。

二、長度概念及測量之相關研究

國內學者陳光勳 (2003) 探討國小二年級學童的長度迷思概念，將其概分為「保留概念」、「長度比較複合概念」、「測量概念」與「估測概念」四個部分：

- (一) 保留概念、長度比較複合概念多半屬「受直觀規律的影響」、「對 1 公分方格表徵概念的誤解」及「折線、曲線拉直後長度較長」三種類型。
- (二) 測量概念、估測概念則是有「受直觀規律的影響」、「計算刻度數字個數而非區間個數」、「忽略線段起點未對應 0 點，僅依末端對應尺上刻度作答」、及「1 公分量感不足」四種類型。實作測量時，也有不少學童把物件的長度與周長相互混淆。

林碧珍與蔡文煥（2003）針對我國國小四年級學生在國際教育成就的數學成就表現的研究中發現：關於長度的測量，我國的學生在這次的表現並不如預期的理想，學生的通過率不到五成，其中一題是未歸零的一條兩端彎曲的線在尺上讀出此線的長度，只有 34.9% 答對，以尺作為報讀工具時，仍然有五成以上的學生沒有考慮歸零或將此線拉直。在面積與周長的測量方面，題目共有八題，我國學生在其中的四個題目之答對率低於國際平均答對率，這四個題目中有三個題目是與周長有關，依提示給定一個複合圖的某些長度求算其周長，高達 50.3% 的學生將既定的已知長度錯誤的相加算出答案。有兩個題目分別是辨識周長和在方格紙上畫出指定周長的圖形，有 56.2% 的四年級學生將周長誤以為面積或誤以為「 $\text{周長} = \text{面積} \div 4$ 」。由此可見，我國四年級約有五成的學生還沒有釐清周長和面積兩個概念。

對於影響學生成就表現不佳的因素，林碧珍與蔡文煥（2003）認為可能是：學生尚未學習試題的數學內容、評量的內容、命題不適當、語意不清，題目的情境不合台灣國情文化，解題時忽略真實情境的考量。上述這些影響學生成就測驗表現良窳的因素，若予以歸根就底，其實與圖形和面積概念所安排學生學習之課程內容和教師的教學有關。

長度測量的能力與知識是學習面積概念的基礎，從上述學者提出的理論內涵與研究結果發現，可以獲致下列幾項啟示：

- （一）長度測量的能力與知識的發展是有層次及階段順序的，在進入小學就學前後，兒童就具有長度測量保留的概念，且持續向前發展，至 9 或 10 歲時，已經具備了數字和測量歷程關係的

轉化，因此可作為面積概念學習的基礎，惟若缺乏長度測量的能力，則在面積的學習上將感到困難，甚會停滯。

- (二) 長度測量能力及知識的發展，牽涉長度有關要素關係的理解與轉化，因此在測量的教學上，需布置合宜的情境，讓學生從熟習的文化及社會條件下，經由辨識與比對認識長度測量的要素，進而能配合實際情境加以運用。

參、長度測量策略之研究

兒童長度測量使用的策略也是影響正確學習面積概念的另一項重要的因素，在這一方面也有一些研究發表(Copeland, 1979; Miller, 1984; 1989)，主要可以分為兩個類別，一些是將研究焦點集中在兒童達到測量知識的順序和階段上(Boulton-Lewis, 1987; Hiebert, 1984)；另外一些研究則關心測量概念證明的理解和測量策略實際運用時產生的問題(Hiebert, 1984; Miller, 1989; Shaw & Puckett Cliatt, 1989)。

一、測量知識序階發展的研究

兒童的測量知識，隨著經驗以及實際的運用，是從無效率的測量而能達到正確的測量。Copeland(1979)追隨著皮亞傑的理論，描述了一系列與年齡有關階段測量保留概念的發展，他認為兒童在 6 歲半時已經開始理解測量單位的概念，但尚未充分達到概念保留的階段。在 7 歲半時，兒童出現保留概念的需要，將近 8 歲至 8 歲半時才會出現成功的測量。另外，Hiebert (1984)研究結果所描述的能力階段發展與 Copeland (1979)提出的「兒童基本上是從無法轉化測量情境，進而發展到使用

合適的測量策略，配合解決問題的狀態，而致最後使用合適的策略，真正解決問題」的說法是一致的。

另有其他的研究者則將重點放在特殊測量概念的發展和使用標準測量方法步驟和規則的理解上。如果要讓兒童在測量上不會產生錯誤，那麼他們就需要有必備測量概念的理解(Carpenter et al, 1981)。這些觀點與 Hiebert, Miller, Shaw 和 Puckett Cliatt 等人的看法是相同的，他們都強調使用測量的標準方法，像是使用尺規，以達成正確的測量有關這些基本測量概念的理解是很重要的。使用這些尺規產生的問題可以歸因於缺乏一些概念的理解，包含尺規與預測量的物體不正確的排列、只注意尺規的數字而非測量的標準單位、從某點而非零開始、以及測量較長的長度時，尺規連接的地方產生了間隔(Hiebert, 1984; Kouba et al., 1988; May, 1990; Pettio, 1990)有關。

二、測量理解與情境安排的研究

Steffe 和 Hirstein (1976)很早就主張測量的情境安排應該包含直接比較，因為學齡兒童的能力還傾向於依賴純粹的視覺資訊(visual information)；另外，在比較的過程中兒童會碰上一些較為困難需要數學推理的技巧，因此，可以補充間接的比較。Haylock 和 Cockburn (1989)也主張兒童在發展的早期階段需要獲得一些測量的技巧，可以直接利用比較而不需使用測量的方法，因此在獲得正確測量策略的過程中，使用感官的知覺方法會出現在兒童早期的測量發展階段中。

在需要間接比較的情境中，一些廣泛的研究都主張學生開始學習測量時應使用非標準（任意）的方法像是步伐、手掌、紙板、火柴棒、積

木等來進行測量(Haylock & Cockburn, 1989; Kastner, 1989)，但是這些都要轉化成學習課程的內容。兒童測量感覺的發展是出現於覺得測量單位非常適合於作業的辨認時(Boulton-Lewis, 1987; Hope, 1989; Shaw & Puckett Cliatt, 1989)。單位量的選擇並不一定是任意或是標準的，也可以兩者聯合使用。從使用任意的方法來看，如 Haylock 和 Cockburn (1989) 主張的，當兒童使用手掌、以及步伐進行測量而與他人的答案結果不同時，就會獲得標準單位需求的認知。但無論如何，決定使用這樣的任意單位量並沒有釐清說明資訊處理的要求，也沒有允許兒童相信當大人觀看他們在進行測量時，他們是真的在進行測量的作業。

有些研究指出，當兒童在使用任意的方法進行測量時，有時也會採用標準的單位，例如，使用測量桿，可以增強標準單位的概念而能引導至正式的測量，若老師沒有反對，這種現象在學校裡時常發生。但要說明的是，要能成功的使用標準單位的方法進行測量作業一直要等到 8 或 9 歲的年齡才會出現 (Boulton-Lewis, 1987; Clements, 1999 ; Copeland, 1979)。

由上述可知，兒童們對於測量所使用的技巧和策略很早就發展了，而且遵循著任意方式至正式標準單位使用的途徑，若要讓學童能正確的進行長度測量的作業，教學上最重要的工作就是如何引導兒童們將測量的策略和技巧關係轉化至正式單位的理解與運用，如此才能合乎面積教學單位量和空間結構間正式關係的認知。

肆、面積文本設計之研究

一、國外有關文本設計的觀點

前面提及 Van Hiele (1986) 的幾何概念發展層次的觀點時，強調學生幾何面積圖形概念的學習應以建構式的方式進行教學，材料則不限於教科書。Van Hiele 認為學生的幾何概念要發展到高階段，不是只靠老師講述，而是希望透過教師細心的安排下，學生能從解決問題的情境中建構出想法。學生從事幾何圖形概念的學習，如果能時常作推測，並試圖用形式的方法來證明自己的推測則較容易達到第四階段的思考層次。

Fuys 等人(1988)發現大多數教科書中的活動，只涉及了分辨圖形的特徵和找出之間的關係，例如相互平行或垂直的關係，極少的情況下，會要求學生進行辯證，大部分的問題以 Van Hiele 的第一階段思考的能力即能回答。而且，同樣層次的主題和能力在各年級間重複出現，並沒有隨著學童年齡成熟的精進與經驗的擴展，延伸幾何學習的內涵。因此他們稱教室裡所採用的學習材料為「循環式」的課程，而非「螺旋式」的課程。衡量今日課堂的現況，除了上述 Fuys 所言之缺失之外，另外，幾何課程在國中、小學教學時間的分派與其它的內涵相較，節數較少，要擴增練習的機會，實屬不易，因此要把握有限的教學時間，安排合適的情境，促進學生有效的學習；但令人擔憂的是，教師在幾何的教學歷程中，對幾何圖形間的特性和關聯性交代不清，有時解釋甚至有誤，以致影響學生面積概念的發展。

二、我國有關文本設計的主張

上述的狀況也發生於我國現行的教科書內容上，分析我國教科書中

有關幾何概念的內涵編排與教學時數的設計皆不甚理想，只能稱作「點綴」而已。另外，許多學者也有共同的問題發現，就是幾何圖形，尤其是面積的教學，幾乎強調面積公式為唯一的學習規範，課程材料的設計，是以面積公式的導出為教學的核心，以致於面積解題的歷程就淪為呆板和形式化，且誤認為面積解題的教學就是在找尋面積的公式而已，忽略了解題歷程中空間結構與抽象符號間關係的連結和意義化（陳銜逸，1996；楊瑞智，1997；譚寧君，1995；1998；1999）。當面積課程結束了，學生雖會使用公式解決眼前典型的圖形面積，但遇上多重要素之特殊圖形時，不是誤用公式，就是無從尋找線索解題，這是教科書裡面積強調公式教學產生的狀況。雖然我國最近兩次教育改革（教育部，1993；2001）有關小學數學面積課程學習目標的發展已經不再宣稱公式為唯一的教學重點，並且積極的提倡面積教學的課程能依據 Van Hiele 的幾何層次思考的理論，從「量與實測」的部分建立起面積學習的架構，這個架構主張角度、面積與體積等概念及技能的學習發展，都應該經歷以下的歷程：

- （一）某量的初步概念；
- （二）某量的間接比較；
- （三）某量的普遍單位比較；
- （四）某量的測量單位制度概念；
- （五）測量公式的教導。

這個教學的歷程主要希望教師們能夠按部就班、實事求是，依照面積課程的特性與學生認知發展的程度設計合適的教材，鼓勵學生實作、操弄，進而理解公式概念的意義。但在教室實際的情境及實務中，教師

受到課程時數的限制及教學資源短缺的情形 (Clements, 192003)，或因自己本身面積知識、學能的不足 (Clements, 1999)，學生在幾何概念的發展，尤其是面積概念解題能力的表現上並不盡理想 (陳鈺逸，1996；譚寧君，1998；1999)。雖然兩次課程的改革皆有針對學生面積學習成就不佳的現象提出改進見解，並在課程上作了修正，唯採用背誦公式學習面積的方式依然充斥於中小學的教室中，這些現象頗耐人尋味，值得探究之處。

三、面積文本設計的改善

針對學生面積學習內涵的分析，可以明瞭 82 年版的課程強調保留能力的增長以及測量能力的培養，以及面積公式的運用，但公式形成的探究與解題策略並非課程的主要目標。九年一貫課程教材架構的分析則可看出要讓學生瞭解並運用公式，需要讓兒童從正方形覆蓋矩形的操弄活動開始，並且鼓勵他們採用不同的解題策略將面積圖形的結構轉化重組，以瞭解乘法與公式間的關係，並期待學生能藉由操作的過程中瞭解「公式」此一概念的共同原則。然現行國小面積課程 (本研究稱為「一般文本」) 的內容，依然將「公式」之學習視為面積解題的唯一法則，忽略了其他相關內涵及策略的學習，對於學生面積概念的發展而言並不完整，因此有待修正補強。

陳嘉皇 (2003a, 2004) 的研究發現，若要學生能從操弄的過程中瞭解乘法結構與面積圖形公式概念之間的關係，除了加強測量能力的增進外，尚需透過面積解題策略的指導與運用，才有機會讓學生將「乘法結構」轉化為公式概念的可能，且唯有鼓勵學童從認知衝突及討論、辯證

的歷程中，透過不同空間組織的重構，才能瞭解不同圖形間公式的「同構」概念。因此，面積課程的文本設計所強調的內涵重點與學習材料的類別，實是影響學童面積解題的一項重要因素。

本節綜要與評析

一、本節綜要

本節針對面積概念發展相關之因素，如面積解題能力、長度測量能力、長度測量策略、面積文本設計等研究議題加以探討，其理論主張、研究發現與學童在相關層面產生之迷思概念與缺失，教學建議與運用，歸納綜合如表 6 所示：

表 6 面積概念發展相關研究綜合分析

	面積解題能力	長度測量能力	長度測量策略	面積文本設計
理論內涵	1. 圖形辨識抽離 2. 單位量覆蓋 3. 繪圖測量 4. 面積測量策略 5. 面積公式運用	1. case 之長度測量階段論 2. 陳光勳等人有關學童測量表現之研究	1. 測量知識序階發展 2. 測量理解與情境安排	1. Van-Hiele 與 Fuys 的主張 2. 教育部與陳嘉皇等人之主張

研究發現	<ol style="list-style-type: none"> 1. 面積、周長與邊長的概念上混淆不清 2. 使用木板覆蓋圖形表面成功的兒童是使用紙板作業兒童的兩倍 3. 很多學生對於採用正方形為單位量進行覆蓋矩形的活動，並沒有注意到面積排列時行與列的結構性問題 4. 面積測量的方式可以歸納為： <ol style="list-style-type: none"> (1) 利用單位量的邊長測量， (2) 以單位量的面積覆蓋測量， (3) 以單位量面積進行目測， (4) 以小單位面積進行測量， (5) 以自訂的單位量進行測量 5. 學生一看到題目幾乎絕大部分的學生會開始找公式需要的條件，甚至為了遷就使用公式，不惜以無理方式自行改變已知條件，或勉強認定圖形為可用公式解決的圖形 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 認知發展是經由將能力(capacity)和知識(knowledge)集合的結構性複合體(structural complexity)的作業 2. 認知的發展需要經過四個階段(而非層次)，包含了自動感覺(sensorimotor)、相互關係(interrelational)、層面或維度(dimensional)以及向量(vectorial) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 兒童基本上是從無法轉化測量情境，進而發展到使用合適的測量策略，配合解決問題的狀態，而致最後使用合適的策略，真正解決問題 2. 隨著經驗以及實際的運用，是從無效率的測量而能達到正確的測量 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 大多數教科書中的活動，只涉及了分辨圖形的特徵和找出之間的關係，同樣層次的主題和能力在各年級間重複出現，並沒有隨著學童年齡成熟的精進與經驗的擴展，延伸幾何學習的內涵 2. 教師受到課程時數的限制及教學資源短缺的情形，或因自己本身面積知識學能的不足，學生在幾何概念的發展，尤其是面積概念解題能力的表現上並不盡理想
------	--	--	--	--

(續表 6)

教 學 建 議 及 主 張	1. 在有圖像下的化聚關係，且能透過切割活動，掌握單位個數 2. 能夠沿著每一邊的單位數量藉由線性維度的測量而發現長寬與單位量大小的關係 3. 提供學習者如何進行線性測量和決定圖形面積單位列與排列的大小之機會 4. 宜從單位量的覆蓋朝向公式轉化活動的設計，並採取視覺比對、測量、重構及計算的順序步驟，提供學生面積解題完整的程序，才有助於轉化面積公式的意義 5. 讓學生透過面積排列覆蓋的操作及教師適切的教學引導，幫助學生理解線性測量與空間結構的關係	1. 透過實驗以及工作分析 2. 布置合宜的情境，讓學生從熟習的文化及社會條件下，經由辨識與比對認識長度測量的要素，進而能配合實際情境加以運用	1. 特殊測量概念的發展和使用標準測量方法步驟和規則的理解 2. 引導兒童們將測量的策略和技巧關係轉化至正式單位的理解與運用	1. 應以建構式的方式進行教學，材料則不限於教科書，採用的學習材料為「循環式」的課程，而非「螺旋式」的課程 2. 按部就班、實事求是，依照面積課程的特性與學生認知發展的程度設計合適的教材，鼓勵學生實作操弄，進而理解公式概念的意義
---------------------------------	--	--	---	---

上述這些現象可歸因於教室裡教學實務引發的缺失，尤以學習的材料和教學歷程活動的引導影響最為深遠。本節藉由面積概念發展相關研究的探討，以突顯出這兩個要素與學生面積學習關係密切，希冀能透過合適的學習內涵與有效教學策略的配合，增進學生幾何概念的發展。

二、評析

Kant (1963: 2003) 在其《純粹理性的判斷》(Critique of pure reason) 一書中曾評論：沒有內容的思考是空的，沒有概念的直覺是盲的。概念文本設計與面積理解能力的發展可謂是數學面積學習中「內容」和「思考」的兩個重要隱喻，從面積概念的習得歷程來說，單單只有學習材料內涵的呈現，而無法採取有效的教學策略與技巧刺激學生學習的動機，進而明瞭課程的意涵，那麼只能說是空有文本材料的架構而已，學生是無法獲得真實的知識和概念的；反之，學生對於學習具備精熟的能力、別出心裁的解題策略，但沒有提供豐富的材料鼓勵其探索、刺激其反應，那麼心智技巧亦無從發揮。因此，要獲得面積公式概念有意義

的理解，唯有將文本的內容材料與學習的思考歷程相互契合、彼此連結，才能達到幾何學習的目的。

當學生獲得基礎之知識或概念後，透過認知技巧及後設認知策略的監控，從眾多紛雜的線索中，思索及找尋問題的要素，連結解題的步驟，嘗試及運用解題的方法，這樣才能獲得有意義的解題經驗。這種舉一反三的心智，可以類化到各種困難的情境，豐富個體對問題的敏感性，激發個體有效解題策略的產出，因此也能提昇個體解題的能力。為了促進這種能力的發展，合宜的文本設計與適切的教學引導，對學生面積概念轉化的學習是產生有利促進作用的重要手段。

第五節 概念轉化之教學理論

經由前述面積概念發展有關的研究內涵看來，面積教學的主要目的是透過學生對矩形具體物件的覆蓋操弄及測量，經由圖形空間中長與寬的結構關係，瞭解矩形面積公式的意義，再推論至其他圖形面積公式的形成。從物體視覺化要素之抽離（初始狀態）至圖像結構關係內化的轉變（目標狀態），整個歷程可謂是面積概念理解與轉化的活動，這種理解與轉化認知機制的啟動與發展、面積概念的習得與類化，皆需靠教師之教學引導與提示不可，所以，教學活動的設計對於面積概念轉化學習的影響頗巨，其重要性亦不容忽視。為了明瞭學生面積概念轉化的歷程，並尋求合適之教學模式，以增進學生面積概念，本節藉由幾個步驟的分析分別進行，首先探索「概念」的定義與本質，其次探討與面積概念教

學有關的數學理解動態理論之發展與特徵，再者探討面積概念轉化教學的歷程模式，最後提出本節綜要與啟示。

壹、概念的定義與本質

一、概念的定義

從認知心理學的角度來看，「概念」是個人知識體系的基本單位，透過「概念」，我們得以將外在事物抽象化，而概念的發展與轉化，更是個人認知結構建立之途徑。

因為「概念」是個人知識體系的最小單位，且與個人認知結構的建立以及學習歷程有密切的關聯性，因此近年來許多學者致力於「概念」的研究，企圖藉由概念的了解能有助於個人的發展。Gunter (1990)表示「概念」是將觀察的資料予以分類後，所得到的抽象敘述或觀念，而概念的形成與命名，則是一種意義的賦予。Merrill, Tennyson 和 Posey(1992)則認為，「概念」是一組以共通的特性為基礎而聚集在一起的明確物體、符號或事件，其有一特定的名稱。Kiel(1989)指出，「概念」的建構在本質上是事物的相關性分類，如果在不了解概念間是如何產生相關的情形下要去了解一個概念，是不可能的。因此，「概念」是對一組具體的事物或是觀念想法的共通性分析，其強調不同事物間的相關性與相異性之比較。

彭聃齡與張必隱(2000)指出，「概念」是具有共同屬性的一類事物的心理表徵。在認知心理學中，概念是用事物的屬性，即可辨認的各種基本性質與特徵，與將屬性聯繫在一起的規則來定義的。屬性不同，構

成不同的概念，屬性相同但規則不同，所形成的概念亦不相同。所以，在概念的陳述中，如果可以藉由具體範例的說明，除了有助於對概念的了解外，更能透過對概念範例的辨識來強化概念的理解和轉化。

綜上所述，可以發現所謂「概念」係指對一組事物、想法或是觀念，依據其屬性的相異或是相同點予以分類，並且以能被社會大眾接受的用字遣詞來定義概念。面積概念公式化的學習，就是將圖形共通的屬性利用象徵性的符碼或是數學符號予以呈現的一套法則，這套法則是由學習者根據圖形的關係建構發展出來的，它是具有共通性與共構性，每個個體皆能運用其解決圖形面積的問題。

二、概念的本質

個人對概念的轉化，可以作為其進一步思考探討的基礎。Klausmeier(1985)就指出，概念是我們在進行思考時所使用的心智工具，要瞭解原理原則或是解決問題就必須先對概念有所認識。Arends(1989)則認為「概念」是「思考」的基本條件，特別是高層次的思考。此外，「概念」亦可以讓個人進行：1. 目標與觀點的分類；2. 導引原理原則，提供引導思考的概念網絡的基礎。綜合兩位學者所言，所謂「概念」具有下列本質：

- (一) 概念是個體的心智建構：概念是個人對一個或更多實體——可能是物體、事件、想法或是過程予以組織後所形成的訊息。透過概念可以使個人辨識不同實體間的差異性並且將其與其它概念產生關聯。
- (二) 概念是有定義與名稱，且是社會所認可的，也因此，「概念」

可以是個體間相互溝通的基礎。

(三) 概念有重要屬性與非重要屬性。

(四) 概念本身是可以分類的，瞭解概念的不同類別是重要的，
因為不同型式的概念需有不同的教學策略。

(五) 概念可以透過正例和反例來學習的。

從「概念」本身呈現出來的特性可知，學生若要建構圖形與面積的概念，需對其屬性進行辨識、組織、轉化，產生關聯，也就是需將圖形與面積公式相關的要素如邊長、高、底及所圍成的空間範圍之間的關係作一重構，才能獲得面積公式的「概念」與其意義。對於兒童面積概念發展的理解，可以幫助我們了解他們對於幾何認知成熟的層次，進而安排良好的學習活動，設計合適的文本材料，形成最大的反應機會區，提供兒童最佳的學習機會。

貳、數學概念理解動態理論

一、理論基礎

Freudenthal(1983)從教育的現象學著手，強調「幾何情境的掌握」，這種幾何的情境是指個人根據其需要所創造出的不同結構，而結構是由點及相連結的線段所構成的圖。Freudenthal 主張結構是根據個人的需要而來，因而結構間只有豐富與貧乏的差別，沒有孰先孰後的劃分，強調的是結構間轉化能力的培養，幾何概念的獲得必須要透過行動才能產生，在這個過程中，「心像」則扮演了非常重要的角色。認知科學也主張人們有「心理程序」(mental process)作用在心理表徵以產生思想及行

動，不同的心理表徵，像是法則及概念，就會孕育出不同的心理程序，產生不同的解題行為。

圖形與面積的解題，一如其它數學解題的歷程，需要學生針對新奇的題目，運用本身具備的知識、技巧和策略才能有所成就，它是一種「轉化」的形式 (form)，這種轉化的形式是個體與作業之間交互作用產生的調適現象，影響的因素繁雜瑣碎，因此，要順利地達到「轉化」這種效果，不少的學者認為是有點困難 (Bransford & Schwartz, 1999; Mayer, Quilici, & Moreno, 1999)。在教室裡，學生可以從教科書、教師或同儕處習得數學課程的知識，但卻無法彈性的將之運用到新的情境上 (Brown, Campione, Webber, & McGilly, 1992)。為了要提昇小學生數學解題轉化的能力，Fuchs 等人設計了一套明確的教學處理程序，嘗試協助學生增加連結新奇與熟悉情境解題的認知，這套程序包括了提供(1) 擴展學生需用相同解題方法進行分類的解題活動 (例如提升至較高層次的抽離)；(2) 明確的暗示學生探索與這些廣泛類型有關的新奇問題 (Fuchs, Fuchs, Prentice, Burch, Hamlett, Owen, Hosp, & Jencek, 2003)。

Cooper 和 Sweller (1987) 提出了解題轉化需要三個變項的觀點。在首要的變項上，他們認為學生在解題的歷程中必須 (1) 熟悉解題的規則，(2) 將需要相同解題方法的數學問題進行分類，(3) 明瞭新問題與先前已經化解的問題之間的關係。當學生熟悉了解題的規則，他們將會安放較少的工作記憶在解題的細節上，進而能夠盡力地將認知資源安排在新問題與熟悉問題連結的辨識上，計畫如何進行作業。Cooper 和

Sweller 提出的第二個變項，則建議「基模」在轉化的歷程上，要扮演一個非常重要的角色。Gick 和 Holyoak (1983) 將「基模」定義為：個體將需要相同解題方式的問題予以區分歸類，對於兩個或更多問題的一種概括性的敘述。基模越廣泛，則對於新奇與熟悉問題間連結的辨識之可能性就越高，轉化就越有可能發生。第三個有關轉化的是「化約變項」，它是指觸發訓練和轉化作業之間的認知。相關的研究指出，當參與者能夠經由作業探索相似的線索時，那麼將會增加作業的表現(Keane, 1989; Ross, 1989)。如何讓認知能力能夠橫越新奇與熟悉作業的連結，是轉化歷程重要的因素，當然，若要達到轉化，必須要藉由外在的機制才能超越這些線索所提供的資訊，因此，學生仍需獨立積極的探索新奇與熟悉的作業之間是如何連結的議題。

Salomon 和 Perkins (1989) 針對如何去擴展基模和獨立探索新奇與熟悉作業之間了解的連結，而無須外在線索支援的一項架構，他們在轉化的歷程間區別了兩種形式：

- (一) 「低層次的轉化」(low-road transfer)，這必須藉由外在、不同的練習才能完成。它發生後，可以作為在新的情境自動引發已經學習過的或可控制的刺激而產生行為這樣的機能。
- (二) 「高層次轉化」(high-road transfer)，相較之下，圖形與面積的解題則屬於「高層次的轉化」，它包含了法則精細的抽離，可以運用在不同的情境或是作業上，「高層次的轉化」需要個體去形成或探索這些在轉化和熟悉的作業

之間連結的抽離，這種轉化的檢驗是種「自覺的抽離」(mindful abstraction)。

所謂抽離法則，是在不同的法則範例中辨認出一種基本的特質 (quality) 或是型態 (pattern)，在形成抽離的歷程中，個體需要刪減、排除不同範例中與需要抽離範疇無關的細節，這些抽離為了避免特殊的情境的限制，所以是以抽象的形式表徵出來，因此可以運用到不同的範例或是橫跨不同的狀態。因為抽離，或是基模這種機制，包含了相關的個案、範例，所以可以提升轉化。Salomon 和 Perkins (1989) 接著描述兩種「高層次轉化」的形式，一種稱為「前進式」(forward-reaching) 的「高層次轉化」，這種轉化是在最初的學習情境下產生的，當學習者參與最初的學習作業時，會進一步思考在何種情境下可以運用此種抽離；相對的，另一種形式稱為「倒退式」(backward-reaching) 的「高層次轉化」，這種抽離是發生在轉化的情境中，學習者回頭思索先前的作業進而探求有關的連結和抽離。這兩種形式的「高層次轉化」皆可以針對轉化的明確性提供理論的基礎，他們主張這種轉化可以幫助學生：

(1) 預期在新奇的學習作業中要如何進行抽離才能促進成功的機會。

(2) 針對相關的抽離建構獨立的探索，能運用不同的作業呈現一種未學習過的機會，明確地教導學生轉化。

為了達成這樣的目的，首先，在「前進式」轉化方面，當學生學習抽離物體表面特徵是如何改變而無須改變問題結構或是解題方式，他們必須要預期哪些抽離能夠協助其解決新奇的問題。其次，在「倒退式」

轉化方面，當在新奇的問題情境中，他們需要辨識出與熟悉的問題結構不同的表面特徵的改變，並且很快的重新認知而使用不同的解題方式。藉著擴展基模與引發連結的認知，這些轉化可以描述出轉化—化約變項的意涵。

從上述學者的論述得知，圖形與面積概念的發展可根據個人的特質建構出不同的知識結構，而且結構之間具有不同層次的區別，層次的提昇與前進則需透過結構或層次間的轉化，像是心像的連結與抽離等機制的行動，才能獲得完整的圖形與面積概念。「數學概念理解動態理論」(The dynamical theory for the growth of mathematical understanding, 如圖 13 所示)是由 Pirie 和 Kieren(1989a; 1989b; 1992a; 1992b; 1994)發展出關於兒童數學學習歷程中，心理程序作用所產生概念轉化與遷移的詮釋模式，其主張的心智結構轉化機制與上述學者所提出的觀點非常吻合，且經由許多學者實證研究後，獲得充分的支持(Davis, Sumara, & Luce-Kapler, 2000; Davis & Towers, 2002; Sierpinska, 1997; Towers, 1998)。這項理論主張，面積概念的轉化和習得可包含八個潛在的層次或是不同階段的教學活動，可以運用在面積概念學習的不同議題上：

(一)「初步的了解」(primitive knowing)

是面積概念轉化的基礎，「初步」這個詞並非解釋說是「低程度」的數學能力，或是低轉化力的暗示，而是觀察者、教師或是研究者所假設的個體進行轉化時所具備最基本之能力。「初步的了解」被假設成是學生在所面對的問題情境下，經過思索而知道以及能做的所有事物，通常指

的是有關於圖形與面積可用的相關知識、等式與部分或部分-整體的一些理由。

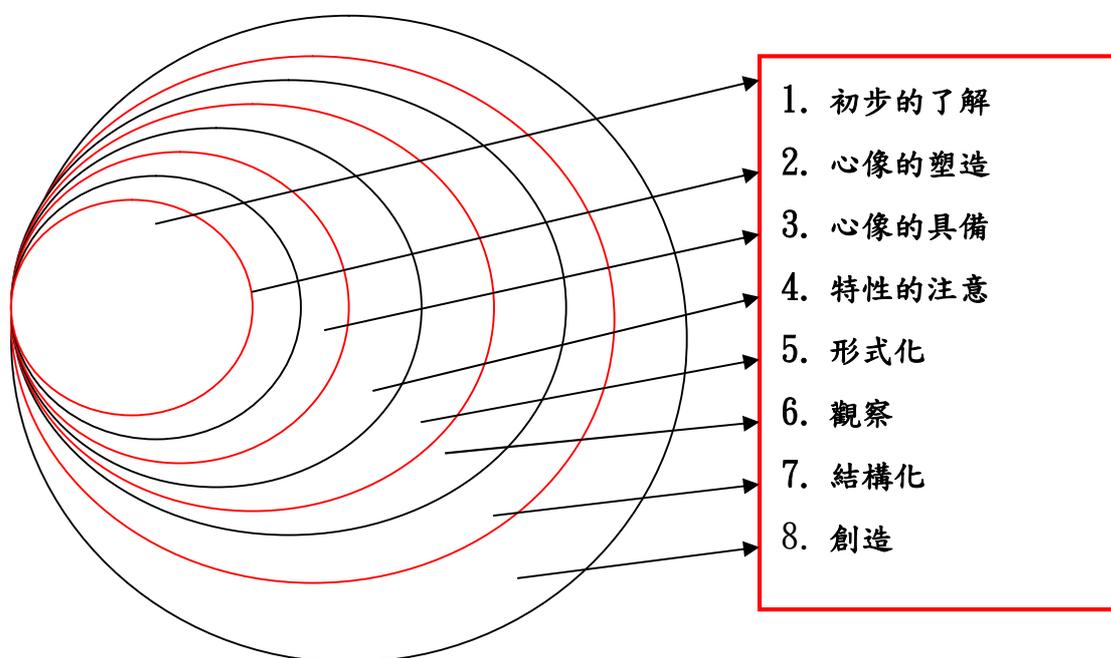


圖 13 數學概念理解動態理論模式

(採自 Pirie & Kieren, 1994 : 63)

(二)「心像的塑造」(image making)

指學生觀察到所參與的面積解題活動中能幫助其發展特殊心像的主要目標要素。學習者被要求能利用先前的知識做區分，並能在新的環境使用它們或延伸到新的目標。在此層次，學生的行為大都集中於轉化教師所提供的不同指示的面積圖形要素做心像的發展，像是圖形的分類或比對的活動相似要素的提取與辨識，這種活動不斷地重複，可以提供較深層轉化的基礎。

(三)「心像的具備」(image having)

經過「心像的塑造」後，學生能夠利用「心智計畫」(mental plan)

進而取代實際操弄物體的行為，就進入所謂的「心像的形成」層次，可以針對特殊的行動讓學生依其需求自由想像。在圖形與面積概念學習的歷程中，學生能針對圖形的特徵進行型態辨識，並且能夠利用型態辨識的方法檢核所面對的資料，例如，說出具備什麼樣要素特徵的圖形，才能稱為梯形，或是三角形底邊上的高與其呈垂直狀態。

(四)「特性的注意」(property noticing)

即學生能夠操弄和組合心像去建構特殊的情境或是相關的特質，這樣的觀念轉化包含了在一個人的心像作業中能夠預測情境是如何運作，以及能夠表達預測的內容。在面積概念學習的歷程中，學生對於覆蓋所使用的正方形單位量的數目可藉由矩形的長和寬大小的要素估算或實際點數計算得出。

(五)「形式化」(formalising)

包含了一些建造(building)或是表達(expressing)的方法，這些方法能讓學生透過「部分」，進而了解到「整個」數學，這需要對相關特質仔細的思考，和抽離出行為中一些能運作於所有範例的相同方法，學生能夠解釋或調整這些方法。通常面積公式的推演常被描述為「形式化」的轉化層次，而且個體「形式化」的內容是具有獨立的現象，彼此之間呈現出顯著的差異性，但彼此的概念轉化上又能加以擴展。在面積概念學習的歷程中，學生能藉由矩形之長寬的要素與正方形單位量的關係，推演出某種代數關係的公式，計算出所出覆蓋的單位量數目。

(六)「觀察」(observing)

個體能夠進行「形式化」的活動後，也能在某一情境中思考及連結

這樣的形式活動，進而將這種組合視為理論看待，此時學生的概念就能顯示出緊密地圍繞在一種動態性的知識結構中。針對面積概念學習的歷程，學生能將矩形面積公式與空間結構的關係，運用到三角形和特殊四邊形面積的問題上，尋找共同的規則。

(七)「結構化」(structuring)

當學生嘗試思考某一形式的觀察體當成某一理論時，能夠了解這些理論是透過內在的關係集合而成，並能經由邏輯和後設數學的爭辯(meta-mathematics argument)進行語意敘述的調整或修正。亦即學生經由發現兩個從不同方式獲得的結構為同構，或者藉由重新結構的處理方式使其成為「同構」的過程，這歷程可以提供兒童轉化觀念、構成要素及不同結構的機會。對於面積概念學習的歷程而言，學生能進行彼此之間解題策略轉化與不同指示的分享，顯示出複雜與共同改變(co-evolving)性質的集體動態性之結構。

(八)「創造」(inventising)：

學生能夠針對所給予的議題做結構性充分的轉化，並能從前概念的轉化改變想法創造新的問題，進而獲得新的完整的概念，日後學生即能利用結構化的知識探究生活中的問題。

數學概念理解動態理論認為面積概念的理解及習得應經歷以上八個階段，才能獲致面積公式概念的意義，而這些階段所呈現出的特徵，皆可顯現出不同解題能力的表現，它們彼此之間相互連結，形成階層的關係，並隨著解題歷程的演進而趨向更高、更複雜之認知能力的發展。我們可以從圖中理解，當學生具備了數學概念轉化發展動態理論強調的解

題能力，面積概念的習得與轉化將益形容易。

二、理論特徵

根據Pirie與Kieren（1992a；1992b；1994）的看法，其所提倡的「數學概念理解動態理論」具有整體性、動態性，階層但非線性發展歷程的特性，此理論描述轉化的行為是一致的、包含一種知識結構的組織體：亦即是動態的歷程，但非靜態了解知識類型的習得。在階層性方面，此理論包含了八個環狀的層次，各呈現了某種程度的轉化能力，從個體帶進面積解題作業情境初步的了解，經由心像的塑造、具備，到特質的注意與心像的形式化，再透過觀察的引導，思索結構而重新組織完成了整體的轉化作業。此理論可以針對特殊的個體及特殊的數學議題分別達成不同學習目標，主要的原因是其具有三項重要的特徵，茲分述如下：

（一）沒有必要的範疇（‘don’t need’ boundaries）

學習數學最大的力量就是擁有在抽象符號層次進行操作的能力，無須推論其基本的概念，這可藉由此理論環狀圈的描述與模式中所觀察到的現象，反應出這些標準的要素。只要超越了這些範疇，學習者就可不用明顯的運用先前的轉化層次而能夠進行作業，因為先前的轉化層次早已嵌入在新的轉化層次內，如果需要就能立即取出使用。因此這些環狀的層次可以稱為沒有必要的範圍。它可以傳遞這樣的理念：當超越了某些能力範疇後，個體就無須透過這些特殊的內在轉化層次，而能產生外在的了解。也就是個體能在抽象的層次中作業，而不需要藉由特殊的心像做心智或心理上的推論。當然，這不是暗示說，在需要時個體無法回復到特殊的轉化情況，在必要的情況下個體仍可折返基礎的轉化層次進

行思考。但要簡單的指出個體是不需要堅持的認知這些內部的轉化層次。Pirie 與 Kieren (1992a;1992b;1994) 提出沒有必要的範圍會發生在以下三個情況下：

1. 心像的塑造與心像的具備之間

亦即當學生已經擁有了數學理念的心像後，他就不需要有行動或是特殊實體的心像塑造。

2. 特徵的注意與心像形式化之間

亦即個體若具備了形式的數學理念，那麼就不需要對物體注意而形成心像。

3. 觀察與結構化之間

個體若具有數學性的結構，就不需要藉由內部的轉化層次帶入意義。

(二) 可以折返(folding back)

對於「數學概念理解發展動態理論」而言，這是一項很重要的活動，因為「可以折返」顯示了一種進行理解數學非單一方向性(non-unidirectional)的本質，在任何層次面對某項問題及疑難，而無法立即解決時，為了要擴展個體現今不適合的理解，那麼就需要折返到內部的理解層次。這種回復到內部的活動，並不能認定為是回復到基本的內部層次的行為，它是受到外部的理解及興趣而形成和塑造的。我們可以這樣說：個體在回復的層次裡是擁有豐富的(thicker)理解，內部層次的行為是知識循環、重構的一部份，必須以後再建造外部的瞭解才可。不同的學生在整個層次會採用不同的方式、不同的速度，一次又一次的折返，幫助其建構更廣泛，也可能是更聰明或更深層的理解。折返的特徵

可以促進內部理解層次的重構，當成外部理解層次的基礎功能。

(三) 行動與表達可以互補 (acting and expressing are complementary)

行動與表達可以互補是此理解形式內的一種結構性特徵。超越「基本瞭解」外的每種理解層次都包含了行動與表達可以互補性的特質，是任何理解層次在轉移時所必須的。也就是，理解層次在轉移時會先產生行動而後表達出來，但是以互補的觀點來說常常是往返的(to-and-from)交替移動。在任意的理解層次裡，行動是包含了所有先前提及的理解層次，並以連續性的方式提供內部理解的層次，而表達則針對特別的層次給予不同的實例。

在心像的塑造、心像的具備與特質的注意環狀模式中，有關行為與表達可以互補性此特質的展現，可以藉由操作(doing)、檢視(reviewing)、觀看(seeing)、說明(saying)、預測(predicting)與記錄(recording)等六個能力語詞來加以描述。行動是可以包含心智和生理的活動，而表達是可以明確的對別人或自己說明處理一些活動的本質。表達和省思作用(reflection)並非是同義詞，省思作用是行為活動的要素，因為它結合了理解如何建構的觀察的歷程；表達，恰好在另一面，它激發並且呈現了觀察以及釐清行動中所包含的內容是什麼。

對於如何提昇上述所謂的「可以折返」的理解和轉化能力，Pirie與Kieren (1992a)認為有三種非常重要且必須在教學歷程中介入的活動，可以幫助學生對於數學面積概念遷移的理解，即刺激(provocative)、誘導(invocative)、以及確認(validatings)等三

種介入活動。從教師教學的層面來說，「確認」即教師有企圖性的允許學生對其自己或觀察者顯示他的面積概念與為何要這樣思考的活動；在另一方面，「刺激」所指的即是教師嘗試思索如何暗示學生的理解層次能提昇至一項新事例或是更高層次的理解；「誘導」則是教師企圖對學生在面積概念理解的歷程中假裝或確認遇到障礙，而暗示學生往初期理解能力發展的層次中再嘗試進行探索，以獲得新的啟示或答案。總之，這些介入活動仍需觀察學生在面積解題情境中所產生的真實反應，才能決定採用何種的介入活動幫助學生提昇理解的能力。

參、面積概念轉化教學歷程

藉由 Pirie 和 Kieren 的「數學概念理解動態理論」模式解釋，概念的轉化係指個體經由視覺接收具體圖形之要素後，在內心理形成表徵、心像，再經由隱喻（metapher）透過數學符號的抽離、轉換，以抽象的公式概念表達圖形結構關係的意義。因此，具體的圖形如何經由空間結構的改變而與數學符號表徵連結，在探討面積概念轉化教學的歷程模式此議題之前，應先將圖形空間表徵的建構予以釐清和深入說明，以作為概念轉化教學的理論依據。

一、面積圖形空間表徵之建構

面積圖形空間表徵的建構是一種由上往下（top-down）及由下往上（bottom-up）分析的互動結果，也就是解題者的問題基模及語意基模和問題中的語言輸入所進行的互動處理構成了這個表徵。Kintsch 與 Greeno(1985)從受試進行語文轉化作業中發現問題表徵過程可分為兩個

階段：

- (一) 轉化階段：係將問題中的語文輸入轉化成一系列的命題，再根據作業的特定性而將這些命題組成一個鉅觀結構，以強調問題中所提到的一般性概念及其關係。
- (二) 建構階段：是解題者基於已形成的鉅觀結構，推論一些問題陳述中未提及，但卻是解題所必須的訊息，以及排除某些出現在鉅觀結構中，但卻是解題所不需要的訊息，而建構其對問題的表徵。

因此，圖形空間表徵的形成中最重要的兩個過程是對問題中訊息的選擇與詮釋，也就是說，除了表徵的形式外，對面積問題的轉化以及認知策略（執行與監控）的使用，也是對於影響面積問題能否解決的一些重要因素。因此，探討面積推理能力、表徵類型之使用與面積問題解決策略之間的關係，亦是近年來教育學者與認知心理學家為提升學生面積概念學習能力，所亟欲瞭解的問題。只要學生能夠監控問題解決的歷程，採用合適的表徵方法，隨時自我調整學習狀況，這樣個個都能成為高學習成就的人。

面積問題的解決是一種非常複雜的認知技能，它包含了一系列相互聯繫的階段，即辨識要素、表徵問題、選擇策略與方法、實施測量和結構關係的連結。表徵問題也叫做分析和轉化問題，這是將思維活動引向問題解決的一個重要階段。表徵問題包括了分析問題的起始狀態和目標狀態，瞭解問題的要求和各種約束條件，發現它們的聯繫，建構問題空間，從長期記憶中提取有關的信息等。問題表徵或問題空間不是由面積

問題本身直接提供的，而是由解題者自己建構起來的。解題者已有的知識經驗將影響他們對問題的表徵或轉化。由於人的知識經驗不同，對問題的知覺與轉化不同，他們對同一問題建構的問題空間是有區別的，也就是他們對面積問題的表徵是不同的。

越來越多的研究者以及教育人員主張數學的基本本質是概念，而非歷程(Baroody & Standifer, 1993; Carpenter et al., 1994)。因此，表徵問題對於面積圖形問題的解決具有重要的意義。表徵問題是多種多樣的，基本的方式有符號、表格、圖形和視覺影像等，不同問題可以有相同的表徵方式，同一個問題也可以有不同的表徵方式。圖解是表徵問題的一種非常有效的方式，它有助於人們發現各約束條件的關係、問題空間的大小，進而促進問題的解決。而用影像表徵問題，也有助於問題解決。不同的表徵方式對解題者有不同的要求，它們要求不同的計算能力和短期記憶的容量，因而對解決面積圖形問題的速度可能產生不同的影響。但是，擁有表徵的能力，是建立解決面積問題重要的前提，因為它提供了對面積問題的分析 and 轉化。由此可知表徵是面積問題瞭解的指標，也是面積解題表現的預測值。

二. 面積概念轉化

面積概念的轉化意指個體面對某個物體的圖形予以知覺後，用一種新的形式或是象徵予以表達出來稱之，這種新的形式可藉由隱喻的轉換或是某些心智策略予以協助呈現。面積概念的獲得歷程包含了許多複雜的知識與技巧，這些都需經歷複雜的策略教學才能達成目標。面積領域內的全部知識及技能，在教室裡無法明確的教導，但可藉由學生早期在

教室裡的合作學習及相互討論而自動的獲得。

譚寧君（1995）認為面積的轉化教學應包括三個部分：即 1. 面積保留概念的 formed，2. 面積測量概念的建立，3. 面積估測能力的培養，而測量概念需在具有保留概念後再進行教學才有意義。面積的教學是透過一連串的操作、點數、切割、比較作圖等才逐步形成面積的概念，進行為達到有效率的原則才有面積公式的引入，此時的面積公式不是只靠記憶而是透過理解，不僅知其然，知道不同形狀的面積公式，而且知其所以然，能說出每個面積公式的意義即推算過程，如此的面積公式才能有效運用以增進解題能力。

Greenes, Dacey 和 Spungin（1999）三人在其主編的《幾何與測量》（geometry and measurement）的教材中提到，面積轉化教學的歷程應包含：1. 面積概念的數學內容，2. 連結相關的能力，3. 解題策略，4. 表達技巧四種內涵，才能構成面積學習的要件。鑒此，研究者認為學校裡有關面積解題的概念轉化教學應融合一些有效的教學策略，配合師生有意義的互動，才能有所成效。因此，建議面積概念之教學策略應遵循下列程序（如圖 14）：



圖 14 面積解題概念轉化教學策略歷程

(1) 圖形面積視覺化比對

配合生活情境中有關面積教學可利用之圖形，讓學生操弄、折疊、

比較及分類，以利於辨識圖形之特徵，並加強面積概念的保留。

(2) 表徵圖形面積的要素

透過面積作圖、單位量的轉化活動，將比較之圖形相似與相異之特徵抽離後，透過數學語言之詮釋方式表達出來。

(3) 討論與辯證面積解題策略

學生分組採取合作學習的方式，進行解題步驟及方法的討論與辯證，並釐清相關的知識及技能。

(4) 監控及執行面積解題策略

把握解題之要領及後設認知之策略執行面積解題的策略，以利正確行動和結果的產出。

(5) 檢核及修正面積解題策略

分享解題經驗並透過同儕的討論，形成有效及便捷之解題策略。

此面積概念轉化的教學策略歷程期待藉由學生對於圖形的視覺化比對後，將圖形要素抽離成為表徵予以內化，再利用學習策略將空間結構與符號系統的意義聯合、轉化成面積公式，再類化至各種面積解題的情境。從圖形的視覺比對至公式概念的習得，整個教學的歷程是面積概念的轉化，對於學生表徵的形成與類化的機制發展，可形成深入的連結，幫助學生明瞭其面積的公式是如何獲得。

本節綜要與啟示

一、本節綜要

面積的學習從圖形視覺辨識表徵開始，將所得到的訊息要素經過編

碼程序，儲存於記憶系統，再經過處理與組織後，轉變成知識。因此，面積的學習，是概念轉化的歷程，強調學習歷程上心智結構的改變與調適，這樣的觀點暗示說在面積的教學上，老師應將焦點放在學生概念的轉化，並且發現改善轉化概念的有效教學方法，幫助學生提昇幾何知識的層級。從上述 Pirie 等人（1989a；1989b；1992a；1992b；1994）的論點，可以將其觀點整理綜述如下：

- （一）面積教學活動引導的目標是在幫助學生建構心智的表徵，能夠使用教學的表徵正確的或是真實的反映出位於心智外的數學的關係。因為表徵建構的方式影響了問題題意的理解與策略的運用，故教師在教學活動中應介紹多元的表徵方式，提供學生選擇使用，以利面積圖形與公式意義的連結。
- （二）要達成這些目標的方法是發展清晰、鮮明的教學表徵，讓學生有可能的建構內在的表徵。因此，面積概念教學程序的安排應井然有序，且應凸顯活動的目標和意義，活動之間概念的銜接應密切嵌合，以利概念之習得與類化。
- （三）呈現給學生有關的外在教學材料，必須以學生能建構其面積知識或概念為首要的基礎。亦即能將正規學習活動所習得的概念與生活情境相互結合，形成有意義的連結。

Pirie 與 Kieren 提出之「數學概念理解動態理論」模式可融入面積教學活動與教學策略的引導，幫助學生從具體的操弄情境中，抽離圖形的要素，進而形成抽象的公式概念。

二、評析

學生學習的活動包含了教學歷程與材料內容兩部分的交互作用，為了加強學生面積概念轉化的效能，概念轉化的教學歷程和步驟應與文本設計的內容相互契合、彼此增損，以利學生在學習的活動中，能有效地明瞭題意、掌握重點、進而抽離要素而形成表徵，並能運用數學語言將圖形空間與公式之間的關係建立連結，以形成有意義的概念。本研究參考了相關的理論與 Pirie 和 Kieren 提出之「數學概念理解動態理論」模式後，認為面積之教學模式可將文本設計、教學策略活動的引導與概念轉化的歷程三者結合成一教學的模組（如圖 15 所示），運用於教學的情境中。

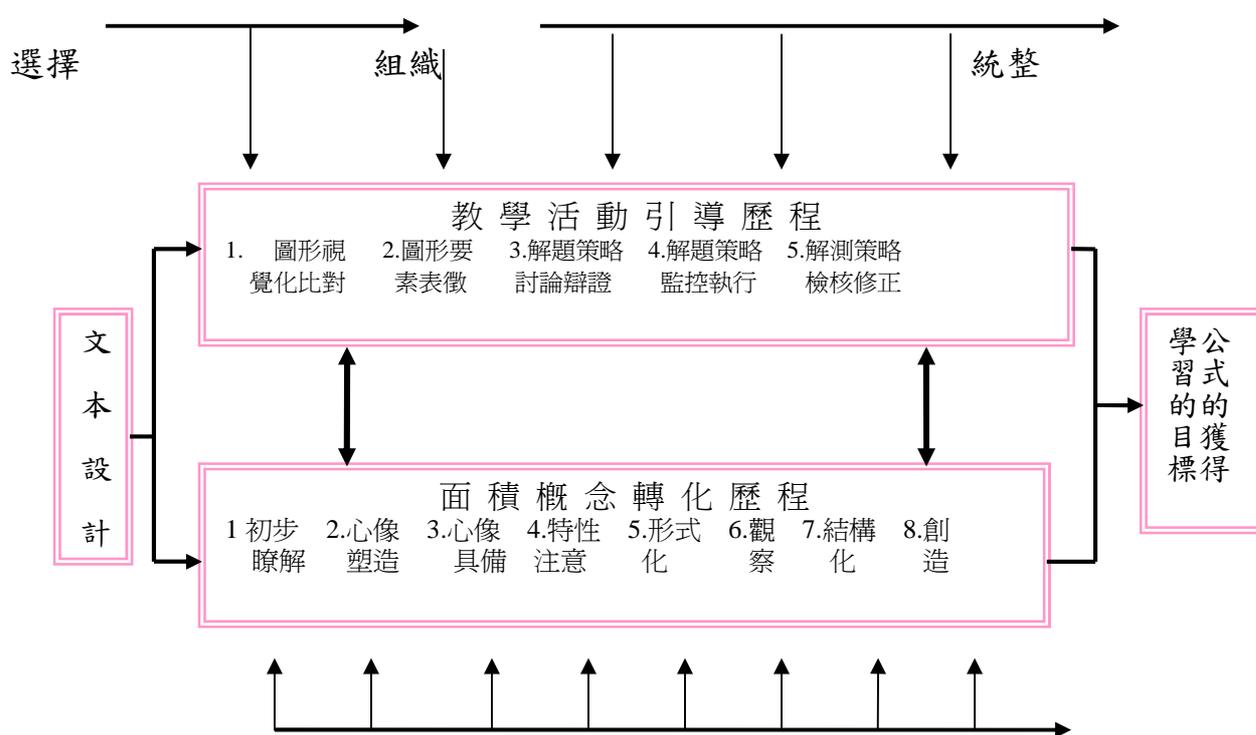


圖 15 實驗組面積概念轉化的教學模式

在此模式裡，教學策略引導的歷程（包含：圖形視覺比對、圖形要

素表徵、解題策略討論辯證、解題策略監控執行與解題策略檢核修正)與概念轉化歷程(包含:初步了解、心像塑造、心像具備、特性注意、形式化、觀察、結構化與創造)是面積概念學習的中介歷程,它們的關係,宛如兩條相互纏繞、扶搖直上,呈現螺旋狀態的繩索一般,愈朝向公式概念目標的發展,則其之間的配合程度愈緊密,知識結合愈堅固。由於面積概念學習的內涵包含了「數」、「量」、「形」與解題策略等複雜的知識層面,為了符應學生認知發展的要求與學習材料呈現的結構,面積概念轉化的教學模式融合了認知心理學訊息處理的觀點,作為教學實施的理論依據。有些學者(Mayer, 1999; 2002; Mayer & Moreno, 2003)認為在複雜多樣的訊息情境下,要減少認知的負荷而獲致有效的學習,就應採取選擇(selection)、組織(organizing)、統整(integrating)的教學歷程,幫助學生進行完整的學習。從圖 15 中可以明瞭文本設計是屬於選擇歷程,教學策略的引導與概念轉化是組織歷程,而公式概念的習得則需統整上述兩種活動的轉化。在教學運用上,教師需先進行文本學習材料的選擇與設計,經由教學策略的配合,引導學生將面積知識或資料組織成語意或圖像的符碼,進而統整為主要的概念,儲存於長期記憶內,作為日後提取與解題之用。

第六節 文本設計理念

面積文本設計的目的在於安排合適之學習內容材料、結合概念轉化的教學,激發學生學習動機,幫助學生透過辨識、比對的活動,抽離出

圖形結構之要素，經由記憶的作用，內化形成表徵，並能利用圖形操弄，提取線索以進行測量與運用重構的策略，將乘法關係與空間結構連結，最終形成有意義的公式概念。如前節所述，面積概念學習的重要因素反映在個體的文本活動、教學引導以及其進行活動後產生的結果。亦即針對轉化既得的知識與技巧最重要的學習歷程，就在於面積概念基模的建構與自動化。學生的活動可以提供他們經驗的紀錄，可以使其能夠反思，並能抽離出活動的規則，這些抽離出的規則就是創新與形塑概念的基礎。本節內容的安排說明，首先提出本節重點的闡述，即文本設計內涵與教學活動引導之融合，以作為本研究實驗設計、研究假設與資料分析的基礎依據。其次，從認知心理學的觀點探討圖像材料的比對與概念的建構間的關係，作為面積概念學習的基模。再者，依據面積概念的內涵架構，整合數、量與形等數學概念範疇，融合監控、解題等必要之策略，結合成一有系統、有意義的方案設計。研究者將此面積概念文本設計的內容，分為「視覺比對與表徵」、「面積線性測量」、「圖形重構」與「公式理解與運用」四個子內涵加以分析說明，最後，則梗概敘述本研究中概念轉化文本設計的重要特徵與教學歷程模式的關係。

壹、文本設計內涵與教學活動引導之融合

經由面積內涵架構、視覺表徵理論、面積解題能力發展理論的文獻探討，以及影響學童面積概念發展相關研究資料的分析後，研究者針對面積概念發展的特點，配合學生幾何認知發展的層次，提出面積的教學模式和概念轉化文本設計融合的模式，以作為本研究所欲探討問題的核

心架構。本節將上述文獻資料與本研究面積概念發展有關的學習內涵與教學歷程兩部分，予以統整歸納，提供本研究實驗設計與變項分析的參考。

一、面積文本設計的內涵

從面積概念的內涵架構所包含的學習範疇，如表 7 所示，可以理解面積概念學習的歷程統攝了「形」、「量」與「數」等複雜的數學概念，它們彼此之間連結形成面積概念發展的複合實體，這個複合實體所包含之能力，絕非先前一些研究者所著重的「量與實測」單層面的發展內容而已，尚且包含複雜、多元的能力表現。要讓學童面積概念能夠完善的發展，視覺辨識與表徵、面積保留概念、幾何空間推理能力、線性測量能力與技巧、問題解決的能力與策略、以及代數等學習材料是不可偏廢的。針對此項考量，本研究融合了「圖形視覺比對與表徵」、「面積相關要素測量」、「面積圖形重構」與「公式形成與運用」等四項內涵，構成一螺旋式的學習材料，它主要是將現行教科書依圖形特徵分段編排、分段教學的方式予以打破，而重新配合 Battista 與 Outhred (2000) 的理論依據、認知心理學說的主張，以及上節發展之面積概念轉化教學模式，結合了平行四邊形、三角形與梯形面積公式的課程、學童認知發展階段的觀點，與教師教學策略的引導為一學習主題，以別於一般教科書所設計的「階段式」課程，只強調教材結構的論點，期待在「統整」的課程架構下，讓學生對面積公式概念的學習更易轉化。

表 7 國小五年級學童面積概念發展學習材料之內涵

項目	學習內涵
數與量	整數倍數，理解乘法意義，刻度尺測量，直接比較、間接比較，實測與估測，個別單位和常用單位的運用，理解矩形公式，運用切割重組策略；
幾何	辨識與分類圖形，描繪仿製，認識角、線與平面，認識水平垂直概念，認識周長與圖形內部、操作切割重組，理解對稱關係，利用性質區分描述平面圖形、解決幾何問題；
代數	認識加乘法之交換、結合與分配律，以未知數表達問題，利用未知數列出等式，說明型態規則，記錄公式，理解數量關係，柱體體積公式。

二、面積解題教學的活動

面積概念解題教學所需之基礎能力，如表 8 所示。圖形空間要素的抽離、單位量排列與覆蓋策略對於面積概念的形成與獲得影響重大。除此之外，要解決幾何與測量的問題與作業，學生尚須具備空間推理、平面圖形轉換的探索能力、改變測量的習慣單位成公制單位與估算的技巧、操弄和會使用測量的策略，這些能力都是學生在面積解題過程中必須要學習與完備的，如此才能成功的習得面積的概念。

同樣的，對於這些能力的發展而言，學生的表現層次並不一致，個體之間也呈現出顯著的差異性，要提升學生的知識概念，最佳的方式是教師應積極的參與學生實作、操弄的活動中，與學生一起互動，明瞭學生認知能力發展的層次，設計有意義的幾何學習素材，鼓勵學生勇於嘗試，導引合適的解題策略與技巧，例如描述思考的步驟、認識型態與規則、發現不同的解題方法與層次、辨認其它各種可能的答案，以及與同儕一起進行比較、推理和利用描繪的方式以釐清數學關係等技巧的引導，讓教室成為「學生最大反應機會區」(陳嘉皇，2003b)，協助學生將所學之知識與理論類化到生活情境，解決實際問題。

表 8 面積概念教學所需之基礎能力一覽表

基礎能力	說	明
------	---	---

辨識、比較	能利用視覺辨認二維與三維圖形之形狀、大小、角度，邊長是否水平、垂直
分類	將圖形依其屬性與特徵予以歸類
表徵	利用圖形要素的心像，描繪出指定特徵的圖形
測量	利用尺規測量邊長或單位長度的倍數關係
排列覆蓋	利用方瓦緊密的排列鋪蓋，計算出圖形完全覆蓋所需之單位量數目
切割重組	利用分合移補等策略將不規則圖形重構為規則圖形，以利排列鋪蓋或公式推理計算
比對	將不同形狀圖形放在一起，固定某要素特徵，以比較出圖形大小或是公式關係的理解
公式推理	以矩形面積為基礎，探討其他圖形公式與其關係
形式共構	能理解平行四邊形與三角形面積公式可由梯形公式轉換而來

鑑此，研究者結合概念轉化活動與教學策略，安排了面積教學歷程模式，如圖 14 所示，期待透過實驗教學的引導，鼓勵個體實作、操弄，呈現出良好之解題表現，形塑有意義的面積學習內涵與材料，驗證模式之效果，以作為日後教師在面積或是幾何層面教學上的參考；另外，透過觀察個體在面積學習的歷程上表現的解題策略與技巧，分析及探討其在「形」、「量」與「數」認知能力的發展，以建構出良好之系統學習模式，以作為解釋和推論學生思考行為的來源依據，更加掌握學生學習的影響要素，協助學生獲得更好的幾何學業成就。

貳、圖像與文本中概念建構的關係

文本係根據某特定型態(pattern)建構而成，這些型態包括文字材料、圖畫、圖解、圖表等閱讀材料，尤其與上述相關的圖像表徵是面積學習材料的基礎。面積概念的形成是透過圖像特徵要素的抽離，從辨識、比對的歷程中形成相同類疇的圖像表徵，以作為圖形概念的基模，並從相似性的特徵建構出圖形的空間結構。有關圖像與文本中面積概念的形

成和連結，需藉由圖像建構、隱喻的介入與策略的引導三個機制才能完成，以下分別予以說明：

一、圖像的建構

圖像的建構與要素的抽離是本研究面積概念文本設計的基礎，也是學生對於面積的圖形、面積的測量以及數學規範必備的經驗(Cobb & Yackel, 1996)。孩子圖像與測量的先備經驗是特別的重要，因為它可以提供孩子們針對圖形進行重複分割、重組的探索帶來影響，或是形成相似性倍增結果的一種基礎。甚者，藉由學生圖形要素的選擇、固定及組合，可以調節它們在面積概念學習歷程上的數學推理。根據Fischbein(1993)的圖像(figural)概念理論所說的：當在處理幾何圖形的活動時，學生是同時並且內在地擁有圖像和概念特徵兩者心智的建構。圖像與概念兩個要素之間的完美切合轉化連結，似乎只在一種理念以及極端的情境下才能形成。但實際上，在相關系統的影響下，概念和圖像的特徵所產生的現象，依然保留著概念和圖像本身的特質。雖然利用分、合、移、補的方式將圖形空間重構，會產生新的幾何圖樣，但學生會嘗試去調和圖像和概念間的觀點。例如探討三角形面積公式的形成，學生利用切割、移補的方式將三角形圖形重構成矩形的圖像，雖然產生了新的圖樣，但學生知道新的公式的結構依然代表原三角形的概念特質。在面積概念轉化的歷程中，學生會參與兩項活動：即結構本身的語文形式和新圖式的產出(Maracci, 2001)。要解決結構性的問題需要給予學生一個明確的步驟、一種重構式操作的流程，也就是需要同時具備在控制過程裡整體的組織以及確保每個步驟或是要素皆能真正的執行。

二、隱喻的中介作用

不管是結構的產出或是行動的監控，這種面積概念問題解決是需要借用「隱喻」來思考的。Lakoff(1993)認為「隱喻」是將看起來似乎是區隔或是獨立的議題之間的關係予以歸納和轉化的能力所形成的一種認知力量。隱喻的機制需要透過「投射」(projection)和「交互作用」(interaction)兩項重要的歷程才能執行。每個隱喻性的概念，例如面積「公式」概念的學習來說，都必須要從兩個概念性的空間開始，其一為面積問題的「初始狀態」，另一為面積問題的「目標狀態」，這兩個問題的空間是同時在運作的。隱喻允許面積問題「初始狀態」中的知識投射到「目標狀態」，並且產生了另一道新的光芒覆蓋住「目標狀態」，精確的說，就是面積問題的兩個空間因為投射的作用產生了複雜的關聯，但是投射不能化約成為一種層次而已，它應該具有多種選擇性的。這種關係就如陳嘉皇(2003b)的研究所提出的，當學生要形成三角形或是特殊四邊形之面積公式意義時，可透過這些圖樣與矩形的比對，利用矩形之圖樣作為前置結構，所有圖形經切割、移補後，固定圖形長寬中某一要素，就能探究出圖形的公式，然而如何切割，切割的方式與行為就有多樣性的選擇。

交互作用則被當成是隱喻的必要特徵，學生對於面積問題能夠產生隱喻，就是轉化了所解釋的面積問題來源區域的屬性和特徵。另外，隱喻將面積問題的兩個概念區域進行協調而導引出意義。就如前述陳嘉皇的研究所示，當三角形與特殊四邊形的圖樣與矩形進行比對後，其要素之間就產生交互作用的關聯，長與寬的倍數就能顯現，圖形公式的意義

就能明瞭。所以，我們可以說：隱喻在面積公式中所扮演的角色是觀察現象和解釋它們之間關係的一項媒介，沒有這樣一個協調的關鍵要素，那麼面積的解題就沒有數學化的歷程(Carreira, 1997)。隱喻可以藉由語言或圖像操作來詮釋事件的意義，在面積概念的學習歷程中，學生就是藉由面積圖形的操弄，與同學辯證、討論，將空間結構的問題與數字關係連結起來，進而創造出隱喻的關連而轉化公式的意義。

三、策略的引導

隱喻是需要策略才能產生，也因為個體在問題的初始狀態和目標狀態的認知程度之不同而會採取不同的策略，所以隱喻所代表的意義也會有所不同。陳嘉皇(2003a; 2004)從學生作業及訪談的資料中，發現一些孩子在進行面積解題時，必需要將單位量方瓦完全將圖形覆蓋完後，才能得知三角形及特殊四邊形需要多少數量，但是大部分的孩子可以在圖形的邊緣上做記號，無須畫出任何正方形的單位量就能算出覆蓋所需的數量，甚至於有些學生能利用分、合、移、補的策略轉化圖形空間的結構而得出單位量的多寡。學生對於面積問題初始狀態與目標狀態的認知能力不同，其產生的隱喻關聯亦有所差異，因此提出學生在面積解題的歷程裡，概念的投射和交互作用的機制會經歷測量、重構以及計算三個階段心智運作的假設。但這項論點，最重要的是在於建議學校面積的教學，若要讓學生將圖像與公式概念進行關聯，應該慎重的考量課程編排與文本設計的問題，藉由教師適當的導引，激發學生正確的隱喻，才能轉化圖形結構和公式之間意義的關聯。

參、面積概念文本的設計

理解了圖像與文本中概念建構的關係後，到底一種有效的文本設計應遵循何種規準呢？面積的文本材料應如何設計呢？茲分別從有效之文本設計、投射與交互作用、面積教材的特徵與面積概念文本的設計四個部分加以闡述，以說明本研究面積文本設計的要義。

一、有效之文本設計

怎樣的文本設計才有利於學生概念的轉化呢？根據 Swafford, Jones 與 Thornton (1997) 等人的研究認為，有效幾何課程的設計應該遵循下列幾項建議：(1) 必須花費充分且高品質的時間在幾何的教學上，(2) 願意嘗試新的理念和教學上有關的研究，(3) 喜歡參與能促進學生幾何學習等有挑戰性的作業，(4) 有信心去刺激並幫助學生反應較高層次幾何思考的能力。由此可知，面積概念的文本設計不是一成不變、墨守成規，而是要配合學生幾何發展的程度，設計創新、有挑戰性的活動，促進學生概念朝向高層次的轉化。很有趣的是，不少老師在面積教學的文本設計歷程中，是以一種非常接近其最初意圖的方式運用這一方法——即採用自己所熟悉的教材內容與教學技巧以督促學生發現已知的真理，但這是教師已知的真理 (Clements, 1992)，跟學生實際的認知是有一段差距的。而且教師本身對於面積概念教材內容不熟悉或是專業知識貧乏，則學生從教師處將一無所得，甚至可能獲致錯誤的知識和概念。

Clements (1992) 也認為面積的概念學習應取之於生活，用之於生活，教學方法需多樣化，包含操弄、測量、拼湊與實作等活動，內容應多采多姿，跳脫教科書的侷限，以利學生能採用自身發展出的解題策略

和技巧，如此才能激發學生學習的興趣和動機，提昇學生更高的幾何能力層次。另外，為了利於達到公式的記憶，文本材料總是將圖形依其要素予以分割進行單元教學，各年級的學習步驟單調、一致性，加上偏重於公式概念的強調，致使無法將各圖形面積公式的概念加以統整、類化，造成學生在面積學習上成就表現的低落（譚寧君，1998；1999）。且過度重視材料內容圖形的結構性特徵，忽略學生因個別差異與文化因素影響而顯現出的解題行為表現與能力的意義，促使學生在學習過程中產生抗衡與索然無味，這也是 Clements 所指出的現今課程內容以「循環性」教學帶來的缺失。

二、投射與交互作用

在本研究中，面積解題的概念轉化是利用文本設計的方式，讓學生將圖形或物體的特徵藉由「隱喻」的方式表達出來，學生認知能力的展現則是來自於他們對於學習主題之間關係的理解、歸納、統整和類化。Carreira(1997)認為概念的理解與轉化必須集中於兩個重要的歷程，即投射(projection)和交互作用(interaction)。概念的解釋(account)必須要從兩個概念性的領域狀態開始，其一為初始狀態，另一為目標狀態，經由初始狀態允許我們尋找目標狀態，而將知識投射到目標狀態上。在這歷程中，我們會利用隱喻的方式散發出光芒在目標狀態上。詳細的說，與初始狀態有關聯的特定複合體會投射到目標狀態上，且會同時產生另外相關聯的複合體(Black, 1993)。投射作用並非只是單一途徑的資料化約，因此交互作用就被當成是轉化一些特質以及當產生隱喻時，重新解釋開始狀態的特徵所必要的屬性。另一方面，隱喻對於集合兩個概念性

的狀態具有中介的角色，它能針對目標狀態和開始狀態兩者的概念導引出意義。隱喻能夠歸納出相似性及產出多元的意義，忽略無關事件，導引出一些概念性的觀點，而且創造出的意義可以將兩個概念進行連結。但是隱喻並沒有傳遞正確的意義，只是它能激發一種理解的行動，引起意義的產生(Sierpinska, 1997)。

要創造出特定觀點的數學模式或是經驗的現象，我們就必須要發現一些釐清兩個不同概念狀態的方法，因此尋找隱喻是朝向任何嘗試建立數學模式的首要步驟。隱喻的建構是某個狀態投射到另一個狀態的關聯機制，是關鍵要素的協調者，沒有它就沒有任何數學性的步驟可以採信。所以，隱喻在數學模式裡是觀察現象和解釋它們之間的一個重要的媒介。

從這樣的觀點來檢視解題的運用對於面積的理念和概念的意義發展，產生了新的可能性範圍。轉化的歷程，就是對模式新奇的觀點：從實體和數學符號之間一對一的配對，轉移到包含真實世界問題的隱喻網絡的探索。轉化的歷程，促進多重概念間的配對以及擴展解題歷程中語意能力的運用。

三、面積教材的特徵

「面積」指的是對某一特定區域的覆蓋程度，亦即被覆蓋面的大小，所以是屬於測量的教材，一般人往往將重點放在圖形的辨識，或分解與合成，談形狀確認後即選用最抽象的形式，利用不同的公式以求解，故誤以為面積只屬於圖形與空間的教材領域而忽略測量教材的本質（譚寧君，1995）。面積公式可謂是對圖形解題及計算最佳的利器，但是面積公式關係的轉化是具有階段性及發展的法則。若以覆蓋學習的文本設計為

起始，必須經過線性測量技巧的完備及空間關係的轉化後，才能將直線測量與乘法的概念相互連結，最後進展到面積公式概念的習得。

如果面積概念教學的最終目的是讓學生瞭解公式的意義，那麼應該要讓學生瞭解到公式只是多種概念轉化及圖形重構方法中的一種策略而已，這種策略是孩子使用描繪或是心智影像推論所呈現的覆蓋作業能力逐步發展出來的。因此，學校的面積概念教學的文本設計，若只強調公式的習得，而無法連結面積測量與圖形重構調和的材料，即使學生習得了公式，這種經驗亦是短暫而無意義的。面積公式是依賴矩形結構的覆蓋而來，針對公式學習的模式進而發展文本設計，可以發現面積的概念及面積覆蓋的測量是優先安置於上述發展階段之前，因此面積概念轉化的文本設計內涵應包含：

- (一) 先介紹面積概念，將面積的測量當成是利用固定單位覆蓋某區域的方式，並以矩形的覆蓋作為測量的內容；
- (二) 將三角形及特殊四邊形的覆蓋當成問題來探究，然後介紹面積的概念，再使用已經學過的覆蓋方式測量其面積，這兩種方式都是可行的。

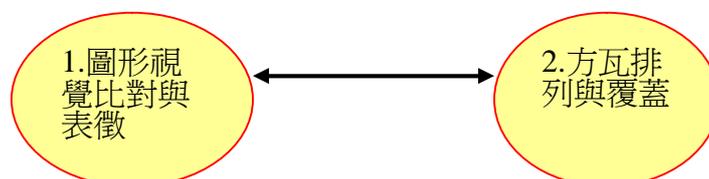
陳嘉皇（2003a, 2004）的研究發現，即使將正方形覆蓋的活動運用於三角形和特殊四邊形的解題上，學生亦能發展出最高階段的層次，只是在整個覆蓋活動過程中，乘法結構概念的發展因重構階段解題策略的不同，而呈現出不同的面貌。學童會利用分、合、移、補的策略，將原圖形再結構化為正方形及矩形後，即能利用其長、寬的乘積作為解題的依據，未必需採用三角形或特殊四邊形的公式才能解題，這似乎對學校

裡以公式學習為目的的文本設計是一大挑戰。因為不管是經由問題的困境或是實際的覆蓋測量作業，都能讓學生產生認知上的衝突，教師只要引導適宜，學生都將能建構出面積公式習得的意義，並將之轉化運用於日常生活特殊的問題情境。

學生能夠進步到更複雜的排列建構，常常是由於受到現行建構活動中視覺不適宜的辨認所引起的結果造成的。在其它時間裡，學生將排列的重構當成是混亂的結果，是他們在嘗試畫圖排列時所產生的，畫圖能提供額外的知覺材料，讓我們瞭解到這些知覺材料在建構歷程產生的不足將會更明顯。從研究中，學生在面積的測量、解題及計算策略上的發展遵循著 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 公式理解的階段模式前進，唯各階段所配對的學習法則在面積教學活動中並未落實，以致於習得了公式，但仍須藉助覆蓋來驗證公式計算的正確性，這種不一致性，實際暴露了學校中在上述測量、解題及計算三種策略教學的不完整與落差，但也為日後課程設計與教學引導提供改進修正的參考。

四、面積概念文本的設計

從上述提及的面積學習材料與教學實務上的缺失，要改正此種偏頗，針對整個歷程的文本設計進行分析，公式概念的學習必須包含面積的圖形視覺比對與表徵、線性測量、圖形重構與公式理解運用四個內涵（如圖 16）始能完備，這些內涵則需包含察覺、轉化、解題、溝通、評析等能力表現的活動，且在面積重構的操作上，它們是依次呈現且具有學習的順序之分的。



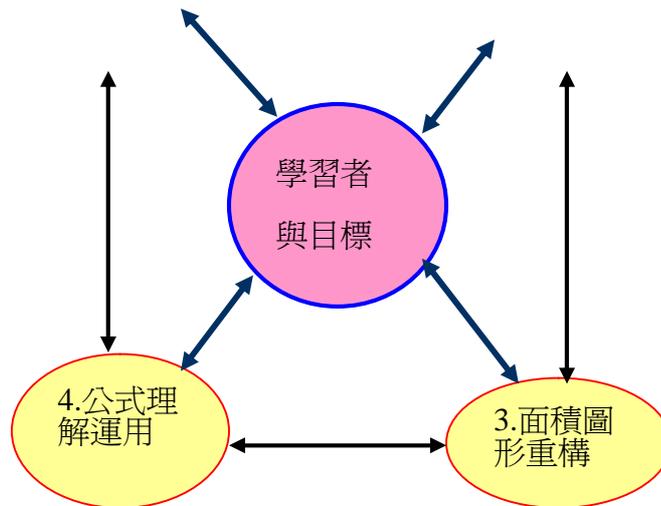


圖 16 「面積概念轉化文本設計」課程之內涵

學生經由圖形視覺比對、表徵，利用正方形單位量測量、覆蓋、排列矩形的活動後，能夠具體理解空間結構與乘法之間的關係，而了解到圖形的面積與公式符號的意義。公式的連結運用是面積概念學習最終的目標，除了設計連貫的活動引導學生透過點數測量、以及單位面積覆蓋、拼湊、比較與切割等特定圖形面積公式直線測量概念之外，還應包括作圖、單位量的測量與轉換，及面積的包含關係等，學生才能成功、正確地獲致面積公式的概念。面積公式概念的習得，並非只靠學生的記憶，仍需透過教學推演的過程，各個公式間的關聯性才能掌握，也唯有透過面積概念的轉換，公式的教學才有意義。

肆、文本設計的特色

一、文本設計內涵與學習目標

文本設計的目的在於協助學生利用情境中的線索，激發學習的動機與能力，以解決所面對的問題。文本設計需考量個體認知、基礎知識、

信念、解題策略、教室情境、教學目標與文化等層面的問題。文本所具有的意義可經由學習者的理解與詮釋，而決定如何進行認知和情意的投入。學生不僅會在文本中體驗生活的經驗，且會不斷地重構文本的意義，改變學習者和文本之間的關係。而文本的重構會反過來改變學習者對文本的經驗，使學生的注意力從「接下來會如何」轉移到「關係是如何發生的」，到解題角色、題意的敘述、以及數學知識與論述的生產。這種意義的生產與理念的展示交流，簡言之，即是學習者與文本中所蘊含之概念相互轉化與辯證的歷程。

本研究之面積概念轉化文本設計將意義的「隱喻」藉由學生對文本內容的「投射」與「交互作用」，從圖形要素的認知提升至公式與算則的運用，可謂包含了數學概念中「數」、「量」與「形」等範疇，這些內涵本應統整連貫地傳遞給學生，但為了配合教師教學時間與實務的考量，針對學習材料的特質，予以分階段教學，文本設計各子內涵與學習目標的關係如表 9 所示。

二、面積概念文本設計的特色

本研究的文本設計主要強調學生面積概念的轉化，希望學生透過具體的物件比對，抽離圖形有關的要素形成表徵後，能夠運用覆蓋與排列等測量的能力與技巧，配合解題和圖形重構的策略，發現空間結構與單位量的關係，進而形成抽象的面積公式概念。這個歷程可謂包含了「數」、「量」與「形」之間概念的連結與轉化，更統攝了多種數學能力的連結與運用，甚至於結合了課程與教學、理論與實務的論述，統整使之在研究或是認知發展取向上更形完善的架構。

表 9 文本設計各內涵之學習目標

文本設計內涵名稱	學 習 目 標
1. 圖形視覺比對與表徵	透過圖形的重疊、比較找出形成圖形面積相似的特徵，理解等積異形的意義。
2. 方瓦排列與覆蓋	透過單位量的操弄、排列與覆蓋，熟練二維度的測量技巧與策略，明瞭單位量大小與行列之間的關係。
3. 面積圖形重構	利用分合移補的策略，重構非典型的圖形成為與矩形「前置圖形」相關的圖形，進行解題的作業。
4. 公式理解運用	透過圖形面積要素的抽離，經由測量找出圖形空間相關的乘法結構，進而探索公式概念的由來。

因此，在學童數學能力的發展和概念的增進上是有其價值和目的的。為達此目的，本研究之面積概念文本設計在內涵的選取與編排上更加慎重，具備了以下幾項重要特質：

- (一) 以圖形「類似法則」和「整體法則」的特質作為面積概念文本設計的基礎，期待學生能藉由圖形視覺的比對，抽離出面積概念所需的重要要素。
- (二) 活動內涵的設計呈現出螺旋式(spiral)銜接的特性，學生能藉由圖形要素的類化、內化與轉化的機制，了解面積公式的意義。
- (三) 強調學生建構(constructure)空間關係的學習歷程，安排操弄、拼湊等實作經驗，結合後設認知監控策略，以提昇幾何能力的層次。
- (四) 藉由能力轉化(transition)的表現，透過心像表徵、要素結構化與創造能力的觀察，明瞭學生面積概念學習的情形。
- (五) 課程內涵強調統整(integration)，以矩形公式為同構基礎或

是「前置架構」，透過分、合、移、補策略的引導，建構出各圖形之公式關係。

(六) 以視覺比對(compare)為基礎，強調由具體到抽象概念認知的發展模式，注重生活經驗的融合與運用。

(七) 辯證與討論貫穿活動歷程，藉由同儕相似的文化背景，導引出協商機制，做為解決認知衝突的工具。

藉由這些特質的融入文本內涵，研究者期望學生能將其日常生活經驗投注於文本學習的活動中，對於圖形的特徵能夠感覺更豐富、想的更深刻，更容易將圖形和空間的關係與乘法結構連結，充分地明瞭面積公式的意義。

四、面積文本設計與概念轉化教學的關係

面積概念的理解與習得是複雜的歷程，必須藉由學生圖形辨識能力的提昇、測量能力的精進、圖形分、合、移、補策略的的適當轉換與公式推論導引能力的組合，才易達成公式意義理解的教學目標，因此文本設計的內涵應合乎教學的目的性、以及學生認知能力的發展程度，在材料與活動上必須作適當選取與安排，如此面積概念的發展才易轉化。面積概念轉化文本設計的內涵是影響學生概念建構的一項重要因素，除此之外，在前述各節裡曾提及教師教學歷程的介入亦是影響學生面積成就表現的另一要素，文本與教學是達成教育目標的兩大工具，若能彼此配合、相互轉承，那麼對於學生面積概念的提昇將有極大的助益。

面積概念的轉化在認知層面上，包含了對要素與空間結構的抽離；在心理發展的歷程上，包含了能力與策略的相互轉換運用。然而，不管

是認知、心理發展或是學習歷程等層面的效果要能增進，那麼教學活動與文本設計材料的緊密嵌合，將對學生面積成就的表現扮演舉足輕重的角色。

鑒此，為了要能達成概念轉化的教學與文本設計的融合，本研究採取了面積文本設計的內涵與概念轉化教學歷程流動的關係如表 10 所示：

1. 在圖形視覺比對與表徵的內涵方面，根據其文本的特性配合轉化理論的初步了解、心像的塑造、心像的具備與特性的注意等教學活動；
2. 在方瓦排列與覆蓋內涵方面，根據其文本的特色，與心像的具備、特性的注意、形式化和觀察等教學活動相搭配；
3. 在面積圖形重構內涵方面，根據其文本特性配合特性的注意、形式化、觀察與結構化等教學活動；
4. 在面積公式理解與運用的內涵方面，配合形式化、觀察、結構化與創造等轉化教學活動。

為使文本設計子內涵之間的活動彼此能緊密的結合，呈現螺旋狀的課程設計要求，子內涵間的轉化教學活動需呈現出重疊的現象，這樣才能利於學生經驗的銜接和類化。另外，為了讓文本與教學活動融合產生更大的效用，教師的輔導與學生監控策略的使用，是面積概念學習必須思索且應介入的活動。

表 10 面積文本設計的內涵與概念轉化教學歷程活動的關係

數學概念轉化 發展動態 理論	面積文本設計之內涵			
	圖形視覺比 對與表徵	方瓦排列 與覆蓋	面積圖形重構	公式理解與 運用

1.初步的了解				
2.心像的塑造				
3.心像的具備				
4.特性的注意				
5.形式化				
6.觀察				
7.結構化				
8.創造				

第三章 研究方法

本研究汲取面積概念發展之各學理的內涵，建構學習面積的理論架構，據此設計面積概念轉化文本進行教學實驗，以驗證理論架構的適切性，並深入探討學生在「面積視覺比對與表徵能力」、「面積相關要素測量」、「面積圖形重構策略」和「面積公式理解與運用策略」等面積概念轉化的情形。根據此目的，茲將本研究的研究設計、研究假設、研究對象、研究工具、實施程序、以及資料的處理與分析等分節臚述於后：

第一節 研究設計

壹、實驗設計

本研究根據相關理論及研究文獻，建構本研究之面積概念轉化文本，進行教學實驗。研究方法採用「準實驗研究法」(quasi-experimental research)，以不影響學校教學生態為考量。

研究設計採「前-後測不等組設計」(pretest-posttest nonequivalent-group design)，以班級為單位，隨機分派五年級一班學生為實驗組，採用研究者所編製之「面積概念轉化文本」之課程教材進行教學實驗；另選派一班學生為控制組，採用學校選用之教科書「南一出版社」(2000；2001)之數學教學指引所定之課程內容作為「一般文本」之課程教材。實驗組與控制組皆依相同設計之教學時數、練習範本與評鑑工具實施教學作業，且兩組教學皆由研究者本人擔任，以排除不同任教者所帶來之干擾與影響，研究者並盡量維持兩組教學時所可能產生的偏頗，例如態度及情緒的表現，期待能獲得客觀、公平的實驗處理。研

究設計如表 11 所示：

表 11、本研究之實驗設計

組別	前測	實驗處理	後測	延宕測驗
實驗組	Y1	X	Y3	Y5
控制組	Y2		Y4	Y6

Y1、Y2：表示前測的實施，亦即課程實驗開始之前，對兩組學生進行「面積解題成就測驗（I）」的施測，以做為後測比較之用。

X：表示實驗處理，實驗組採用「面積概念轉化文本」進行教學，控制組不接受實驗處理，採用「一般文本」進行教學。

Y3、Y4：表示實驗處理結束後，進行「面積解題成就測驗（II）」的施測。

Y5、Y6：表示實驗處理結束十週後，進行「面積解題成就測驗（I）」延宕測驗的施測。

貳、研究架構

本研究旨在透過面積概念文本的教學，以探究學童在「面積視覺比對與表徵能力」、「面積相關要素測量」、「面積圖形重構策略」、「面積公式理解與運用策略」等面積概念轉化的情形，因此以學生之作業表現的內涵為本研究所欲探索之依變項。為了控制本研究無關變項之影響，實驗教學前，兩組學生之面積解題的概念知識比較，與實驗教學過程中相關情境要素的安排布置，皆須予以嚴密控制，以求得公平客觀。從表 11 之研究設計可知，二組學生均完成前測和後測的實驗處理程序，其研究變項的內容如表 12 所示：，茲說明如下：

一、自變項

實驗組與控制組學生各接受不同面積概念文本之教學：

表 12 研究變項內容

變項名稱	自變項 (實驗操弄變項)	依變項	控制變項
變項內容	1. 概念轉化文本 (實驗組) 2. 一般文本 (控制組)	1. 圖形與面積解題能力 2. 圖形與面積概念保留 3. 面積視覺比對與表徵能力 4. 面積排列覆蓋策略 5. 面積圖形重構策略 6. 面積公式理解與運用策略	1. 年級 2. 教學時間 3. 教學進度 4. 教學者 5. 教學方式 6. 教學情境 7. 學生起點行為 (「圖形與面積解題成就測驗」前測)

(一) 實驗組採用「面積概念轉化文本」

本研究參考 Van Hiele (1986) 的幾何思考層次、Battista 和 Clements(1996)的空間結構概念模式、Outhred 和 Mitchelmore(2000)的「面積公式的相關性理解發展」模式的法則、與 Pirie 和 Kieren (1992a; 1992b; 1994) 所提倡的「數學概念理解動態理論」的內容以及陳嘉皇 (2003; 2004) 對於國小學童三角形及特殊四邊形面積解題策略研究的教學建議，設計出本研究的「面積概念轉化文本」。其內容包括「圖形視覺比對與表徵」、「方瓦排列覆蓋策略」、「面積圖形重構」與「面積公式理解與運用」等四項內容材料的學習。

實驗組使用的「面積概念轉化文本」強調設計活動的連貫性，以引導學生透過點數測量、以及單位面積覆蓋、拼湊、比較與切割等特定圖形面積公式直線測量概念為基礎外，特別顧及學生作圖、單位量的測量

與轉換，及面積的包含關係。學生經由圖形視覺比對、表徵，利用正方形單位量測量、覆蓋、排列矩形的活動後，能夠具體理解空間結構與乘法之間的關係，而了解到圖形的面積與公式符號的意義。

(二) 控制組採用「一般文本」

控制組所實施的教材內容是指南一出版社(2000;2001)主編之「國民小學數學教師手冊」第九冊的第六單元「平行四邊形的面積」、第九單元「三角形的面積」與第十冊的第三單元「梯形的面積」等所設計的教材內容為主，配合教學目標強調以認識面積公式的意義，運用實測和面積公式解決面積的問題為主。

二、依變項

(一) 量化部分：

1. 圖形與面積解題能力：係以實驗組與控制組之學生在「圖形與面積解題成就測驗(II)」上的得分為指標。
2. 圖形與面積概念保留(retention)能力：係以實驗組與控制組之學生在「圖形與面積解題成就測驗(I)」延宕測驗上的得分為指標。

(二) 質化部分：

1. 面積視覺比對與表徵能力：係以實驗組之受訪者在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第一、二、三題所觀察、記錄到的表現及作業資料為指標。
2. 面積排列覆蓋策略：係以實驗組之受訪者在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第四題所觀察、記錄到的表現及作業資料為指標。

3. 面積圖形重構策略：係以實驗組之受訪者在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第六題所觀察、記錄到的表現及作業資料為指標。
4. 面積公式理解與運用策略：係以實驗組之受訪者在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第五題所觀察、記錄到的表現及作業資料為指標。

三、控制變項

(一) 實驗教學前的控制

本研究為控制影響實驗效果的無關變項，乃於實驗前對受試者施以研究者自編之「圖形與面積解題成就測驗 (I)」，作為實驗組與控制組學生數學能力比較的依據，並以這個前測的分數作為後測成績分析比較的共變項，以進行單因子共變數分析。再者，為了解學生面積概念解題發展之個別差異與作業表現的模式，研究者亦在教學實驗之前，透過自編之「面積解題策略與能力之實作調查問卷」，先行對部分學生進行實作及訪談，以明瞭學生面積概念理解能力發展的情形，作為教學實驗設計參考的依據。

(二) 實驗教學歷程的控制

為了嚴密控制影響實驗效果的變項，如練習、測驗等因素，除了於前測階段採取同一的措施外，在實驗過程中，為了減少「霍桑效應」的產生，對於佈題、學習時數的安排、練習範本的內容（習作）、教學方式與教室情境的布置，例如學生座位的安排、小組合作解題的人數（2 人一組）也給予等同的控制。在教學的歷程上皆採用討論、詰問、辯證與操弄的方式進行，鼓勵學生針對重要之概念發表其看法與意見，單元結

束後，每位學生皆須繕寫數學日記。兩組教學時間皆為十四節課（560分鐘），分八週實施，每週約二節課。教學工作皆由研究者擔任，可免除不同教師帶來不同教學效果之影響。

第二節 研究假設

根據第一章所述的研究目的，以及第二章的理論與文獻之探討，本研究提出下列三項假設加以考驗：

假設一：接受「面積概念轉化文本」課程教學實驗後的實驗組，其面積解題能力顯著的比控制組佳。

1-1 實驗組的學生經「面積概念轉化文本」課程教學實驗後，在「圖形與面積解題成就測驗」的整體表現上，顯著的比控制組佳。

1-2 實驗組的學生經「面積概念轉化文本」課程教學實驗後，在「圖形辨識與表徵」的表現上，顯著的比控制組佳。

1-3 實驗組的學生經「面積概念轉化文本」課程教學實驗後，在「相關要素測量」的表現上，顯著的比控制組佳。

1-4 實驗組的學生經「面積概念轉化文本」課程教學實驗後，在「面積圖形重構策略」的表現上，顯著的比控制組佳。

1-5 實驗組的學生經「面積概念轉化文本」課程教學實驗後，在「公式理解與運用」的表現上，顯著的比控制組佳。

假設二：接受「面積概念轉化文本」課程教學實驗後的實驗組，其面積解題概念保留顯著的比控制組佳。

2-1 實驗組與控制組的學生，經教學結束十週後，在「圖形與面積解題成就測驗」的概念保留上，顯著的比控制組佳。

- 2-2 實驗組與控制組的學生，經教學結束十週後，在「圖形辨識與表徵」的概念保留上，顯著的比控制組佳。
- 2-3 實驗組與控制組的學生，經教學結束十週後，在「相關要素測量」的概念保留上，顯著的比控制組佳。
- 2-4 實驗組與控制組的學生，經教學結束十週後，在「面積圖形重構策略」的概念保留上，顯著的比控制組佳。
- 2-5 實驗組與控制組的學生，經教學結束十週後，在「公式理解與運用」的概念保留上，顯著的比控制組佳。

假設三：實驗組學生接受「面積概念轉化文本」課程教學實驗後，其面積解題策略與方法，顯著的較教學實驗前佳。

- 3-1 課程教學實驗後，實驗組學生在「面積視覺比對與表徵能力」的表現，顯著的比教學前佳。
- 3-2 課程教學實驗後，實驗組學生在「面積排列覆蓋策略」的表現，顯著的比教學前佳。
- 3-3 課程教學實驗後，實驗組的學生在「面積圖形重構策略」的表現，顯著的比教學前佳。
- 3-4 課程教學實驗後，實驗組的學生在「面積公式的理解與運用策略」的表現，顯著的比教學前佳。

第三節 研究對象

壹、研究對象

本研究以屏東市中華國小（化名）五年級兩班學生做為實驗研究的

對象。

貳、研究對象的選取

九十二學年度時，中華國小（化名）共有 57 班，五年級總計有十一個班級，每班約有 32 至 35 位學生。中華國小學生於升上五年級時會進行分班作業，依據學生四年級結束時之學期總成績高低先行排列，然後採取 S 形方式將學生分派至各班，因此各班學生成績大致上呈常態分佈的現象，差異性不大。本研究從中隨機抽取二個班級學生作為文本教學實驗研究的樣本，一班學生分派為實驗組，接受「面積概念轉化文本」課程教學實驗處理，另一班學生分派為控制組，不接受實驗處理，只接受「一般文本」課程教學，兩個班級之教學活動（各 14 節）均由研究者擔任。茲將本實驗研究對象之分配情形列如表 13：

表 13 本實驗研究樣本之分配表

組別 \ 性別	男生	女生	合計
實驗組	16	18	34
控制組	16	16	32
合計	32	34	66

第四節 實驗課程設計

壹、課程內容大綱

面積概念的轉化指的是學生從圖形要素的辨識之具體操弄的活動開始，經由教學活動的歷程引導及解題策略的示範，進而達成抽象的面積公式意義的理解。基於這樣的論點，本研究面積概念轉化文本的設計，即將幾何圖形有關要素特徵的辨識與表徵能力做為學生學習面積解題的

初始狀態，面積公式概念的習得及運用則作為目標狀態，初始狀態至目標狀態之間的歷程，則安排了視覺化比對、面積相關要素測量及圖形重構幾項活動的內涵作為中介、轉化的銜接。對於行為隱喻的表達則期待學生在學習的歷程中能透過對要求圖形的表徵、數學言語的爭辯及討論，將圖形的結構與公式的意義連結，而構成概念轉化的歷程，表 14 為本研究「面積概念轉化文本」設計與「一般文本」教學設計之內容大綱，有關教學活動之方案如附錄一、二所示。

表 14 實驗組與控制組課程內容大綱

組別 節次	實驗組（面積概念轉化文本設計組）	控制組（一般文本課程設計組）
1. 2. 3	<p>第一階段活動：圖形視覺辨識與比對 單元名稱：平行四邊形、三角形與梯形特徵的認識。 題目一：認識平行四邊形與矩形的關係。 題目二：認識平行四邊形的底邊與高的概念。 題目三：認識三角形與平行四邊形與矩形的關係。 題目四：認識三角形的頂點與高的概念。 題目五：認識梯形與矩形或平行四邊形的關係。 題目六：認識梯形的底邊與高的概念。 （指導學生如何辨識及表徵問題） 單元名稱：圖形面積特徵的抽離 題目一：比比看，平行四邊形、三角形與梯形哪個圖形的面積較大？你是如何知道的？ 題目二：要讓圖形方便的比較，可以固定圖形的哪些要素，而改變圖形的形狀。</p>	<p>單元名稱：認識平行四邊形的特徵並求出其面積。 題目一：認識平行四邊形與矩形的關係及高的命名。 1. 將平行四邊形變成矩形 2. 進行高的命名活動 3. 進行底的命名活動 題目二：瞭解平行四邊形面積的求法公式 1. 透過切割拼湊活動，瞭解平行四邊形底、高與矩形長、寬的關係 2. 從矩形面積求法公式推演平行四邊形面積求法公式 3. 畫出指定底邊上的高 題目三：平行四邊形面積的實測（畫出指定底上的高） 題目四：平行四邊形面積的實測與公式運用 題目五：「等積異形」平行四邊形底和高的關係 1. 透過實測、操弄，瞭解平行四邊形等積異形的關係</p>
4. 5. 6	<p>第二階段活動：面積相關要素測量 單元目標：利用測量方法找出底邊與高的長度。 題目一：測量平行四邊形的底邊與高有多長。 題目二：測量三角形的底邊與高有多長？ 題目三：測量梯形的底與高有多長？ 題目四：找出平行四邊形的底邊並畫出高 題目五：找出三角形的底邊並畫出高 題目六：找出梯形的底邊並畫出高</p>	<p>單元目標：認識三角形的特徵並求出其面積 題目一：認識三角形的底和高。 題目二：瞭解三角形的面積公式。 題目三：三角形底和高長度的測量 題目四：三角形面積公式的運用 題目四：「等積異形」之三角形底和高的關係</p>

(續表 14)

組別 節次	實驗組 (面積概念轉化文本設計組)	控制組 (一般文本課程設計組)
7.8.	<p>單元名稱：利用單位量覆蓋的方式，找出與圖形長寬的關係？</p> <p>題目一：平行四邊形需要多少塊方瓦，才能完全覆蓋，想一想，有什麼辦法。</p> <p>題目二：三角形需要多少塊方瓦才能完全覆蓋，想一想有什麼變法。</p> <p>題目三：梯形需要多少塊方瓦才能完全覆蓋，想一想有什麼變法。</p> <p>題目四：上述的圖形可以利用什麼策略讓方瓦鋪蓋的工作更為順利方便？</p> <p>題目五：圖形改變後的長和寬與方瓦的數量有何關係？</p> <p>(指導學生計畫步驟並執行作業)</p> <p>第三階段活動：圖形重構活動</p>	<p>單元名稱：認識梯形的特徵並求出其面積</p> <p>題目一：認識梯形的特徵。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 透過操作活動，將梯形切割成正方形與三角形的組合 2. 利用先前學過之三角形與平行四邊形面積公式求的梯形面積 3. 瞭解梯形面積的由來
9.10	<p>單元目標：等底、等高的平行四邊形、三角形與梯形的圖形面積是相等的。</p> <p>題目一：哪些平行四邊形的面積是相等的，為什麼？你用什麼方法知道的？</p> <p>題目二：哪些三角形的面積是相等的，為什麼？你用什麼方法知道的？</p> <p>題目三：哪些梯形的面積是相等的，為什麼？你用什麼方法知道的？</p> <p>題目四：哪些圖形的面積是相等的，為什麼？你用什麼方法知道的？</p> <p>題目五：有些圖形的形狀不同，但面積相同，為什麼？</p> <p>(指導學生解題策略的運用)</p> <p>第四階段活動：面積公式理解與運用</p>	<p>題目二：瞭解梯形面積求法的公式。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 進行底和高的命名活動 2. 畫出梯形上的高 3. 利用梯形面積公式計算
11.12	<p>單元名稱：算出平行四邊形、三角形與梯形的面積</p> <p>題目一：如何算出需用方瓦覆蓋的平行四邊形的面積？</p> <p>題目二：如何算出已有底及高條件的平行四邊形面積。</p> <p>題目三：如何算出只有圖形顯示的平行四邊形面積？</p> <p>題目四：如何算出需用方瓦覆蓋的三角形的面積？</p> <p>題目五：如何算出已有底長及高條件的三角形面積。</p> <p>題目六：如何算出只有圖形顯示的三角形面積？</p> <p>題目七：如何算出需用方瓦覆蓋的梯形的面積？</p> <p>題目八：如何算出已有底長及高條件的梯形面積。</p> <p>題目九：如何算出只有圖形顯示的梯形面積？</p> <p>(指導學生選用合適的策略，並相互驗證)</p>	<p>題目三：梯形面積的實測與計算。</p>

(續表 14)

組別 節次	實驗組 (面積概念轉化文本設計組)	控制組 (一般文本課程設計組)
13. 14	<p>單元目標：利用公式計算梯形、平行四邊形及三角形的面積</p> <p>題目一：平行四邊形的面積公式是如何得來的？(與矩形圖形進行比對)</p> <p>題目二：測量底及高的長度後，利用公式計算平行四邊形的面積。</p> <p>題目三：三角形的面積公式是如何得來的？(與矩形圖形進行比對)</p> <p>題目四：測量底及高的長度後，利用公式計算三角形的面積。</p> <p>題目五：如何計算梯形的面積。(與矩形圖形進行比對)</p> <p>題目六：測量底及高的長度後，利用公式計算梯形的面積。</p> <p>題目六：比較平行四邊形、三角形與梯形的圖形面積公式之間有何異同？</p> <p>題目七：找出平行四邊形、三角形與梯形的圖形公式之間的共構概念？</p> <p>綜合練習：</p> <p>題目一：畫圖並用算式把你做數學面積的方法記錄下來</p> <p>題目二：求出圖形中綠色部分的面積，並寫下你們的做法。</p> <p>題目三：哪幾個三角形的面積是相等的？寫下你們的做法？為什麼？</p> <p>題目四：哪幾個平行四邊形的面積是相等的？寫下你們的做法？為什麼？</p> <p>題目五：試配合下列資料『擬題』並請擬出數學題目來。</p> <p>訂正、檢討與經驗共同分享。</p> <p>*面積解題成就測驗</p>	<p>題目四：綜合運用，試配合下列資料『擬題』並請擬出數學題目來。</p> <p>*面積解題成就測驗</p>

貳、實驗課程目標

「面積概念轉化文本」設計的內涵主要整合了 Orthred 等人 (2000) 的面積公式理解發展模式與陳嘉皇 (2003a; 2004) 針對教學實務的發現建構成教學活動的架構，完成「面積概念轉化文本設計」的教學內容大綱 (見表 14)，並據以設計學生學習的教學方案 (如附錄一、二)。教學內容大綱主要包括階段活動名稱、節次、教學活動流程、教學目標、學

習材料、評量方式。

本研究之「面積概念轉化文本」設計與面積「一般文本」設計的單元名稱、教學目標與所需時間如表 15 所示：

面積概念轉化文本包含了四項單元活動，在「圖形辨識與表徵」部分，教學時數安排了三節，分別探討平行四邊形、三角形與梯形等圖形特徵的認識，這些特徵包含各圖形家族的性質、周長與面積的定義、高與底的關係，並能予以表徵。在「方瓦排列與覆蓋」部分，則安排了三節之教學時數，教導學童如何利用尺規測量出圖形指定特徵的長度，並讓學生利用方瓦的操弄，理解方瓦單位量與圖形空間的結構，並探討高、底邊與面積之間的關係。在「面積圖形重構」部分，則安排四節課，分別探討等積異形與各圖形面積公式之間的關係。有關「面積公式的理解與運用」部分，則安排四節課的教學時數探討面積公式如何計算與運用。如此設計的目的在於希冀學生經由面積概念轉化文本的學習後，對於面積概念有更深層之瞭解，且能運用至日常生活解決面臨的問題，並能成為認知模組，作為日後學習高層幾何知識的基礎。

表 15 各組教學單元名稱、教學目標與所需時間分配表

面積概念轉化課程 (實驗組)		所需節 次	所需節 次	面積一般文本課程設計 (控制組)	
單元名稱	單元目標			單元名稱	單元目標
認識平行四邊形、三角形與梯形的特徵	1.能辨認出平行四邊形、三角形與等腰梯形的特徵。 2.能說出組成平行四邊形、三角形與等腰梯形的要素。	1	1	認識平行四邊形與矩形的關係，並進行高與底的命名	1.透過操作活動，將平行四邊形變成矩形。 2.進行平行四邊形高的命名活動。 3.進行平行四邊形底的命名活動。

(續表 15)

面積概念轉化課程 (實驗組)		所需節 次	所需節 次	面積一般文本課程設計 (控制組)	
單元名稱	單元目標			單元名稱	單元目標
認識平行四邊形、 直角三角形與梯形 的底和高	1.能利用分、合、 移、補的方式， 比較平行四邊 形、等腰梯形與 直角三角形面積 的大小。 2.能瞭解平行四邊 形、等腰梯形與 直角三角形圖形 的底和高關係。	1	1	了解平行四邊形 面積的求法公式	1.透過切割拼湊活 動，瞭解平行四邊 形的底和高是矩 形的長和寬。 2.從矩形面積求法 的公式(長 \times 寬) 瞭解平行四邊形 面積求法的公式 (底 \times 高)。 3.畫出平行四邊形 指定底邊上的高。
「畫上圖形的高」	1.能畫出平行四邊 形、等腰梯形與 三角形的高。	1	2	平行四邊形面積 的實測	1.畫出平行四邊形指 定底邊上的高。 2.進行平行四邊形 面積的實測活動 與公式的運用。
「量出圖形的底邊 與高有多長？」	1.能正確地測量出 平行四邊形、等 腰梯形與三角形 底邊和高的長 度。	1	1	平行四邊形「等積 異形」底和高關 係	1.透過實測活動，察 覺等底、等高的平 行四邊形面積是 相等的。 2.經驗面積相等的 平行四邊形不一 定等底、等高。
「以下的圖形需用 多少塊方瓦才能覆 蓋？」	1.能正確的進行方 瓦鋪蓋的活動。 2.能利用分、合、 移、補的策略有 效的進行方瓦覆 蓋的活動。	2	1	認識三角形與矩 形的關係，並進行 高與底的命名	1.透過操作活動，將 兩個直角三角形 拼湊成矩形或平 行四邊形。 2.平行四邊形面積 的求法及公式的 運用。 3.瞭解直角三角形 的面積是矩形或 平行四邊形面積 的一半。
「等積異形」	1.能正確的使用測 量、解題策略解 決面積的問題。 2.能從平行四邊 形、等腰梯形與 三角形的要素 中，瞭解與公式 的關係。	2	1	了解三角形面積 的求法公式	1.進行三角形底邊 和高的命名活動。 2.從平行四邊形面 積求法的公式(底 \times 高)瞭解三角形 面積求法的公式 (底 \times 高 \div 2)。 3.畫出三角形指定 底邊上的高。

(續表 15)

面積概念轉化課程 (實驗組)		所需節 次	所需節 次	面積一般文本課程設計 (控制組)	
單元名稱	單元目標			單元名稱	單元目標
「圖形面積公式的探討」	1.瞭解圖形長寬與面積的關係。 2.瞭解平行四邊形、等腰梯形與三角形的底與高和面積的關係	2		三角形面積的實測	1.進行三角形面積的實測活動與公式的運用。
「各類圖形面積公式的計算」	1.瞭解等積異形的概念。 2.找出形成等積異形的組成要素。	2	1	三角形「等積異形」底和高的關係	1.透過實測活動，察覺等底、等高的三角形面積是相等。 2.經驗面積相等的三角形不一定等底、等高。
「面積公式的利用」	1.瞭解單位正方形的數量與圖形面積的關係。 2.瞭解平行四邊形、等腰梯形與三角形的底與高的長度和面積的關係	2	1	認識梯形，並進行面積計算的活動	1.透過操作活動，將梯形切割成正方形和三角形的組合。 2.利用先前學過三角形及矩形面積的求法及公式求得梯形面積。 3.瞭解梯形的面積是矩形和三角形面積的和。
			1	了解梯形面積的求法公式	1.進行梯形底邊和高命名活動。 2.從平行四邊形或矩形面積求法的公式(底 \times 高)瞭解梯形面積求法的公式(2底 \times 高 \div 2)。 3.畫出梯形底邊上的高。
			2	梯形面積的實測與運用	1.進行梯形面積的實測活動與公式的運用。
數學成就測驗後測		1	1	數學成就測驗後測	

第五節 研究工具

本研究對象係國小五年級之學童，因此自編或選用之研究工具，除考慮信度與效度，配合研究的目的與教材特色外，特著重題目文字之說

明與圖形解題線索淺顯易懂，以適合國小學童認知程度。本研究有關學生面積概念發展與策略運用的資料蒐集，使用的工具包括二種：一為研究者自編之「圖形與面積解題成就測驗（I）、（II）」，另一為「圖形與面積解題實作及訪談問卷」，茲分別詳述如下。

壹、圖形與面積解題成就測驗（I）、（II）

本測驗係由研究者自編，採取複本方式將其分為（I）、（II）兩份試題，由學生利用紙筆以及測量、操弄等方式進行解題，題目共11題，包括：1.面積的比對（3題）；2.測量（2題）；3.重構（3題）與4.公式運用（3題）等，主要目的在測量學生有關三角形與特殊四邊形面積概念。有關面積解題成就測驗的內涵包括了「圖形辨識與面積表徵」、「面積相關要素之測量」、「圖形重構與策略之運用」及「面積公式之運用與計算」等四部分。

茲將本測驗編製的過程、預試、效度、複本信度與難易度、計分方法詳述如下：

一、編製依據與過程

有關兒童面積概念發展的研究，其取向大多偏向於「數與量」的層面，因此使用的工具大多以紙筆測驗方法居多，對於兒童面積概念的評量，常以計算的答案對錯作為評定的依據，所評量的大都限於面積公式的運用是否正確，像是三角形面積為「底乘以高，再除以二」；梯形面積為「兩底之和乘以高後，再除以二」。詳如文獻所述，近年來，一些有關學童面積概念的研究已轉向數、量與形等複雜概念的結合，例如圖形的轉換與推理、空間結構與乘法算則的關係，以及面積公式概念形成的探

討。雖然理論有趨向統合的傾向，但測量工具所評量的項目仍侷限於單一行為能力，例如圖形邊長的測量、面積概念的保留或是利用方瓦的覆蓋，探討乘法結構的產生等等，並無一合宜且整合之工具，能夠探索圖形面積概念所蘊含的知識複合體。因此研究者乃根據文獻探討所建立的面積概念內涵架構，設定面積概念發展的範疇，編擬題目，著手進行本測驗的編製。

(一) 預試測驗內容

首先，研究者自文獻探討的結果，歸納出國內外學者在學童面積概念發展方面，最常探討的相關能力（如第二章表 8 所示），然後參考「南一版」國小五年級數學課本第九、十冊中與學生面積概念發展有關的「三角形的面積」、「平行四邊形的面積」、「梯形的面積」等單元內容，配合能力指標的規定編寫成本研究預試之測驗題目，測驗的題目採取複本方式設計。試題材料的選擇與編訂，係根據所列之內容進行雙向細目表（表 16）的設計，配合教學單元採用 Bloom 所主張的認知層次（記憶、理解、運用、分析、綜合、評鑑）編製而成（黃光雄等譯，1983）。

表 16 五年級圖形與面積解題成就測驗試題內容細目分析

分類階目 類型	記憶	理解	運用	分析	綜合	評鑑	總計
要素辨識與 面積表徵	*14 (五)		*20 (二、四)				34 分
面積相關要 素測量		*12 (一)	*4 (六)				16 分
圖形重構與 策略運用		*4 (九)	*5 (七)		*4 (十一)		13 分
面積公式運 用與計算		*8 (十.1)	*6 (三)	*8 (八)		*15 (十.2)	37 分
統計分數	14 分	24 分	35 分	8	4 分	15 分	100 分

*細格內的數字代表分數，括弧內的國字代表附錄三、附錄四面積解題成就測驗試題的題號

試題完成後，先請五年級兩位老師對初稿內容及題式提供意見；修改後，再請該班學生填答，觀察其對題意的了解，最後經指導教授認可後定稿。

（二）預試測驗初稿之編製

「圖形與面積解題成就測驗（I）、（II）」編擬後，於2003年9月1日進行第一次預試，預試對象為弘光國小（化名）六年級一班學生34名。主要的目的係透過施測，瞭解學生對試題文字說明理解的情形，與題目內容所指稱的面積內涵之適切性。另外再經與本校五年級教師相互討論質問後蒐集適切之題目類型，最後再根據所得資料及指導教授之意見，修改預試測驗初稿，並潤飾成為預試測驗題目（如附錄三、四）。

二、預試之實施

本測驗預試樣本係選自屏東市中華國小（化名）學生，對象為該校六年級一班學生計34人，「圖形與面積解題成就測驗（I）」預試於2003年9月26日實施，間隔一週後（10月6日）再對同一受試者施予「圖形與面積解題成就測驗（II）」，皆由研究者親自至該班實施。預試的結果，在「圖形與面積解題成就測驗（I）」方面，將第三題之文字說明加以修改，使之更易理解；第十題之1、2小題的題目通過率偏低，予以重新構題，降低難度。在「圖形與面積解題成就測驗（II）」方面，除了調整試題編排的位置以及些許試題的說明外，並無大幅變動。修改後之正式測驗題本如附錄五、六所示。

三、正式測驗的內容與計分方式

（一）正式測驗的內容

從附錄五、六與表 16 可見，「圖形與面積解題成就測驗 (I)、(II)」的內容各包含十一項題目，測驗內容的題型、目的與所屬的認知層次及文本內涵如表 17 所示。

本測驗試題的題型主要根據面積概念學習的特色，採取選擇、填充、作圖、計算等多元的表達方式，以充分考核學生所學習的知識和技能。試題內涵的安排，以配合五年級學生面積概念發展，應該具備的相關要素與基礎知識為考量依據，因此融入本研究之文本設計的內涵，作為編製測驗題目的重點；由於概念轉化首重基礎知識的完備以及轉化後的運用，而測量及圖形重構只是作為轉化的協助手段或工具，因此試題的編選偏向「圖形辨識與面積表徵」和「面積公式理解與運用」兩個層面為主。

表 17 圖形與面積解題成就測驗內容之目的與認知層次分析

題 號	目 的	文本內涵	認知層次	題 型
一、要素測量	能利用視覺判斷或尺規進行測量	測量	理解	填充
二、圖形分類	能將圖形要素特徵歸類	辨識表徵	運用	選擇填充
三、策略解題	能建立乘法結構的關係	公式理解運用	運用	填充
四、要素表徵	能描繪出圖形之重要特徵	辨識表徵	運用	作圖
五、要素辨識	能保留圖形重要要素之概念	辨識表徵	記憶	選擇填充
六、角度測量	能利用尺規進行測量	測量	運用	測量計算
七、分割組合	能使用策略改變及移轉圖形空間結構	圖形重構	運用	運用
八、空間轉換	能建立規則變化之物件的公式，解決問題	公式理解運用	分析	計算
九、排列覆蓋	觀察圖形特徵移轉圖形結構，解決問題	圖形重構	分析、理解	計算
十、公式運用	利用面積解題策略計算面積大小	公式理解運用	評鑑	計算運用
十一、等積異形	能使用策略進行圖形空間結構的比對、估測	圖形重構	綜合	作圖

(二) 計分方式

在計分方面，研究者經與教學實驗班級之導師商量討論後，將每試題之配分規定如下：第 1 題（要素測量）有 3 小題填充，每題有 2 格，答對者，每格可獲 2 分；第 2 題（圖形分類）有 5 小題選擇填充，分別將相關要素之圖形號碼填入，答對者，每一個答案可獲得 1 分；第 3 題（策略解題）有 3 小題填充，答對者，每題可獲得 2 分；第 4 題（要素表徵）有 2 小題作圖，答對者，每小題可得 2 分；第 5 題（要素辨識）有 14 格選擇填充，答對者，每格可得 1 分；第 6 題（角度測量）有 2 小題測量計算，答對者；每小題可得 2 分；第 7 題（分割組合）有 2 小題運用題，答對者分別獲得 2 分與 3 分；第 8 題（空間轉換）有 2 小題計算，答對者，每小題可得 2 分；第 9 題（排列覆蓋）有 3 小題計算，答對者，前 2 題分別可獲 2 分，第 3 小題可得 4 分；第 10 題（公式運用）有 6 題運用計算，答對者，除 1 小題為 3 分外，其餘 5 題分別可獲得 4 分；第 11 題（等積異形）有 4 小題作圖，答對者各可獲得 1 分。

另外，在配分方面，由於本研究的目的在於探討學生對於幾何面積內涵學習的情形，其目標在於「運用」與「評鑑」，因此計分的比例偏重於認知較高層次的「分析」、「運用」與「評鑑」等三部分（佔 70%），以利於能測試出學生在實驗教學所學的相關知識是否能保留，以作為面積學習的基礎。「面積解題成就測驗」施測的時間配合國小學生作息安排，皆為 40 分鐘。

四、效度、複本信度與難易度

雖然譚寧君（1999）曾提出國小高年級面積教材之分析，以供教師

面積概念教學與補救之依據，曾千純與謝哲仁（2003）也利用電腦動態幾何軟體（GSP）設計不同面積的學習情境，作為面積概念診斷與補救教學之研究探討，但國內與本研究編製的「圖形與面積解題成就測驗」相關之測驗題本欠缺，因此無法以效標關聯效度加以考驗試題之適合度，研究者乃改以專家效度的方式，進行測驗效度之考驗。本研究採取複本測驗的方式，「圖形與面積解題成就測驗（Ⅱ）」於教學後實施，「圖形與面積解題成就測驗（Ⅰ）」則於教學前與教學後延宕測驗實施；以測試實驗教學後（十週）學生面積概念保留的效果，如此安排在於排除練習的干擾因素。由於本研究之五年級學童尚未接觸相關圖形面積之概念教學，為了估計兩份複本測驗分數是否穩定，乃選取六年級一個班級的學生，先進行「圖形與面積解題成就測驗（Ⅰ）」的試題測試，經隔一週後，再以「圖形與面積解題成就測驗（Ⅱ）」重複測量同一受試者，根據這兩次施測分數求得複本信度係數的相關，並分別從學生通過試題之比例，以公式 $P=R/N$ （P：難度指數；R 答對的人數；N：總人數）探求試題之難易度。

（一）效度

就效度而言，本測驗試題之編製與篩選除了依據相關理論與文獻，經預試修改等審慎之歷程進行外，並委託某師院數學教育學系教授根據雙向細目表加以評析指導，以進行專家效度的考驗。教授除了對本測驗試題之第十題有關文字題之計算運用建議予以改成面積估算的設計外，亦對本測驗語句的說明加以潤飾，各試題配分及所屬認知層次稍予以調整，認為本測驗內容可適切的評量出教學的目標，測驗的內容具有高度

的代表性。

(二) 複本信度

本測驗各分測驗試題之複本信度如表 18 所示：

表 18 圖形與面積解題測驗各分測驗試題之平均、難易度
與複本相關係數分析

試題 分測驗	「面積解題成就測驗 (I)」		「面積解題成就測驗 (II)」		
	平均	難度	平均	難度	信度
圖形辨識表徵	24.3	.71	24.49	.72	.99
面積要素測量	12	.75	13.27	.83	.90
面積圖形重構	9.7	.75	6.67	.51	.69
公式理解運用	26.58	.72	25.34	.68	.95
總試題	69.64	.70	70	.70	.99

表中學童所呈現出試題的複本信度分別為.99、.90、.69與.95，總試題的複本信度則分別為.95與.99，可見本研究採用之複本測驗相關之信度高。

(三) 難易度

表 19 為學生得分情形統計之分析，從表中可以發現，學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」與「圖形與面積解題成就測驗 (II)」的各組距成績分佈的人數非常穩定，成績組距則從 30 至 90 分以上，大多集中於 60 至 89 分之間(約 70%與 73%)，兩次測驗成績總平均分別為 69.64 分與 70.00 分 (如表 20 所示)，可見本測驗試題具有高度一致性。

有關各測驗試題之通過人數之比例如表 20 所示，從表中可以發現各試題之通過比例從.30 至.94 之間。整體難度來說，兩次測驗之難度大致為.70，可以說明本測驗之試題具有難易的一致性。

若從分測驗之試題難度分析，如表 18 所示，可以發現學生在「圖形與面積解題成就測驗（I）」上的成績除了「圖形重構」成績較「圖形與面積解題成就測驗（II）」高外，其餘三項分測驗之成績均較「圖形與面積解題成就測驗（II）」低，主要的原因是受到練習之故。

表 19 圖形與面積解題成就測驗組距人數分配表

組距 \ 測驗	面積解題成就測驗（I）	面積解題成就測驗（II）
90 分以上	3	2
80 分-89 分	5	8
70 分-79 分	10	7
60 分-69 分	8	9
50 分-59 分	5	4
40 分-49 分	2	2
30 分-39 分		1
20 分-29 分		
小計	33	33

根據測驗後對試題反應的訪談，有關「圖形重構」部分，學童認為試題牽涉到圖形空間轉移之故，受限於圖形之特徵（典型之四邊形形較非典型之三角形容易轉化），所以「圖形與面積解題成就測驗（I）」的「圖形重構」（為典型之四邊形圖形）較「圖形與面積解題成就測驗（II）」（非典型之三角形圖形）為易。

貳、圖形與面積解題實作及訪談問卷

本問卷（附錄七）旨在針對學生參與實驗教學後，對面積解題運用於生活情況的探索。問卷之設計參考了文本之內涵、研究變項、Van Hiele（1986）的幾何思考層次、Battista 和 Clements(1996)的空間結構概念

模式、Outhred 和 Mitchelmore(2000)的「面積公式的相關性理解發展」模式的內容法則、與 Pirie 與 Kieren (1992a; 1992b; 1994) 所提倡的「數學概念理解動態理論」的內容，利用學生對於問卷內容作答的表現，分析其對面積解題類化的情形，將蒐集的資料進行質的分析。

表 20 圖形與面積解題測驗各試題平均數及難易度分析

試題 題號	「圖形與面積解題成就測驗 (I)」		「圖形與面積解題成就 測驗 (II)」	
	平均	難度	平均	難度
第 1 題(要素測量)	10.42	.87	11.21	.2004
第 2 題(圖形分類)	12.09	.76	9.76	.61
第 3 題(策略解題)	5.64	.94	4.24	.71
第 4 題(要素表徵)	2.36	.59	3.88	.97
第 5 題(要素辨識)	9.85	.70	10.85	.78
第 6 題(角度測量)	1.58	.40	2.06	.52
第 7 題(分割組合)	1.52	.30	2.00	.40
第 8 題(空間轉換)	5.76	.72	5.52	.69
第 9 題(排列覆蓋)	2.73	.34	2.67	.67
第 10 題(公式運用)	15.18	.66	15.58	.68
第 11 題(等積異形)	2.42	.61	2.00	.50
平均	69.64	.6964	70.0	.700

問卷共有六題，其目的在於探究學生「圖形要素辨識與表徵」、「面積排列覆蓋策略」、「圖形重構策略」、和「面積公式理解與運用策略」等能力的表現。第一、二題主要探討學生圖形要素的辨識與表徵能力；第三題則探討學生圖形大小比對策略的運用；第四題探討單位量方瓦覆蓋圖形策略的表現；第五題則探討學生對圖形面積公式理解的理解情況；

第六題則探討學生面積公式與圖形分割重組策略的使用情況。訪談過程由教師提供實作材料，採取兩人一組方式進行作業，作業歷程均採取錄音、錄影方式蒐集資料，作為資料分析判讀的依據。

第六節 實施程序

本研究之實施，可分為四個階段（如圖 17）：一、準備階段（蒐集及閱讀文獻、決定研究架構）；二、文本及測驗之編製；三、測驗調查與教學實驗；四、資料處理與分析。茲將本研究的實施程序分述如後：

壹、準備階段

本研究自 2002 年 5 月起，即著手研究計畫初稿，至 2003 年 12 月底接受研究計畫口試，其間歷經一年餘。在準備階段，所進行的工作重點包括：

一、蒐集資料

建立理論基礎與研究架構，探討相關變項，並透過《International group for the psychology of mathematics education》組織各年度發表之論文、《Journal research for mathematics education》及國內等數學期刊、學報蒐集專著論文，以作為探討學童面積概念發展之資料來源。

二、編製實證調查所需之各項測驗工具

本研究所使用之研究工具，包括「面積解題成就測驗」與「面積解題實作與訪談大綱」，係根據文獻、理論及實際教學試驗加以編製，並建構試題之專家效度、複本信度及難易度。

準備階段

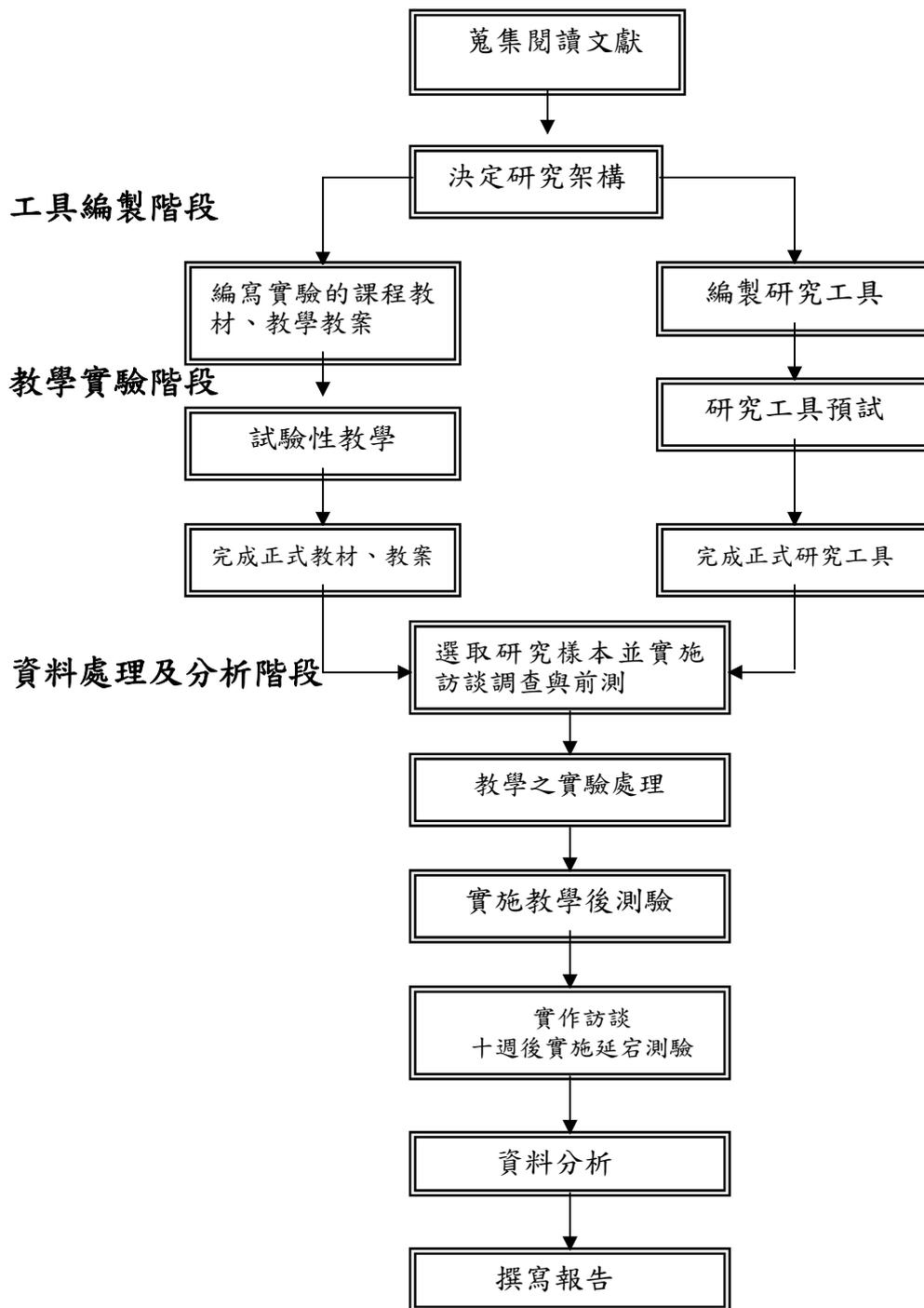


圖 17 本研究實施流程圖

三、選定預試及教學試驗學校

2002 年 10 月至 12 月與屏東市中華國小（化名）聯繫，選擇該校五年級學生二班作為面積轉化文本教學試驗的班級，以瞭解文本設計內含

之適合性，並作為文本修正的依據；其次，編定面積解題成就測驗初稿，根據理論及實際教學試驗的經驗編定測驗初稿。至 2003 年 9 月，選定屏東市弘光國小（化名）六年級一班學生進行第一次的預試，瞭解文字說明是否適合，以進行題目之修訂與測驗內容的充實。

貳、文本及測驗的編製

一、文本之編製

本研究所使用之文本，承二位指導教授之指導，在內容及教學綱要上稍做修改，於 2003 年 8 月定稿。

二、測驗之編製

本研究所使用之「圖形與面積解題成就測驗」承二位指導教授與屏東師院黃金鐘教授指導，經修正後，即著手進行第二次的預試。並與中華國小及相關教師聯繫，於 2003 年 10 月先後完成了試題之專家效度、複本信度及難易度。

參、測驗調查與教學實驗

一、測驗調查

本研究所欲探討之面積概念發展之教學活動安排於五年級上學期實施，由於「圖形與面積解題成就測驗」前測的施測時間必須在教學實驗之前進行，所以研究者與教學實驗班級導師聯繫，選擇在 2003 年 10 月底，進行前測的實施，以蒐集學生教學實驗前，面積概念發展的相關資料。

二、教學實驗

在實驗處理進行之前，研究者透過與教學班級教師的關係，每週安排三個小時，持續三週的時間進入現場與學生接觸。此項作法的目的有二：一是幫助研究者早日建立與學生良好的關係，並從中瞭解學生學習態度與該班教師班級經營與管理的方式，以利實驗教學的銜接；另一目的，在於蒐集學生資料，以瞭解學生認知發展情形與表現，作為實驗教學時起點行為的依據。在教學實驗處理前，研究者要求兩組學生皆參與研究者編製之「面積解題成就測驗（I）」之施測，以瞭解學生在學習面積概念前所具備的先備知識與解題能力。

教學實驗過程中，除要求學生分組共同完成課堂上的作業外，研究者並要求每位學生於每階段教學活動結束後，繕寫「數學日記」，所得之資料作為輔助面積視覺比對與表徵能力、相關要素測量、圖形重構策略、公式理解與運用策略等四項作業表現結果之分析、比較的附加資料。

有關教學活動的實施，研究者在進入現場之前，即先與實驗組與控制組兩班導師協商，將教學時間集中於五年級上學期 11 月份的時段，這樣的安排，除了考量新學期班級常規的建立外，尚考量在教學實驗之前，研究者能於前幾週進入現場，與學生建立良好關係，並實施「面積解題成就測驗」前測，以瞭解學生學習狀況與認知能力的發展；另一方面，基於學校活動繁多，希望有充裕的時間安排，使 14 節的教學實驗課程能順利於上學期末（2004 年 1 月上旬）完成。課程結束時，恰逢學校第三次成績考查，可藉此機會，進行面積解題成就測驗的後測，如此，可解決學生在測驗時間安排的問題，施測的結果，並可提供教師在另一階段教學前進行補救的參考。在每節教學之前，研究者事先與兩班導師討論教

學文本材料的設計，並依據實際情況，做彈性修改，以利學生學習。教學活動進行的過程中，兩班導師亦參與學生學習的互動，協助研究者處理教學相關事項，例如發放操作的教具、指導活動步驟的進行，以及維持教室秩序等。當日教學完成後，則共同討論教學狀況與學生表現情形，省思教學利弊，作為下次改進的參考。實驗教學的兩班導師並協助指導學生於課後之「數學日記」的繕寫與批閱，共同掌握學生數學概念發展的狀況。

教學實驗結束後除實施「面積解題成就測驗（II）」，作為教學效果分析外，尚配合面積解題實作與晤談的活動，對實驗組之學生進行個別訪談，蒐集有關資料。為了增加質性資料分析的客觀性，本研究在教學實驗與訪談實作的歷程中，皆予以錄音、錄影。參與「圖形與面積解題實作」的學生，係依據實驗組班級的學生在「圖形與面積解題成就測驗（II）」得分為百分等級 75 以上之高成就者與百分等級 25 以下之低成就者各選取 8 名，總計 16 名，分別進行訪談，蒐集學生相關資料，以配合量化資料之分析。如此安排的目的，旨在透過生手與專家行為的表現，推測及建立學生在面積概念發展的模式，作為日後教學設計及說明的參考依據。實施「圖形與面積解題成就測驗（II）」十週後，亦即下學期開學後（2004 年 3 月中旬），再施以「圖形與面積解題成就測驗（I）」，以了解學生經教學實驗一段時間後，圖形與面積概念保留的情形，並做比較。

肆、資料處理與分析

本研究所蒐集之資料分為兩部分，即量的資料與質性資料。量的資

料係針對受試學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)、(II)」的得分，進行統計分析；質性資料則包含兩部分，一為文本教學設計課堂上的觀察與紀錄，另一為學生接受「圖形與面積解題實作與訪談問卷」所得之資料。有關資料的處理與分析，分述如下：

一、圖形與面積解題成就測驗

本研究在量的資料部分以 SPSS/PC + 套裝軟體進行統計分析，採用細格人數不等單因子共變數分析，來檢定在排除共變項的影響後，自變項在依變項上的效果。採用之研究方法如下：

(一) 以單因子共變數分析考驗實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」總測驗與分測驗上的差異 (以學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」的得分為共變量)。

(二) 以單因子共變數分析考驗實驗組與控制組學生在延宕測驗「圖形與面積解題成就測驗 (I)」總測驗與分測驗上的差異 (以「圖形與面積解題成就測驗 (I)、(II)」之前、後測成績為共變量)。

二、文本教學觀察與紀錄

本研究關於教室裡師生互動及言談的資料，以錄影 (音) 的方式作為觀察和紀錄的主要工具，並輔以學生之作業，作為事後分析影帶及轉錄錄音資料的參考，以理解討論的內容。影帶分析及語音轉錄資料的標題包括教學日期、班級、教學單元名稱與節數 (詳見附錄八)，並以標題做為檔案編號的依據。例如 2003 年 11 月 16 日實驗組「圖形辨識與表徵」第一節課的上課影音資料，研究者以「圖形辨識與表徵 A2003111601」作為資料編號；2003 年 11 月 17 日控制組面積概念教學第二節課的上課

影音資料，則以「面積概念教學 B2003111702」作為資料編號。

每節教學結束後，研究者將錄影（音）帶的內容轉錄成書面文字，如對教學活動的情境脈絡有所疑問，研究者會對照錄影帶的內容或是與參與教學班級之導師討論，加以釐清。表 21 是研究者處理與呈現資料時所使用的轉錄符號：

表 21 班級觀察記錄轉錄符號表

符號	意義	實例
T	研究者	T：為何可以這麼分類？
S**	發表之個別學生	S 文羽：他們都有兩個一樣長的邊！
Ss	部分學生	Ss：同意文羽的說法！
St	全部學生	St：已經學過了！
.....	語氣停頓	S 立安：我們將之命名為.....矩形吧！
?	無法說明解釋	S 唐維：它可能是？
()	同時說話或動作	T:有幾個圖形在紙上？（有 6 個）

三、圖形與面積解題實作與訪談記錄

國內針對訪談與實作紀錄分析的相關研究頗多，本研究參考陳向明（2002）所著之《社會科學質的研究》一書中「資料的整理和初步分析」登錄與編碼的方式，作為本研究資料分析呈現的方式。本研究先將學生訪談與實作過程的錄影帶與錄音帶轉錄成文字，完成「學生圖形與面積解題實作與訪談紀錄」，再將「圖形與面積解題實作與訪談紀錄」的四項內容：面積視覺比對與表徵能力、面積相關要素測量、面積圖形重構策略、面積公式理解與運用策略等分別予以代號 S、M、R、A，再結合學生之化名及性別，成為「實作與訪談紀錄及其初步分析」（如附錄九、十），

並以標題作為檔案編號的依據。例如，被訪談者為立安，男性，訪談及實作的內容為面積相關要素測量的錄影（音）資料，研究者以「初步分析 M 立安 1」作為資料編號；被訪談者為文羽，女性，訪談及實作的內容為面積公式理解與運用策略的錄影（音）資料，研究者則以「初步分析 A 文羽 2」作為資料編號。訪談與實作紀錄所使用之轉錄符號如表 22 所示：

表 22 訪談及實作記錄轉錄符號表

符號	意義	實例
T	研究者	T：想想看它們有何關係？
S**	發表之個別學生	S 文字：底和高一樣長！
##	動作停頓	S 立濬：手裡拿著橡皮圈 ## 看著釘板
※※	同時動作	S 佳儒：左手張開橡皮圈，右手點數※※
.....	語氣停頓	S 立安：嗯.....好像不對！
?	無法說明解釋	S 唐維：它可能是？
()	同時說話或動作	T:有幾個圖形在紙上？（有 6 個）

研究者以兩個方式發現資料的主題和概念：第一個方式係從文獻探討所提供的概念和主張，尤以 Pirie 與 Kieren (1994) 所提倡的「數學概念理解動態理論」的內涵，引發研究者分析資料的概念。例如概念轉化文本設計重視圖形辨識與表徵，從文獻中可以分析此種行為可從「心像的塑造與具備」的層次概念，分析學生圖形與面積概念發展的狀況；對於教師教學的引導，則從可幫助學生對於數學面積概念轉換的理解，即刺激、誘導、以及確認等三種介入活動加以說明。第二個方式是持續地閱讀觀察記錄、訪談記錄、學生作業，只要有任何想法，則在資料旁的空白處寫上評註及意見，然後不斷的質問與檢核，以發現相關的主題

和概念。例如，學生做圖形的分類，最先會以圖形外觀之要素作為辨識的依據，俟無法滿足辨識的要求後，進而檢核圖形內部之特徵，這是個體視覺化與圖形特徵之交互作用的「外在特徵朝內在特徵注意」的心智作用，若再更深一層的分析，即是「要素抽離」的表現。

本研究分析的資料主要是以學生表達之言語與實物操作行為為主，從中探討其背後的意義。為了使研究資料具有客觀性，研究者亦採取三角檢測的方式，透過使用不同資料、方法與人員，進行交叉檢核。在方法方面以觀察、訪談與蒐集文件資料等不同方式進行檢核；在人員方面，則從教學實驗班級導師與學生等不同觀點檢核研究者的詮釋。研究者在研究的歷程中亦不斷地與自我對話，採用「詮釋的循環」不斷辯證自己的言行與思想，反省思考教學方案的設計是否有利於學生學習，發問的技巧是否有所偏誤？學生是否理解課堂教導的概念，如果教學措施不當，該如何改進？將思想與實踐融為一體，促進教學的理論與實務能相輔相成。

第四章 研究結果的分析與討論

本研究目的在於：一、設計國小學童「面積概念轉化文本」；二、經由課程教學實驗，驗證國小學童面積概念轉化文本之教學效果；三、探究學生面積概念發展轉化時所運用的解題策略與方法；四、經由教學實驗後，針對「概念轉化文本」教學效果之發現，建立國小學童面積概念發展教學的模式。

研究者根據 Van Hiele (1986) 的幾何思考發展層次理論、Battista 和 Clements(1996)的空間結構概念模式、Outhred 和 Mitchelmore(2000)的「面積公式的相關性理解發展」模式的內容法則、Pirie 和 Kieren (1992a、1992b；1994) 提倡的「數學概念理解動態理論」的內容以及陳嘉皇 (2003a、2004) 對於國小學童三角形及特殊四邊形面積解題策略研究的教學建議，設計了「面積概念轉化文本」，以作為教學實施的藍本。有關研究目的之一之「面積概念轉化文本」相關的內涵、目標及教學流程，已於第三章詳述，此處不再贅述。本章茲依據其它研究目的，針對參與教學實驗之學生在「圖形與面積解題成就測驗」表現和實作、訪談資料予以爬梳整理、歸納分析，分別檢驗研究假設及文本設計教學的效果。首先，透過單因子共變數分析，比較實驗組學生經過「概念轉化文本」教學處理與控制組學生經過「一般文本」教學處理後，兩組學生在「圖形與面積解題成就測驗」表現的差異，以檢證不同文本教學實驗處理的效果；其次，探討教學實驗結束十週之後，接受不同文本教學處理的學生在「圖形與面積解題成就測驗」表現的保留效果；再者，則探討實驗組學生接受「概念轉化文本」教學前後在「面積解題成就測驗」表現的

差異情形，並配合「面積解題訪談與實作調查」問卷獲得的資料，探究學生面積概念轉化採用的解題策略、方法及其進步情形，進而描繪出面積概念發展教學的模式；最後，則針對統計分析結果與學生實作訪談資料的要點提出本研究之綜合討論，與既往相關研究結果做比較，說明研究發現的意義。

第一節 圖形與面積解題能力之分析比較

本研究首先根據實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗」上所得的結果，進行單因子共變數分析，將教學實驗前所獲得的「圖形與面積解題成就測驗（I）」前測的成績視為共變量，經排除共變量的影響後，考驗假設一，以探討教學實驗產生的效果及比較兩組之間的差異情形；接著，依序比較兩組學生在「圖形辨識與表徵」、「相關要素測量」、「圖形重構策略」、「公式理解與運用」等分測驗反應的差異情形；最後，根據結果分析進行討論。

有關統計資料分析結果，敘述如下：

壹、接受不同文本教學處理後，實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗（II）」上的整體表現之比較

為了解文本教學實驗處理的效果，首先根據學生在「圖形與面積解題成就測驗（II）」的表現所獲得的平均數與標準差（如表 23 所示），進行組內迴歸係數同質性假設的考驗，隨即依照學生在解題成就測驗上整體表現進行單因子單變量共變數分析考驗，其結果列如表 24 與表 25。

表 23、實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗」

各分測驗及總測驗前、後、延宕測得分之平均數與標準差

項目		測驗	圖形辨識 與表徵	相關要素 測量	面積圖形 重構	公式理解 與運用	圖形與面積解 題測驗(總分)
實 驗 組	前測	M	18.18	9.53	2.82	11.00	41.53
		SD	5.70	2.65	2.14	6.10	12.33
	後測	M	29.15	13.15	6.88	18.53	67.71
		SD	3.07	2.23	2.46	6.34	10.87
	延宕測	M	25.00	11.59	8.74	20.28	65.50
		SD	4.24	1.96	3.04	5.05	11.25
控 制 組	前測	M	17.25	9.00	2.09	11.00	41.38
		SD	5.79	3.17	1.49	6.54	13.21
	後測	M	27.94	11.00	3.00	15.53	57.47
		SD	4.30	3.80	2.29	7.57	13.20
	延宕測	M	21.50	10.69	5.94	16.94	55.06
		SD	4.75	2.86	2.59	5.32	11.65

註：實驗組 N=34 人，控制組 N=32 人

表 24 「圖形與面積解題成就測驗 (II)」整體測驗同質性假設考驗

組別	M(後測)	SD	Levene 檢定 F 值	顯著性
實驗組 (概念轉化)	67.71	10.87	4.62	.035*
控制組 (一般文本)	57.47	13.93		

* P < .05

表 25 實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」上
得分之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方和	F 檢定	顯著性
組間 (組別)	1	1693.44	19.73	.000***
組內 (誤差)	63	85.83		
總和	64	1779.27		

$R^2 = .536$ (調整後的 $R^2 = .521$)

*** P < .001

(一) 結果分析

由表 24 得知：Levene 統計量達到顯著，表示這兩組樣本的離散情

形具有明顯差別，需加以調整才能進行統計考驗，經調整後進行共變數分析，由表 25 統計資料分析結果發現，迴歸模式之變異數分析，受試者間效應的檢定值可知以全模式去預測依變項達顯著，調整過後的 $R^2 = .521$ ($F = 36.32, P < .001$) 顯示模式具有解釋力。組間效果的考驗達到顯著水準 ($F_{(1,63)} = 19.73, P < .001$)，表示不同的文本教學處理會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」上的表現，而接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積解題成就測驗」的表現上較佳。因此，本研究假設 1-1 獲得支持。

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「圖形與面積解題成就測驗」整體測驗上的表現，顯著的較參與「一般文本」教學的控制組學生成績為佳。
- (2) 究其原因，在於本研究設計的「面積概念轉化文本」教學除依據 Van Hiele (1986) 所提出幾何概念發展層次觀點加以應用外，文本內涵的安排尚配合 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 的公式轉化階段模式所提出面積概念學習成功的建議—即在面積概念學習的歷程中提供空間結構的排列，當成學習目標，進而將面積相關的線性測量活動和乘法的概念相連結，而轉化至面積公式意義的理解與運用。因此，接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「圖形與面積解題成就測驗」整體測驗上的表現，較

控制組學生為佳。

貳、接受不同文本教學處理後，實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗」分測驗上表現之比較

根據本研究的設計，「圖形與面積解題成就測驗（II）」的內涵分成「圖形辨識與表徵」、「相關要素測量」、「圖形重構」、「公式理解與運用」等四項分測驗能力，各項分測驗所得之平均數及標準差之統計結果如表 23 所示，從表中可知經過教學實驗後，兩組學生在各分測驗上的得分皆有進步，從誤差變異量 Levene 檢定的資料得知（表 26 所示）：

表 26 「圖形與面積解題成就測驗（II）」分測驗同質性假設考驗

分測驗名稱	組別	M	SD	Levene 檢定 F 值	顯著性
圖形辨識與表徵	實驗組	29.15	3.07	2.62	.112
	控制組	27.94	4.30		
面積相關要素測量	實驗組	13.15	2.23	8.12	.006*
	控制組	11.00	3.80		
面積圖形重構	實驗組	6.88	2.46	0.03	.805
	控制組	3.00	2.29		
面積公式理解與運用	實驗組	18.53	6.34	3.23	.077
	控制組	15.53	7.57		

* $P < .05$

除了「面積相關要素測量測驗」之統計量達到顯著（ $F_{(1,63)} = 8.12$ ， $P < .05$ ）外，「圖形辨識與表徵測驗」之統計量（ $F_{(1,63)} = 2.62$ ， $P > .05$ ）、「面積圖形重構測驗」之統計量（ $F_{(1,63)} = .03$ ， $P > .05$ ）、「面積公式理解與運用」之統計量（ $F_{(1,63)} = 3.23$ ， $P > .05$ ）均未達顯著。因此「面積相關要素測量」分測驗需進行平均數調整，餘三個分測驗可直接進行單變量共變數統計分析。

透過統計資料，將前測共變量的影響力排除後，分析接受不同文本教學實驗處理之學生在圖形與面積解題各分測驗能力表現之單變量共變數，其結果說明如下：

一、實驗組與控制組學生在「圖形辨識與表徵」分測驗表現之比較

(一) 結果分析

由表 27 得知：排除前測影響力後，單變量共變數之組間效果的考驗並未達顯著水準 ($F_{(1,63)} = 1.29, P > .05$)，表示不同的文本教學處理對學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」之「圖形辨識與表徵」分測驗表現的影響，並不顯著；亦即接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生與接受「一般文本」教學的控制組學生在「圖形辨識與表徵」的表現上並無差異存在。因此，本研究之假設 1-2 未獲支持。

表 27 實驗組與控制組學生在「圖形辨識與表徵」分測驗表現之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方和	F 檢定	顯著性
組間 (組別)	1	13.11	1.29	.26
組內 (誤差)	63	10.14		
總和	64	23.25		

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「圖形辨識與表徵」分測驗上的表現，與接受「一般文本」教學的控制組學生成績相較，並無顯著差異存在。
- (2) 究其原因，在於圖形的辨識與表徵活動學生需經歷感覺、知覺與辨識三個階段 (Payne & Wenger, 1998)，並將環境

中的刺激轉化為神經反應，進而在腦中形成外部信息的代碼 (code)，接著從完整的感覺形象或圖形中提取不同的特徵和要素，並發現其關聯，並對知覺的事件予以分類或賦予意義。由於本研究設計的「面積概念轉化文本」與「一般文本」皆視「圖形辨識與表徵」活動為面積概念學習的基礎，因此將之納入課程內涵與教學重點中，兩組學生在此方面皆能獲得基本的知識與技能，因此無顯著差異存在。另一方面，「圖形辨識與表徵」對於實驗組學生與控制組學生幾何概念層次的發展，大致上屬於 Van Hiele(1987) 理論的第一階段「視覺期」與第二階段「分析期」的層次，要學好此階段相關活動內涵的概念與技巧，對五年級學生而言並不困難，因此兩組學生在此分測驗的表現上，平均分數並無差異 (實驗組 29.15，控制組 27.94)，且均達精熟層次 (分測驗總分為 30 分)，所以，兩組學生的表現，並無差異存在。

二、實驗組與控制組學生在「面積相關要素測量」分測驗表現之比較

(一) 結果分析

由表 28 得知：排除前測影響力後，單變量共變數之組間效果的考驗達到顯著水準 ($F_{(1,63)} = 7.23, P < .01$)，表示不同的文本教學處理會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」之「面積相關要素測量」分測驗的表現，亦即接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制學生在「面積相關要素測量」的表現為佳，因

此，本研究之假設 1-3 獲得支持。

表 28 實驗組與控制組學生在「面積相關要素測量」分測驗表現
之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方和	F 檢定	顯著性
組間 (組別)	1	66.08	7.23	.009**
組內 (誤差)	63	9.14		
總和	64	75.22		

** $P < .01$

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「面積相關要素測量」分測驗上的表現，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生成績為佳。
- (2) 究其原因，在於本研究設計之「面積概念轉化文本」教學具有 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 所提出面積概念學習成功的重要建議：將空間結構的排列作為公式習得的中間媒介，並將線性測量的知識和技巧視為是面積概念轉化的基礎作業，並透過方瓦排列覆蓋將空間結構和乘法概念連結，進而推論公式而解決問題。這些要點是本研究「面積概念轉化文本」學習內涵所強調的，較「一般文本」教學更加重視，因此經學習後，實驗組學生在「相關要素測量」分測驗的表現，就較控制組為佳。

三、實驗組與控制組學生在「圖形重構策略」分測驗表現之比較

(一) 結果分析

由表 29 得知：排除前測之影響力後，單變量共變數之組間效果的考驗達到顯著水準 ($F_{(1,63)} = 42.91, P < .001$)，表示不同的文本教學處理會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」之「面積圖形重構」分測驗的表現，亦即接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積圖形重構」的表現上為佳，因此，本研究之假設 1-4 獲得支持。

表 29 實驗組與控制組學生在「面積圖形重構」分測驗表現之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方和	F 檢定	顯著性
組間 (組別)	1	189.44	42.91	.000***
組內 (誤差)	63	4.40		
總和	64	193.84		

*** $P < .001$

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「面積圖形重構」分測驗上的表現，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生成績為佳。
- (2) 究其原因，在於實驗組學生經由本研究設計之「面積概念轉化文本」教學後，產生與 Kordaki (2003) 利用電腦軟體研究學生「等積異形」概念發現的結果一致，因為實驗組學生經過教學歷程中圖形之分割移補技巧的教導與練習後，具備了可逆性和轉化與概念保留間的關係，進而理解面積測量概念與乘法結構間的關聯。所以，實驗組學生在

「面積圖形重構」分測驗的表現就較控制組學生為佳。

四、實驗組與控制組學生在「面積公式推理與運用」分測驗表現之比較

(一) 結果分析

由表 30 得知：排除前測之影響力後，單變量共變數之組間效果的考驗達到顯著水準 ($F_{(1,63)} = 7.78, P < .01$)，表示不同的文本教學會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」之「面積公式理解與運用」分測驗上的表現，且有顯著差異存在；亦即接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積公式理解與運用」的表現上為佳，因此，本研究之假設 1-5 獲得支持。

表 30 實驗組與控制組學生在「面積公式理解與運用」分測驗表現之共變數分析摘要表

變異來源	自由度	均方和	F 檢定	顯著性
組間 (組別)	1	378.86	7.78	.007**
組內 (誤差)	63	35.85		
總和	64	414.71		

** $P < .01$

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「面積公式理解與運用」分測驗上的表現，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生成績為佳。
- (2) 究其原因，在於實驗組學生經由本研究設計之「面積概念轉化文本」後，理解到面積單位量與測量時使用單位來作為表現面積量之必要性 (譚寧君, 1998; 1999)。因為單位

量的轉化是推理關係的基礎，可加強對面積公式的瞭解，避免將公式的記憶流於形式而忽略了題意的重要性。實驗組學生透過面積排列覆蓋的操作，對於線性測量與空間結構關係理解更加透徹，因此在「面積公式理解與運用」分測驗的表現就較控制組學生為佳。

第二節 面積概念轉化文本教學效果保留之分析比較

本研究針對學生在「圖形與面積解題成就測驗」上之資料，進行統計分析，考驗其面積概念保留情形。首先，將實驗組與控制組學生教學實驗前在「圖形與面積解題成就測驗（I）」前測的得分，和教學實驗後在「圖形與面積解題成就測驗（II）」後測的得分視為共變量，經排除共變量的影響後，利用單因子單變量共變數分析考驗假設二，以探討教學實驗產生的面積概念保留效果及比較兩組之間的差異情形；接著，依序比較兩組學生在「圖形辨識與表徵」、「相關要素測量」、「圖形重構策略」、「公式理解與運用」等分測驗上概念保留差異的情形。

本研究之教學實驗於 2004 年 1 月 5 日結束，間隔十週後，隨即在 2004 年 3 月中旬實施「圖形與面積解題成就測驗（I）」，以瞭解面積概念教學成效的保留情形。茲根據統計資料分述如下：

壹、接受不同文本教學後，實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗（I）」的整體表現上概念保留之比較

首先進行組內迴歸係數同質性假設的考驗，結果如表 31 所示。

表 31 「圖形與面積解題成就測驗 (I)」同質性假設考驗

組別	M (延宕測)	SD	Levene 檢定 F 值	顯著性
實驗組	66.12	11.25	1.30	.719
控制組	55.06	11.65		

由表 31 得知：Levene 統計量未達到顯著 ($F=1.30$)，表示這兩組樣本的離散情形並未具有明顯的差別，可直接進行單因子共變數的考驗，由表 32 統計資料分析結果發現，迴歸模式之變異數分析，受試者間效應的檢定值可知以全模式去預測依變項達顯著， $R^2=.186$ ($F=4.69$ ， $P<.05$) 顯示模式具有解釋力。

(一) 結果分析

經排除前、後測影響後，單變量共變數考驗的結果如表 32 所示：

表 32 實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」

的整體表現上概念保留共變數分析表

變異來源	自由度	均方和	F 值	顯著水準
組間 (組別)	1	1057.48	7.90	.007**
組內 (誤差)	63	133.85		
總和	64	1191.33		

$R^2=.186$ (調整後的 $R^2=.146$)

** $P<.01$

從表 32 中發現組間效果的考驗達到顯著 ($F_{(1,63)}=7.90$ ， $P<.01$)，表示不同文本教學會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」延宕測驗的表現，亦即接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗」整體的概念保留效果較佳，因此，本研究假設 2-1 獲得支持。

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「圖形與面積解題成就測驗」整體測驗上的概念保留效果，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生為佳。
- (2) 究其原因，在於本研究設計的「面積概念轉化文本」教學提供了學生「圖形辨識與表徵」歷程中視覺特徵與整體融合的能力 (Clements et al., 1999)，學生經由視覺化、表徵化、轉化及類化等機制，依據認知發展順序，習得幾何與圖形之基礎概念；並透過方瓦排列覆蓋技巧之操弄 (Battista & Clements, 1996)，從線性維度的測量發現圖形長寬與單位量大小的關係，進而正確計算面積大小；甚至透過活動歷程中圖形比對、「等積異形」概念之探索，推理及理解面積公式之意義，並應用解決日常生活困難。因為一連串操弄活動的進行，其精神符合 Clements (1992) 與 Fuys (1988) 等人強調提升學童幾何概念發展文本設計所應具備的要件，學童透過這樣理念的教學，不僅可以提升其幾何概念的層次，甚且可以增進其概念保留的效果，因此，接受「概念轉化文本」教學的實驗組學生，其在面積概念保留上，顯然的較控制組學生佳。

貳、接受不同文本教學處理後，實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗」分測驗表現上概念保留之比較

茲將受試學生在「圖形辨識與表徵」、「面積相關要素測量」、「面積圖形重構策略」與「面積公式理解與運用」等分測驗成績進行單變量共

變數分析，從誤差變異量的 Levene 檢定的資料（如表 33）得知：除了「面積相關要素測量測驗」之統計量 ($F_{(1,63)} = 5.67, P < .05$) 達到顯著外，「圖形辨識與表徵測驗」之統計量 ($F_{(1,63)} = .51, P > .05$)、「面積圖形重構測驗」之統計量 ($F_{(1,63)} = 1.51, P > .05$)、「面積公式理解與運用」之統計量 ($F_{(1,63)} = .11, P > .05$) 均未達顯著。因此，除「面積相關要素測量」分測驗，需進行平均數調整外，其餘三個分測驗可直接進行統計分析。

經由統計資料，將前測共變量的影響力排除後，分析接受不同文本教學實驗處理之學生在圖形與面積解題各分測驗概念保留之單變量共變數，其結果說明如下：

表 33 「圖形與面積解題成就測驗 (I)」分測驗同質性假設考驗

分測驗名稱	組別	M	SD	Levene 檢定 F 值	顯著性
圖形辨識與表徵	實驗組	25.00	4.24	0.51	.477
	控制組	21.50	4.30		
面積相關要素測量	實驗組	11.59	1.96	5.67	.020*
	控制組	10.69	2.86		
面積圖形重構	實驗組	8.74	3.04	1.51	.223
	控制組	5.94	2.59		
面積公式理解與運用	實驗組	20.28	5.05	0.11	.739
	控制組	16.94	5.32		

* $P < .05$

一、實驗組與控制組學生在「圖形辨識與表徵」分測驗概念保留之比較

(一) 結果分析

由表 34 得知：排除前、後測共變量之影響力後，組間效果的考驗達到顯著水準 ($F_{(1,63)} = 8.30, P < .01$)，表示不同的文本教學會影響學生

在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」之「圖形辨識與表徵」概念保留的表現，且有顯著差異存在；接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生之概念保留較佳，因此，本研究假設 2-2 獲得支持。

表 34 實驗組與控制組學生在「圖形辨識與表徵」分測驗上
概念保留共變數分析表

變異來源	自由度	均方和	F 值	顯著水準
組間 (組別)	1	165.94	8.30	.005**
組內 (誤差)	63	20.00		
總和	64	185.94		

**P<.01

(二) 討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「圖形辨識與表徵」分測驗上的概念保留效果，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生為佳。
- (2) 圖形辨識與表徵能力的發展需經歷感覺、知覺與辨識的階段，此方面之技巧與能力，參與教學實驗之學生皆已具備，此結果與 Quinn, Burke 和 Rush (1993) 的研究發現是一致的。然實驗組學生在此層面上概念保留之效果優於控制組的學生，究其原因，在於本研究設計的「面積概念轉化文本」提供良好之型態辨識的條件，包含了用基礎的刺激特徵去辨識物體，採用「視覺探究作業」與「紋理分割作業」的設計，要求學生從圖形中辨識並區分其種類，甚且採用「完形組織法則」助益圖形辨識與表徵的功能，在圖

像和背景上提供視覺歷程較高的法則基礎，讓學生充分理解圖形區別要素間的關係（Goldstein, 1984）並能將這些辨識的原則運用至其它情境，做有效的線索搜尋及技巧的遷移，減少訊息處理上的認知負荷，釋放出多餘的學習資源空間。因此，透過這些認知基礎能力的教導與訓練，實驗組學生在「圖形辨識與表徵」概念保留上的效果就較控制組學生為佳。

二、實驗組與控制組學生在「面積相關要素測量」分測驗上概念保留之比較

（一）結果分析

由表 35 得知：排除前、後測共變量之影響力後，組間效果的考驗未達顯著水準 ($F_{(1,63)} = .76, P > .05$)，表示不同的文本教學對學生在「圖形與面積解題成就測驗(II)」之「面積相關要素測量」概念保留的表現，無顯著差異存在；接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生與接受「一般文本」教學的控制組學生概念保留的表現並無差異存在，因此，本研究假設 2-3，未獲支持。

表 35 實驗組與控制組學生在「面積相關要素測量」分測驗上
概念保留共變數分析表

變異來源	自由度	均方和	F 值	顯著水準
組間 (組別)	1	4.38	.76	.386
組內 (誤差)	63	5.76		
總和	64	10.14		

（二）討論

- (1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「相關要素測量」分測驗上的概念保留效果，與接受「一般文本」教學的控制組學生相較，並無顯著差異存在。
- (2) 究其原因，在於參與教學實驗之學生，經歷了「概念轉化文本」及「一般文本」教導後，在長度測量的認知發展階段上皆具備了維度以及向量間關係的知識與技能 (Case, 1992)。「相關要素測量」的能力與技巧，在幾何概念的發展方面，亦屬於 Van Hiele 理論中的第一階段「視覺期」與第二階段「分析期」的層次，經由教導訓練後，大部分學生即能正確應用，達到精熟境界，由測驗成績(實驗組 11.59 分，控制組 10.69 分，分測驗總分為 16 分)，可見兩組學生皆能達到三分之二以上的正確率。答題錯誤之處在於實際應用時，兩組學生在周長與面積概念上仍會相互混淆，以致影響此層面表現不佳，此結果與陳光勳 (2003)、林碧貞和蔡文煥 (2003) 等人研究的發現是一致的。這個因素也使兩組學生在「相關要素測量」的概念保留效果上，並無顯著差異存在。

三、實驗組與控制組學生在「面積圖形重構」分測驗上概念保留之比較

(一) 結果分析

由表 36 得知：排除前、後測共變量之影響力後，組間效果的考驗達到顯著水準 ($F_{(1,63)} = 10.28, P < .01$)，表示不同的文本教學會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」之「面積圖形重構」概念保留的表

現，且有顯著差異存在；亦即接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生概念保留的表現為佳，因此，本研究假設 2-4 獲得支持。

表 36 實驗組與控制組學生在「面積圖形重構」分測驗上
概念保留共變數分析表

變異來源	自由度	均方和	F 值	顯著水準
組間 (組別)	1	84.38	10.28	.002**
組內 (誤差)	63	8.21		
總和	64	92.59		

**P<.01

(二) 討論

(1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「面積圖形重構」分測驗上的概念保留效果，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生為佳。

(2) 究其原因，在於本研究設計之「面積概念轉化文本」提供學生面積保留概念的思考，且將它視為是面積測量的先決條件，反映在 Hiebert (1981) 與 Rahim 和 Sawada (1990) 等人強調的：學生需透過分割、移補、黏貼圖形部分形狀，重構一新的、但具有等積異形的圖形，連結感官—動作行為，加強此概念的建立。因此，實驗組學生在「面積圖形重構」概念保留上的效果就較控制組學生為佳。

四、實驗組與控制組學生在「面積公式理解與運用」分測驗概念保留之比較

(一) 結果分析

由表 37 得知：排除前、後測共變量之影響力後，組間效果的考驗達到顯著 ($F_{(1,63)} = 8.73, P < .05$)，表示不同的文本教學會影響學生在「圖形與面積解題成就測驗 (II)」之「面積公式理解與運用」概念保留的表現，且有顯著差異存在；接受面積「概念轉化文本」教學的學生較接受「一般文本」教學的學生概念保留的表現為佳，因此，本研究假設 2-5 獲得支持。

表 37 實驗組與控制組學生在「面積公式理解與運用」分測驗上
概念保留共變數分析表

變異來源	自由度	均方和	F 值	顯著水準
組間 (組別)	1	238.94	8.73	.004**
組內 (誤差)	63	27.38		
總和	64	266.32		

** $P < .01$

(二) 討論

(1) 接受「面積概念轉化文本」教學之實驗組學生在「面積公式理解與運用」分測驗上的概念保留效果，顯著的較接受「一般文本」教學的控制組學生為佳。

(2) 究其原因，在於本研究之「面積概念轉化文本」係依據 Pirie 與 Kieren (1992a;1992b;1994) 提出之「數學概念動態理解模式」設計而成，文本的內涵融入了學生學習幾何歷程中對圖形知覺、形成心像，最後從比對、測量中發現模式等相關的機制，包含初步了解、心像塑造及心像具備、形式化、結構化以至創造等概念理解與轉化的活動，透過研

究者加以組合統整後，設計成「面積概念轉化文本」進行教學，因文本具有上述概念轉化之特性與優點，因此，實驗組學生在「面積公式理解與運用」概念保留上的效果就較控制組學生為佳。

第三節 實驗組學生面積解題策略與方法之分析比較

為瞭解實驗組學生經過概念「轉化文本教學」實驗後，其面積解題策略與方法的表現是否與教學前呈現出顯著的差異，除了透過以上二節量化資料之比較分析外，本研究尚透過實驗組學生接受「概念轉化文本」教學歷程中之對話與作業資料（附錄八），配合「圖形與面積解題訪談與實作」的結果（附錄九、附錄十）加以分析。在分析的歷程，除透過與教學實驗之班級導師討論整理與歸類錄影（音）帶、作業與日記的內容外，另徵詢指導教授意見，以加強學生作業資料分析的效度。茲將學生在「圖形辨識與表徵策略」、「面積排列覆蓋策略」、「圖形重構策略」與「公式理解與運用策略」四項解題能力分為「教學前之表現」與「教學後之概念轉化」兩個面向加以說明如下：

壹、「圖形辨識與表徵」方面

一、圖形辨識

（一）概念轉化文本教學前之表現

1. 圖形與面積「初步了解」概念紛雜、先備知識不足

教學實驗前，研究者與實驗教學班級的導師王老師進行訪談，向其詢問該班學童有關面積概念發展起點行為與基本知識狀況，得知學童在

圖形與幾何空間能力方面，已經具備矩形圖形相關要素的概念，例如「長」和「寬」和矩形面積公式之間的關係，且可透過「長 \times 寬」計算矩形的面積大小，但是對於三角形和特殊四邊形相關要素與面積公式之間關係的概念，大部分的學童尚未建立，但有部分學童經校外補習的機會，已能背誦各種圖式之面積公式口訣。除此之外，全體學生皆會利用相似性類比物體特徵之方式，將具有共同屬性之日常生活事物加以分組、歸類，並與不同特徵之事物進行區分。

研究者首先提供「一堆」具有可分辨特徵屬性之圖形（如圖 18 所示），這堆圖形分別有 8 個不同特徵的三角形和四邊形，學生可依其經驗與幾何概念發展的能力，將三角形或四邊形圖形的角度或邊長做為辨識分類的依據，進行三角形與四邊形相關圖形家族的歸類。以三角形為例，學生依邊長可將 為視正（等邊）三角形； 與 為等腰三角形，

為三角形；或是依角度單方面作辨識分類，或是整合角度與邊長特徵，要求依其圖形家族之特性進行分門別類作業，以便從中了解學生對圖形要素相關定義概念知識的背景。研究發現，學生面對多樣圖式呈現在眼前時，會藉由圖形之外在顏色、形狀大小，作為分類依據。由於這些分類行為大多屬於單一層面圖形特性的辨識，忽略了圖形其它結構組合重要的影響要素，致使分類的組型因重要屬性的遺漏而產生錯誤，或是產生過於簡易的模式。

雖然學生具備「分類」之知識與類型，多樣且與生活經驗有關，但在幾何概念發展的層次上，許多學生仍受到圖形特徵「視覺化」的影響，無法抽離並統整圖形內在或多重的屬性進行精細的分類。

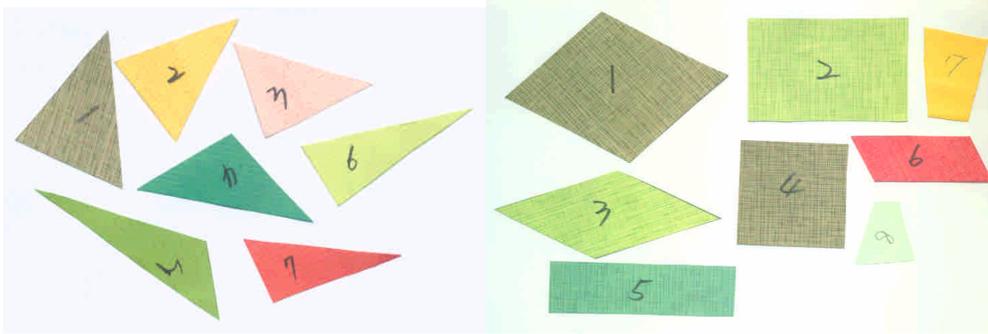


圖 18 學生圖形辨識活動所用之三角形與四邊形圖形

T：小朋友都看過許多的圖形，老師現在將講義第一頁的圖片放在一起，分給每一組的同學，請你們將這些圖形仔細的看看，它們有幾個邊呢？有幾個角呢？圖形形狀怎樣？你們要如何分類呢？為何你們要這麼分類？是什麼原因呢？

文儒：顏色為什麼都不一樣？（廢話！）

T：老師給提示，第一個你們會分成幾類？其次，這一類的圖形有什麼特徵？為什麼你會這麼分類，理由是什麼？

立祈：我會將它分成四類，第一類是 7 和 8，第二類是 2 和 5，第三類是 1、3 和 6 號，第四類是 4 號。

T：好！請你們將分成這四類的理由說出來。

立祈：第一類都是梯形，第二類是長方形，第三類稱為菱形，第四類是正方形。

T：嗯！立祈這組利用圖形形狀的特徵將他分為四類，小朋友同意他們分類的方法嗎？（同意！）有沒有和他們不同的分法呢？

立安：我們將 6、7 和 8 歸於第一類，2 號和 5 號為第二類，第三類為 1 和 3 號，第四類為 4 號！

T：喔！他們分類的方式和剛才那組很像，只是第一類增加了 6 號，第三類少了 6 號，他們將剛才那組第三類的 6 號歸類為第一類，是什麼原因呢？請你們說說看？

立安：我們認為 6 是梯形，所以應該歸在第一類。

T：很好！他們認為 6 號圖形是梯形，有沒有有同意他們的分類方式（沒有！）既然沒有，可能這個圖形不是屬於這一類別，那有沒有人願意再提供你們分類的方式和我們大家一起分享。

立翔：我們將它分為 6 類，第一類為 2、3，第二類為 1、4，第三類為 8，第四類為 7，第五類為 5，第六類為 6（紅色），2 和 3 號為綠色。

T：你們認為用顏色來分好不好，跟老師分類的標準有關嗎？（很好！），

但分的組別會不會太多了，有沒有組數較少的！

立濬：我們也是分成四類，第一類將 1、4 放在一起，第二類將 2、5 放在一起，第三類 3、6 放在一起，第四類將 7、8 放在一起。

T：為何你們會將它分成這幾類？

立濬：因為 1、4 都是菱形；2、5 為長方形；3、6 為平行四邊形（喔！和前面幾組不同，產生新的圖形名稱）；7、8 為梯形（大家同意他的分法嗎？）

T：小朋友好聰明喔！會用形狀、顏色等特徵來分類，還有沒有其它的分法呢？

文惠：我們分成兩類，第一類有 1、2、3、4、5，第二類有 7 和 8（少了一個 6，好 6 是第一類的），因為第一類每個圖形都有兩雙對邊平行，所以是平行四邊形；7、8 只有一雙對邊平行，所以歸在第二類。〔5-6 上課錄音 2003.10.15.01〕

從教室對話的資料可以發現，學生對於複雜多樣圖形的分類活動，會依靠圖形特徵「視覺化」的作用，進行圖形的辨識與分類，這雖是學習面積概念初步的能力，但因個人或小組對圖形「視覺化」獲得訊息的解釋與認定不同，或是背景資訊的干擾，而產生不同的分類模式，這在三角形分類及辨識活動中，常可見到；另一方面，學童會利用先前學習活動中對於圖形命名相關定義所牽涉的要素性質作為辨識的依據，但所認知圖形之屬性特質與命名系統產生混淆，亦是造成分類系統紛雜的原因。

立翔：我們將他分成兩類：第一類有 2、3、4、5、6，另一類是 1、7；因為第二類的三角形圖形都有畫格子，其它的沒有畫，所以可以分成 2 類。

T：他用圖形裡有沒有畫格子的方式來分類，是利用其視覺所看到的效果來分類，可能受到老師使用材料的誤導，但這種分法也可以，還有沒有其它分法

立安：我們也分成 3 類，第一類有 3 和 6，第二類有 5 和 7，第三類有 1、2、4，第一類因為都有直角（嗯，第 6 號沒有直角……）

T：嗯，有同學認為 6 號沒有直角，你有沒有用量角器量過（有），好，沒關係，請繼續，

文羽：我們也是分為三類，第一類是 1、2 號和 4 號，第二類是 3，第三類

是 6、7，第一類是等腰三角形，第二類是直角三角形，第三類是鈍角三角形。

T：那什麼樣的三角形才能稱為等腰三角形呢？

文羽：三角形的兩邊相等，而且角度都小於 90 度，上面和下面的兩個角都小於 90 度的三角形稱為等腰三角形，三角形有一個角等於 90 度的稱為直角三角形，三角形的角有一個大於 90 度稱為鈍角三角形。

T：三角形有幾個角（3 個），其中有一個角大於 90 度，我們就稱他為鈍角三角形。有一個是 90 度，就稱為直角三角形，等腰的兩邊和底邊所形成的角稱為夾角，當這兩個夾角相等的時候，就成為等腰三角形。剛才文羽分類時所賦予的名稱，老師覺得有點亂，為什麼？等腰三角形這個名詞是以什麼的特徵為主（邊……），而直角和鈍角是以什麼特徵為主（角…），文羽將三角形的邊與角的特徵混在一起來分類，似乎有點亂，這個方法好嗎？提示大家可否將圖形用角和邊分開來分類。〔5-6 上課錄音 2003.10.17.02〕

2. 抽離及整合圖形面積整體要素之能力薄弱

對於圖形要能正確的予以分類，需藉助視覺化將相關之要素予以抽離，加以整合，以代表某圖形之特徵，才能將相似的圖形組合歸類，不同類的圖形予以分別區隔。本研究發現，實驗組學生對於呈現的圖形欲加以分類，會以單一層面圖形的要素作為比對的基礎，像是只考慮圖形之對邊是否平行、垂直？角度是否有所差異等，甚少可以同時將圖形的重要相關要素予以組合、統整為一關係結構。因此表達之圖形定義常缺少某些重要特性，致使無法整合圖形相關重要屬性，而無法正確的將圖形分類。

T：好，我們就針對小朋友用形狀特徵的方式分類來討論，這裡有菱形、平行四邊形、長方形、正方形、梯形等形狀的圖形，這些分法並沒有對錯之分，但這些圖形都有某些特徵可以加以區別。哪些圖形是屬於正方形呢？

文霖：2 和 10 號！

T：你們同意他的說法嗎？（不同意）為什麼不同意，有誰可以解釋理由？

文惠：因為 2 號是長方形，他的上下一樣長，左右一樣長，但四邊不一樣長。

T：正方形有哪些重要的特性可以辨識呢？

文惠：四邊的數字都一樣（長度吧！），好！有人幫他修正，四邊都一樣長的圖形稱為正方形，大家同意嗎？（同意！）

T：哪些屬於長方形呢？（2 和 5）為什麼？

立廷：一個邊較長而另一邊較短！

T：喔！一邊較長一邊較短的圖形稱為長方形，好！那老師在黑板上就畫出你說的特徵（黑板畫圖，同學大笑），你的說法並不清楚，哪位同學可以幫他補充的！

立濬：應該說上下平行、左右平行的圖形就稱為長方形，老師在黑板上根據其提出的特徵畫出兩雙對邊平行的圖（同學哈哈大笑），那麼你說的特徵也不夠清楚，有哪位可以幫我們說清楚的？

立祈：有二雙對邊平行的圖形就稱為長方形（老師又在黑板上畫出圖形，同學又哈哈大笑）。

T：好再給立翔一次機會，請說，

立翔：圖形裡有一些角是直角，稱為長方形。

T：有直角的圖形稱為長方形，那這樣有直角的圖形是否稱為長方形（在黑板上畫圖，同學大笑），嗯，還是解釋的不好，老師給你們提示：能不能將直角，平行和相等的邊湊在一起來做解釋。

文羽：有兩雙平行的線，而對角線是直角。

T：喔！對角線是直角，請你再說明清楚一點！

文羽：想一下，應該有兩雙平行的線，然後在裡面畫一條對角線（對角線這樣畫嗎，全班大笑）不是，應該上面……

文惠：上下長度一樣，兩邊的長度又不一樣！

T：大家覺得聽不懂，那給大家在討論一下，如何將平行、等長與直角等特徵結合在一起，用一段通順的話來形容長方形。大家好好討論想一想。（三分鐘後）

文宇：圖形上下的邊一樣長，但和左右兩邊不一樣長，但左右兩邊的長度是一樣的，然後有 4 個角都是直角，而兩雙對邊都平行。〔5-6 上課記錄 2003.10.15.01〕

3. 數學概念表達語意不清楚

由於欠缺抽離圖形重要要素能力，以及對圖形定義概念不完整，當研究者要求實驗組學生在圖形辨識的活動中敘述其對圖形特性的說明，

此時則出現混淆、不完整的概念，尤其對日常生活中較少看到的圖形，這需透過與先前經驗的圖形作比較推理，才能抽離出代表圖形其重要的屬性，也才能擴充對其它圖形概念的認知。

立安：四個邊都平行的圖形叫做平行四邊形（老師將其說明在黑板上畫出圖形，同學大笑）嗯……………

T：你的說明好像不是很清楚，有沒有人可以補充！

文惠：應該說是對邊平行，而且有直角。（嗯，沒有直角，只有平行就可以了）

T：要不要有直角呢（不要），再想想看！喔，只要有兩雙對邊平行的四邊形圖形就稱為平行四邊形，那麼長方形是否是平行四邊形。

立翔：是，因為他有兩雙對邊平行，所以是平行四邊形的一種。

文霖：對邊平行？

T：這是什麼圖形呢？〈菱形〉它有何特徵呢？

立宏：四個邊一樣長，而上下兩個角是鈍角？（喔，鈍角？）

T：這個圖形比較特殊，小朋友較不常見，但老師提示你們可以和正方形作比較，找出不同之處。

文宇：和正方形很相似，只是正方形的每個內角是直角，菱形卻沒有，但對角線會垂直平分，對角線是兩個對角平分連起來的線。

T：說的很好，正方形是菱形的一種。那什麼叫梯形呢？

立濬：有一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形就稱做梯形。〔5-6 上課記錄 2003. 10. 15. 01〕

（二）教學後概念之轉化

經由「概念轉化文本」統整設計的模式，以及教學歷程中教師採取刺激、誘導及肯定的策略，激發學生學習動機，進而提升學生學習成就。教學完後，實驗組學生接受研究者調查訪問，以了解其學習面積概念轉化的情形。有關「圖形辨識與表徵」作業資料的分析，係以學生在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」中第一、二、三題表現的結果作為分析的依據。第一題要求學生敘述日常生活中與矩形、平行四邊形、三角形和梯形等相似圖形特徵的物件；第二題，則先布置問題情境，引導學生

依據情境的條件操弄，要求學生在幾何釘板上表徵出具有相同面積大小的各類圖形；第三題則呈現面積相等、形狀不同之矩形、平行四邊形、等腰直角三角形與等腰梯形等具有「等積異形」結構之木板，要求學生思考，利用各種方法進行比對，以發現何種圖形的面積較大。透過訪談資料的分析，研究者發現：

1. 圖形要素的表徵能與生活物件配對

研究者要求實驗組學生依據其學習過的圖形特徵，思索生活情境中可與其要素配對的事物，受訪學生皆能依照各類圖形要素特徵的要求表述各類生活實例，並將這些實例予以正確的分類（如表 38 所示）。

表 38 與各類圖形相似的生活實物範例表徵

(1) 與三角形有關的實物範例
<p>立祥：像三角板， 嗯…從遠遠的看著山也會像三角形</p> <p>立濬：三明治、三角版 (2)</p> <p>文儒：三角形喔?屋頂上面的那一塊、有點像帆船那樣的帽子</p> <p>立彰：三角飯糰</p> <p>文婷：三角形…沙漏的那個…三角形的巧克力。</p> <p>立宏：那個鉛筆的筆頭，這個是三角形嗎?</p> <p>文羽：嗯~三角形的東西好像很少。</p> <p>文霖：呃…三角形…切過的披薩、鼻子、蓮霧、風鈴!</p> <p>文維：衣架、聖誕樹! [訪談資料 2004. 01. 14S, 2004. 01. 15S]</p>
(2) 與矩形相關的實物範例
<p>立祥：在休閒的時候都會玩的遊戲王卡，那種遊戲王卡。</p> <p>文霖：呃…正方形還有什麼呢?電腦!</p> <p>立濬：電視、土司、時鐘!</p> <p>文儒：黑板、桌面、床鋪、玻璃!</p> <p>立彰：桌子、窗戶!</p> <p>文婷：;就是…春聯…很像菱形的那種春聯。</p> <p>立宏：那邊的洗手臺是矩形! [訪談資料 2004. 01. 14S, 2004. 01. 15S]</p>
(3) 與梯形或平行四邊形相關的實物範例
<p>立祥：這個是比較少見，就是在我爸爸車上就是坐上去椅子上面有一個踏板，是梯形的!</p> <p>文婷：溜滑梯的側面像梯形哦!還有就是…一層一層疊起來，然後人家跑過去然後這樣子壓過去，然後跳過去的那種(跳箱)。</p> <p>立宏：梯形的話…某一些紀念盃它也是做成梯形的，還有一些大樓啊，它也是做成梯形的!</p> <p>立宏：平行四邊形的…我好像沒看過，嗯…可能平行四邊形這種特質比較奇怪的形狀日常生活中少見! [訪談資料 2004. 01. 14S, 2004. 01. 15S]</p>

本研究也發現，學生舉例描述的範例種類和數量的多寡、以及圖形特徵的相似程度，和學生生活經驗所接觸的事物廣度和想像力有關，呈現出多樣不同的面向。由訪談得知，學生已經具備各類圖形特徵的心像表徵，因此對各實物的辨識，能透過相關圖形的要素加以比對，將其所表述的實物加以分組、歸類。學生對於日常生活實物的辨識及分類，舉出的範例以與「矩形」相關之範例數量最多，其次為「三角形」，而和「平行四邊形」與「梯形」圖形相關的實物較少。這種差異除了受到學生接觸事物經驗的影響之外，也和學生幾何概念認知能力的發展有關。

2. 透過教師適當協助，學生可正確描繪數學概念語意

本研究亦發現，受訪學生可以利用圖形相關特徵作為辨識各種生活中實物範例的基礎，並依此加以分類，然而要讓學童利用口語表達或詮釋圖形要素相關的特徵實屬不易，需經由教師的詰問、誘導後，配合循序漸進「同構」要素比對操作的方式，鼓勵其發表，才可展現出其對圖形特徵的看法。以文瀾為例，由於矩形的圖形要素具有顯著、易於比對的相似特徵，如有四個直角、兩雙平行的對邊、垂直，他知道從圖形各邊的長短，可判別是否為正方形，從外觀就能加以判斷，而能與其它圖形區別分類，但要求其將正方形與長方形的特徵完整的表達是有困難的。以下為訪談內容：

T：想一想，有三個角你把它稱做三角形，那三個邊可不可以稱做三角形呢？

文瀾：可以！

T：那什麼情形下三個邊才能稱做三角形？

文瀾：正三角形，三個邊都一樣！

T：三個邊一樣稱做正三角形！

文瀾：對！

T：只有正三角形是三角形而已是不是？
文濬：沒有，還有等腰三角形！
T：還有等腰三角形！好！除了三角形以外，你想一想在日常生活中有哪些東西可以稱做正方形的！
文濬：正方形…土司！
T：土司，不錯還有呢？
文濬：電視、土司、時鐘！
T：時鐘，不錯！想到那麼多東西，那你爲什把它們歸類成正方形呢？
文濬：因爲…它們四個角都是直角！
T：對！都是直角，還有呢？
文濬：正方形的邊有一些都一樣長！
T：邊都一樣長，你指的是什麼邊，哪一個邊呢？
文濬：…
T：四個邊嗎？
文濬：對！
T：四個邊都一樣長？
文濬：對！
T：四個角都是直角？
文濬：對！
T：你認爲這是正方形的特徵，哪想想還有沒有其他的呢？
文濬：…都是正的，沒有歪的！
T：都是正的，什麼叫做都是正的，要解釋清楚！
文濬：就是沒有歪掉，它的角都是直角！
T：沒有歪掉的，就是正的，好！那想一想有什麼東西像長方形？
文濬：長方形…袋子！
T：書本、盒子，那你爲什麼把這些東西歸類爲長方形呢？
文濬：因爲它們有兩雙對邊！
T：有兩雙對邊，然後呢？
文濬：然後…比較長！
T：什麼叫比較長？
文濬：上面的邊和下面的邊比左右的邊還要長！
T：不錯！還有沒有其他條件呢？
文濬：……
T：你是剛從邊的角度來想，那如果用角度來想呢？它有幾個角？
文濬：4 個！
T：那這 4 個角有什麼特徵？
文濬：都是直角！
T：都是直角，跟和正方形有沒有一樣？

文濬：有！〔訪談資料 2004.01.14S〕

相同的，三角形圖形的要素也具有其特殊性，有三個邊、三個角，三個頂點，從外觀也很容易就可區別，經由教學後，只要熟記其特徵名稱，也容易表達。較困難的是梯形圖形，梯形圖形屬於一種複合圖形，具有的要素特徵雖較為複雜，但學生藉由教師適時的提示，進行圖形外部的觀察，亦能發現其具有四邊形的特徵，像是有四個邊、四個頂點，且有一雙對邊平行，對此圖形要素加以詮釋，且能用語言將概念溝通連結。

T：都是直角，好！那你想想看有沒有看過哪些東西像梯形？

文濬：山！

T：山像梯形，還有沒有呢？

文濬：沒有！

T：沒有，那梯子呢？

文濬：對！

T：那山跟梯子爲什你當梯形來看呢？

文濬：因爲，它們兩旁的邊都向外發展！

T：都向外發展，然後呢？

文濬：然後……

T：它兩旁的邊都向外發展，那有沒有上面的邊和下面的邊？

文濬：有！

T：那上面的邊叫？

文濬：上底，下面的邊叫下底！

T：對那上底和下底有沒有什麼樣的特徵？

文濬：互相垂直！

T：兩個會互相垂直，上底和下底會互相垂直？

文濬：對！

T：確定是垂直，什麼叫垂直！

文濬：互相……

T：互相怎樣？

文濬：互相平行！

T：互相平行，那還有沒有其他特徵呢？梯形有幾個邊？

文濬：4個！

T：你能否將梯形的特徵在說明一下？

文瀟：有一雙對邊平行，另一雙對邊會向外延伸的四邊形。〔訪談資料 2004.01.14S〕

Payne 和 Wenger (1998) 對於型態辨識的主張，認為知覺系統對於圖形所要面對的第一項工作是如何將視覺的場域進行分割，或是藉由圖形的外觀，將不同的形狀進行區分，但是區分的活動只是將之聚合當成某些相似的物體來辨識而已。要將物件精細的歸類，尚需配合一些物體的屬性，像是長度、外觀曲直等，才能達成。從學生的訪談及實作的資料發現，學生對於圖形要素的辨識已具有基本之能力，這些能力包含 Clements 等人 (1999) 所言的視覺特徵層次與整體融合兩項要素抽離的發展，因此能透過圖形的整體輪廓進行辨認，學習詞彙，促進圖像表徵的傳達。

從學生圖形辨識活動的表現，亦發現如張英傑、謝貞秀 (2003) 研究所發現的結果，認為三角形一定是兩個邊一樣長，三角形的比例相差太大，就不是三角形；正方形一定是正正方方的，斜放就變成菱形，忽略了直角的特徵。唯表現這些現象者只是少數，經過教師指示說明後皆能改變概念。

3. 能抽離重要要素、整合後定義圖形概念

當研究者要求實驗組之受訪者如何描述圖形的特徵時，受訪者除了針對該圖形的外觀特徵像是邊是否平行或垂直，角度的大小加以描述說明外，尚可舉出代表該圖形特徵之實例，且能同時將該圖形所具有的要素抽離整合加以說明，以精確的數學語言描述該圖形的定義。

T：那為什麼你稱一些事物為三角形呢？

立祈：因為它..因為三角形有很多種三角形，然後那個..它的形狀跟三角..就是跟三角形外表跟就是外面的形狀跟三角形一樣外圍。

T:那三角形有什麼特徵呢?爲什麼你稱它爲三角形?

立祈:因爲它有三個角、三個邊、三個頂點。

T:有斜邊就一定是梯形嗎?你確定?

立祈:邊還要密合!

T:好,那梯形的定義就只有這些嗎?

立祈:它所有的角,它的角都要比..它有一些比直角大,有一些角比直角還小。

T:有些角比直角還大,有一些角比直角還小,這個就代表梯形,你認爲這樣子,再想想看還有沒有其它的特徵呢?你能不能用手畫出來,你覺得梯形是什麼樣子,它有什麼特徵呢?

立祈:有四個角。

T:有四個角,那四邊形有沒有四個角?有,那梯形是不是四邊形?

立祈:是!

T:是,那正方形也有四個角,那梯形是不是正方形?

S:不是!

立祈:梯形就是它的角就是比較那個...有些比正方形的那個,正方形的角是直角,梯形的角有些可能是90度以上,那個角度90度以上或是以下。

文字:梯形的上底和下底平行,側邊不平行的四邊形。〔訪談資料 2004.01.15M〕

二、圖形表徵

(一) 概念轉化文本教學前之表現

1. 不懂得在平面圖形上畫出「高」

研究者除了利用圖形的分類活動瞭解學生圖形概念發展的情況外,尚藉由描繪「高」之位置,探究學生對於圖形面積相關要素認知程度。當要求學生在既定條件的圖形畫出「高」的位置,由於學生不知「高」的定義及其與圖形面積的關係,因此研究者透過圖形比對的方式,藉由面積一樣的平行四邊形與長方形疊合比較,幫助其瞭解高與圖形面積的關係,以及長方形「寬」與平行四邊形「高」的意義,並理解高和底具有垂直、且在兩底之間的概念,這個策略對於理解平行四邊形和梯形等具有平行底邊的圖形而言是個良好的策略,但要學生將之遷移到三角形

高的表徵，則出現了困難。學生認為在三角形的圖形中，只要與「底」成「垂直」這樣條件的線段，都能稱為「高」（如圖 19），以致於作業上可以發現許多錯誤之處。

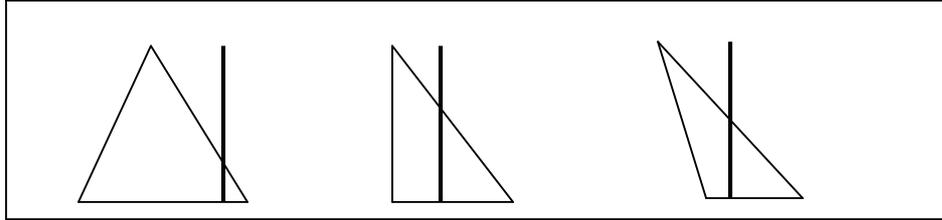


圖 19 「高」空間位置的錯誤概念

（粗黑線代表三角形的高）

T：長方形的面積在四年級就學過了，剛才文字介紹了三角形面積的公式是底乘以高除以 2，但是很多小朋友不知道三角形的高在哪裡？黑板上是三角形與長方形的重疊圖形，那長方形的高在哪裡？

文惠：長方形的高是他的左右兩邊，上下叫長，長方形沒有高，應該稱做寬。

T：當三角形和長方形疊起來時，和長一樣的叫什麼（底），高在哪裡呢？

立濬：到前面指圖形（這是底）……再把它倒過來就是高。

文惠：和底垂直的那邊就是高！（指著高！）

T：大家看看這條高除了和底邊垂直外，還有沒有其他的特徵？

S：嗯……沈默不語，

T：指著圖形，高除了和底邊垂直外，也會和底邊相對的這個角相交接（有沒有看到），所以小朋友要畫出三角形的高，可以從這個角（稱為頂角）畫一條和指定的底邊垂直的線，這條線就稱為高，等下大家可以試試看。〔5-6 上課錄音 2003.10.22.03〕

2. 幾何概念遷移能力有限

當要求學生對給予的作業圖形指定的邊上，描繪出「高」，除了受限於「高」和「底」相對關係的理解外，也因為一些具有「特殊條件」圖形與先前認知經驗不同之故，認為與原初所學之典型圖形有所差異而影

響幾何概念遷移作業的表現，這些困惑事後透過教師引導及適當的介入，慢慢予以澄清和修正，而擴展其幾何概念的發展。

T：我們現在請同學上台畫出平行四邊形的高，這個圖形的高在圖形內嗎？
（沒有）爲什麼沒有呢？

文羽：因爲它太斜了，

T：什麼叫做太斜了？能不能解釋一下！

文羽：你看它的底短短的，而且又離那麼遠，畫出的高就跑到外面了！（指著圖）

T：說的很好，雖然高跑到圖形外面，但和底邊有沒有垂直（有！）怎麼知道的？

文宇：可以把底邊延伸，會發現它們是垂直的。

T：很好，但有些小朋友高的位置畫錯的，有誰可以告訴他原因？

立宏：他們把底的位置搞錯了，那不是底，這個才是。

立濬：高畫的太長了，它只能在底和底之間！

文羽：有的人高和底邊並沒有垂直。

T：小朋友已經將缺點指出來了，若要畫出高，首先需要了解指定的底邊在哪裡？第二，高和底要垂直而且不能超過圖形中兩底的距離，但是三角形的高如何才能正確畫出呢？

立翔：三角形的高好難畫喔！

T：爲什麼？

立翔：它只有一個底邊，畫出的直線無法通過頂點。

T：畫出的高沒有通過頂點，你認爲那不是高？

文羽：老師三角形的高一定要在圖形內嗎？

T：這個問題問的好，跟平行四邊形的高一定要在圖形內一樣的問題，你們想一定要在裡面嗎？

文宇：也可以在外面，像這樣的圖形高就在外面。（拿出畫好的三角形圖形）

T：嗯：有人幫我們解決了一個問題，但老師這裡還有另外的問題，三角形的高只能畫一條嗎？

立廷：我認爲有很多條！

T：怎麼說呢？

立廷：我不知道……………〔5-6 上課紀錄 2003. 10. 24. 04〕

（二）教學後概念之轉化

1. 迅速成功表徵圖形的形狀

概念轉化文本教學後，研究者藉由釘板的操弄，以瞭解學生對於各類圖形的認識情況。因此布題後，即指示學生藉由橡皮圈的操弄呈現所欲表徵的圖形。由於學生已經理解構成圖形的要素關係，且能將各類圖式形成心像，加以比對運用，因此能夠很快、正確地表徵出指定的圖式。

拿出橡皮圈，不假思索即圍成一個正方形，因為這圖形兩邊一樣長，另外兩邊也一樣，而且四個角都是直角，接著將長方形右下邊往外拉，左上邊往外拉，形成一平行四邊形；然後取下橡皮圈，固定釘板一點，往左及往上拉，即刻形成三角形圖形；在取下橡皮圈，雙手張開將橡皮圈拉開一段距離套在釘子上，同時兩邊往下、往外張開，即成一梯形，對圖形表徵非常的快。〔立元實作記錄 2004. 01. 15. M〕

2. 圖形表徵策略呈現多元化

接著，要求學生表徵出指定面積大小的各類圖式，這些指定圖形不僅牽涉到圖式的心像，其面積的概念也與其底和高的大小關係有關，學生要能正確的表徵出規定的圖式，需要衡量圖像與要素間的關係，因此透過此操作可以理解學生先前教學概念的保留及轉化。經由學生在幾何釘板橡皮圈建構圖形表徵的資料屬性加以分析，可以將學生各類圖形表徵的表現歸類分為（1）探索型，（2）以點為基準向外擴張型，（3）以線段為基準向外擴張型，（4）直觀型，（5）計畫型等五種類型，茲將各類型的特徵與重點詳述如下：

（1）探索型

屬於此類型操作模式的學生（如文儒實作紀錄），當拿到橡皮圈時，雖具有圖形的心像表徵，但不知該從幾何釘板何處著手進行圖形的構

築，因而顯出遲遲無法下手、猶豫不決的神態；或是嘗試動手在幾何釘板上構築出圖形，但無法立即符合題意的要求，或與要求圖式的條件差距太大，因此會一而再，再而三的反覆修改圖形，直至合乎指定的要求為止；對於圖形大小是否與指定的要求相符，學生會利用點數幾何釘板方格數目的策略，以驗證所構築的圖形是否符合指定條件的要求；當發現不一致時，此表徵類型的學生會將完成的圖形全部解構，重新再構築，然後再點數幾何釘板上方格數目，證實是否符合；若不符合，有的則會不斷持續的進行圖形擴張或縮減的動作，同時摻插點數方格數目的方式，直至正確為止。

從訪談的資料發現，學生會產生此類表徵模式的主要原因，在於缺乏幾何釘板相關技巧練習與操弄的經驗，學生雖有圖形的心像，但表達技術拙劣，這經教師指導後，即能改正，且正確率隨之提升。

拿出橡皮圈後，即刻在釘板中間圍出一矩形，發現不妥，將橡皮圈拆掉，重新再圍成一平行四邊形，覺得面積太小了，再拆掉，重新圍成另一正方形，將正方形左下邊往外拉一格，右下邊往外拉一格，形成了梯形，覺得不是平行四邊形，再將上面左右各拉一格，形成另一正方形，猶豫呆住片刻，教師示範如何圍出平行四邊形後，自己再操作一次，即可正確的構築出指定面積大小的圖形。完成後，將橡皮圈拆掉，再將橡皮圈找一位置，套上一釘子後，往下拉，形成一個本壘壘包的形狀，調整橡皮圈的位置，形成了一個三角形；完成後，再拆掉，將橡皮圈套在幾個釘子後，拉出一條直線後，再往下擴張，即將梯形拉出。先用手指點數出 12 格，拿出橡皮圈在右邊拉出一矩形，但不夠，又拿出另一條橡皮圈接在下面，但只有 11 格，手指再點數一次，拿出另一條橡皮圈在原矩形旁匡出另一小矩形，發現整個圖形不像矩形，把下面的兩條橡皮圈拆掉，發現不行，再將原橡皮圈拆下，用手指再點數比畫一下，然後在幾何釘板上部圍出一個長六格，寬一格的矩形，在拿出另一條橡皮圈，空一格處圍出另一全等的矩形，發現兩個矩形是分開的，猶豫片刻，教師示範，再重新操弄一次；拿出橡皮圈後，即匡出一多邊形圖形，即用手指點數，但被指明不是平行四邊形後，

重新匡成矩形，在一個一個點數，發現太大，將圖形調整後成為平行四邊形，完整的幾何釘板方格有 10 個，不完整的有 2 個，不完整的兩個可以組成一個完整的格子，左邊一個完整的，右邊也有一個，總共是 12 個。作業完成後，將原圖形拆掉，再拿出橡皮圈後即匡出一三角形圖形，用手點數一番，發現太少，固定上面的頂點後，將三角形底邊往下、往外擴張，再用手指點數，發現太少，再重數一次，真的太少，將三角形再往下拉，匡出較大的三角形後，再點數，總共是 12 格。將橡皮圈固定梯形上底後往下拉出完整的圖形，直覺太小，再往下擴張，然後用手指點數，發現太多了，再將梯形圖形兩邊縮減，再用手指點數，完整的有 9 格，不完整的 6 格，所以總共有 12 格。〔文儒實作紀錄 2004.01.14M〕

(2) 以點為基準向外擴張型

圖 20 以點為基準向外擴張型的釘板操作

採取此類型策略的學生，係以橡皮圈圈繞三角形圖形最為常見，學生會以幾何釘板上的一點作為基礎，套上橡皮圈後，利用手指力量往下擴張，俟覺得與指定圖形大小相近時，即鬆開手，調整圖形成三角形後，再用點數方格的方式，先將圖形內完整的方格數目數出，再處理不完整的方格，然後將兩者方格數目合併，檢驗是否正確（立廷實作記錄，如圖 20）。

拿起橡皮圈，尋找釘板上合適之位置，然後將橡皮圈套上一釘子後，用手將橡皮圈往下拉形成一三角形圖形，眼睛觀察圈繞的範圍是否與指定的面積大小相近，估計相近後，手鬆掉，形成一三角形圖形，再用點數方式，先數出完整之方格數，再將不完整之方格，兩個一數，形成一完整方格，再予整合。發現與指定之方格數不符，會將圖形下半部的橡皮圈往上往下調整，直到所圈繞的範圍與指定之方格數相同。〔立廷實作紀錄 1 2003.01.15M〕

由於圈繞後的三角形圖形可能包含了完整與不完整的方格數，影響了受試者是否會利用點數方式計算面積大小。當圍成的圖形是直角三角形時，一些學生（如文霖）是利用圈繞成矩形的圖形方式，先用

手指畫出範圍（理解正方形可切成兩全等之三角形，每個三角形面積是其一半），再予以切割一半，然後正確的圈出三角形來，這並不需採取點數方格的方式。有的利用兩個相等的直角三角形合成等腰三角形的方式，而圈出指定面積的圖形，因為他利用矩形「等積異形」的概念，將圖形切割移補成等腰三角形。

(3) 以線段為基準向外擴張型

圖 21 以線段為基準向外擴張型的釘板操作

此類型的特徵，最常出現在構築平行四邊形與梯形等四邊形圖形的作業表現上。學生會先將橡皮圈套在幾個釘子上，連成一直線後，再依指定之圖示擴張至接近規定面積大小之範圍，再進行點數幾何釘板上的方格，若與指定之格數不符，則進行修正。修正時可同時並用手眼掃瞄數數、或手指點數、或視覺默數，直至目標完成；若要進行其它圖形的操弄，則會以「矩形」為前置結構，稍加移動圖形的頂點、邊長，即可構成相同面積但不同形狀之圖形（立濬實作記錄，如圖 21）。

與前述以點為基準向外擴張類型相似之處，在於這兩種解題策略，都是學童形成或具備圖形心像後，同時將幾何釘板方格點數與構築指定圖像的動作相結合，逐步達成目標，這種行為儼然是種目標導向的作為。學生在作業歷程中會伴隨著計畫，與後設監控等高層次認知行為，經幾次嘗試後，就可完成指定之作業。

拿出橡皮圈後，在幾何釘板左下角，將橡皮圈拉開兩格後，用左手壓住，再將橡皮圈往右拉了 7 格後，用手指由左上往右下一格一格點數，發現太多了，將右邊往內移一格，但橡皮圈脫落，又重新操弄，再由左上往右下點數，少了 2 格，將身體傾斜，將右邊往外移一格，馬上說出 12，上面有 6 個，左邊有 2 個，6 乘以 2 等於 12 個。又拿出另外一條橡皮圈，但

並未操弄，先用眼睛對著幾何板觀察，然後用右手移動點數，將橡皮圈斜套在剛才的矩形上，不行，移到矩形外，橡皮圈脫落，用右手指比劃計算，再將橡皮圈張開斜放在矩形上，又拿下來，繼續觀察，用手指比劃（平行四邊形和矩形有何關係）放掉手上的橡皮圈，將幾何釘板上的矩形右上之頂點往右移一格，左下之頂點往左移一格，這是平行四邊形，也是 12 格，因為這邊突出的部分不完整，可以和這邊合起來，兩個合成一格。將平行四邊形的橡皮圈取下，圍成一個倒三角形，準備點數，手鬆掉，圖形成為一個像本壘壘包的圖形，發現後，重新調整，再用手點數，停頓、用眼睛觀察，先數半格，總共是 12 格，從中間切開來，移過去可以形成一個矩形，拿出紅色橡皮圈，圍成一矩形驗證，長有 4 格，寬有 3 格，所以是 12 格。拿出橡皮圈後，馬上圍成一倒立的梯形（上底長下底短），再用手點數完整的格數，將左邊這裡切割後移到這裡也是矩形，算起來總共是 12 塊。〔立濠 實作記錄 2004. 01. 14M〕

（4）直觀型

此類型的特徵，在於學生已具備各類圖形之心像表徵，以及圖形面積大小精確的量感，所以能立即地將橡皮圈構築成指定的圖形，或用眼睛掃描檢視，或是點數方式，即刻檢驗出面積所佔據空間的幾何釘板方格數目（文霖實作記錄，如圖 22）。當要構築其它圖形時，除了依靠其對圖形的敏感知覺外，會以矩形為前置結構，透過重構策略及「等積異形」的概念，改變圖形相關要素，而變化成另外的圖形。這種以「等積異形」概念作為圖形轉化的機制，可省略重複點數幾何釘板方格的程序，因此是圖形轉化較為順利的模式。

圖 22 直觀方式的釘板操作

將橡皮圈放在左下角手一撐開就形成了矩形，完成後，立即取下，然後在幾何釘板左下角往右上方處，構成一斜邊，往右拉開圍成平行四邊形，再取下，固定幾何釘板上某點當成三角形之頂點，然後往下張開，形成一直立的等腰三角形，再將三角形之頂點往外張開就形成了梯形。先用手指點數，馬上圍成 3x2 之矩形，直覺太小，擴大圖形成 3x3 之正方形，手指

點數矩形內之格數，發現不對又往上張開成 4×3 的矩形，一列有 3 格，總共有四列，所以有 12 個，將矩形圖形右上角的邊往右移一格，左下角的邊往左移一格，就形成 12 格的平行四邊形，因為這多出的部分可以移到另一邊，剛好與矩形一樣。用眼睛找出一面積為 $6 \times 4 = 24$ 格的矩形範圍，直接將橡皮圈套在上底的一點就形成了一三角形，因為從矩形裡面所形成的三角形都是矩形面積的一半；三角形圖形不變，再將三角形頂點上的橡皮圈往外移成兩格，看一看，則將上底往下移一格，形成一上底為 2 格，下底為 6 格，高為三格之梯形，好像太小了，用手點數，馬上說出是 12 格，因為從中間切，把一塊倒過來，接上去就等於矩形。〔文霖實作紀錄 2004.01.14M〕

(5) 計畫型

圖 23 計畫方式的釘板操作

此類型表現的特徵，在於解題過程中，學生會計畫採用某種合適之圖形，當成「參考體」，再依此「參考體」進行圖形的調整。這些採用的參考體或許與欲構築的圖形具有相似的特徵，或可經由重構後，形成「等積異形」的結構。採用此類型作業的學生會以矩形為前置結構，配合圖形之分割、移補策略為手段，構築出指定面積之各種圖形。使用此種類型操弄解題的學生，對於如何得知圖形所佔空間範圍的大小，會採用圖形概念化的公式，抽離相關的要素，像高和底的關係，點數出其長度所佔的單位量後，進行計算（立元實作記錄，如圖 23）。

拿出橡皮圈圍成一個正方形，因為這兩邊一樣，另外兩邊也一樣，而且四個角都是直角，接著將矩形右下邊往外拉，左上邊往外拉，形成一平行四邊形；然後取下橡皮圈，固定釘板一點，往左及往上拉，即刻形成三角形圖形；在取下橡皮圈，雙手張開將橡皮圈拉開一段距離套在釘子上，同時兩邊往下、往外張開，即成一梯形，對圖形表徵非常的快。眼睛看著釘板移動，然後將橡皮圈套在左邊的四根釘子上（有 3 格）上下平行的往右邊拉四格，接著，固定形成長方形，這裡有 3 格，上面 4 格， $3 \times 4 = 12$ ；將原矩形圖形左下角往外拉，右上角往外拉，形成平行四邊形；看著平行四邊形，思考一下，解釋：將圖形這邊凸出來的一到這邊就跟剛才的矩形

一樣。取下橡皮圈，看著釘板，然後先套四格成一條直線，再往下數四格後，形成一直角三角形，用手指點數，發現面積大小不對，再將三角形直角的兩邊往外拉，各成爲 5 格，重數，不對，將下邊縮減一格，上邊往外再拉一格，是 12 格，因爲 $6 \times 4 = 24$ ，還要再除以 2，所以是 12 格；再來，將橡皮圈先套成一個上面是 4 格，下面是 6 格，高是 2 格的梯形，直覺面積太小，將下底往外拉 2 格，用點數方式，是 12 格。[立元實作紀錄 2004.01.15M]

從學生幾何釘板作業呈現的認知發展加以分析，影響其表現成功的因素有三：一為學生是否具備操弄橡皮圈構築幾何釘板圖形的經驗，若具有操弄的經驗，可協助學生提升構築圖形嘗試的信心，從實作歷程中，只有文霖曾經接觸過幾何釘板的操作，觀察其構築圖形的動作，就顯得純熟迅速，其它同學因為無此經驗，就顯得處處小心謹慎，唯恐出錯；二是構築指定圖形所使用的策略，這些策略除受到圖形的心像表徵影響之外，尚關係到圖形佔據空間大小的評估，通常三角形圖形的構築，學生會以點為起始，四邊形圖形則會以線段為起始，這都是受到圖形特徵的影響；三角形圖形與方格的特徵不同，較難估算出其所佔據之方格多少，所以較其它四邊形圖形難達到指定面積的要求；第三個影響因素，則是後設監控的能力，解題者是否能統合相關線索，且能堅持耐心、毅力，集中注意利用有效的策略檢驗其作業，那麼較易達成目標。從實作訪談歷程中，像立元他會先行思索，考量如何進行圖形圍繞的活動，並利用手指點數、眼睛注視的方式，協助圖形順利且正確的構築出來。

學生進行幾何釘板構築圖形的作業，在練習初期，受制於技巧的熟悉與運用，因此，可能採取按步就班、嘗試錯誤的程序進行摸索、解題，俟經幾次練習之後，能夠操控手指，掌握住技巧後，則會配合圖形構築的策略，像是以點或是線段為基準向外擴張，進而朝向指定圖形的目標

前進；最後藉由經驗的累積，則會將圖像表徵、空間結構與監控能力結合，透過「共構」或是「等積異形」結構的轉變，順利的完成作業。這樣的表現與 Reynolds 和 Wheatley (1996) 所認為「做」排列結構心智影響五個階段（階段 0 至階段四）的特徵行為相似，亦與 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 覆蓋策略的發展有異曲同工之處。這些解題能力的發展是有層次之分的（如圖 24 所示），在第一層次，學生的表現宛如不完全的圈套一般，在於透過嘗試錯誤精練圖形構築的技巧，或是利用釘板之方格背景加以視覺化擴張至所要求之圖形大小，類似於覆蓋策略之階段 0 和階段一；第二層次，屬於基本圈套或是以單位量的建構進行圈套一般，配合心像進行圖形表徵，或是利用釘板之單位量進行測量後評估所欲構築之圖形大小，再進行圈繞；第三層次則統整了圖形構築策略與其空間的結構，經由測量或是圈套單位量的關係計算解決，正確地表徵出圖形形狀與面積大小，亦可透過多方嘗試後，建構了圖形之心像，因此可純熟的將圖式圈繞出來。

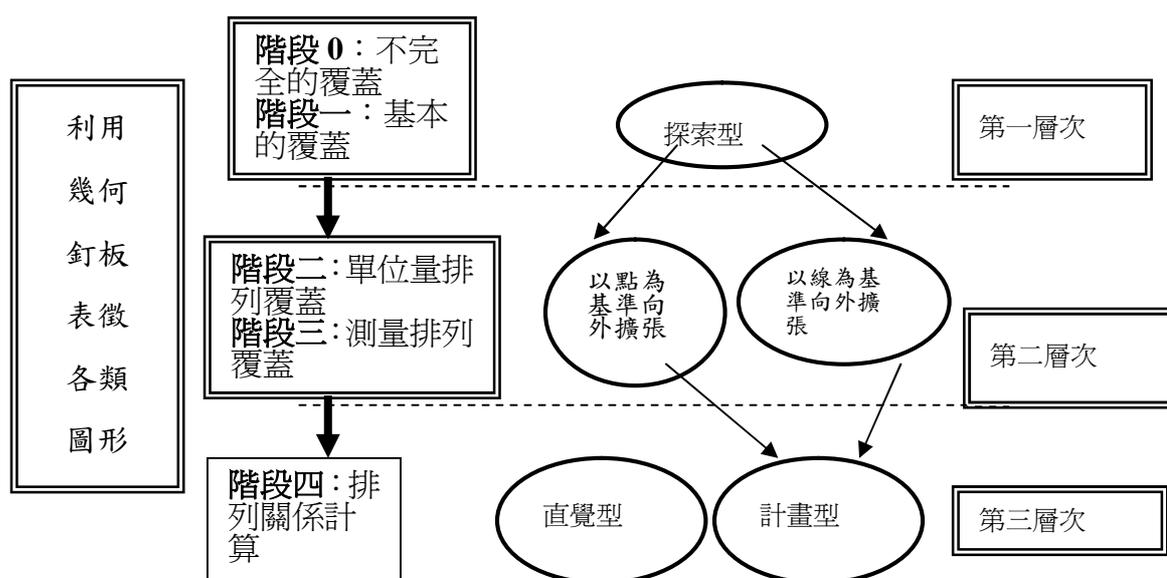


圖 24 幾何釘板構築圖形能力發展與方瓦排列覆蓋對照圖

另外，從學生利用幾何釘板圍繞指定面積之圖形作業表現分析，發現學生要驗證其所圍繞圖形所佔的空間大小，會採用三種策略，第一種策略是點數圖形所圍繞幾何釘板內的點，以為此代表圖形的面積，但隨後馬上修正（如文儒作業表現），而採用第二種策略，即點數圖形所圍繞的幾何釘板的方格，在此方式上又分為兩種不同的方式（及）：是先點數完整的方格數目，再將不完整的兩個方格合為一個完整的，隨後再予以統合；則採取圖形分割宜補的方式，重構為符合幾何釘板方格所能覆蓋的圖形，像是矩形，而再加以點數計算或用乘法結構計算得知。從作業的分析，很明顯的發現，這兩種策略都是利用視覺處理空間資訊的方式，透過方格的特性，統整出圖形空間結構的大小。由於大部分的學生已經理解「單位量方格」所代表的意義，所以能理解線段所封閉的範圍，即是圖形的面積這樣的概念。

最後，第三種策略，則先將圖形面積概念化公式相關的底或高，點數出其符應的單位量刻度後，利用公式計算出其面積的大小，這種策略的使用，將圖形面積經由視覺的點數轉化為運用抽象代數方式解決面積大小的問題。這些利用幾何釘板的方格估算圖形面積大小的策略，與第二章文獻探討有關幾何釘板面積估算所呈現的研究資料是一致的。

三、圖形比對

為了增進面積解題能力與策略的發展，以先前長方形圖形與其面積計算公式為「前置結構」的圖形比對活動，是有其必要性。因為這樣活動的操弄可以幫助學生進行估量，培養「量感」外，還牽涉兩項能力的培養。一為分割移補策略的使用，以發現「等積異形」的意義；另一則

可藉由比對，明瞭面積公式的推演。因此，對於學生圖形比對操作能力發展的瞭解，亦是面積概念發展重要的前提。

(一) 概念轉化文本教學前之表現

1. 採取直接測量方式進行比較圖形大小

當呈現不同形狀、面積相同的圖形讓學生進行大小的比較，學生除了會以長方形圖形做為比對的「前置結構」外，雖也會利用先前「百格板」單位量計數工具使用的經驗進行面積大小比對，唯針對此種工具的使用，學生在計算面積的大小只能採取點數的方式進行，若因視覺誤差，則會造成計數錯誤，對於解題而言雖較為直接，但效果會因圖形之變化而產生不同之效用。

T：延續上次上課內容，三角形的面積和長方形那個大呢？你會利用什麼方法來比對（將圖卡發放給小朋友操弄）？讓大家討論一下，可以利用各種方法？（老師可不可以剪呢？）

立宏：首先將三角形有直角的一邊對準長方形下面的長，然後將三角形的另一邊對準長方形的寬，再將多出的部分剪下，移到空下的部分，剛好和長方形一樣大，所以它的面積一樣。

T：大家同意他的說法嗎（同意）好，這是以長方形為比較的基礎，再將三角形與他比較，面積是否重疊一致，那麼就能知道那個圖形面積較大，除了這種方法之外，是否還有其他的方法呢？

立濬：利用平方公分版，將三角形與長方形都覆蓋在他上面，得到長方形是 24 格又多一半，而三角形是 25 格，所以三角形較大，

T：大家同意他的說法嗎？（不同意）

文惠：剛才立宏量了兩次這兩個圖形的面積都一樣，應該是立濬量錯了。

T：立濬測量的過程可能有些偏差，但他利用平方公分版來比較兩個圖形的方法也不錯，我們也給他掌聲鼓勵。

立廷：我把三角形當比較的基礎，將長方形的長和三角形直角的底重疊，然後將長方形多出的部份剪掉，移到空的地方，他們的面積剛好重疊，所以三角形和長方形是一樣大的。〔5-6 上課記錄 2003. 10. 29. 05〕

(二) 教學後概念之轉化

1. 使用分割宜補等策略作圖形大小比對

經過概念轉化文本教學後，呈現學生比對的問題，大部分受訪學生會利用其在教學過程中使用的分割移補策略，進行圖形面積大小的比對，而比對的基礎單位則以長方形做為「前置結構」，從視覺的搜尋，學生發現可以固定長方形的長或寬，以此為基準，將其它圖形與之疊合，很容易的就能進行分割移補策略的運用，進而比較出圖形面積的大小。

直接拿起三角形從中間切割後移到這邊可以變成一個長方形，比較好量，發現有長方形積木，將三角形積木疊上去，直角邊對應，把三角形多餘的補到這邊可以變成一個長方形，他們面積一樣，接著將平行四邊形疊放在長方形上，底邊與角和長方形底邊及角重疊，他們面積也是一樣，這邊切下後移到這邊也變成長方形。（哪一個圖形面積大呢）猶豫了一下，看了三角形與平行四邊形，將他們放在一起，應該一樣大。再將梯形放在長方形上，這邊切掉補過去也是長方形，所以也是一樣大（一樣大嗎？）用尺量一量，一樣大，面積一樣大，但圖形形狀不同，稱為「等積異形」。〔立濬實作紀錄 2004.01.14R〕

2. 比對策略多元有效

本研究提供四種具有不同形狀、不同顏色，但有相同面積大小屬性的矩形、平行四邊形、三角形和梯形的木板（如圖 25 所示），要求學生利用其中某種形狀的物件作為比對的基準單位，鼓勵其利用分割移補或其他策略比較出圖形面積的大小。從作業的表現可將其比對的策略歸類為（1）不規則方式的比對，（2）以矩形要素為基準之重構比對，（3）以其它圖形要素為基準之重構比對，（4）要素測量進行比對等類型，茲將學生之解題策略呈現之特徵與重點分述如下：

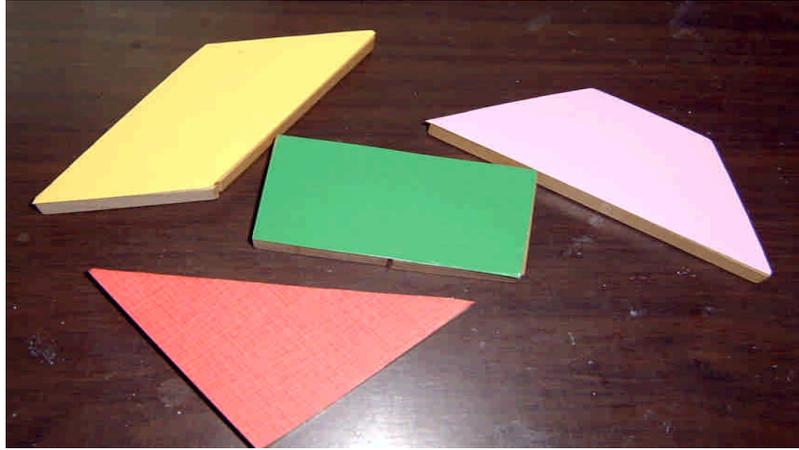


圖 25 比對作業之圖形

(1) 不規則方式比對

採取此類型進行比對的最主要的特徵，在於學生不知如何進行比對，而漫無目的嘗試探索；或是採用某方式進行比對，但比對時採用的物件要素不一致，或具有不同的特質；或是取圖形中共同的某一特徵，作為比對的要素，但忽略整體關係的考量。以文儒為例，拿出直尺作為測量的工具，她以各圖形中最長的邊作為比對的依據，認為圖形某邊的長度越長，其面積就會越大，將「邊長」取代「面積」的概念。產生這種現象的主要原因在於「面積」與「邊長」關係的混淆，面積公式雖是由底乘高兩要素乘積的關係結合而成，但非單一要素就能判斷出面積大小，需同時加以考量，才不致犯錯。

拿出尺後，先量出矩形的長，再分別量出另外圖形最長之邊，三角形量斜邊，梯形量下底，用這些最長的邊比較大小，邊長越大則圖形的面積越大；梯形和三角形底邊一樣大所以它們的面積一樣，平行四邊形和矩形的長邊也是一樣長，所以面積也一樣，前兩者面積較後兩者大。何謂面積？面積就是長乘以寬乘以高。〔文儒實作紀錄 2004. 01. 14R〕

(2) 以矩形要素為基礎之重構比對

採取此模式解題者的特徵，在於利用「矩形」圖形作為面積大小比較的基準，選取某共同的要素，依次將其它圖形與其重疊，再配合分割、移補的策略，將所有比較的圖形重構成與「矩形」相似結構的圖形，比較面積的大小（文維實作記錄，如圖 26）。若圖形移補後，其大小與矩形密合一致，則面積一樣；若有超出或不足之處，則較矩形為大或小，這是運用「直接測量」，以比較物體面積的方式。

圖 26 以矩形做為基準結構進行比對

直接拿起三角形從中間切割後移到這邊可以變成一個長方形，比較好量，發現有矩形積木，將三角形積木疊上去，直角邊對應，把三角形多餘的補到這邊，可以變成一個矩形，他們面積一樣，接著將平行四邊形疊放在矩形上，底邊與角和矩形底邊及角重疊，他們面積也是一樣，這邊切下後移到這邊也變成矩形。（哪一個圖形面積大呢）猶豫了一下，看了三角形與平行四邊形，將他們放在一起，應該一樣大。再將梯形放在矩形上，這邊切掉補過去也是矩形，所以也是一樣大（一樣大嗎？）用尺量一量，一樣大，面積一樣大，但圖形形狀不同，稱為「等積異形」。[文維實作紀錄 2004.01.14R]

(3) 以其他圖形要素為基礎之重構比對

採用此策略進行比對時，並非以矩形圖形為前置結構，可採用直角三角形、平行四邊形為基準，再將其它圖形與之重疊，經由切割移補與其圖形相似後，再進行比對（如立元實作記錄，圖 27）。

圖 27 以平行四邊形做為基準結構進行比對

拿起平行四邊形當成比較的基準，將矩形疊在其上，矩形突出比對圖形的部分，予以切割移到另一邊組合起來，發現和平行四邊形面積一樣大

小；再拿出等腰直角三角形為比對基準，將矩形圖形疊在其上，矩形突出比對圖形的部分，予以切割移到另一邊組合起來，發現和等腰直角三角形面積一樣大小；再將梯形疊在矩形上，梯形突出比對圖形的部分，予以切割移到另一邊組合起來，發現和矩形面積一樣大小；將過兩兩比對後，發現所有圖形面積都一樣。〔立元實作記錄 2004. 01. 15R〕

由 1 至 3 策略的說明，可以明瞭這些策略皆屬於採取直接測量的方式，以某物為基礎，依序與其比較，進而比對出圖形的大小，但其能否成功，受到視覺與圖形表徵的影響頗大；另外，仍須配合圖形重構的策略，理解等積異形的概念，才能判斷出圖形面積的大小。

(4) 要素測量進行比對

採取此解題策略者，亦採取直接測量的方式進行，只是與以矩形為基礎之重構比對策略不同之處，在於學生不以矩形面積為單位基礎，而採用直尺測量出與圖形面積公式相關的要素後，像梯形需測量出上底、下底及高的長度，再用公式分別計算出面積的大小，再進行比較（如立彰實作記錄，圖 28）。採用此策略之學生必須具備工具測量的能力與技巧，以及面積公式的理解和運用，才能順利解題。

圖 28 使用工具進行要素測量比對

拿出尺，先量矩形之寬（4）與長（8），然後相乘，面積是 32 平方公分；再用尺量出平行四邊形的底（8）和高（4），相乘之後面積也是 32 平方公分；再量直角三角形的底和高，各是 8，底乘以高再除以 2，所以面積也是 32，梯形上底是 4，下底 12，高是 4，上底加下底=16，乘以高再除以 2，所以面積也是 32 平方公分，這四塊圖形面積都相同。〔立彰 1 2004.01.15R〕

四、討論

(一) 圖形概念的提升，需藉由實物操作，才能構築完整的幾何架構

透過學生的「圖形辨識與表徵」測驗與圖形辨識、幾何釘板構築圖形表徵作業與比對資料的分析，發現五年級的學生在幾何概念的發展層次，大部分已達 Van Hiele 所言的層次一：「分析」的發展階段，其特徵為能夠透過要素和要素間的關係分析圖形，並能實驗而發現形狀的特徵和規則。雖然也有學童能夠建立要素之間的整體關係而進入層次二：非形式的演繹階段，但不太明瞭演繹的整體定義或公設的角色，獲得的具體結論往往是經由技巧的猜測而來，再經由形式的證明。若從提升幾何概念的層次而言，「操弄」及「練習」機會的提供與導引，應該是最好的策略。因為這種機會不僅可以幫助學生經由具體物的「視覺思考」辨識圖形的特徵，尚且可以透過比對與分類的行動，抽離出圖形相關的要素，進而發現有效的表徵策略。本研究提供的概念轉化文本教學，正可以提供操弄和練習的機會，因此經教學後，在測驗的表現上顯著的優於教學前，解題的技巧也呈現出多樣化。

(二) 生活經驗與教學目標的結合，可強化圖形型態的建構

Piaget 和 Inhelder (1976) 認為，空間物件的辨識與表徵的建構是經由孩子的動作和內化的行為逐漸組織而成的，但這並不只是針對空間環境做知覺性的閱讀而已，尚且包含了對環境中一些變項做積極的操弄，因此，學童空間物件視覺辨識與表徵的發展，是受到動作及知覺機

制的影響，而決定對圖形面積日後的成就表現。有關表徵與圖形構築動作的發展，是學生視覺與環境交互作用產生的結果。環境若提供的訊息越豐富，則學生與之互動的機會越多，圖形與空間的概念越容易建構與轉化。因此圖形與面積概念教材的設計，除了教學所提供之學習材料外，應該結合生活情境，提供學童運用與驗證之用。

(三)「完形法則」知覺組織，可有效導引圖形表徵的建構

從學生作業的表現，得知學生會透過要素之相似性、連續性等認知法則，抽離出圖形的相關要素，經由比對分析後形成圖形的特徵屬性的符碼，對物體進行分類組合。這些法則雖可以透過學生操弄獲得，但在有限之資源條件限制下，教師的引導與提示，對學生幾何概念的提升將更有效用。概念轉化文本重視教學策略的引導，透過教學，很明顯的發現成就表現較教學前佳。

貳、「方瓦排列覆蓋策略」方面

一、結果分析

(一) 概念轉化文本教學前之表現

1. 藉由重構圖形為矩形，以利方瓦直接排列覆蓋

將足量的單位量方瓦與所欲覆蓋之圖形呈現學生面前，要求其利用策略將圖形完全覆蓋。學生觀察方瓦與圖形特徵後，會尋找圖形與方瓦相同的特徵結構，將圖形想像成與方瓦具有相同或相似結構的圖形，然後依序進行排列覆蓋，直至完全覆蓋完畢，再用點數方式計算所需之單位量方瓦的數目，這樣的解題方式，主要受限於方瓦結構的影響，當所

欲覆蓋的圖形有斜邊或是非典型的特徵存在時，對於要將完整的方瓦排列覆蓋可謂是項難題，為了順利完成方瓦覆蓋圖形的作業，藉由重構圖形為矩形後，再進行方瓦直接覆蓋的策略，是教學前，學生最常使用的方法。

T：黑板上是講義裡的圖形，旁邊也放了一個小方瓦，你們可不可以利用這些小方瓦算出圖形的面積呢？這個圖形是什麼形狀呢？（平行四邊形）用方瓦要如何算出它的面積呢？大家討論一下！該如何解決這個問題？

文惠：先把平行四邊形斜邊的地方先移到右邊（指著圖形）變成長方形之後，再從其直角的部分一片一片的覆蓋（四邊都有直角），也可以從有直角的地方開始覆蓋（因為跟方瓦的直角一樣），若從斜邊開始就會有不完整的地方，所以要從直角開始。

立廷：斜邊的部分不完整，但可以將方瓦依照斜邊的大小剪掉然後覆蓋上去，再將他切掉移到右邊，這樣也可以數出到底有幾塊完整的方瓦。

T：若是不能用剪的，該如何處理呢？

立廷：可以將平行四邊形先想成長方形，將完整的方瓦鋪蓋上去後，在剪掉多出的部份，也可以算出需要多少方瓦？

T：若是此平行四邊形沒有畫出格子的話，哪怎麼知道哪裡有直角，可以將方瓦從那個地方開始覆蓋呢？

文惠：我可以利用尺先量平行四邊形以及方瓦的邊長，然後在底邊上一公分先點一點，再將上下底邊的點連起來，再用方瓦覆蓋上去。〔5-6 上課記錄 2003. 11. 19. 07〕

2. 以視覺類比要素，進行圖形覆蓋

在教學前，學生展現排列覆蓋的另一種能力，是將方瓦之一邊貼緊圖形上邊然後一個緊接一個依序進行排列，這種策略亦受限方瓦「直角」結構的影響，因為在操弄的過程中，學生已經發現方瓦要能連接，需直角邊與直角邊相連才有可能，否則當方瓦完全覆蓋住圖形時，要以完整的方瓦數量為單位進行點數時，將發生困難，因此學生會尋找或想像圖形中具有「直角」結構的空間位置，進行方瓦的排列覆蓋，對於圖形中

無法用完整方瓦覆蓋處，學生則會利用裁減的方式，將方瓦切割覆蓋，再點數所用之方瓦數量。

T：說的很好，前面幾個同學的說法都是將平行四邊形的圖形變成完整的長方形來進行覆蓋，但若要讓你們真正的進行，你們會從這裡開始覆蓋嗎（指著平行四邊形左下角突出的部分）？

S：不會（爲什麼？）嗯！應該從有直角的地方開始（但是看不到有直角的地方啊！）

立廷：將方瓦先從這裡開始放一塊（在黑板上操弄），然後再將另一塊和它靠在一起鋪上去，把這一排完全鋪滿後，再重下一排開始，依此類推。

T：嗯，你們很聰明，想了很多的方法來探討平行四邊形需用多少方法，現在老師要讓各位實際的操弄，如何將桌上的方瓦完全的覆蓋到平行四邊形的圖形上，（想一想，如何才能完整的拼出來？）

S：老師可不可以將方瓦剪成一半？（你可以試試看！）

S：老師這些方瓦好像不全都是一公分（對不起，有些有誤差，如果誤差太大的，就把它挑出來不要貼，你們都很細心，方瓦覆蓋得很精細喔！）

立廷：老師一定要完全覆蓋完嗎？我已經知道要用多少方瓦了，全部覆蓋完很麻煩勒！（你試試看，並且驗證你的算法！）〔5-6 上課記錄 2003.11.19.07〕

（二）教學後概念之轉化

1. 轉換成乘法結構協助覆蓋方瓦之計算

教學前，學生所具備的方瓦連續排列覆蓋技巧，與圖形重構策略，經歷概念轉化文本教學，理解圖形空間結構所需之方瓦數量，與方瓦大小和圖形行、列邊長有緊密關係，透過單位量的複製，結合測量技巧，無須將方瓦直接排列覆蓋在圖形上，即可藉由行、列的乘法結構，計算得出覆蓋圖形方瓦所需數量。

三角形覆蓋（單位量邊長爲主，利用乘法結構計算）

拿出方瓦，用尺量出邊長是 2，再用尺分別量出三角形的底和高各爲 8，想一想後，用 8 除以 2 等於 4，這邊有 4 塊，這邊也有 4 塊，畫出一正方形，這全部要 16 塊的方瓦，三角形是他的一半，所以用了 8 塊。

梯形覆蓋

將梯形倒立放在桌上，指著左邊部分用切割的方式移到這邊就成爲一個長方形，手指著切割的點，拿出尺，從一端量到此點是 8，將尺從底邊量到上面的邊，高是 2，這邊放 4 塊，高放 2 塊，所以放了 8 塊。〔立濬實作紀錄 2004. 01. 14R〕

2. 覆蓋策略呈現多元方式

有關教學後實驗組學生在「面積覆蓋排列」概念轉化資料的分析，係依據學生「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第四題的表現結果。此題的題目先呈現單位量方瓦、所欲覆蓋之圖形及測量工具於桌上，要求學生利用策略及方法計算出欲利用方瓦完全覆蓋住三角形和梯形時，需要多少數量的方瓦及其面積大小如何。從學生實作的紀錄，發現學生呈現出多元的方瓦排列覆蓋策略，這些策略能幫助學生順利正確的計算出覆蓋圖形所需方法數量。茲將其使用的策略歸納為：(1) 移補圖形排列覆蓋，(2) 直接排列覆蓋，(3) 單位量比對排列覆蓋，(4) 相關要素測量排列覆蓋等四類。茲將各策略之特徵分述如下：

(1) 移補圖形後測量排列覆蓋

採用此策略者，已具有抽離單位量方瓦與所覆蓋圖形相似的要素，因此可將方瓦依照序列一一覆蓋，對於非完整的部分，則會思考利用切割、移補的方式，予於整合成與矩形相似的結構，以便方瓦可完整的覆蓋，因此，可用點數測量方式將所排列覆蓋之完整方瓦與不完整方瓦的數量加以整合（文維實作紀錄，如圖 29）。

圖 29 移補圖形後測量排列覆蓋

將梯形放在桌上，下底面向自己，用手指在圖形周圍畫出一個矩形，想像它現在是一個矩形的圖形，然後拿取一片方瓦覆蓋在有直角的地方，先在左底邊晃一下，再往右邊底部晃一下，然後移到右上邊開始覆蓋，再

往下連著覆蓋一片，左邊一行覆蓋了兩片，再拿取方瓦從左上邊覆蓋一片（為何要移到左上角覆蓋呢？）指著左邊多出的圖形，可將這一部分移到右邊，形成矩形，拿出兩片方瓦將右邊空白處覆蓋住，但下面一列有 2 塊並未覆蓋，用手指從左上往右一點數，總共有 8 片方瓦。〔文維實作記錄 2004. 01. 14R〕

(2) 直接測量排列覆蓋

採用此策略者，已經知道單位量方瓦與所欲排列覆蓋的圖形之間，皆具有相同的「直角」結構，因此，可將方瓦從圖形直角處連續的排列，對於不完整部分，也可透過視覺的觀察予以合併，而點數測量出所需方瓦數量（立元實作紀錄，如圖 30）。

圖 30 直接測量排列覆蓋

〈一〉三角形覆蓋

將小方瓦先放在三角形直角處，然後一片一片往上覆蓋，總共覆蓋了 3 個完整的方瓦，再覆蓋第二行，覆蓋了 2 塊，在覆蓋第三行，有一塊完整的方瓦，眼睛觀察一下，完整的總共有 6 塊，不完整的有 4 塊，剛好等於兩塊完整的方瓦，所以總共有 8 塊。

〈二〉梯形覆蓋

將方瓦先覆蓋第一列，有完整的三塊，接著覆蓋第二列也有完整的 3 塊，這兩邊可以合成一個矩形，指著右邊多出的圖形，剛好可以覆蓋 2 塊，所以總共有 8 塊。〔立元實作紀錄 2004. 01. 15R〕

(3) 單位量比對測量排列覆蓋

採用此策略者，首先已經理解面積公式的意義與來源，及面積公式有關要素之關係，並能加以運用。另外，也理解圖形邊長和單位量方瓦空間結構大小的關係。因此，得知邊長有關單位量方瓦的數量後，即可利用面積公式計算面積的大小與所需之方瓦數量。（文羽實作記錄，如圖 31），已經知道三角形和梯形面積公式，透過底和高等要素的部分排列

後，像三角形的底可覆蓋四張方瓦，高可覆蓋四張方瓦，利用公式則可算出圖形所需之方瓦數量與面積大小。

圖 31 單位量比對測量排列覆蓋

(一) 三角形的覆蓋

因為兩個三角形可以合成一個正方形，所以正方形面積除以 2，就能得到三角形的面積，將方瓦沿著三角形直角向兩邊覆蓋，這邊有 4 塊，這裡也有 4 塊， $4 \times 4 \div 2 = 8$ ，所以用了 8 塊。

(二) 梯形的覆蓋

先將右邊多出的部分切開移到右邊想像成一個矩形，從圖形上底之左邊開始一片一片覆蓋，總共覆蓋四片，這個圖形可以覆蓋兩列，所以 $4 \times 2 = 8$ ，總共用了 8 片方瓦。〔文羽實作紀錄 2004. 01. 14R〕

(4) 相關要素測量排列覆蓋

採用此策略解題者，與採用單位量比對排列覆蓋策略者一樣，皆已理解公式的意義與來源，並能加以運用。除此之外，也理解圖形邊長和單位量方瓦大小的關係。唯不同處，在於前者是以方瓦之邊長為基準，利用直尺測量的方式，測量出所欲覆蓋圖形之邊長與單位量方瓦的關係後，再利用面積公式計算出所需之方瓦數量（立彰實作記錄，如圖 32）；或是藉由圖形面積公式，先行計畫單位量與所欲覆蓋圖形之面積大小後，再比較其倍數關係，而得知所欲覆蓋圖形所需方瓦之數量。

如圖 32 相關要素測量排列覆蓋

(一) 三角形的覆蓋

先量方瓦的邊長為 2 公分，然後從三角形的直角底邊往上一片一片覆蓋，高共用了 4 塊，所以是 8 公分，底也用了 4 塊，所以也是 4 公分，這塊三角形的面積是 32 平方公分，那要用幾塊方瓦呢？ $4 \times 4 \div 2 = 8$ 塊

(二) 梯形的覆蓋

梯形的上底為 6 公分，可覆蓋完整的方瓦有 3 片，下底有 10 公分，也可覆蓋 5 張完整的方瓦，高為 4 公分，這樣還可以覆蓋兩片，所以總共用了 $(3+5) \times 2 \div 2 = 8$ 片。[立彰實作記錄 2004.01.15R]

二、討論

(一) 方瓦排列覆蓋的能力與技巧，具有層次之分

從學生單位量方瓦排列覆蓋的作業，可以發現本研究獲得的結果與 Battista 和 Clements (1996) 研究主張的空間單位量排列能力發展的順序相符，學生排列覆蓋的建構先從單維度的層次來做思考；其次，轉化為將排列覆蓋的行動概念化，藉著將圖形行、列二維度的要素複製而將圖形完整覆蓋；再者，將圖形行、列當成結構的要素，轉化成「行乘以列」的建構行動，不再以知覺性的材料做為測量的基礎，而以可重複測量的刻度做為內部整體的連結。也與 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 研究發現的面積覆蓋策略解題策略模式一致，即 (1) 不完全的覆蓋；(2) 視覺估算的覆蓋；(3) 具體單位的覆蓋；(4) 沿著邊長發現單位數量的覆蓋。茲將本研究學生圖形排列覆蓋所展現的能力與所採用的策略，將之整合成圖 33 所示：

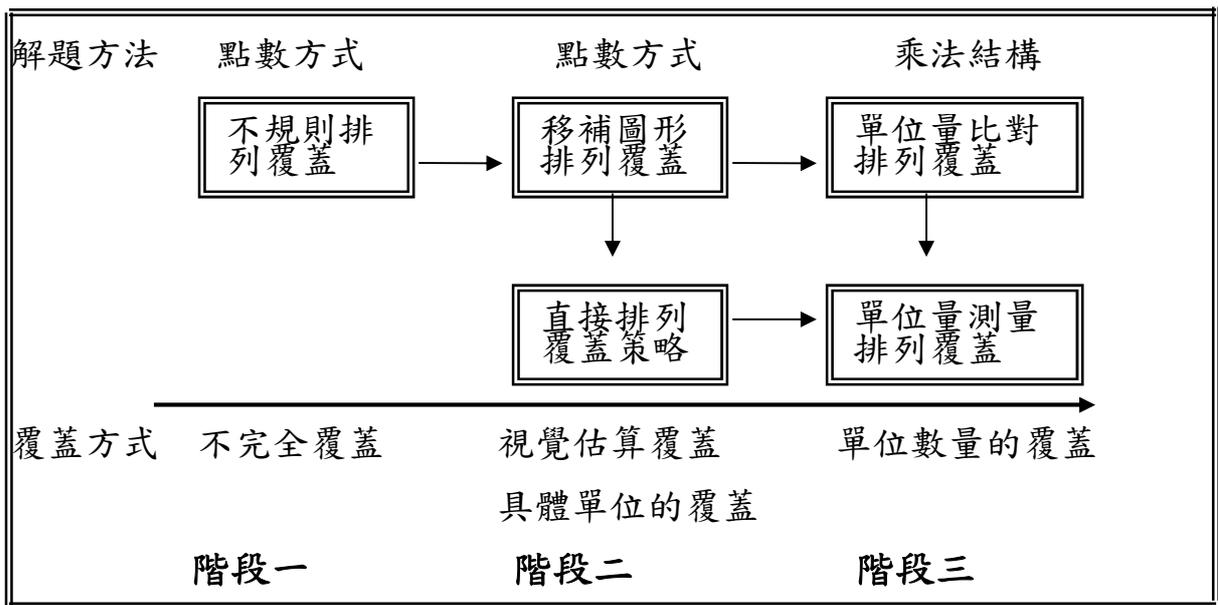


圖 33 面積單位量測量排列與解題策略發展對照圖

圖 29 中階段一部分與 Outhred 和 Mitchelmore (2000) 主張的「不完全覆蓋」階段所顯現的行為相似。在排列覆蓋的過程中，單位量方瓦係以間隙、重疊或凌亂的方式覆蓋住圖形，因此只能採用點數方式，一個一個數出方瓦的數量；階段二，則結合了視覺估算與具體的單位量覆蓋階段所使用的策略，將方瓦依序連接排列，對於方瓦無法完整覆蓋的圖形，則會利用視覺估算的策略，將圖形先行切割移補，成為與矩形相似的結構，嘗試進行方瓦的覆蓋及計算。由於圖形空間皆可由單位量方瓦完整的覆蓋，因此，圖形所需覆蓋方瓦的數量，亦可藉由點數方式得知。階段三，則與 Outhred 和 Mitchelmore 所言之沿著邊長發現單位數量的覆蓋一致，學生可藉由比對與測量方式，發現圖形面積公式相關要素邊長的單位數量，進而利用乘法結構的方式計算出所需方瓦數目及面積大小

(二) 排列覆蓋材料，會阻礙學生解題能力的發展

從學生方瓦排列覆蓋能力的發展與運用策略的分析，發現學生之間個別差異頗大，探索其原因，發現與個人解題時的「習慣」有關。像文儒、文維等人認為，既然圖形內已覆蓋了單位量方瓦，只要藉由點數這些具體的單位量就能得知圖形面積的大小，何必再透過乘法結構的轉化，探討圖形空間的大小。這種受到知覺影響解題的現象也反映了Mulligan 和 Mitchelmore (1997) 研究發現，排列覆蓋的材料也會影響學童面積概念發展的問題，由於方瓦預構了解題作業的「原型」，所以學生不用使用描繪或測量，就可以藉由覆蓋得知圖形空間的大小。為了提升學童解題能力，研究者認為，方瓦排列覆蓋是理解乘法結構的基礎作業，必須安排學實際操作，教師仍需在旁誘導、刺激，鼓勵學生多次嘗試訓練，從圖形單維度線段呈現的方瓦相鄰的兩邊做簡易方便的描繪，抽離實際方瓦的視覺排列比對，採用單位量複製的方式顯現排列的結構，如此才能理解線性測量的功能，進而採用乘法結構計算圖形面積的大小。「線性測量」能力的發展，是學童從單位量方瓦排列覆蓋轉化至乘法結構運用的一項重要機制，教師若要提升學童面積解題的能力與技巧，面積課程設計與教學的內涵中應融入相關活動，才有助於學生幾何概念的發展。

參、「面積圖形重構」方面

一、結果分析

(一) 概念轉化文本教學前之表現

1. 藉由方瓦特性理解「等積異形」概念

教學前，透過方瓦覆蓋圖形的作業，學生藉由特徵要素的比對，理

解與方瓦特徵相似的圖形便於方瓦覆蓋與計算，並且發現轉換後的圖形其所需之方瓦數量並未改變，而明白「等積異形」概念。

T：小朋友的桌上，老師都放了一些方瓦和平行四邊形的圖卡，現在要各組想辦法利用這些方瓦完全的覆蓋住平行四邊形的圖形，如何將方瓦鋪上去？

立宏：我用直尺將平行四邊形圖形的各邊測量看看有幾公分，然後每一公分做一個記號，再從上至下畫出一條直線（平行四邊形左上頂點垂直往下），因為左邊多出一塊所以把它補成一塊完整的長方形，右邊也畫一條直線，把不夠的地方補起來，然後每一公分畫一條直線，（指著圖形），把方瓦一格一格的覆蓋上去，這些不足的地方，就把兩個當成一塊來算，最後再把它扣掉，這樣就能夠算了。

文惠：我們的方法是將平行四邊形左邊多出來的一塊切下，然後移到右邊補成一塊長方形，再用尺或平方公分板去量（為什麼？）量它有幾格，就知道需要的方瓦有幾塊了。〔5-6 上課記錄 2003.12.17.11〕

2. 利用長方形結構進行計算

教學前，學生雖具有正確點數方瓦數量的能力，但遇到三角形之類的圖形，若採取方瓦直接排列覆蓋，會產生許多無法藉由完整方瓦覆蓋的部分圖形，點數時易受視覺影響而產生偏誤，甚至於繁瑣的剪貼活動，容易喪事學生操弄的興趣與動機，間接影響計算的正確性，為了解決這些困難，學生發現可以透過圖形的重構策略，轉換成長方形或與具有方瓦相同結構的圖形，則可利於方瓦之排列覆蓋，也利於點數計算，這種能力更能促進「乘法結構」概念的發展與理解。

T：除了這種方法之外，哪一組想到比較合適的方法可以解決老師剛才提到的問題。

文霖：我們先用尺量三角形的邊，每一公分就做上記號，然後將這些點連起來成爲一條直線，可以得到許多方格，再從這個地方（指圖形中點處）把他切下來移到這邊就形成了長方形，這些不完整的和這些不完整的就能合成完整的方格，然後數一數完整的方格就可以知道需要多少方格了？

T：說的很好，除了這種方法之外，老師看見文宇這組的方法不錯，可否請你們將你們所用的方法和大家分享。

文宇：因為正方形可以切成兩塊三角形（將圖形展示給大家看），我們就先畫成一個正方形，然後依照方瓦的邊長，在正方形的邊上做出每塊方瓦長度的記號，接下來看每邊有幾塊方瓦，用邊常乘以邊長的方式求出正方形用了幾塊方瓦，再除以 2 就得到三角形需用幾塊方瓦了。

T：這個方法很好，小朋友可以嘗試看看。有關梯形部分呢，哪組小朋友願意和我們分享你們的想法？

立翔：我們將左邊突出的部分直直的切下，然後到過來移到右邊，形成一個長方形，就可以將方瓦順利的覆蓋上去。

立廷：我們也是用切割的方式，但我們將左邊和右邊突出的部分切下來後，兩塊三角形合起來可以組成一個正方形，這個圖形總共有兩個正方形，只要算一個正方形需要幾塊方瓦，然後再乘以 2，就可以知道梯形需要幾塊方瓦了。〔5-6 上課記錄 2003.11.26.08〕

（二）教學後概念之轉化

教學後，有關學生「面積圖形重構策略」概念轉化資料的分析，係依據學生在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第六題的表現結果為主。此題的內容安排一個具有多邊形特徵圖形的問題情境，要求學生利用各種分割、移補或其它的策略，計算出該圖形的面積。從學生作業資料的分析，發現學生會採用多元的策略，將圖形予以簡化或是形成與先前經驗有關部分圖形，利用簡易計算公式，求得面積大小。茲將學生之圖形重構策略的表現分析歸類為 1. 分割填補法，2. 完整扣除法，3. 移補切割法，4. 直接切割法等四種方式，茲將其特徵分述如下：

1. 分割填補法

採取此策略解題者，係將圖形之突出部分與空缺不足的部分先做相關要素的比對，包括邊長、所佔空間大小，判斷是否可以填補，然後再行切割、移補成可用面積公式計算之典型圖形，再利用直尺測量出面積

公式相關要素的長度，加以計算得出面積大小(文羽實作記錄，如圖 34)。圖形填補的比對，可透過視覺的估計，也可藉由尺規加以測量，不管採取何種方式，採用此種策略解題者，皆已瞭解「等積異形」的概念，分割移補後計算出的矩形面積，可以用來代表原先多邊形的面積，因此也具有 Brown 等人(1988)所言的：部分單位量與整體之間面積保留的概念。探討採用此策略的原因，發現主要受到方瓦排列覆蓋時要素特徵的影響，學生認為要解決圖形面積的問題，應先將多邊形的圖形想像成一

方瓦可以完全排列覆蓋的矩形，藉由圖形切割移補的方式，可以達成這樣的

目的。

圖 34 文羽之實作紀錄圖

將此多邊形圖形下邊突出的正方形切下後，移到上邊空缺處，因為它們是相同的正方形。然後切割右邊三角形，量它的各邊長後，再量欲移轉的三角形各邊長，認為可以移到左邊空缺處，將整個圖形移補成一個矩形，用尺量出此圖的長 7 公分，寬是 4.5，面積為長乘以寬， $4.5 \times 7 = 31.5$ 平方公分。〔文羽實作紀錄 2004.01.14A〕

2. 完整扣除法

採取此策略者是先行將多邊形圖形想像成一矩形的結構，然後將矩形圖形予以表徵後，利用直尺分別測量出完整圖形及各部分增添部分圖形的面積公式相關要素的長度後，分別利用各圖形公式計算面積大小，再以整體扣除部分的方式，計算求得原先多邊形的面積大小(如圖 35，文維訪談與實作紀錄)。探討學生採用此策略的原因，也與上述策略一樣，學生皆以「矩形」做為前置結構，不同處在於策略使用的順序，與使用此策略者需具備不同圖形面積公式的運用，才能順利解題。

圖 35 文維實作記錄圖

拿出尺後，先將多邊形下面小正方形切割，畫一條線後，移到上面空白處填補，然後將右邊突出處切割出一塊三角形，想移到上面填補，將圖形旋轉一下，用手指比對一番，不敢確定，再將圖形轉移一下，發現好像不行。思考一下後，改變方法，將圖形先圍成一矩形，用尺在右邊畫出一條直線，將底部連起來，再將上面連起來，用尺量出矩形長的長度是 9 公分，再將圖形旋轉 90 度，量出寬的長度是 5 公分，將長乘以寬，算出面積為 45，一個是三角形，長 3 公分，寬 2 公分，面積是 $3 \times 2 \div 2 = 3$ ；另一個是... 旋轉 90 度，看一看是梯形，量出底長度，再量出高長度（直角兩邊），梯形面積是上底加下底乘以高除以 2，用尺量出上底 6.5 公分，下底 3.5 公分，加起來是 10 公分，高是 2 公分，面積是 10 平方公分，全部減掉 3 再扣掉 10，多邊形的面積是 32 平方公分。〔文維實作紀錄 2004.01.14A〕

3. 移補切割法

採用此策略者，分不同的步驟階段，先將多邊形某突出部分移補至可填補的空缺部分，移補形成一部分之完整圖形，將此部分完整圖形與整個圖形切割區分；接著，再切割另一突出部分，移補至另一適合填補之空缺處，形成另一完整部分的圖形，再分別測量這些部分完整圖形與面積公式相關要素的長度，利用面積公式分別計算其面積大小後，再予以整合（立廷實作記錄，如圖 36）。探討採用此策略的原因，發現學生解題採用的是種「隨機」的方式，先觀察圖形的特徵與結構，發現圖形中某部分可轉化與先前相符合的解題經驗，先加以處理，然後再觀察是否還有可解決的部分，再加以處理。

圖 36 立廷實作記錄圖

將多邊形下方之正方形觀察一下，發現與圖形上方空缺的正方形一樣，切割後移補到上方，發現可從圖形上方斜邊轉角處先行切割，可形成一矩形，切割後，再觀察發現右邊的三角形切割後可移到上方，形成另一個矩形；接著利用直尺分別測量這兩個矩形的長和寬，再利用面積公式計算其面積大小，再予以統合。〔立廷實作記錄 2004.01.15A〕

4. 直接分割法

採用此策略解題者，係將多邊形依其斜邊、轉角等特徵，將完整的圖形分割成部分之各圖形，然後測量出各圖形與面積公式相關要素之長度後，採取面積公式計算出各圖形面積大小後，再將它整合成完整之多邊形圖形面積（如圖 37，文字實作紀錄）。訪談採用此策略解題者的原因，學生皆回答利用面積公式解題發現圖形面積大小最快、最好的方法，顯然是受到 Baturo 和 Nason (1996) 所言之，只注重面積公式的運用，而不強調質化取向操作，一種無法填滿的文化鴻溝的影響。

圖 37 文字實作紀錄圖

發現圖形下方之正方形可以切割移補到上方空缺處，接下來，觀察圖形，發現可從圖形右邊轉角處先行切割一三角形，再者，中間轉角處亦可垂直下切成為一個梯形和一矩形，利用直尺分別測量出與該圖形面積公式相關要素之長度後，利用公式分別計算出各圖形的面積大小，再予以整合。

〔文字實作紀錄 2004.01.14A〕

二、討論

根據 Carpenter 等人 (1975) 的觀點，認為學生對於理解「等積異形」以不同形式呈現出來的可能性是非常困難的；Brown 等人 (1988) 也認為，要理解面積等於部分的總和也是有問題的，更甚者，以知覺為基礎所得到的結論，因為無法將圖形有關的數字資訊與視覺接收的資訊相配對，而阻礙了面積保留概念的發展，也因為只注重面積有關圖形較顯著的因素，而阻擾了面積正確的比對。從上述學生圖形重構的作業表現可知，圖形重構的策略對於學生面臨面積問題時，可提供計畫分析與

解題的線索，協助整合圖形空間結構成為典型圖式的結構之用。經由面積概念轉化文本有關的測量、重構與計算等階段活動的教學後，可以發現學生會利用其所學之線性測量技巧、圖形重構策略與乘法結構的關係，配合面積公式的計算將複雜、不規則的圖形，加以簡化及結構化，順利地解決圖形面積的問題。除可證明本研究之概念轉化文本設計可協助學生加強概念保留的效果外，也證明學生可經教學的效果，將具體之相關圖形要素抽離出來，並且建立空間結構的關係，進而轉化成代數的模式解題。但從資料分析的歷程可以獲得以下啟示：

(一) 情境與個人認知會影響解題策略的運用

對於呈現的多邊形問題情境，學生會採取個人認知最適宜的策略進行解題的安排。這些策略對於成人而言或許有優劣良窳之分，但對於兒童而言，皆是有效的解題方式，是學生個體與情境交互作用產生的調適與平衡的行為。教師在教學的歷程中，不應否定學生創發的解題策略，但有必要鼓勵其觀摩、參考其它的方式，擴展認知基模與經驗，協助其能發現並運用更多資源解決問題。

(二) 面積解題策略不易跨越文化文化現象產生的影響

公式的理解與運用是本研究的目標，或許也是解決面積大小問題的一種良方，然而只教導面積公式，而忽略其他有關的保留概念或是相關解題技巧，對於一些無法或無須利用公式解題而言，那是很危險的。雖然學生相互觀摩本研究安排的情境產生的解題策略，同意採用策略 1 方式解題是最快速、便捷的方式，但採用公式解題者，依然認為遇到問題

情境時，仍會先行採用公式解題，因為這種方式是教師最早教導他們解題的方法，也是教師所強調的。由此發現，教學現場的文化因素會影響學生解題策略與技巧的運用，更會影響學生解題的信念與行為，要改變學生解題的「模式」，唯有從教師教學方法與課程設計的層面著手改造，才能「對症下藥」解除沈痾。

肆、「面積公式理解與運用」方面

一、結果分析

(一) 概念轉化文本教學前之表現

1. 利用圖形要素比對技巧，發現面積公式意義

學生以「長方形」為比對的前置結構，配合「等積異形」圖形重構策略的運用，發現圖形彼此要素的關係，進而推論平行四邊形與三角形等圖形面積公式的成立，並能運用這些推論求得的公式，進行計算。

立宏：我發現長方形的長和平行四邊形的底一樣，長方形的寬和平行四邊形的高一樣。

T：喔！很好，長方形的面積是由長乘以寬構成，那麼平行四邊形的面積可否用底乘以高來代表。

立廷：可以（為什麼）因為底乘以高算出來的面積和長方形一樣！

立彰：我以長方形為準，把這個三角形放在它上面，從這裡切割後移到這個空白處，剛好和長方形一樣，所以他們的面積是一樣的。

T：喔！立彰也發現這個三角形與長方形的面積也是一樣的，但是三角形的面積公式是底乘以高除以 2，和長方形的面積公式底乘以高不同，它們之間有什麼關係呢？

文儒：三角形的底和長方形的長一樣（比對圖形），高從這裡切一半將上面的部分移到這邊剛好等於是長方形，它的高是長方形的寬的兩倍，所以高除以 2 會等於寬，三角形的面積公式為底乘以（高除以 2）就會和長方形的長乘以寬相等了。

T：非常的棒，小朋友能夠舉一反三真是太聰明了，除此之外，小朋友常常說三角形的面積公式是（長乘以寬）除以 2，這個公式是怎麼來的。

文羽：老師我知道，因為兩個相同的三角形可以組合成成一個正方形或長方形，長方形的面積是長乘以寬，再除以 2 就是一個三角形的面積了。
〔5-6 上課記錄 2003.12.03.09〕

2. 以長方形結構推論面積公式

針對梯形公式如何推論，在教學前，實驗組學生只有 1 名懂得利用圖形合併形成平行四邊形方式，推論出梯形之面積公式，此公式的產生是該生透過兩個全等之梯形圖形操弄發現的，這其中牽涉到結合率與要素關係轉化的運用，其餘學生尚無此概念的發展，因此無法理解梯形公式的來源及意義。

T：說的很好，那麼梯形的面積公式呢？（它是上底加下底乘以高再除以 2）
哇！小朋友都知道它的公式，但這個公式是怎麼來的呢？小朋友你們可以利用桌上的梯形圖片和長方形圖片比較看看，這個梯形的面積也和長方形面積一樣，它們的面積公式之間有什麼關係？

文字：把兩塊相同的梯形到過來連在一起可以形成一個長方形，長方形的面積是常乘以寬，再除以 2 等於一個梯形的面積，長方形的寬等於梯形的高（指著圖形），長方形的長剛好就是這個梯形的上底和這個梯形的下底兩個加起來的和，這兩個梯形是一樣的，所以這個下底等於這個下底，將（上底加下底）乘以高再除以 2 就是梯形的面積了。

T：文字好厲害喔，謝謝他的說明，他是利用兩塊相同的梯形組合成一個長方形，再從他們的底邊探索出公式的關係，這是一種不錯的方法，除了這種方法之外，老師提示大家，其實利用切割的方法，也可以得到梯形面積公式的證明，大家討論看看，我們看看哪一組的小朋友最聰明，你們可以利用各種工具像是尺或是剪刀切割來協助，加油（經過 5 分鐘後，學生依然沈默）〔5-6 上課記錄 2003.12.03.09〕

（二）教學後概念之轉化

教學後，有關學生「面積公式推理與運用解題策略」概念轉化資料的分析，係依據學生在「圖形與面積解題實作與訪談問卷」第五題的表現結果為主。此題係延續第三題圖形大小比對後，針對不同圖形之「等

積異形」概念的發現，要求學生以矩形的圖形及其面積公式作為前置結構，解釋說明其它圖形公式相關要素與其之間的關係。從訪談及實作資料可將學生對於公式理解採用之策略，歸納為 1. 要素關係比對說明，2. 要素關係測量說明，茲將其特徵分述如下：

1. 相關要素比對說明

採用此策略進行面積公式的理解與運用，係採用矩形的圖形為「前置結構」，再將其它圖形與之進行比對（如立彰實作記錄），學生經由圖形比對的過程，發現各圖形要素之間的關係可以形成「等積異形」的概念，再透過這些要素建立與面積公式的推論，進而發現圖形公式的意義與來源。例如平行四邊形的底與矩形的長一樣，高與矩形的寬一樣，利用面積公式計算，可以發現其面積大小是一樣的，又如等腰直角三角形，其直角的一邊與矩形的長一樣，另一直角邊是矩形寬的兩倍，底乘以高再除以二所得的結果，與矩形面積一樣。透過等積異形相關要素的比對，可以幫助學生理解其間公式要素的關係。

先說明各圖形之面積公式：矩形面積的公式為長乘以寬，指著長和寬的位置，平行四邊形面積公式為底乘以高，指出底和高的位置，三角形的面積公式為底乘以高除以 2，畫出一正方形，三角形面積是正方形的一半，底乘以高是正方形面積，所以要除以 2，梯形面積是上底加上下底乘以高再除以 2。然後將平行四邊形疊在矩形上，觀察一下後，平行四邊形的底和矩形的長一樣，高和寬也一樣，所以底乘以高算出的面積和長乘以寬是一樣的；將矩形的直角邊和三角形的直角邊重疊，指出三角形的底和高，底和矩形的長一樣，高切一半後移過去面積相等，高是寬的兩倍，底乘以（高除以 2）會等於長乘以寬算出的面積。將梯形疊在矩形上，這邊多出的部分移到這邊後，和矩形一樣，梯形面積是上底加下底乘以高再除以 2，切開的這邊的下底長和矩形的長一樣，這個移到上面與這邊的長加起來和矩形的長也一樣，所以上底加下底等於 2 倍的矩形的長，高和寬也一樣，因此「上

底加下底」後除以 2 等於一個長，再乘以高就和矩形的面積的公式一樣了。

〔立彰實作紀錄 2004.01.15A〕

2. 相關要素測量說明

學生進行面積公式的推理與運用的另一種策略，是採用測量要素的方式以發現各圖形「等積異形」的概念，再思索其面積公式相關要素的關係。其特徵在於學生需先具備面積公式的口訣，也知曉圖形相關要素與其之間的關係，透過「等積異形」概念的轉化，利用直尺測量出相關要素的長度後，再透過公式的計算，即能推論出各圖形面積公式的意義和來源（如文字實作記錄）。例如矩形長 8 公分，寬 4 公分，面積為 32 平方公分，等腰直角三角形，底和高各為 8 公分，底和高相乘之後需再除以 2，其面積才會與矩形一樣，因此可透過要素的數字關係明瞭面積公式的來源和意義。

拿出矩形作為基礎，瞭解各要素的關係很快地說出四種圖形的面積公式，然後拿出尺測量各圖形與面積公式相關要素的長度，平行四邊形的底和矩形的長一樣，寬就是高，所以長乘以寬就是底乘以高；三角形直角和矩形直角疊在一起，他的底邊和矩形是一樣的，三角形的高是 8，是矩形的寬的兩倍，將高除以 2 乘以底邊剛好與矩形的面積一樣；再拿出尺，量出梯形上底的長是 4 公分，下底是 12 公分，梯形的高和矩形的寬一樣，底邊這個地方多的切掉移到上面剛好等於另外矩形一邊的長，上底加下底剛好有 2 個長（因為是 4 加上 12 是 16），除以 2 就等於一個長，再乘以高就等於矩形的面積了。〔文字實作記錄 2004.01.14A〕

二、討論

經由本研究的問題情境設計，引發出上述兩種有關學生在面積公式推理及運用採行的策略，再加以探討分析，對於運用於面積概念的教學，

可形成以下的模式（如圖 38 所示）。

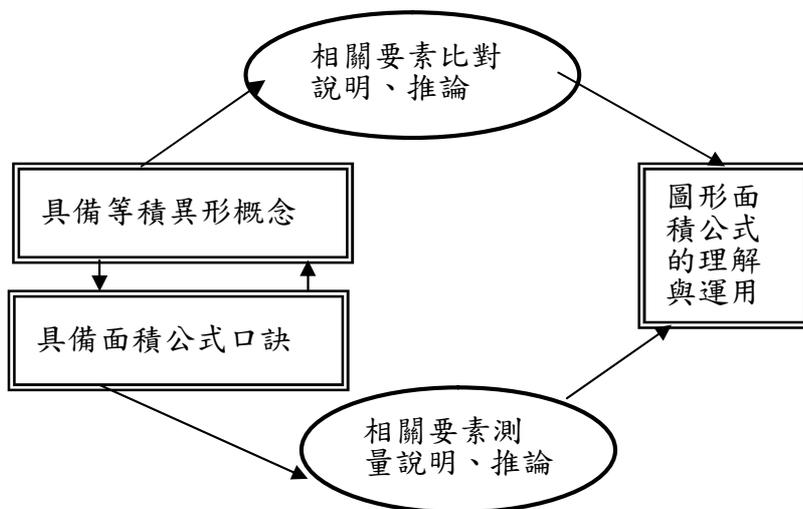


圖 38 面積公式理解與運用發展歷程

圖 38 中左邊部分是學生在公式推論前所具備之能力，分為兩種層次，一為具備「等積異形」的概念，是學生由下至上認知處理方式所建構的，另一層次為具備面積「公式口訣」，則是教師直接由上至下教導學生的，這兩種能力互為必要條件，是學習面積公式意義必要的基礎能力，一方面是學生經由教師宣告即可明白，具有這番能力的學生大部分屬於班級中數學能力層次較高者，另一方面，則需提供學生經由操作的機會，經由教師引導，才能從中發現公式中的意涵。從這兩種基礎能力到達公式理解的歷程，可分別採取「要素比對」與「要素測量」兩種教學方式，幫助學生瞭解要素之間的關係，進而推論出圖形面積公式與矩形面積公式之間的關係。從學生實作的表現，可以獲得下列的啟示：

(一)「圖形重構」是公式推論必備的基礎能力

從學生的表現發現，不論是採取「要素比對」或是「要素測量」方式來推論各圖形之公式意義，皆需展現「等積異形」保留概念的能力，熟知圖形可以藉由分割、移補等方式，比對判斷出相同的面積圖形，可能形狀不同，但可由圖形的底或高的要素關係，推論面積公式的意義。本研究發現的結果與皮亞傑等人（1981）強調的，理解面積保留概念的基本觀點是與補償的概念以及部分一整體的觀點有關，學生透過對圖形的分割、移補，重新安排部分的圖形產生一個新的但具相同面積的圖形後，進而利用要素乘法結構的關係，加以推論公式間的意義。

（二）操作與測量是協助公式推論成功的要訣

不論是利用相關要素比對或測量方式來驗證面積公式的關係，這都是將抽象概念予以具體表徵的方式，這種方式除了可以協助學生將圖形有關的數字資訊與視覺接收的資訊相配對外，並能促進理解有關圖形面積保留的基本概念與面積測量的單位量關係。

伍、小結

茲將上述實驗組學生「概念轉化文本」教學實驗前、後相關行為改變的分析，歸納如表 39 所示。從表中發現影響實驗組學生面積概念轉化的具體因素可以歸納為三項要點，茲說明如下：

- 一、 有效的教導與學習，是建立在學生所具備的概念上，幾何面積相關概念是否清晰正確，將是影響學生面積概念發展的基礎要件，它不僅影響學生對於圖形特徵的辨識與分類，更影響心像的表徵和數學概念語意的表達，因此在教學活動進行

之初，教師即應深入的理解學生幾何概念發展的程度，適時的予以啟發暗示，激發學生對圖形和面積學習活動的興趣，進而深入探討和研究幾何面積相關要素的描述。

表 39 實驗組在「概念轉化文本」教學前後之比較摘要表

活動項目	教學前之行爲表現	教學後之概念轉化
圖形辨識與表徵	<ol style="list-style-type: none"> 1. 「初步了解」概念紛雜、先備知識不足 2. 抽離及整合圖形面積整體要素之能力薄弱 3. 數學概念表達語意不清楚 4. 不知平面圖形上何處是「高」 5. 幾何概念遷移能力失調 6. 採取直接測量方式進行比較 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 圖形要素的表徵能與生活物件配對 2. 透過教師適當協助，可正確描繪數學概念語意 3. 能抽離重要要素、整合後定義圖形概念 4. 迅速成功表徵圖形的形狀 5. 圖形表徵及比對策略呈現多元化 6. 圖形大小比對技巧純熟
相關要素測量	<ol style="list-style-type: none"> 1. 藉由重構圖形為矩形，以利方瓦直接排列覆蓋 2. 以視覺類比要素，進行圖形覆蓋 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 轉換成乘法結構協助覆蓋方瓦之計算 2. 覆蓋策略呈現多元方式
圖形重構策略	<ol style="list-style-type: none"> 1. 藉由方瓦特性理解「等積異形」概念 2. 利用長方形結構進行計算 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 圖形重構策略呈現多元方式 <ol style="list-style-type: none"> (1) 視圖形特性進行分割移補作業 (2) 配合公式正確計算大小
公式與運解用	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用圖形要素比對技巧，發現面積公式意義 2. 以長方形結構推論面積公式 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 公式推理及運用策略呈現多元方式 <ol style="list-style-type: none"> (1) 利用圖形要素比對推理 (2) 利用圖形要素測量推理

二、 技巧和策略是影響學生面積概念轉化的另一要素，它不僅影響學生對「等積異形」意義的了解，甚會影響學生判斷面積公式運用的時機和選擇解題策略的方式，因此，與面積概念發展相關解題策略活動的教導與運用，亦是面積教學模式應考量的重點之一。教導孩子思考及學習最明智的模式，就是將孩子進行數學思考與操作的活動之間維持緊密的連結，並且採用循環或可逆的階段設計方式，精化及熟練基本的技巧

與概念，本研究設計之「概念轉化文本」的實施，可達成此項要求。

- 三、圖形面積公式的理解與運用，在教學實驗歷程解題步驟上並非唯一策略，但卻是一便捷快速、簡潔的解題方法，唯若要理解與正確的運用，與之相關聯的基本能力和技巧卻異常的繁複，其中在公式概念建立之初與「形」和「量」有關，但發展至後期則與「數」之關係最為緊密，尤以代數之「等量公理」、運算之「結合律」、「交換律」等概念和技巧運用的影響最為顯著。因此在面積教學的課程教材安排上，除應考量「數」、「量」、「形」之統整模式外，連貫性及實施的順序亦應斟酌思索，使學生在面積概念的歷程中，對圖形公式的問題能知其然，亦知其所以然，這樣的幾何學習才有意義。

上述這些影響面積概念轉化牽涉到的能力或技巧，若在教學歷程中納入學習的重點，讓學童確實習得與運用，不僅有助於學童在正規課堂上獲得堅實之幾何概念，更能協助其日後解決複雜及繁瑣之面積問題。

第四節 面積概念教學之模式

經由上述實驗組學生接受「概念轉化文本」教學實驗前、後面積概念變化之說明描述後，可知「面積概念轉化文本」的設計與「一般文本」相較，具有其課程上的優勢，學生可藉由感官的辨識、比對及操弄，發現相關要素的關係，透過策略的引導，建立面積保留概念，理解面積公式意義，並能運用於問題情境。然而要維持這些教學活動的連貫性與效

果，仍需有充分的時間作為後盾，考量九年一貫課程實施之後，數學教學時數已經從原先每週五節課縮減為三節課，要讓教學活動不受時間因素阻擾，則是課程設計外一項影響教學成效的重要因素。另外，學生基礎知識與解題技能表現之個別差異懸殊，欲讓面積概念的教學活動順利進行，仍須考慮學生的學習風格和教室環境的佈置，從教學實驗學習歷程的觀察可以發現學生解題策略多樣化，且具有不同層次思考方法，教師絕不能以「公式習得」為面積概念教學唯一的目標，而抹殺了其它概念及技巧的培養。鑑此，本研究原先之「概念轉化文本」教學模式仍需參考研究歷程教學的發現與啟示，透過省思，將之予以修正、重新編排，才能建構出適合教室情境之教學模式。

為了建構完善及合乎實務需求之面積概念教學模式，本節茲分三部分加以詳述。首先，敘述本研究「概念轉化文本」設計與「一般文本」設計之比較，闡釋「概念轉化文本」之優點，並歸納原先模式經教學後所發現之限制；其次，歸納教學實驗研究過程中的重要發現，包含學生採用的解題策略、技巧，認知及概念發展之差異，整理學生學習思考之脈絡，融合先前建議之教學模式基礎，重構新的教學模式；最後，說明重構後之教學模式之要義與重點，提供未來課程設計及教學實務者，從事面積概念教學的參考。

壹、面積概念轉化教學實驗之發現

一、「概念轉化文本」與「一般文本」之比較

概念轉化文本係研究者參閱面積概念發展及學習有關的資料觀點，

融合教室實務，所建構的教學內涵及模式；一般文本係由書商根據面積概念學習目標所研發的學習材料。兩種學習材料雖皆依據九年一貫課程暫行綱要能力指標研發的教材，然而在實施的步驟、資訊的認知處理以及課程活動的安排及知識概念的銜接上，皆有其獨特之處，茲將兩種文本設計特徵比較結果歸納如下表，並將差異詳述如後，以彰顯「概念轉化文本」設計之特色：

表 40 概念轉化文本與一般文本設計之比較

項目	概念轉化文本	一本文本
1. 學習的歷程	開放式發現	軌跡式探討
2. 教材目標重點	策略轉化	公式應用
3. 相關要素發現	由下而上訊息處理	而上而下訊息處理
4. 圖形比對	多種圖式分類	單一圖式辨認
5. 空間結構轉化	方瓦排列操弄	幾何方格點數
6. 課程活動安排	螺旋式連結	循環式銜接
7. 面積公式發現	學生操作測量發現	教師宣稱導引發現
8. 等積異形概念	透過乘法結構發現	透過點數計算獲得

(一) 開放式發現與軌跡式探討

「概念轉化文本」藉由學生從操弄過程中，將所發現之現象歸納成原則，經由師生或同儕辯證得到事實；「一般文本」設計則假設學生面積概念發展之軌跡，透過教材安排，依序發現教材中所隱含之原則，經由練習而強化面積概念。

(二) 策略轉化與公式應用

雖然公式概念之習得是面積概念教學的主要目標，「概念轉化文本」

強調解題策略的應用，簡化問題後，採取簡易的典型圖形公式（如矩形公式）進行解題，理解後並將之轉化為代數運用；「一般文本」注重各種圖式公式的習得與應用，直接強調利用代數計算方式解題。

（三）由下而上與由上而下訊息處理

「概念轉化文本」設計安排強調由學生感官辨識開始，發現歸納相關要素之關係，進而理解空間結構與面積公式的意義，可減少學習歷程中資訊運用與記憶的認知負荷；「一般文本」設計先藉由面積公式之呈現，轉而探索有關要素關係，以驗證公式意義，對能力程度學生而言，學習不易。

（四）多樣圖式分類與單一圖式辨認

「概念轉化文本」透過多種圖式之比較、辨識提取相關線索，或透過相似性建立圖形概念，學生學習興趣高昂，動機可以持續發展；「一般文本」設計提供單一圖式，要求學生從記憶系統提取相關訊息，以符應圖形概念之特徵，學生容易感到繁瑣厭倦，而放棄學習。

（五）方瓦排列操作與幾何方格點數

「概念轉化文本」設計係透過單位量方瓦之排列覆蓋發現面積公式相關要素之空間結構關係，進而理解公式意義，由操作獲得經驗，容易記憶保留；「一般文本」設計則顯示幾何方格，透過點數確認面積大小之後，再行探討面積相關要素之關係，學生解題能力與技巧不易提升，浪費學習資源。

（六）螺旋式連結與循環式銜接

「概念轉化文本」設計統合相關圖形面積公式之學習材料，安排四

項轉化活動的學習，最後獲得各類圖形面積的概念化公式，學習歷程中統整及連貫知識的遷移，學習所獲得之面積概念較完整充實；「一般文本」則依圖形特性分節探討其概念化公式，容易形成孤立及分離的面積概念，不易銜接運用。

（七）操作測量發現與宣告導引發現

有關圖形面積公式相關要素關係的發現，「概念轉化文本」設計透過方瓦排列覆蓋，及圖形分合移補方式，發現底和高的關係，而在不同的空間位置表徵其要素，學生可從經驗中修正空間位置概念；「一般文本」設計則由教師宣稱底和高之關係後，指定位置表徵出要素，學生容易流於記憶背誦，無法彈性變化解題策略。

（八）乘法結構與點數計算獲得等積異形概念

「概念轉化文本」透過方瓦覆蓋與圖形重構策略，利用乘法結構發現等積異形保留概念，學生可提升較高層次之幾何概念；一般文本則透過圖形分割及方格點數方式，發現等積異形保留概念，對公式意義的產生無法理解。

二、既有教學模式之限制

研究者參考了相關研究資料，配合教學實務經驗，設計了「面積概念轉化文本」的內涵，包含「圖形辨識與表徵」、「方瓦排列覆蓋」、「面積圖形重構」和「面積公式理解與運用」四階段教學活動，並融合了 Van Hiele (1987) 的幾何概念發展階段理論與 Pirie 和 Kieren (1994) 的數學概念理解動態模式，構築了學童面積概念轉化與發展的教學歷程模式（如圖 14、15）。經由教學實驗後，從學生在「圖形與面積解題成就

測驗」的表現加以比較分析，發現此模式具有某程度之效能，學生除了在教學歷程中依然保持高昂之學習欲願和動機，持續進行熱絡之概念辯證、討論之外，在學業成就及解題能力技巧表現上，與接受「一般文本」教學之學生表現相較，亦有顯著的差異存在，且較優異。然而從教學歷程及活動實施的現狀加以批判，發現此教學模式（簡化如圖 39）運用於具備多元知識與經驗背景的教室中，產生以下三項缺失：

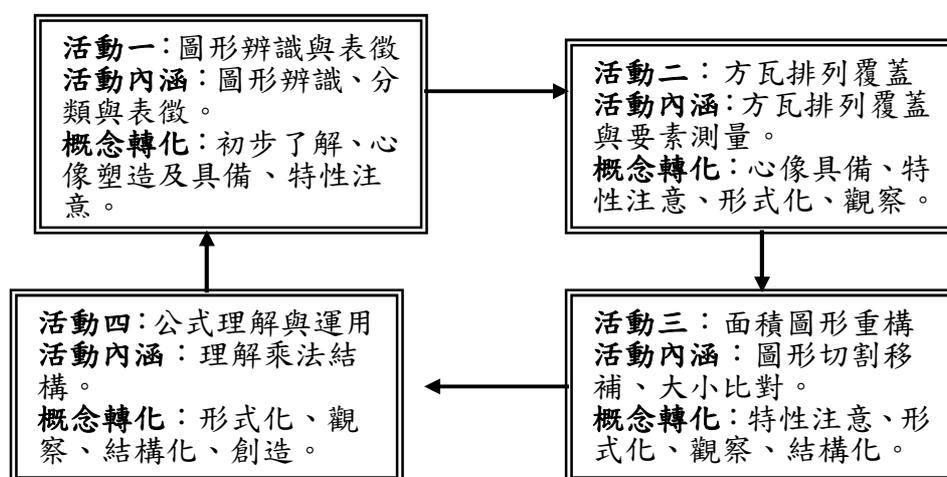


圖 39 本研究簡化後之教學模式實施歷程

（一）教學活動設計的內涵無法滿足教室全體學生的需求

由於學生面積概念之認知發展層次顯示明顯之個別差異，有些學生測量技巧純熟、比對能力精細，記憶理解表現優異，然而有些學生表現卻未盡人意，需教師循循善誘、殷殷教誨，才略見進步，實施單一教學軌跡之活動，不僅無法滿足全體學生學習的需求，甚且可能影響或限制某些學生之學習發展。

（二）教學活動需充足時間配合才能有所成效

原初建構之教學模式所實施的教學活動，雖然具連貫性與獲得實際

操弄的經驗，容易記憶且減少認知負荷，並能維持學生學習興趣與面積概念之轉化，然而模式中設計之「方瓦排列覆蓋」、「圖形辨識與表徵」、「公式理解與運用」等活動若需獲得某程度上的精熟，則需花費教師較多時間講解、說明和學生額外練習、深入理解不可，因此需將時間的安排加長，教學活動產生的效果才易產生。

(三) 教師對學生面積概念及技巧無法深入分析及評量

面積概念的發展包含對物體位置的移動、方向的轉動、形狀的改變或切割活動等理解，以及「圖形的辨識與表徵」、「空間推理」等保留概念的能力，面積概念的發展尚且包含了操作、比較、計算等測量能力，還包括了代數中的遞移律、交換律、等量公理和分解合成性等律則的理解。因此，兒童需先了解全體乃由許多部分構成的總合；其次，必須要了解遞移律和倍數的觀念，才能將某量移轉到另一量，且將某量重複使用於另一量上，所以，面積的測量乃是一種結合了位置的改變，倍數與等分合成觀念的綜合能力，這些能力的培養需要教師安排充分的機會，讓兒童經由「分、合、移、補」等圖形分割和重構策略的運用，將空間結構和乘法關係理解之後，才能達成。然而因活動內涵及範圍太過模糊，以致於教師無法掌握面積概念重要發展能力進行加強訓練工作，也無法施以合適之評量作業，以監控學生圖形與面積解題技巧和能力之表現。

三、學生另類行為表現之影響

除了文本內涵之安排與教學歷程的實施產生限制外，在教學活動進行當中，學生作業表現之多元化亦是影響教學模式重構的另一重要因

素，從教學實驗歷程學生的作業及反應中，發現了超乎研究者期待和不同於教學目標規定之能力的行為表現，茲歸納如下

- (一) 圖形辨識與表徵活動歷程中，除注重圖形要素的辨識與分類導引學生對幾何概念建立正確的初步了解外，尚且需要加強非範例圖形的比較與辨別，以擴張學生對圖形心像塑造和具備的經驗，在表徵方面，則需加強圖形「底」和「高」等要素在空間位置的搜尋與表徵能力，以輔助面積公式意義的理解與概念的建立。
- (二) 方瓦排列覆蓋活動歷程中，學生除具備方瓦與圖形結構關係的心像，注意其相似特性外，並能透過教學技巧的訓練，按部就班發現圖形空間行列大小與乘法結構關係，學生也會透過其所具備之認知能力與技巧，發展及運用其他解題策略，例如直接測量方瓦與圖形之相關要素，理解其關係後直接解題，因此既有的活動需考量學生幾何認知發展與操作測量能力加以擴充，以提供不同之學習途徑。
- (三) 面積圖形重構歷程中，學生除利用分割移補策略理解部分之合等於全體之「等積異形」之概念外，有些學生則會依其直覺及視覺比對方式，在腦海中進行圖形心像的塑造與重構，並未依教學目標要求之程序進行解題作業，此種學習數學之拓樸能力與動機值得維持與鼓勵，因此教學模式的建構，需包含多種能力的表達與展現。

(四) 面積公式理解與運用的活動歷程中，大部分學生透過圖形要素比對，發現乘法結構以建立面積公式概念外，尚有部分學生透過實際測量，將圖形要素之值，透過實際計算而理解公式之意義。不同經驗背景及認知能力學生會採取其認為最合適之學習方式，透過代數之交換律與分配律理解和習得公式的概念。因此，教學模式的建構應包含不同學習方式與途徑，以尊重學生學習之獨特性。

透過上述既有教學模式所產生限制的省思與活動實施歷程發現的說明後，研究者仍維持既有之教學模式，將原有之活動歷程的安排視為學生面積概念發展必須經歷的「學習軌道」，而學習文本和材料的設計則作為達成面積概念教學目標必須具備之「教學平台」，平台上匯集、整合了學生完成此活動或到達此幾何概念層次必備的基礎能力與技巧，並擴充學習內涵，以容納和擴充學生學習的經驗，使重構之面積概念教學模式更具彈性與包容性，以符應先前文獻探討中學者針對優質的幾何概念教學與課程設計的主張。

貳、面積概念教學模式之重構

一、重構之教學模式內涵

重構後的教學模式(如圖 40 所示)除將「方瓦排列覆蓋」細分為「相關要素表徵」和「相關要素測量」外，其餘的活動皆與原先之模式一樣，依然包含了「圖形辨識與表徵」、「圖形重構策略」與「面積公式理解與運用」等三項內涵活動，這些活動仍保留著其連貫性，以圖形要素的視

覺辨識和分類做為學生學習的「初始狀態」，概念性公式的習得、理解與運用，則為「目標狀態」。

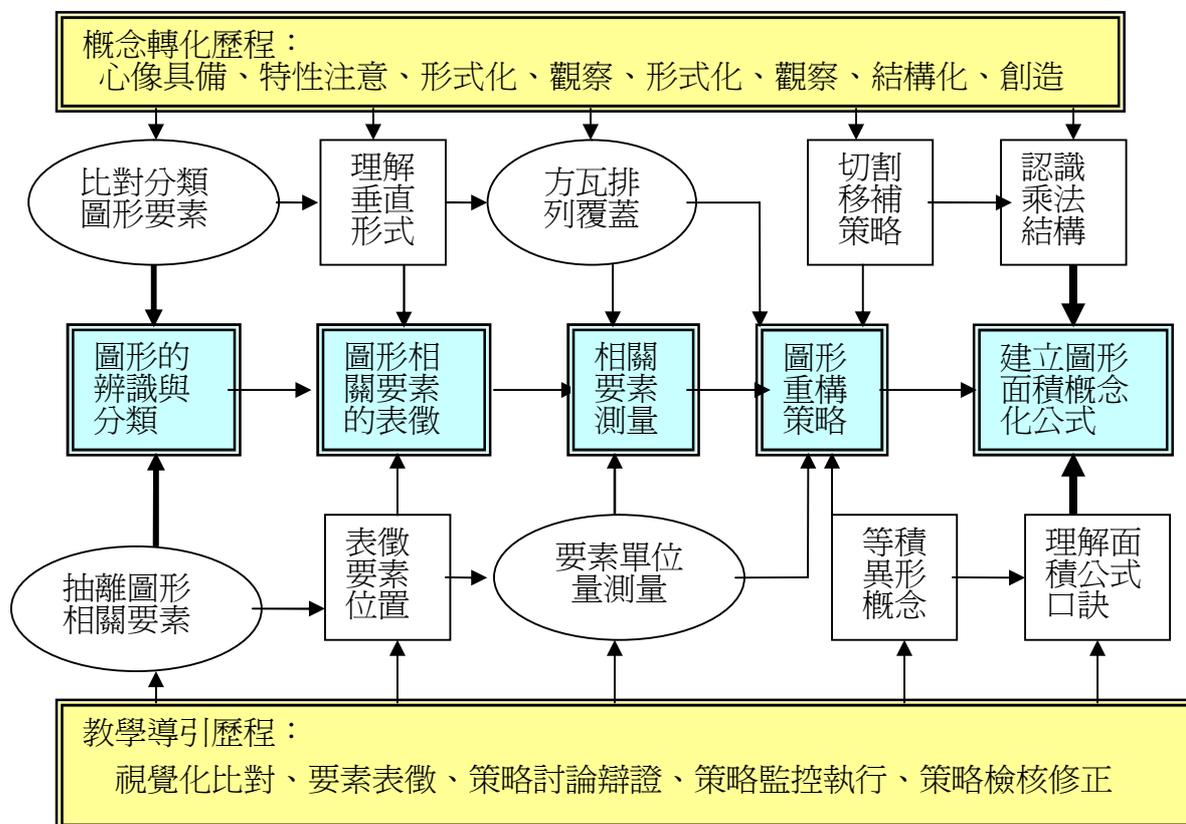


圖 40 本研究重構之「概念轉化文本教學模式」

修正後的教學模式包含了概念轉化文本的內涵、教學歷程活動、概念發展與學習目標四個部分。以「圖形的辨識和分類」、「要素表徵」作為刺激學童圖形知覺的起始；誘導學生利用「方瓦排列覆蓋」及「要素測量」建立學生對幾何圖形的心像；最後則鼓勵學生從「圖形重構」與「公式理解運用」活動中操作，藉由教師的肯定與導引，協助學生建立幾何概念與面積公式的型態樣式。

另一修正改變的是教學時間由原來之 14 節課，延伸為 17 節課，每

項主要活動時間加強 1 至 2 個節數，以充裕供應學生操作練習之時間，其教學時間分配如表 41 所示。為了提供不同認知層次學生的需求，本模式分為兩種取向，一為運用於已經習得公式口訣之學生，一為尚未具備公式概念者，但各內涵活動皆包含了學習必須的重點，可依學生之認知程度，選擇合適之教學模式取向，酌以增減其教學時數之安排，教學模式依然維持著教學導引和概念轉化的歷程，期能按照幾何和面積教學的特性依序進行活動，以提升學生更高層次之知識與概念發展，茲將各內涵活動教學重點敘述如下：

- (一)「圖形辨識與表徵」的活動除要求學生經由各式圖式的辨識與分類外，另針對以初具面積概念之學生，加強圖形要素的抽離與表達。
- (二)「圖形要素表徵」的活動安排，強調學生不僅要理解面積相關要素「垂直」的概念，並能依此「垂直」的形式正確的表徵出「底」和「高」的位置。
- (三)「相關要素測量」活動安排方面，則設計透過方瓦排列覆蓋，協助學生理解面積公式相關要素之關係，並透過實際測量，轉化方瓦單位與空間結構的關係，建立乘法結構的概念。
- (四)「圖形重構策略」活動的安排，則強調透過完整方瓦排列覆蓋的問題情境，要求學生進行圖形的切割與移補，以形成具有「矩形」結構之圖示，而習得簡化圖式的各項重構策略，並從中理解等積異形的概念。
- (五)「公式理解與運用」活動的安排，則考量學生既有知識及認知

層次的差異，可配合「從上而下」公式口訣之教學方式，採取「要素測量」的方式，驗證公式之意義；「從下而上」乘法結構之教學方式，則可透過要素的比對說明，以建立面積公式之概念。

表 41 修正後之概念轉化文本之教學內容及時間分配

單元活動名稱	單元活動	活動內容	節數
活動一： 圖形辨識與表徵	(一) 圖形分類	1. 將四邊形依其家族特徵，分成矩形、平行四邊形及梯形。 2. 正確且清楚地描述出矩形、平行四邊形與梯形構成要素的特徵。 3. 將三角形依其家族特徵，分成等腰三角形、等邊三角形，正三角形及三角形。 4. 正確且清楚地描述出各類三角形構成要素的特徵。 5. 透過與矩形圖形的比對，理解求「高」的意義，並發現「底」與「高」垂直的形式。	2
	(二) 圖形表徵	6. 進行圖形相關要素的命名。 7. 辨識指定底邊的位置，並能正確表徵出高的位置。 8. 理解平行四邊形、三角形與梯形的高，能因圖形的特徵而表徵在圖形外。	2
活動二： 相關要素測量	(一) 面積相關要素長度的測量	1. 利用底與高垂直的形式，表徵出高的位置。 2. 正確地測量出面積相關要素的長度。	
	(二) 利用方瓦進行平行四邊形的排列覆蓋	3. 運用方瓦進行空間的排列覆蓋 4. 利用策略移補圖形成矩形結構利於方瓦覆蓋。 5. 點數所需方瓦數量，轉換成面積單位。 6. 理解長與寬之方瓦數量與長度的關係。	1
	(三) 利用方瓦進行等腰直角三角形的排列覆蓋	7. 運用方瓦進行空間的排列覆蓋 8. 利用策略移補圖形成矩形結構利於方瓦覆蓋。 9. 點數所需方瓦數量，轉換成面積單位。 10. 理解底與高之方瓦數量與長度的關係。	1
	(四) 利用方瓦進行等腰梯形形的排列覆蓋	11. 理解 2 公分見方的方瓦等於 4 個 1 平方公分的方瓦數量。 12. 運用方瓦進行空間的排列覆蓋 13. 利用策略移補圖形成矩形結構利於方瓦覆蓋。 14. 點數所需方瓦數量，轉換成面積單位。	1
活動三： 圖形重構	(一) 平行四邊形重構成矩形結構	15. 理解底與高之方瓦數量與長度的關係。 1. 藉由方瓦完全覆蓋方式重構圖形成矩形 2. 利用矩形公式長乘以寬計算所需方瓦個數 3. 發現矩形之面積公式長乘以寬等於平行四邊形面積公式底乘以高	1
	(二) 等腰直角三角形重構成矩形結構	4. 從圖形重構發現等底等高是構成等積異形概念的基礎	1

	(三)等腰梯形重構成矩形結構	5.藉由方瓦完全覆蓋方式重構圖形成矩形 6.利用矩形公式長乘以寬計算所需方瓦個數 7.發現矩形之面積公式長乘以寬等於平行四邊形面積公式底乘以高 8.從圖形重構發現等底等高是構成等積異形概念的基礎	1 1
--	----------------	--	--------------------

(續表 41)

單元活動名稱	單元活動	活動內容	節數
	(四)哪些圖形面積相等	9.藉由方瓦完全覆蓋方式重構圖形成矩形 10.利用矩形公式長乘以寬計算所需方瓦個數 11.發現矩形之面積公式長乘以寬等於平行四邊形面積公式底乘以高 12.從圖形重構發現等底等高是構成等積異形概念的基礎 13.等底等高的圖形面積相等 14.圖形不同，面積可能相同 15.利用分割移補策略，找出面積相同之圖形	1
活動四： 公式理解與運用	(一)平行四邊形面積公式與矩形公式的關係 (二)三角形面積公式與矩形公式的關係 (三)梯形面積公式與矩形公式的關係 (四)哪些圖形面積相等	1.從等積異形概念，理解長乘寬等於底乘以高 2.正確測量出相關要素底與高之長度 3.利用相似性原理，依比例縮減圖形，並加以表徵 4.利用公式計算出圖形面積 5.將三角形重構為矩形圖形 6.從等積異形概念，理解長乘寬等於底乘以高÷2 7.正確測量出相關要素底與高之長度 8.利用相似性原理，依比例縮減圖形，並加以表徵 9.利用公式計算出圖形面積 10.利用兩與同梯形組成矩形結構的圖形 11.將梯形切割成平行四邊形與三角形組合之部分圖形 12.從等積異形概念，理解長乘寬等於(上底加下底)乘以高÷2 13.正確測量出相關要素底與高之長度 14.利用相似性原理，依比例縮減圖形，並加以表徵 15.利用公式計算出圖形面積 16.簡化圖形成典型之圖形 17.利用概念化公式計算圖形面積大小 18.配合問題情境進行解題	1 2 1

二、面積概念教學模式重構之意義

本研究經由既有教學模式限制之省思與概念轉化教學歷程中學生重要行為的發展而加以重構之教學模式，除了擴充教學內含與學習時數外，尚具有下列要義，茲說明如後：

(一) 提供數學學習機會的公平性

任何層次之數學教育，公平性 (equity) 是最值得關心的事。學生的圖形與面積概念成就表現的差異，主要是以早期的幾何能力發展作為基礎：因為孩子來自於不同的社會文化背景，具備了不同的基礎經驗，這些多元迥異的知識背景不僅影響學生學習內涵的理解與運用，更影響學生合作討論的班級風氣，間接的塑造學生學習的風格和態度，因此課程的設計必須要能辨識其社會文化及個別差異中孩子所知、所能以及帶進教室中的知識，並要提供充裕的時間協助其練習與理解，所以，上述這些要點都需要納入面積概念發展教學及課程計畫中的一部份。

(二) 提供完整性的面積概念學習

孩子的面積概念發展必須能夠完全的統整，包含面積概念學習議題間、數學重要內涵與其它科目間、數學與每日的生活之間都必須與孩子的經驗相配合。要將問題解決、推理與證明、溝通、連結、表徵等一般的數學歷程當成重要的數學內容教導，特殊的數學步驟像是資訊組織、型塑和組合，以及心智能力像是好奇心、想像、探究、耐力、參與實驗的意志和對型態的敏感性，這些都必須包含在優質的面積概念發展教學的課程裡。

(三) 提供數學知識與生活結合的機會

每一個孩子的面積概念經驗能夠廣泛地從他們的遊戲和每日的活動、興趣與面對的問題中，利用生活與學習之間自然的關係中構築出來。在面積概念發展教學中，教師扮演的最重要角色是能夠幫助學生發現省思的機會，並且從每天的活動、對話和遊戲中擴展學生的數學經驗，及

構築支持這些活動進行的環境，在面積概念教學活動中有關的數學概念、方法以及詞彙的教學上提示教師要有良好的誘導，必須針對不同學習風格的學生，創造連結的效果以便轉換課本的資訊成不同的形式。

(四) 數學評量步驟及內容多元化

有關面積概念發展相關的課程、教學與評鑑等主張的要點，最重要的標準必須是針對孩子的幾何概念學習建立彈性與發展性的引導基礎。這些引導必須以不同的研究及專家發展的實務、數學重要的理念為焦點，以及針對孩童適性發展結果所期待的範圍為基礎。因此，教師必須能夠有目的性的使用多種不同的教學策略提升孩子的學習，孩子能夠從精細設計的活動順序完整的組合、和日常生活發生的探究整合中受益。成功的面積概念教學是構築在孩子的非正式知識與每天的生活層面上，老師必須要努力的理解班級中每一位學童使用的面積解題理念和策略，並且針對這些理解去進行計畫、採用教學方法和課程內容。有關於評量學生面積概念學習採用的訪談、操弄作業以及觀察形式是很有效用且非正式的工具，必須要合宜的整合到孩子的數學課程中。

(五) 多元解題策略與技巧的發揮

孩子必須能夠從有思想性、合適性地使用不同類型的工具中受益，特別是一些有用且可豐富和擴展數學經驗的解題及計算工具。教師必須能夠幫助學生在面積概念和技巧之間，發展密切的關係，面積解題技巧的發展可以從堅固的幾何概念基礎上提升。教師從教學模式中可以深化教導的幾何知識，並將學生幾何知識如何思考、技巧及理解如何發展結合一起，這對於提升面積概念的教學是非常重要的，而且是職前及教師

專業發展課程必須學習的。

第五節 綜合討論

根據 Van Hiele (1986) 的看法，孩子幾何思考的進步是需透過教學的協助才能有所成就。從上述資料的分析得知，經過教學後，實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗」的表現，顯示出皆較教學實驗前有明顯提昇的現象。

為了提升學生數學成就的表現，適當教學活動的安排是必須的，除此之外，仍需重視學生個別差異與文化因素之影響，適當的加以激發與鼓勵，才能激發學生在學習的過程中投入和產生興趣。Clements (1992) 提及學習材料的安排設計與教師的教學引導二者對於學生面積概念的發展，扮演著非常重要的角色，教育者需重視這些條件與因素，才能協助學生獲得連貫且有意義的面積知識。

本節茲針對學生在「圖形與面積解題成就測驗」能力的表現與概念保留的效果兩大要點提出綜合討論，並與既往相關研究結果比較，討論說明如下

壹、圖形與面積解題成就測驗能力的表現

由本研究結果發現，接受面積「概念轉化文本」教學實驗處理的學生，在面積解題測驗的表現較「一般文本」教學實驗的表現為佳，對於此現象，可從本研究「文本設計的效果」此層面加以探討。

教材應如何設計，才利於學生面積概念的轉化？這可從幾個層面加以探討分析：以知識層面而言，譚寧君 (1995) 認為面積概念應包含

保留概念和測量概念；Batturo 和 Nason (1996) 認為面積知識則需包括具體型知識、計算型知識、法則概念型知識三種內涵。從課程設計的層面來說，Swafford 等人 (1997) 則主張有效的幾何課程設計應遵循幾項特徵：花費充分及高品質的時間、願意嘗試新的理念和教學上有關的研究、參與促進學習等有挑戰的作業、刺激反應高層次的思考。就概念轉化的層面來說，Pirie 和 Kieren (1992a;1992b;1994) 兩人主張概念理解的過程從初始狀態至目標狀態應經歷初步了解、心像具備、形式化、結構化至創造等步驟，才能獲得完整與充實的面積概念。本研究發展之「概念轉化文本」設計融合了上述學者觀點，安排了「圖形辨識與表徵」、「方瓦排列覆蓋」、「圖形重構」與「公式理解與運用」四階段活動，進行教學。從共變量分析的結果得知，這樣的設計讓參加面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生在「圖形與面積解題成就測驗(II)」的表現，與接受「一般文本」教學的控制組學生相較，除了在分測驗「圖形辨識與表徵」的表現，無顯著差異外，在整體測驗及「面積公式理解與運用」、「面積圖形重構」及「面積相關要素測量」三個分測驗的成績表現上，皆有顯著差異存在。這些差異表現可從文本教學各單元活動學生作業表現產生之結果加以說明，茲敘述如下：

一、實驗組與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「面積相關要素測量」測驗上的得分，有顯著差異存在。

實驗組學生經過教學實驗後，其在「面積相關要素測量」測驗上的表現較控制組學生表現為佳，其主要原因在於概念轉化文本的設計可以提供「折返技巧」、「特性注意」、「建立結構形式」、「理解空間關係」與

「覆蓋策略多樣化」等增進面積概念學習的重要特徵，茲說明如下：

（一）提供「折返」技巧，尋找相關線索解決問題

「概念轉化文本」的教學可以提供學生「折返」思考的策略及技巧。本研究「概念轉化文本」活動的設計，首先要求學生根據不同類別圖形，比對辨識其要素，進而依照指定的底邊，畫出符應條件要求的「高」。為了讓學生能順利的表徵出底和高的空間位置，對於圖形中指定的底，預先呈現紅色線條，以幫助學生利用視覺的搜尋，正確地畫出圖形中「高」的位置。為了驗證學生對於圖形要素之「初步了解」或「特性注意」層次的能力是否具備，研究者也透過指定底邊在圖形中位置的變換，以測試學生是否理解底和高的關係。

經由學生作業的分析發現，透過這些「概念轉化文本」設計有關圖形要素「折返」技巧的提示與指正，例如注意「畫高時，應該注意和什麼特徵的關係？」、「底是用紅色的線段表示！」後，可幫助學生找到圖形指定「底邊」的位置，正確的畫出「高」，並測量出其長度，由於有明確的「折返」線索提示，所以實驗組學生在「面積相關要素測量」測驗上的表現就顯得較接受「一般文本」控制組學生的表現為佳。

本研究之「概念轉化文本」設計，具有如 Fuchs 等人 (Fuchs, Fuchs, Prentice, Burch, Hamlett, Owen, Hosp, & Jencek, 2003) 認為要提昇學生數學解題轉化的能力，可以增加連結新奇與熟悉情境解題的認知，建立一套學習的程序，包括了提供 擴展學生需用相同解題方法進行分類的解題活動（例如提升至較高層次的抽離）； 明確的暗示學生探索與這些廣泛類型有關的新奇問題的效果。

「概念轉化文本」的設計，也具備了 Cooper 和 Sweller (1987) 提出的解題轉化需要三個變項的觀點：學生在解題的歷程必須：熟悉解題的規則，將需要相同解題方法的數學問題進行分類，明瞭新問題與先前已經化解的問題之間的關係。「概念轉化文本」活動設計的主張，在於學生進行數學概念理解與轉化時，面對任何層次某項問題及疑難而無法立即解決時，為了要擴展個體當下不適合的轉化，那麼就需折返回到內部的轉化。這些折返的動作可以幫助學生探索相似的解題方法與技巧，進而熟悉解題的規則。

(二) 提示「特性的注意」，了解「形式化」的建立

本研究發現，透過「概念轉化文本」活動學習後，大多數學生可以理解圖形之「高」和「底」等要素的關係，明白平行四邊形和梯形圖形的「高」可從兩平行的「底邊」畫出，且有無限多條；本研究也發現，作業過程中，透過教師不斷地引導、鼓勵，提供如下的線索：「特殊形狀之平行四邊形、梯形或三角形，依然具有『高』的要素，可經由指定底邊線段的延伸或是在其相對的頂角畫出與它相互平行的輔助線亦能求得。」學生經由幾次這樣的暗示，嘗試錯誤後，利用「底」與「高」垂直的「形式」，可以正確無誤的表徵出高的位置，並從操作的過程中，發現「高」可以表徵在圖形的內、外範圍。

認知心理學家認為學生要能正確的進行型態辨識作業，需經歷感覺、知覺與辨識等綜合歷程活動才能完成 (Payne & Wenger, 1998)。這些活動皆與物件「特性的注意」有關，包括了從完整的感覺形象或圖形中提取不同的特徵或要素，並將它聯合成統一的實體，或發現個別對象

的聯繫和關係。由於「概念轉化文本」教學活動提供了「特性注意」的機制，所以在描繪圖形「高」的空間位置時，接受「概念轉化文本」的實驗組學生較接受「一般文本」之學生有更充裕的線索正確的表徵出圖形「高」的空間關係。

(三) 利用方瓦的特性，建立覆蓋的「形式」結構

為了讓學生很快地瞭解不同形狀的圖形經切割移補後其面積依然相同的概念，「一般文本」教學設計會在圖形後的背景嵌入方格圖表，協助學生利用點數方式，很快地得知圖形面積大小的關係，但也因為得知圖形大小關係的結果之後，縮減了學生不再探索形成面積公式相關要素的動機，因此無法再深入地進行乘法結構概念的理解。針對此問題，本研究發展之「概念轉化文本」，安排了方瓦排列覆蓋和實際測量的活動，鼓勵學生先行發現形成面積公式相關的要素概念，並引導其藉由單位量方瓦數量與圖形空間行、列的關係，發現乘法結構，以進行面積公式的推演。

方瓦覆蓋的作業是一項屬於學生操弄、實作的活動，可以幫助學生利用「建造」或是「表達」數學概念的方法，透過部分（方瓦），進而瞭解到整個圖形面積大小與其之間的關係。Battista 和 Clements (1996) 主張，學生以方瓦排列建構圖型面積的活動，需經歷三個認知層次：即探索、連結、轉化與計畫。最後的轉化和計畫階段就是要達到整體「形式化」的發展，這需要對相關特質仔細思考，抽離出一些能運作於所有範例的相同方法。本研究發現，透過「概念轉化文本」圖形方瓦的排列覆蓋活動，可從兩個層面探討「形式化」能力的發展，一為改變圖形結

構，利於所有圖形覆蓋之共通策略的使用，這屬於「探索」；另一為完整排列覆蓋時，相似特徵的抽離，如方瓦有直角，應找圖形有直角的地方開始覆蓋；或是用完整的方瓦覆蓋圖形後，圖形剩下完整方瓦無法覆蓋的部分，會利用結合「殘餘圖形」成為完整圖形，以利單位量覆蓋的策略，這就是「連結」。當學生具有這兩種能力後，透過「結構化」，即轉化和計畫的引導，就能正確無誤的完成方瓦覆蓋作業。

由於方瓦具有正方形的特徵，為了讓方瓦能連續性的排列，必需先找出圖形中具有「直角」特徵的部分。本研究也發現，經過「概念轉化文本」教學後，學生會利用實際或想像切割的方式，將圖形切割移補形成具有直角特徵的矩形，然後進行排列覆蓋，最後點數出所用的方瓦數量；學生也會利用測量的技巧，將方瓦的邊長當成單位量，然後在圖形的邊上塑造出與方瓦相同的「形式」，像做出與方瓦等長間隔的點，然後連結，將欲排列覆蓋的圖形改變成方格圖表的方式呈現，解決方瓦排列覆蓋的問題；有些學生則具備了抽象的「直角」概念，從「底邊」線段的起點開始將方瓦一片一片的連接覆蓋，俟無法將完整的方瓦繼續覆蓋時，會移至下列繼續活動，依此類推，處理完整的方瓦覆蓋後，再處理部分圖形的覆蓋，其所用的策略包含了組合、配對與填補等方式，這些方式是連結每個部分方瓦的關係，形成完整圖形的結構。

由於透過「完整排列覆蓋」的活動，能協助接受「概念轉化文本」學生面積概念、方瓦大小數量與空間結構的關係，加強了面積解題的技巧與能力。

(四) 觀察乘法結構，理解面積的空間關係

本研究發現，學生藉由「概念轉化文本」設計方瓦「直角」及「連結」的特性，發現覆蓋圖形與之相關的結構，進而瞭解可以透過某些策略，加以解決方瓦覆蓋圖形的問題，這樣的行為與 Battista 和 Clements (1996) 的方瓦排列覆蓋研究之層次三 A 階段描述的覆蓋動作是一致的，學生可藉由行、列的要素複製轉化而將矩形填滿。例如，學生會將平行四邊形斜邊突出的部分切割、移補成為矩形，這樣才利於方瓦的覆蓋。將完整的方瓦覆蓋圖形後，學生可藉由點數得知所用的單位量數目，若再能深入的「觀察」方瓦數目與矩形圖形空間的關係，抽離出此「單位量」代表的測量意義，進而發現乘法結構，那麼將能利用乘法結構，推論出面積公式的意義。因此，當學生利用方瓦完整的排列覆蓋住圖形後，研究者特別強調矩形面積公式中相關要素如「底」和「高」與單位量方瓦個數的關係，鼓勵其發現面積大小可藉由底和高所排列覆蓋之方瓦數量相乘而獲得，以理解方瓦個數、圖形之底與高、面積公式與面積大小的關係組合。

藉由方瓦覆蓋活動的教學後，發現學生可以理解圖形面積的大小與所使用的方瓦數量有關，但學生會將所用之單位量方瓦的數量與面積大小混淆，因為所用方瓦之數量會隨其邊長不同而有變化，方瓦邊長增加一倍，則所需要的方瓦數量則會減為原來的四分之一，但學生容易產生誤解，甚至無法理解，這與 Simon 等人 (1994) 所發現學生常將周長與面積概念混淆的問題有關。因此概念轉化文本另外設計了邊長為 2 公分的方瓦排列覆蓋活動，透過教師的引導、說明及釐清學生觀念：圖形排列覆蓋所用的方瓦可以用來代表面積的單位量，每個單位量方瓦的邊長

與圖形的邊長的關係會牽涉到使用方瓦的數量，當學生發現單位量方瓦的大小與所需的方瓦數量的關係，像 2 公分的方瓦等於 4 個邊長 1 公分的方瓦的組合，其面積為 4 平方公分，圖形排列覆蓋了 10 個邊長 2 公分的方瓦，那麼該圖形的面積為 40 平方公分。

從學生作業的表現可見，這樣的活動設計除了協助學生明瞭「平方」的觀念之外，也幫助學生結合方瓦的個數與單位量代表的意義，而能正確地計算出圖形面積的大小。

(五) 鼓勵方瓦覆蓋策略多樣化

本研究設計之「概念轉化文本」透過分割移補圖形與轉化乘法結構計算等「形式化」的能力和技巧建立後，讓學生在三角形圖形的覆蓋活動應會更加地順暢與正確，其所使用的策略也更加地多樣化。而以「矩形結構」作為「前置結構」形式的運用，有利於學生在轉化圖形時，形成一個利於面積計算的圖形心像，幫助學生發展出各種重構的策略，也有利於學生運用完整與部分的方瓦進行排列覆蓋。這樣的表現符合了 Battista 和 Clements (1996) 的覆蓋研究，認為最高層次是以「行×列」所建構的行動，並不需以知覺型的材料做為測量基礎，但前提條件是學生需將行、列間的成分要素這種可重複測量的刻度做為內部整體的連結，而這種基模結構的運作，可幫助學生一接觸面積文本時就能看見整個解題計畫。

由學生作業的表現可以發現，學生觀察的特徵具有不同的層次，學生若只考量覆蓋圖形與方瓦之間相同的特徵，尋找出合適排列覆蓋的位置後，即進行排列覆蓋活動，那麼所需方瓦的數量，會藉由「點數」的

方式算出；學生若以「前置結構」矩形的圖形作為覆蓋前圖形重構的模型，先行轉換圖形後，再行覆蓋，那麼所需方瓦的數量，會藉由「乘法結構」配合「點數」方式算出；學生若以「同構」的方式，將圖形轉換與方瓦相同的圖式，再進行方瓦的覆蓋，那麼有關覆蓋方瓦的數量，會採行「乘法結構」配合「點數」方式算出。

然而，要採行何種策略轉換圖形，以利於方瓦的排列覆蓋，是每位學生對方瓦和「觀察」所欲覆蓋圖形之間相關要素歸納所做出的決定，對於何種圖形轉換的策略較有效用，仍須考量其他因素，例如理解覆蓋時所用之單位量方瓦的大小和面積空間結構的關係。

方瓦覆蓋的個數與圖形面積的空間結構大小與「單位量」所代表的「量」的概念有關，本研究設計之概念轉化文本活動在於提供學生藉由「觀察」而發現之間變化的機會：方瓦越大，使用的數量越少，方瓦越小，則覆蓋需要的數量越多，那麼利用方瓦覆蓋圖形，進而探求面積大小的活動才有意義。

總之，「概念轉化文本」所安排之線性測量與方瓦排列覆蓋實作活動，除增進學生對於單位量方瓦與圖形空間結構關係的理解，促進對「等積異形」概念的溝通外，也從操弄實作的經驗中培養出學生「推測」、「計畫」與「監控」等後設認知與面積概念轉化的能力。這些能力是藉由圖形重構形成「形式化」結構以及「觀察」發展出來解決覆蓋問題的策略，因此在此分測驗的表現上，明顯地較接受一般文本教學的學生表現為佳。

二、實驗組與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「圖形重構」測驗上的得分，有顯著差異存在。

同樣是教導學童探討「等積異形」與各圖形面積大小之間的關係，一般文本因為圖形材料背景的設計，反而讓學生忽略了相關要素與「等積異形」概念之間關係的探討。為了改善這樣的問題，並提升學生研究的動機，本研究設計之「面積概念轉化文本」教學活動則摒除以方格為背景的操作方式，採用實際圖片，提供學生先透過比對方式，理解「等積異形」概念後，然後藉由思考如何將方瓦完全覆蓋住圖形的方式，而引發出各種圖形重構策略加以解題，再經由方瓦個數與圖形空間行列的結構，探討面積公式相關要素的關係。因此，概念轉化文本有關圖形重構活動的設計，除了要求學生透過此種活動設計的方式，理解「等積異形」的概念外；並能利用各種分、合、移、補圖形的策略，重構非典型的圖形成為與矩形此「前置結構」相似的圖形，進行解題的作業，並藉由圖形重構策略的安排，發現「乘法結構」以計算出圖形面積的大小。

根據 Kordaki (2003)、Hiebert (1981)、Liebeck (1987)、Rahim 和 Sawada (1990) 等人的研究發現，等積異形的操作可被視為是面積保留概念的動態視覺表徵，而要幫助學生等積異形概念的發現，圖形重構的教學活動安排是項有利的措施。控制組學生使用之「一般文本」教學活動是以矩形圖形為「同構」的基礎，要求學生利用分割、移補的策略將平行四邊形、三角形或是梯形轉化成矩形圖形，再用視覺比對點數的方式計算出圖形之面積大小。但是這種以方格點數處理圖形面積概念的方式，正如 Mulligan 和 Mitchelmore (1997) 所言的，因為方格預構了解題工作的原型，並無法像描繪一樣建立排列關係，而提升乘法結構運用的能力，對於轉化成面積公式的理解助益不大。鑑於上述的發現，

Outhred 與 Mitchelmore (2000) 則提出面積概念學習上的建議，希望在面積概念學習的歷程上，教師應協助孩子將空間結構的排列當成重要的學習目標，及面積公式習得的中間媒介。實驗組學生較控制組學生在「圖形重構策略」的表現為佳，其原因主要在於概念轉化文本設計在「面積圖形重構」活動過程中，可以提供學生「觀察解題」、「發現同構要素」、「結構化圖式」、等增進「圖形重構策略」的技巧與重點，茲說明如下：

(一) 透過「觀察」，利用已知之經驗解題

從「概念轉化文本」的「圖形大小比對」活動歷程發現，學生解題所使用的策略雖然呈現多樣化，但都能以「矩形」圖形作為比對的基礎，正確有效的達成教學目標。分析這些策略類型，有的是採取「直接測量」的方式，亦即以矩形圖形為基準，將其它圖形與之疊合後兩兩比對，利用視覺的方式將超出矩形的部分予以切割，移補至空缺處，以估算的方式發現其面積大小的關係；有的則經分割移補圖形後，會利用其它工具如直尺作「間接測量」，測量出其長和寬的長度，以比較不同圖形的大小關係；一些學生則會利用代數（公式）的模式加以解題，先測量出該圖形面積公式相關要素，例如底或高的長度，再計算以比較面積的大小。這些不同層次的比對策略運用，除了顯示出學生面積概念發展認知層次不同外，也彰顯了學生學習型態上的個別差異。本研究文本活動的設計，可以提供不同認知層次學生概念發展上的辯證及分享的機會。

「概念轉化文本」活動的設計具備了 Pirie 與 Kieren (1992a;1992b;1994) 認為在概念理解環狀模式中的「心像塑造」、「心像具備」與「特性注意」等層次有關行為的表達，可以藉由操作、檢視

與觀看等能力來加以描述的特徵。因為觀察、表達與省思之間具有重要的關聯意義，省思結合了概念轉化如何建構的觀察歷程；表達能夠激發並呈現觀察以及釐清行動中包含的內容。

經由本研究設計之「概念轉化文本」先前線性測量與方瓦覆蓋作業的指導，學生已熟悉測量的技巧和方法，可以達到Case（1992）主張的測量發展能力的最高層次，可將二維度的思維統整起來，從數字的操作結果建構或比較實物，經由數字和長度單位量的關係比較物體的長度，並得知單位量之數目與圖形面積的關係，亦能從排列覆蓋的歷程，利用單位量方瓦之特徵線索，採取分、合、移、補等「形式化」的策略，將不同的圖形重組成矩形，便於完整方瓦的覆蓋；且會使用點數方式，整合方瓦部分和整體關係，計算出圖形覆蓋時所需之方瓦數目，並轉化成圖形的面積大小。

研究亦發現，進行圖形大小的比對時，學生會連結及運用圖形之特徵及先前習得之經驗，選擇最合適之物件做為比較的「基礎」，進行比較，從中發現「同構」的現象，理解這些圖形都是具有「等積異形」的結構體，只要同時改變某些特徵，就能重組成相同「結構化」的物體。「矩形」是學生幾何觀念中較早接觸到的典型圖形，在記憶系統中具有深刻的圖像表徵，學生將各類圖形分合移補成矩形的圖樣，從中比較可以發現相同的要素，而確定「等積異形」的概念。

（二）發現「同構」要素，建立「等積異形」概念

本研究發現，透過先前「比對」活動的練習，學生已將「矩形」視為前置結構，因為具有與方瓦直角的相同結構，且能完整地進行覆蓋，

因此可以當成學生圖形重構的目標「結構」，這對於運用此種策略解決面積計算的問題是非常有幫助的。利用重新安排圖形進而分析完整面積的能力是面積測量的先決條件，因為面積的測量與其它我們所能進行的測量一樣，皆需要保留部分的單位量、利用不同的方式組合形成不變的整體 (Piaget et al., 1981)。理解面積保留概念的基本觀點是補償的概念以及部分—整體的觀點，其中關聯到可逆性 (reversibility) 和轉化 (transitivity) 與概念的保留，要促進此種能力的發展，學生可以透過對圖形的分割、移補及黏貼，重新安排部分的圖形產生一個新的但具相同面積的圖形的行為，熟悉上述的這些概念。教師從這些歷程而理解學生保留的概念是需要的，且是學生理解面積測量概念與乘法結構先決的條件 (Douady & Perrin, 1986)。

根據相關研究發現，學生對於理解「等積異形」以不同形式呈現出來的可能性是非常困難的 (Carpenter, Coburn, Reys, & Wilson, 1975)，而且，要理解面積等於部分的總和也是有問題的 (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988)，更甚者，以知覺為基礎所得到的結論，因為無法將圖形有關的數字資訊與視覺接收的資訊相對，因而阻礙了面積保留概念的發展，也因為只注重面積有關圖形較顯著的因素，而阻擾了面積正確的比對 (Hughes & Rogers, 1979)。經由本研究「概念轉化文本」活動的安排，發現學生透過分合、移補策略的運用，可以察覺重構後的圖形其外部的形狀與矩形一樣，而理解不同形狀之圖形其面積可能相等，因而習得「等積異形」的概念。但要深入理解影響等積異形概念有關要素的概念，非讓學生經由操弄，測量圖形內部

的要素像「底」與「高」等，發現其和矩形的「長」與「高」等內在要素相似，透過圖形之間「等高」、「等底」要素的「同構」性才能獲得驗證。本研究「概念轉化文本」設計採取方瓦完全排列覆蓋圖形的方式，讓學生思考何種策略利於簡化圖形之複雜度，而解決方瓦的排列運用，從中獲得圖形重構的策略。

（三）提供矩形作為面積計算的「結構化」圖式

對於不規則圖形面積保留概念的理解也是一項困難之處，Maher 和 Beattys (1986)，以及 Liebeck (1987) 的研究發現，這些困難主要是來自於學生遺漏了有關圖形面積保留的基本概念與面積測量的單位量。為了驗證學生是否能夠結合等積異形概念與圖形重構策略，加以運用在面積大小的計算，本研究「概念轉化文本」設計特別要求學生利用方瓦操弄以求得圖形面積，期待學生能針對圖形的特徵，先思考、簡化問題，再利用策略解題，而非馬上利用公式解題。在利用方瓦覆蓋平行四邊形求出其面積的活動中，學生已知運用矩形的圖像做為「前置結構」，因此會重構平行四邊形的結構轉變為矩形圖形，並利用矩形之「長」、「寬」等與乘法結構的關係計算出平行四邊形面積的大小。

在計算三角形面積大小的活動中，學生將三角形「結構化」成矩形的情形非常明顯，配合著各種解題策略，學生已經理解不同的圖形可以透過重構的方式，轉化成某種具有「同構」事物的特徵，這樣更能便利的解決圖形面積的問題，這是兒童將其先前經驗、面積構成要素及不同圖形結構相互轉化產生的結果。

本研究發現，有關梯形圖形面積的計算，學生也利用圖形「重構」

的策略，將圖形轉換成為「矩形」的結構體，也明瞭方瓦單位量的大小與圖形空間結構的關係。雖然部分學生對於所用方瓦「量」的大小關係尚未清楚，需透過操弄來理解，從其作業可知，學生已能將圖形「結構化」成為「長×寬」之矩形面積的方式，來解決其他圖形面積計算的問題。

學生利用「乘法結構」方式計算面積大小能力的發展，與採用覆蓋或是測量作為解題的方式有關；若採用覆蓋的方式計算面積大小，學生易受視覺圖形的影響，採用點數的方式計算；利用測量的方式計算面積的大小，學生基本上已知圖形空間結構中「長」與「寬」和單位量方瓦的關係，但是會因「單位量」角色代表的意義，影響乘法結構計算方法的運用。若是學生知曉圖形空間結構長、寬和單位量有倍數的關係，則會利用乘法結構解題；若學生只是將單位量作為圖形上複製的依據，而不明瞭其間可轉化為倍數的關係，那麼則需透過教學的引導，協助學生發現，才能轉化面積計算的問題。

三、實驗組與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「面積公式理解與運用」測驗上的得分，有顯著差異存在。

進入有關「面積公式推理與運用」教學活動時，可以發現學生已經具備圖形的辨識與表徵能力，並具有面積大小比對的技巧和能力，熟知各圖形有關的要素名稱及位置，也明瞭透過乘法結構的方式，利用「長×寬」的方式，計算得到矩形面積的大小，這樣的先備知識與技巧促使實驗組學生在面積解題的測驗成績上明顯的優於控制組，這種結果，或可從「提供比對基礎」、「配合代數推理」、「創造心像」與「執行監控與計畫」等幾個層面加以說明，茲將「公式理解與運用」活動增進學生解題

的能力與技巧敘述如下：

(一) 以「長」或「寬」要素作為比對基礎，探索圖形面積公式之間的關係

為了明瞭學生是否理解「乘法結構」的意義，本研究之「概念轉化文本」設計乃安排了面積相等之矩形、平行四邊形、等腰直角三角形與等腰梯形等四種圖形進行比對的活動。採取此四種「等積異形」之圖形，主要用意在於讓學生能發現構成面積公式之組合要素，固定某一要素而加以比對，進而發現圖形面積公式之間意義的轉化。由於要從比對的線索發現面積公式的關係，仍須具備其它關於代數方面演算的規則，如交換律、分配律等運用，透過教師提問、同儕辯證的方式，誘導學生將此特性，從記憶系統中提取，建立面積公式有關要素的連結。

一些研究發現，某項議題或行動的要素能夠完全的被抽離，則需釐清此議題或行動的基本感官內容與其間的關係，整理出清晰可以轉化的要素，並予以交互組合，運用於新奇的情境 (Steffe & Cobb, 1988; Van Glasersfeld, 1995)。本研究發現，學生透過教師引導，會以矩形圖形相關的要素和面積公式作為各類圖形比對的「前置結構」。學生會固定矩形面積公式的其中一個要素「長」或「高」，作為與其它圖形比對的基準，因此很容易發現其它圖形的面積公式與此相關要素間的關係，進而理解不同圖形面積公式的由來。

經由先前比對經驗的建立，學生發現「等積異形」中矩形的面積公式「長 \times 寬」與平行四邊形的面積公式「底 \times 高」是一樣的；且當等腰直角三角形的底與矩形的長，或高與寬某一組要素相等時，三角形的「底 \times

高再 $\div 2$ 」可獲得其面積的大小。而從比對中，也發現梯形圖形切割移補後，其「上底和下底長的和」等於 2 倍矩形的長。這些公式概念的轉化藉由比對活動的進行，掌握圖形要素的關係進而推論得到。

(二) 配合代數律則推理，協助「創造」公式概念建立

由於本研究「概念轉化文本」活動的設計，並不侷限於單一策略之使用，因此學生能發展出多樣的方式進行解題，其中以梯形面積的解題活動最具代表。梯形由於是複合圖形，隨著切割策略的運用，可呈現多種形狀圖形的組合，要計算其面積大小，除了需明瞭這些部分圖形的既定公式外，尚需將這些公式結合起來組合成最精簡的模式，也就是梯形的公式，這種連結及組合的歷程，若透過代數有關的結合律和分配律等律則的引導，將有利於梯形公式的理解。

本研究發現，對於利用分割方式探求梯形面積公式方面，學生會將梯形分割成一個平行四邊形和一個三角形的組合，因為平行四邊形的面積公式是「上底 \times 高」，三角形的面積是「底 \times 高，再 $\div 2$ 」，若要將兩個圖形合起來算出它的面積，就需要將（上底 \times 高）與（底 \times 高 $\div 2$ ）兩個圖形的面積公式組合起來。要達成此歷程，學生需理解「上底 \times 高」，若要和後面的「底 \times 高 $\div 2$ 」一樣的話，則可以變成 2 個「上底 \times 高再除以 2」，因為有兩個上底，拿出一個和這個底合起來就可變成梯形的下底，它們同時都要 \times 高 $\div 2$ ，可以把這個抽出來，面積公式就變成了「（上底+下底） \times 高 $\div 2$ 」。

另外，本研究也發現有些學生會將圖形切割成三個一樣的三角形，因為三角形的面積是底 \times 高 $\div 2$ ，把它們的高和 $\div 2$ 先抽離出來，剩下的三

個底，其中兩個加起來等於原來梯形的下底，另一個底則等於梯形的上底。可以將兩個三角形的面積合起來，這個組合的面積是「 $(\text{底} + \text{底}) \times \text{高} \div 2$ 」， $(\text{底} + \text{底})$ 等於梯形的下底，所以可以變成 $\text{下底} \times \text{高} \div 2$ ，另一個三角形面積為「 $(\text{上底} \times \text{高}) \div 2$ 」。三個圖形合起來推演出面積公式為「 $(\text{上底} + \text{下底}) \div 2$ 再 \times 高」。

許多學者（陳銜逸，1996；楊瑞智，1997；譚寧君，1995；1998；1999）認為面積概念的教學，幾乎強調公式為唯一的學習規範，課程的設計是以公式的導出為教學核心，忽略了解題歷程中空間結構與抽象符號間關係的連結和意義化。從本研究作業的表現可以發現學生採用兩種模式進行三角形或梯形面積公式的推論：一是透過兩個全等圖形的合併，形成矩形的結構，再 $\div 2$ ，這種方式是結合了圖形比對和重構策略轉化成面積公式推論的方法；另一種模式則將梯形或三角形予以切割成數個典型的部分圖形，再將這些部分圖形的公式透過代數計算的方式，整合為一個複合的圖形公式。這兩種方式皆可透過先前簡易圖形公式計算所得結果的組合，而獲得面積大小的量。

（三）創造心（圖）像，提供面積解題重要基礎

面積公式可用來解決面積大小的問題，是種簡便有效的方法，但在日常生活所面對的圖形中，有些物件之相關要素，像是農地或田野，其邊長很大，無法進行實地覆蓋、測量的時候，就需透過圖形的「結構化」與「創造」，將原有之圖形要素，以「相似性」的特徵，將圖形要素長度依比例縮減，轉化成合適之圖像表徵「結構」，「創造」出具有相同意義的結構，讓學生將實際現象抽離轉化成數學計算的模式，將有利於面積

公式的運用。本研究之「概念轉化文本」設計為了讓學生能夠將圖形表徵與面積公式計算聯合成一有意義活動，不單只是以公式來解題，尚能理解圖形面積大小的意義，因此提供問題情境，以檢驗學生是否能利用圖形心像，縮減實際之圖像成為紙上之表徵，以利公式計算。

圖形心像對於面積概念的發展與運用是非常重要的，Pirie 與 Kieren(1994)認為「心像」可以提供概念深層轉化的基礎；Freudenthal (1983)主張結構是根據個人的需要而來，因而結構間只有豐富與貧乏的差別，沒有孰先孰後的劃分，強調的是結構間轉化能力的培養，幾何概念的獲得必須要透過行動才能產生，在這個過程中，「心像」則扮演了非常重要的角色。根據 Fischbein (192004)的圖像概念理論所言，當在處理幾何圖形的活動時，學生是同時並且內在地擁有圖像和概念特徵兩者心智的建構，圖像和概念兩個要素之間的完美切合轉化連結，依然可以保留其本身的特質。

從學生作業的表現發現，學生會將問題情境相關的圖形要素的邊長，同時採取單位互換的方式予以比例的縮減，抽離實際情境要素成為解題表徵的線索，幫助解題成功。例如梯形農地上底 8 公尺可以化約成紙上的表徵為 8 公分，下底 10 公尺，則轉變為 10 公分，高 9 公尺，則成為 9 公分，再利用公式計算出其面積的大小。這其間，面積單位量的互換，容易造成混淆，所以仍須透過單位量轉化的活動，像是 1 平分公尺等於 10000 平分公分的操弄活動，讓學生理解面積單位量的轉換。由於學生已經知道長度單位之轉換，也理解正方形面積之公式意義，因此從「1 公尺×1 公尺」等於「100 公分×100 公分」的歷程中，獲知面積單

位的轉換意義。

(四) 利用計畫與監控能力成功解題

本研究「面積概念轉化文本」的設計，除了誘導學生理解圖形面積的大小，可用公式加以計算求得外，並提示要求學生在公式運用執行的過程中，仍須計畫如何解題的步驟以及找尋相關解題的線索和資訊，如此才能在有限時間內，正確有效的完成解題作業。在這歷程中，學生首先需辨識圖形的類型，是否合乎某典型圖形的特徵，再配對其面積公式。再者，是否能夠正確的提取記憶中圖形的概念化公式，而此能力則與學生是否真正理解圖形公式的由來及其所代表的意義有關；最後，要監控測量的技巧與數字的運算，才能正確無誤的算出答案。從學生活動的表現來看，本文活動的設計，確實能提供學生面積概念轉化的機會。

貳、圖形與面積解題成就概念保留的效果

教學實驗結束後十週，學生參與延宕測驗「圖形與面積解題成就測驗(I)」獲得的結果，顯示出較教學實驗結束時之成就測驗後測平均成績退步的現象，唯幅度不大(實驗組平均分數由 67.71→66.12，控制組平均分數由 57.47→55.06)。由資料分析比較，實驗組學生在教學實驗後成就測驗(II)後測上的得分，集中於 60 至 89 分之間，計 27 人，而控制組學生得分則集中於 40 至 69 分之間，計 25 人。經過教學實驗結束十週時間後，學生在延宕測驗的成績分配亦集中在此範圍內(各 24、25 人)，並無顯著差異。透過單變量共變數分析，達到顯著水準，且從其它分測驗之統計資料深入分析，發現實驗組學生在「圖形辨識與表徵」、「圖

形重構策略」與「面積公式理解與運用」概念保留的表現也較控制組為佳。對於此現象，可從「訊息處理理論」相關論述與「文本設計的關係」加以探討。

一、實驗組學生與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「圖形辨識與表徵」概念保留上，有顯著差異存在

實驗組學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」「圖形辨識與表徵」延宕測驗的分數，經排除前、後測共變量影響，加以單變量共變數分析，發現兩組學生之面積概念保留的效果有顯著差異存在，且優於控制組學生面積概念保留的效果。探究原因，在於本研究「概念轉化文本」設計的「圖形辨識與表徵」活動內涵可促進往後相關學習活動的轉化與連結，並且提供「搜索機制」、「抽離要素」、「經驗遷移」等重要功能，茲說明如下：

(一) 提供認知搜索機制、利於要素辨識、比對

實驗組與控制組學生在「面積相關要素測量」、「面積圖形重構」與「面積公式與運用」等概念保留之間的差異達到顯著，探究原因，在於「概念轉化文本教學」安排之「圖形分類」活動，提供了各類圖形要素比對的機會，除了讓已經具備圖形基本概念的學生容易提取記憶資料加以辨別、深化記憶外，另提供初學者要素比較的線索，而歸納出圖形重要的特徵；然而「一般文本」設計只提供單一圖形，對於圖形的分類辨識，唯有靠教師或同儕的陳述性知識才能獲得，在基模的習得與自動化的歷程上就顯得較困難。Kiel(1989)指出，「概念」的建構在本質上是事物的相關性分類，如果在不了解概念間是如何產生相關的情形下要去了

解一個概念，是不可能的。因此，「概念」是對一組具體的事物或是觀念想法的共通性分析，其強調不同事物間的相關性與相異性之比較。

在認知心理學界，很多的嘗試利用基礎的刺激特徵去辨識物體，一種為視覺探究作業，要求受試者從一組分散的圖形題目中，尋找一個或更多的目標；另一種為紋理分割作業，呈現許多相互包含的圖形要素，要求受試者從中辨識並區分其種類 (Cavanagh, 1988)。本研究「概念轉化文本」設計的圖形材料在視覺的特徵控制上包含了圖形的大小、顏色、空間方向、角度與長度，以此理解並刺激學生利用圖形特徵屬性做出視覺的反應，這些反應能協助學生進行比對、分類與包含的關係運作，進而對同類屬性的圖形加以命名。

(二) 導引由外而內搜尋、比對，抽離要素屬性

本研究「概念轉化文本」設計的「圖形辨識與表徵」活動除了能刺激具有經驗的學習者運用、提取有效之認知基模進行圖形分類、命名活動外；更能協助初學者利用線索的比對，抽離圖形相似要素特徵，而辨識圖形之類別。研究發現，大部分的學生會先透過圖形「外在特徵」進行辨識，像是先以圖形的邊長是否等長此要素特徵為主，作為分類的比較依據，這是視覺最容易觀察到的特徵。當此種外在條件不敷解釋而產生侷限性時，學生會擴展圖形要素的範疇，針對「角度」此一要素或統合其它要素，進行（內在特徵）更深層要素的探索與區辨，加以連結運用作為分類的依據。這樣的歷程，與 Piaget (1967) 和 Clements 等人 (1996) 所提出的空間要素抽離相關的理論，以及認知心理學強調的型態辨識的作用相符合。亦即學生藉由各類圖形型態的存在，從圖形部分

的特徵辨識開始，經由要素的區分和組合，瞭解圖形整體的要素關係後，才能把一個圖形和另一個圖形根據其特徵加以分辨，進而確認這些圖形是什麼、代表什麼，也才能形成面積的結構概念。

本研究發現，學生對於圖形特徵的辨識，雖能利用視覺方式，判斷出各個圖形特殊的差異處，但需利用數學語言進行表達時，卻產生了困難和錯誤，原因是學生對圖形的特徵要素不清楚或具不完整概念所造成。從圖形辨識及分類教學互動的歷程中可以發現：學生對圖形特徵所具備的「初步了解」會影響後續「心像塑造和具備」的進行，學生若對圖形的特徵元素具有正確的概念，且能利用數學語言流暢的表達，除了可理解其對圖形或面積概念理解的程度，也能幫助他（她）建立或越過「心像塑造和具備」的層次，利用已建立的「基模」進行圖形的辨識和分類。這種「基模」是對圖形相關元素整合後，所形成的一種心智結構，協助學童面臨相似的分類問題時，自動化的提取相關的解題策略解決問題，這種「完形的組織」機制的運用，在三角形分類活動中可詳見一般；相較之下，對圖形相關元素概念「初步了解」不足或產生無法統合問題之學生，除了說明表達過程中，所使用之數學語言會有語意不清或是誤用的現象，其在「心像的塑造與具備」層次上，也會顯現出錯誤的對應，或停滯不前。但這種與典型圖形所具備之元素不同的認知衝突，透過同學間的辯證、詰問，或是教師的誘導、刺激，像是「特徵的注意」等活動的提示與練習，可予澄清、改變。

（三）提供舉一反三，經驗遷移的機會

本研究概念轉化文本的設計具有「統整」學習經驗的功能，因此，

學生可將圖形的辨識與分類活動所學習的策略與技巧，同時整合圖形的「邊」與「角」的元素，進行更精確的辨識與分類，當面對需具有相同解題模式之相似性的問題時，學生亦能加以運用解題。從三角形要素的辨認與分類的活動，可以發現學生在三角形的辨識與分類的表現，與先前四邊形圖形的分類相比較，就顯示出流暢順利多了，這是先前經驗類化、遷移產生的結果。

相關的研究指出，當參與者能夠經由作業探索相似的線索時，那麼將會增加作業的表現 (Keane, 1989; Ross, 1989)。Salomon 和 Perkins (1989) 針對如何去擴展基模和獨立探索新奇與熟悉作業之間了解的連結，他們在轉化的歷程間區別了兩種形式，一為「低層次的遷移」(low-road transfer)，這必須藉由外在、不同的練習才能完成。它發生後，可以作為在新的情境自動引發已經學習過的或可控制的刺激而產生行為這樣的功能。另一為「高層次的遷移」(high-road transfer)，相較之下，圖形與面積的解題則屬於「高層次的遷移」，它包含了法則精細的抽離，可以運用在不同的情境或是作業上，「高層次的遷移」需要個體去形成或探索這些在轉化和熟悉的作業之間連結的抽離，這種遷移的檢驗是種「自覺的抽離」(mindful abstraction)。所謂抽離法則，是在不同的法則範例中辨認出一種基本的「特質」(quality) 或是「型態」(pattern)，在形成抽離的歷程中，個體需要刪減、排除不同範例中與需要抽離範疇無關的細節，這些抽離為了避免特殊的情境的限制，所以是以抽象的形式表徵出來，因此可以運用到不同的範例或是橫跨不同的狀態。因為抽離，或是基模這種機制，包含了相關的個案、範例，所以

可以提升轉化。

經過圖形的辨識與分類活動，學生在面積概念上有關圖形要素的「初步了解」、「心像的塑造與具備」和「特徵的注意」等層次上，可謂具備了基本的知識與技能，這是指導學生抽離圖形相關要素，進行表徵重要的步驟。為了讓學生能夠更加掌握到表徵時，圖形元素所具有重要的特質，表徵的歷程可透過視覺觀察、圖形比對以及工具測量的方式，配合數學語言的溝通，以釐清學生迷失的概念，並建立驗證的態度。

二、實驗組與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「相關要素的測量」概念保留上，無顯著差異存在。

實驗組學生經「概念轉化文本」教學後，其在「相關要素測量」概念保留的效果上與接受「一般文本」教學之控制組學生比較，並無顯著差異存在。主要原因，可從兩方面加以探討：其一在於實施之「圖形與面積解題成就測驗」施測時間的限制，影響實驗組學生教學訓練呈現的效果。本研究概念轉化文本設計之「方瓦排列覆蓋活動」可以促進學生測量能力與技巧的增進，提升面積概念的獲得，唯先決條件需提供學生充分時間操弄，才能見其成效。其二，本研究實施之測驗內容有關「相關要素測量」之試題，以「角度」和「長度」測量為主，與「方瓦排列覆蓋」並無直接關聯，因此實驗組學生較難展現教學效果；且本研究成就測驗施測時間僅限 50 分鐘，在有限之時間欲完成測驗試題作答，勢必侷限方瓦覆蓋排列策略的思考與運用，所以上述兩項原因造成實驗組與控制組學生在「相關要素測量」的概念保留上，沒有顯著的差異存在。然從本研究概念轉化文本設計教學活動歷程的觀察，「方瓦排列覆蓋」可

以提供往後面積概念學習有關之「空間結構形式的連結」和「解題線索的提供」兩個層面的功能，茲加以說明如下：

(一) 方瓦排列覆蓋可以連結圖形空間結構的形式

概念轉化文本安排之「方瓦排列覆蓋」活動可以引導學生利用先前「圖形辨識與表徵」相似的「特性注意」之習得，建立起探討圖形空間結構的「形式」，這些「形式」包含了利用分、合、移、補圖形的策略或技巧，將圖形轉化為利於覆蓋的型態；另一「形式」，則為「部分—整體」關係之運用，即明瞭覆蓋的過程中，完整覆蓋所用之單位量數目與圖形面積大小有關，因此需要正確無誤的把圖形完全地覆蓋住，而要完成此項作業，則需要將方瓦「部分—整體」交互使用。這些學生心智的運作與 Battista 和 Clements (1996) 兩人主張的方瓦覆蓋作業的心理程序是一致的。當學生發現排列覆蓋可以將物體的空間結構化後，結構化可以抽離用來組織物體的集合，進而創造實體行動連結的順序，在以後如計算方面的操作，可被當作是基模的內容。概念轉化文本設計的「方瓦排列覆蓋」活動，主要目的在於引發此種基模的建立，因為它是結合了方瓦個數與空間大小的計算關係，只要學生熟習此基模的運作，即可藉由乘法結構，計算出圖形面積的大小。研究發現，實驗組學生在此測驗上的表現優於控制組，在於方瓦排列覆蓋構築了圖形行、列間方瓦的數量與空間大小關係的連結。

(二) 方瓦排列覆蓋提供觀察解題線索

概念轉化文本活動提供了學生利用「觀察」解題的機會，「觀察」是種複雜心智的表現，不僅需要具備「同中求異」分類、區別物體特徵或

概念的知識與能力外，尚需擴展對物體「異中求同」之整合貫通的技巧和能力。為了要達成這樣的能力發展，繪圖或許能被視為是種將心像結構化的思考，或被視為是學生「做」排列結構心智影像的引導，Reynolds 和 Wheatly (1996) 根據學生鋪蓋方瓦作業的發現，孩子們在描繪相同區域的覆蓋活動時需包括： 建構物體形狀的心像； 針對所要描繪的圖形建立有效的覆蓋步驟； 進行覆蓋； 建立重複型態的覆蓋； 連結型態和覆蓋的關係。

本研究概念轉化文本的設計，在「方瓦排列覆蓋」的過程中提供了「做」與「觀察」的機制，「觀察」除了可以刺激學生提取記憶系統中的要素線索外，尚可以協助學生在圖形方瓦覆蓋的過程中，由矩形行、列覆蓋方瓦形成的乘法結構計算得出單位方瓦的數量，便於各類面積公式「同構」的瞭解與轉化，「觀察」更有助於學生理解方瓦之單位量大小與圖形空間結構的關係。「形式化」與「觀察」能力和技巧的培養，需透過實際之操弄，面對認知衝突，思索應對之解題方法和策略，才有所成，這也是一般文本教學單獨採用「講述法」教學較難達成的目標。因此，為了提升學生幾何能力的層次，「形式化」與「觀察」活動的設計，可成為面積概念轉化教學過程的重要內涵。

三、實驗組與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「面積圖形重構」的概念保留上，有顯著差異存在。

實驗組學生經「概念轉化文本」教學後，其在「面積圖形重構」概念保留的效果上較接受「一般文本」教學之控制組學生為佳，主要原因，可從概念轉化文本設計的「面積圖形重構」活動提供的「多元解題技巧」

和「同構要素的轉化」兩個層面加以說明：

(一) 圖形重構策略可提供學生多元解題技巧

概念轉化文本的活動分為兩部分，一以矩形為「前置結構」，讓學生操弄圖形的比對，而發現「等積異形」的概念及其影響的因素；另一為，利用方瓦覆蓋形成的「乘法結構」理解構成面積公式相關要素的關係，並結合圖形重構策略計算出圖形面積的大小。研究發現，有關學生利用給予之方瓦為條件，計算圖形的面積大小，其使用的策略也呈現出多樣化，但亦有共同之處，即大多數學生會重構圖形為「矩形」的結構，再用「點數」或「乘法結構」，計算面積大小。

從作業資料也發現，學生利用「乘法結構」方式計算面積大小能力的發展，與採用「覆蓋」或是「測量」的技巧作為解題的方式有關；若採用覆蓋技巧方式計算面積的大小，學生易受視覺圖形的影響，採用點數的方式計算；利用測量技巧方式計算面積的大小，學生基本上已知圖形空間結構中「長」與「寬」和單位量方瓦的關係，但是會因「單位量」角色代表的意義，影響乘法結構計算方法的運用。若是學生知曉圖形空間結構長寬和單位量有倍數的關係，則會利用乘法結構解題；若學生只是將單位量作為圖形上複製的依據，而不明瞭其間可轉化為倍數的關係，那麼則需透過教學的引導，協助學生發現，才能轉化面積計算的問題。

(二) 轉化「同構」要素，建立「等積異形」概念

學生經過概念轉化文本分合、移補策略的運用，可以發現重構後的圖形其外部的形狀與矩形一樣，而理解不同形狀之圖形其面積可能相

等，因而習得「等積異形」的概念。但要深入理解影響等積異形概念有關要素的概念，非讓學生經由操弄經由測量圖形內部的要素像「底」與「高」等，發現其和矩形的「長」與「高」等內在要素相似，透過圖形之間「等高」、「等底」要素的「同構」性才能獲得驗證。本研究「概念轉化文本」設計採取方瓦完全排列覆蓋圖形的方式，讓學生思考何種策略利於簡化圖形之複雜度，而解決方瓦的排列運用，從中獲得圖形重構的策略。

本研究發現，從先前的比對活動中，學生已將「矩形」視為前置結構，因為具有與方瓦直角的相同結構，且能完整地進行覆蓋，因此可以當成學生圖形重構的目標「結構」，這對於運用此種策略解決面積計算的問題使非常有幫助的。為了驗證學生是否能夠結合等積異形概念與圖形重構策略，加以運用在面積大小的計算，本文本設計特別要求學生利用方瓦操弄以求得圖形面積的活動，期待學生能針對圖形的特徵，先思考、簡化問題，再利用策略解題，而非馬上利用公式解題。在利用方瓦覆蓋平行四邊形求出其面積的活動中，學生已知運用矩形的圖像做為「前置結構」，因此會重構平行四邊形的結構成為矩形圖形，並利用矩形之「長」、「寬」等與乘法結構的關係計算出平行四邊形面積的大小。

四、實驗組與控制組學生經過不同文本教學實驗後，在「面積公式理解與運用」概念保留上，有顯著差異存在。

實驗組學生經「概念轉化文本」教學後，其在「面積公式理解與運用」概念保留的效果上較接受「一般文本」接學之控制組學生為佳，主要原因，可從「概念轉化文本」設計的「面積公式理解與運用」活動提

供的「知識與技能之結合轉化」和「認知負荷的縮減」兩個層面加以說明：

(一) 面積公式理解與運用結合多項知識與技能之轉化

圖形面積公式的理解對小學五年級的學童來說，是有其困難度，從作業歷程觀察，許多學生反應面積公式推論的活動困難且無聊，且不易理解。研究者深入探討，發現主要原因在於學生欠缺公式整合及轉化的能力，這些能力除了與典型圖形面積公式之使用時機之理解外，特別與「代數」的律則，像是「結合律」與「分配律」的運用有關。然而，這些律則是他們之前尚未學過的技巧，突然接觸，顯得有些窒礙難懂。這些律則的理解，仍須讓學生透過「觀察」與「結構化」的程序，才能連結組合其間的要素，歸納出抽象的心智規則。因此，圖形間的要素與代素間的規則，在面積概念上的教學是相輔相成的，教師仍須提供機會幫助學童演繹出此項法則。本研究設計之面積概念轉化文本藉由前述圖形重構策略的運用，鼓勵學生運用多元解題技巧，透過圖形之「比對」與「測量」方式，讓學生發現圖形面積公式之間要素的關係，進而推論其公式中「底」和「高」與「矩形面積公式」的關係，而明瞭公式之來源與意義。

(二) 多元策略之使用，縮減解題歷程上的認知負荷

圖形重構策略的使用，會影響學生公式推理的思考模式和層次。從學生作業中發現，學生會將重構「矩形」圖形結構的策略，運用到各式圖形公式的探討與推理，對學生而言，這是最常使用也最容易推演公式來源的方法。以梯形圖形公式的推演為例，學生利用複製另一個全等的

等腰梯形，將兩個等腰梯形組合成一個平行四邊形後，很容易就可以發現上底、下底、高與矩形面積公式間的關係，推演出概念化公式；若將梯形圖形切割成與「矩形」不同的圖形，像全部是三角形或是一個三角形配合平行四邊形等，則學生需增加認知處理的層次，將圖形之間的公式做「同構」的程序，讓彼此的公式能夠統合為一，其間需要有合適的轉化步驟，那麼學生才能較容易理解圖形面積公式的來源和意義。因此，教師在梯形面積公式的教學順序上，應先佈置與「矩形」相似的結構情境，引導學生發現基礎的公式「形式」後，再鼓勵學生從另外的層次，深入的探討其它可行的模式，以免造成認知的混淆與負荷，干擾到學習的遷移。「概念轉化文本」設計之「公式理解與運用」活動，除了鼓勵學生利用既有之解題基模，將梯形圖形切割成熟悉之典型圖形外，並鼓勵其利用尺規等工具進行測量，藉由數字之計算，理解公式中各圖形要素之間的關係，進而推演公式之意義。

第五章 主要發現、結論與建議

幾何圖形面積概念的發展是數學課程重要的內容，它可促進孩子們以有條理的方式表現和描述他們周遭生活的世界，圖形面積求法的經驗也可以幫助孩子表徵他們的內在想法，協助數學的理解，更可提升問題解決的能力，是數學及其他科目學習的基礎項目，所以其重要性是毋庸置疑的。

過去幾年來，有關圖形面積的教學，大部分都是強調以公式解題為教學的核心，強調計算能力的發展，也因為圖形面積教材設計的困難及教學引導方式的爭議，致使學生從圖形基本型態的辨識、要素的抽離與表徵、公式意義的理解與運用的轉換產生了困難，間接地影響到學生幾何概念的發展和學業成就的表現。

要如何改進小學的幾何教育，使學生建立正確的「圖形面積」之認知概念，若能瞭解兒童對圖形面積的認知概念和對概念公式如何理解與運用，則對未來幾何概念與圖形空間的學習是有許多的助益，可幫助教室裡的教學實務者和課程設計者發展有意義的和適合各年齡的面積概念教學規劃，更有助於設計具啟發性、適當的教學活動，促進學生發展更高層次之幾何概念。

本研究旨在透過面積概念轉化文本的設計，進行教學實驗，以驗證

課程設計之適切性，並比較接受不同文本教學學生之圖形與面積解題成就的表現，進而深入探討學生在「面積視覺比對與表徵能力」等各項面積相關概念轉化的情形。

為達成本研究目的，首先，透過文獻探討汲取兒童面積概念發展之各學理內涵，建構學習面積的理論架構，據此設計面積概念轉化文本，包含了「圖形辨識與比對」、「方瓦排列覆蓋」、「面積圖形重構」與「面積公式理解與運用」等四項內涵活動，進行教學實驗，以探討文本設計內涵安排之適切性。其次，以文獻探討所得之結果作為實驗研究的架構基礎，經由教室的實作觀察、晤談，編製了「圖形與面積解題成就測驗（I）、（II）」等測驗工具，進行國小五年級學童面積概念發展的實證研究。研究受試對象包含了實驗組學生 34 名，控制組學生 32 名。研究調查所得資料，依照研究設計，分別探討各有關因素之差異情形。在資料處理方面，以單因子共變數分析考驗實驗組與控制組在「圖形與面積解題成就測驗（II）」上的差異（以圖形與面積解題成就測驗（I）成績為共變量）。經排除前測影響，先考驗兩組學生在整體測驗上表現差異的情形；接著，分析考驗兩組學生在各分測驗上表現差異的情形，以驗證研究假設一。

其次，仍以單因子共變數分析考驗實驗組與控制組在延宕測驗「圖形與面積解題成就測驗（I）」上的差異（以圖形與面積解題成就測驗（I）、（II）之前後測成績為共變量）。經排除前、後測影響，先分析考驗兩組學生在整體測驗上之概念保留差異的情形；接著，分析考驗兩組學生在各分測驗上概念保留差異的情形，以驗證研究假設二。

再次，以「圖形與面積解題實作與訪談問卷」調查接受概念轉化文本教學之學生在面積各項相關能力轉化表現的情形，歸納整理其解題的策略與方法，以驗證研究假設三，並做為教師教學的參考依據。最後則根據文本教學的效果、學生解題策略的運用，提出面積概念之教學模式。

本章就上述研究所得的主要發現，綜合歸納成結論；並依結論做成建議、俾供認知發展、數學教育、課程發展與教學設計者之參考。

第一節 主要發現

本研究首要目的在於設計有效之面積教學文本，研究者依據文獻資料的探討，歸納、整理出學童面積概念發展必須具備之能力與技巧，發展出「面積概念轉化文本」，其內涵包括了「圖形辨識與表徵」、「方瓦排列覆蓋」、「面積圖形重構」和「公式理解與運用」等四項活動，以培養和提升學生幾何相關層次的概念與能力。為了驗證設計之文本效果，乃進行教學實驗，並針對實驗學生施以「圖形與面積解題成就測驗」，以比較其能力與概念保留的效果，根據實證研究結果，得到下列幾項發現：

壹、面積概念轉化文本設計方面

藉由第二章文獻探討提及的面積學習材料與教學實務上的缺失，研究者認為要改正此種偏頗，需針對整個面積概念教學歷程的文本設計進行分析，公式概念的學習必須包含面積的「圖形視覺比對與表徵」、「線性測量」、「圖形重構」與「公式理解運用」四個內涵（如圖 16）始能完

備，這些內涵則需包含察覺、轉化、解題、溝通、評析等能力表現的活動，且在面積重構的操作上，它們是依次呈現且具有學習的順序之分的。

「面積概念轉化文本」的設計主要的目的，希望學生能夠經由圖形視覺比對、表徵，利用正方形單位量測量、覆蓋、排列矩形的活動後，具體理解空間結構與乘法之間的關係，而了解到圖形的面積與公式符號的意義。因為公式的連結運用是面積概念學習最終的目標，除了設計連貫的活動引導學生透過點數測量、以及單位面積覆蓋、拼湊、比較與切割等特定圖形面積公式直線測量概念之外，還包括作圖、單位量的測量與轉換，及面積的包含關係等，如此學生才能成功、正確地獲致面積公式的概念。面積公式概念的習得，並非只靠學生的記憶，仍需透過教學推演的過程，各個公式間的關聯性才能掌握，也唯有透過面積概念的轉換，公式的教學才有意義。

貳、圖形與面積解題成就表現方面

一、學生之圖形與面積解題成就表現，會因不同教學文本處理而有差異

(一) 就整體測驗表現而言：

1. 實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗(II)」上的表現有顯著的差異，接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制學生成就表現較佳。

(二) 就部分測驗表現而言

1. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生與接受「一般文本」教學的控制組學生在「圖形辨識與表徵」的表現上並無差異存在。
2. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積相關要素測量」上的表現上為佳。
3. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積圖形重構」上的表現上為佳。
4. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積公式理解與運用」上的成就表現為佳。

二、學生之圖形與面積解題概念保留，會因不同教學文本處理而有差異

(一) 就整體概念保留而言

1. 實驗組與控制組學生在「圖形與面積解題成就測驗 (I)」的單因子共變數分析比較上有顯著的差異存在，接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在面積概念保留效果的表現為佳。

(二) 就部分測驗概念保留而言

1. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「圖形辨識與表徵」的概念保留效果為佳。
2. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生與接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積相關要素測量」的概念保留效果並無顯

著差異。

3. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積圖形重構」的概念保留效果為佳。
4. 接受面積「概念轉化文本」教學的實驗組學生較接受「一般文本」教學的控制組學生在「面積公式理解與運用」的概念保留效果為佳。

參、就圖形與面積解題策略與方法方面

實驗組學生接受「概念轉化文本」教學後，除了解題成就能力之表現較教學前為佳外，在面積概念轉化的歷程及解題策略與方法的運用，與教學前比較，呈現出多元進步的現象，茲歸納總結如下：

一、「圖形辨識與表徵」策略與方法方面：

(一) 圖形辨識

1. 圖形要素的表徵能與生活物件配對

學生以生活經驗所接觸的事物，並應用想像力，呈現出多樣不同具有圖形特徵的心像表徵。

2. 透過教師適當協助，可正確描繪數學概念語意

透過教師引導及圖形外部特徵觀察，能發現要素間的關係，深入理解後，能加以詮釋，且能適切利用數學語言將概念溝通連結。

3. 能抽離重要要素、整合後定義圖形概念

透過形式化及結構化的運作，將圖形要素抽離整合，並用精確的數學語言描述該圖形定義。

(二) 圖形表徵

1. 迅速成功表徵圖形的形狀

能將各類圖式形成心像，加以比對應用，迅速、正確的表徵出指定條件的各類圖像。

2. 圖形表徵及比對策略呈現多元化

學生幾何釘板各類圖形認知表徵較教學前呈現進步、多元的現象，其表現可區分為 以點為基準向外擴張型， 以線段為基準向外擴張型， 直觀型， 計畫型等類型。

(三) 圖形比對

1. 圖形大小比對技巧純熟

以長方形圖式作為疊合之「前置結構」，進而運用分割移補策略，比較圖形面積的大小。

2. 比對策略多元有效

學生各類圖形比對作業的表現較教學前有效且呈現多元現象，其解題策略可歸類為 不規則方式的比對， 以矩形要素為基準之重構比對， 以其它圖形要素為基準之重構比對， 要素測量進行比對等類型。

二、面積相關要素測量方面：

1. 轉換成乘法結構協助覆蓋方瓦之計算

利用方瓦排列覆蓋方式，理解空間行列與方瓦數量關係，轉移點數方式為乘法結構進行單位量的計算。

2. 覆蓋策略呈現多元方式

學生方瓦排列覆蓋實作使用的策略較教學前正確且呈現多元解題表徵，其解題策略可歸納為 不規則排列覆蓋， 移補圖形排列覆蓋， 直接排列覆蓋， 單位量比對排列覆蓋， 相關要素測量排列覆蓋等

類型。

三、圖形重構策略方面

1. 視圖形特性進行分割移補作業

透過方瓦覆蓋圖形的作業，藉由圖形特徵要素的比對，理解與方瓦特徵相似的圖形便於方瓦覆蓋和計算。

2. 配合公式正確計算大小

透過圖形重構策略，轉化圖形成為與先前經驗配對之典型圖形，利用簡易公式計算所需單位量數量，獲得圖形正確的面積量。

3. 學生之圖形重構策略的表現較教學前有效且呈現多元表徵

其解題策略可歸類為 分割填補法， 完整扣除法， 移補切割法， 直接切割法等方式。

四、面積公式理解與運用

學生對於公式理解採用之策略，可歸納為 要素關係比對說明， 要素關係測量等方式。

肆、面積概念教學模式

透過上述既有教學模式限制的省思與活動實施歷程發現的說明後，研究者仍維持既有之教學模式的架構，將原有之活動歷程的安排（視覺化比對、要素表徵、策略討論辯證、策略監控執行、策略檢核修正）視為學生面積概念發展必須經歷的「學習軌道」，而學習文本和材料的設計（圖形辨識與表徵、相關要素測量、面積圖形重構、公式理解與運用）則作為達成面積概念教學目標必須具備之「教學平台」，平台上匯集、整合了學生完成此活動或到達此幾何概念層次必備的基礎能力與技巧，並

擴充學習內涵，以容納和擴充學生學習的經驗，使重構之面積概念教學模式（如圖 40）更具彈性與包容性，以符應先前文獻探討中學者針對優質的幾何概念教學與課程設計的主張與教學實務的需要。

為了提供不同認知層次學生的需求，本模式分為兩種取向，一為運用於已經習得公式口訣之學生，一為尚未具備公式概念者，但各內涵活動皆包含了學習必須的重點，可依學生之認知程度，選擇合適之教學模式取向，酌以增減其教學時數之安排，教學模式依然維持著教學導引和概念轉化的歷程，期能按照幾何和面積教學的特性依序進行活動，以提升學生更高層次之知識與概念發展。

第二節 結論

本節針對前節所述研究之發現，綜合歸納本研究之結論，以作為提出建議的依據。茲敘述如下：

一、面積概念轉化效果方面：「概念轉化文本」教學活動設計融合幾何「數」、「量」、「形」的知識與技巧，可幫助學生轉化獲得較完整之面積概念體系。

本研究概念轉化文本的設計包含了「圖形辨識與要素表徵」、「方瓦排列覆蓋」、「圖形面積重構策略」與「公式理解與運用」四項活動內容，有效的將影響學童面積概念發展的相關要素予以整合，且透過「數學概念理解動態理論」八項潛在的層次或不同階段教學活動的融合，包括「初步瞭解」、「心像塑造」、「心像具備」、「特性注意」、「形式化」、「觀察」、「結構化」與「創造」八項議題的分析，幫助學生面積概念的表現呈現

連貫性，能從圖形要素辨識分類，抽取相關圖形要素，進而轉化達到最後公式意義發現的目標，可以說明及驗證概念轉化文本設計之效果。

唯活動之實施，需橫跨數週時間，在既定及有限之教學期間，教師尚須教導其它數學內涵之活動，若要貫徹面積完整的教學歷程，恐產生排擠其它課程學習的困擾，研究者認為要解決此項困境，方法有二，其一為將概念轉化文本活動的內容劃分為四個教學階段，在同一學期分別授予「圖形分類與表徵」、「相關要素測量」、「圖形重構策略」、「公式理解與運用」，以提升「概念轉化文本」之教學成效。另一設計則融合「數」、「量」、「形」相關內涵的數學活動，將面積概念發展之重要內涵配合其他數學活動同時實施，連結並運用有效的知識，實際解決數學問題。

二、面積解題能力表現方面：接受「面積概念轉化文本」教學的學生其面積解題成就表現或概念保留皆較控制組學生為佳。

實驗組學生接受「概念轉化文本」教學後，在「圖形與面積解題成就測驗」上之表現皆較控制組學生表現為佳，且呈現顯著差異，從分測驗的得分加以分析，可以發現概念轉化文本所強調與面積概念發展相關的因素如圖形分類、要素測量、排列覆蓋、等積異形與公式運用等與控制組學生相較，其表現顯著的由於控制組學生的表現。

雖然上述能力是影響面積概念轉化與習得的重要內涵，透過「概念轉化文本」活動的設計與教學，展現出某程度的效果，但若要讓學生達到精熟與經驗遷移的境界，仍須配合提供額外時間的練習，才能精進解題的策略與技巧的運用。另外，在學生解題歷程中，呈現的解題態度與數學信念亦是影響學生成就表現的重要因素，教師除透過有效之教學策

略引導學生順利解題外，仍應積極的提供解題成功的機會，培養學生喜愛數學的興趣，並能闡述解題歷程的概念與知識。

三、面積解題策略應用方面：「面積概念轉化文本」教學活動設計的測量、比對、操作可促進學生對公式意義的明瞭及轉化運用。

從學生面積公式推論的歷程發現，學生受限於經驗與認知層次之差別，分別會採取「要素比對」或「要素測量」等方式進行公式推理的活動，獲知公式的意義。若遇到像梯形圖式的問題，部分學生會利用全等的梯形圖式相互倒立連接求出公式，有的則會利用分割圖式成部分圖形，再組合其面積公式成複合圖式之公式。

不論其運作方式如何，此階段皆須利用代數之結合律或分配律，轉化連結各部分圖形公式成為原來完整圖式之公式；若學生欠缺運用此等代數律則的能力，那麼將影響公式之正確推論與運用。觀察大多數學童能熟背公式口訣，唯不懂其意義，實與推論的技巧和能力有關，因此課程設計應將代數有關面積概念發展的能力，融合相關的學習活動內，幫助學生藉此而提升幾何概念理解的層次。

四、圖形辨識與表徵方面：接受「面積概念轉化文本」教學後，學生具備完善的圖形視知覺能力，正確抽離圖形要素，可提昇面積解題成就。

「概念轉化文本」的設計提供學生經由操弄、比對的步驟，發現圖形面積相關要素的關係，進而形成「等積異形」與「乘法結構」的概念，轉化成代數公式以解決面積問題。

從歷程觀察，不管是圖形型態辨識認知的發展，或是解題策略的運

用，學生在完形組織法則的引導下，除可縮減搜尋資訊的認知負荷外，尚可依學生個別經驗的差異，呈現出顯著多元的表徵方式，有的學生可達到 Van Hiele 所言之形式驗證階段，但仍有學生尚處於視覺辨識階段，無法理解公式的含意，這些表現雖可將圖形相關概念發展的資訊提供教師教學及診斷補救時的參考，唯在教師有限的資源與時間限制下，如何針對個別差異的現象，提供有效且普遍性的教材與活動設計，值得深入探討。

五、 認知概念保留方面：接受「面積概念轉化文本」教學活動可強化圖形重構策略，提升「等積異形」面積保留概念。

「概念轉化文本」提供圖形重構的活動，除引導學生建立圖形重構策略的能力外，並經由分割移補圖形的方式發現「等積異形」的概念，以作為「乘法結構」概念的基礎，進而能推論面積公式之意涵。雖然所建構的這些能力與技巧是透過典型圖式的變化所得，生活情境中的圖式並不完全如教學實驗提供的模式一樣，這些情境亟需概念與能力的協助，配合解題策略的轉化，才能正確且有效的解決日常生活情境有關面積計算的問題。因此，透過多重變化的實物操弄，讓學生運用此等能力與遷移至真實的問題情境進行問題解決，亟需補充，以加強其效用。

六、 情意與信念方面：「面積概念轉化文本」教學連結學生面積概念重要活動與機制，可激發學生幾何學習的動機和興趣，提升幾何能力的發展。

「面積概念文本」設計提供的單元活動各有其教學重點，內涵重複性低且具連貫性，因此容易吸引學生學習興趣與動機的維持，並透過學

生操弄比對的方式，獲得實作的經驗，增強記憶效果。

面對實際問題情境時，大部分學生皆能利用所學之知識技能，解決問題，然而有少部分學生認知概念仍固著於某階段所學之知識，堅持此種方法並擴及運用所有情境，例如將所有圖式皆轉化成矩形結構，利用其面積公式來計算，無法彈性有效的區辨問題特徵，以致於誤用。數學問題並非孤立分割的議題，它與生活環節息息相關，彼此連結，是生活情境中最明顯用來解題或是最有趣的方法，因此，問題情境的辨識與解題策略的運用教導，在課程安排與設計上，值得重視。

七、教室學習風氣方面：「面積概念轉化文本」教學設計促進教室討論風氣的養成，可提升學生幾何知識溝通及表達能力。

「概念轉化文本活動」的設計採小組合作解題的方式，透過同儕間的討論、辯證而獲得正確的面積概念，從教學實驗互動的歷程觀察，學生透過同儕間的論述、詰問與觀察，確能修正迷思與錯誤的概念，並藉由同儕間經驗與知識技能的交流、溝通與觀摩，建立並習得相關面積概念。因此，教室討論風氣的建立，對於學生知識概念的提昇，頗屬重要，值得重視。

第三節 建議

本研究旨在探討國小學生面積概念轉化文本之設計及其教學效果之實驗研究，經分析歸納已獲得上述的重要結論。據此，本研究依研究結論，就研究目的，特提出以下三方面的建議，以作為相關單位與人員從事國小學生數學幾何面積概念、認知發展與學術研究等工作之參考。

壹、課程設計方面

一、面積概念發展課程的設計應全面重視「數」、「量」、「形」知識內涵的融合。

本研究「概念轉化文本」的設計是參考面積概念發展相關理論而構築的，不同於一般文本設計將重點集中於「量」的計算，而造成了學生無法辨識圖形情境如「底」或「高」要素的條件，進而採取合適解題策略，配合正確公式解題；若能利用公式解題，亦無法推論公式來源與其意義，時日一久，其所背誦的公式口訣也就自然地遺忘或混淆，這在認知概念的學習過程上是無效的。透過本研究發現，概念轉化文本的設計雖然和「一般文本」一樣，以各種圖式的面積公式之習得為面積概念教學的最終目標，唯在學習歷程設計了整合「數」、「量」、「形」與面積概念發展有關的內涵活動，引導學生學習，最後轉化至代數公式的獲得，從學生圖形與面積解題成就的表現，可證明這設計對於提升學生幾何概念層次的發展是有意義的。因此，面積概念的活動安排宜將有關的圖形、數量和代數活動加以連結，學生才能獲致完整有用的面積知識與解題技巧。

二、面積概念學習材料之編排應以學習目標為鵠的，採取「螺旋式」銜接方式，依幾何概念發展層次扶搖直上的方式，建立完整的幾何概念體系，以提升幾何能力層次。

從教學實驗研究發現，參與「概念轉化文本」教學之實驗組學生，自始至終，皆保持著高昂的動機與興趣，迎接每階段教學問題的挑戰；

而參與「一般文本」教學之學生雖開始與實驗組學生一樣，呈現高亢的興趣，但至教學實驗終了前幾次的活動則露出厭煩、逃避的徵象。這個差異主要來自於學習內涵編排的方式，「一般文本」採取「循環式」連結策略，每階段教材的內容大同小異，皆要求學生對圖式進行表徵、測量與計算，不似「概念轉化文本」的設計採取螺旋式編排，先將各圖式相關學習內涵整合，按認知能力與教學目標發展軌跡，設計不同但具連貫性的學習任務，在每階段中呈現不同學習活動，依教材之新奇性與創作性維持學生動機與興趣，促進學習效能。此種課程設計模式，可提供未來相似文本設計的參考。

三、面積概念發展的課程安排應佈置實作、操弄的機會，連結視覺辨識至代數推理一系列連貫學習的活動，以提升幾何層次發展。

依文獻中學者的建議以及教學實驗研究的結果，幾何概念的習得與提升，最好的方式是透過實作、操弄的活動，幫助孩子建立有關的知識和技能。從本研究發現，學生經由上述方法的教學與引導後，其在面積概念相關能力的表現上皆優於偏重講述法之「一般文本」教學之控制組學生的表現；且可發現經歷比對、表徵、測量與切割等活動經驗之學生，其延宕測驗面積概念保留的表現亦較良好。因此，有關幾何面積概念發展課程的設計，宜盡量安排「做」的活動，讓學生從辨識→概念保留→驗證的歷程，建構紮實的面積概念體系。教師則能從刺激→誘導→確認，協助學生發現及建構有意義的幾何知識。

四、面積課程內涵宜配合學生經驗範疇、結合生活情境問題，激發學習興趣與動機，以驗證面積概念學習的重要性。

任何數學概念的習得，最重要的是要能與生活結合，運用於生活情境中，解決面對的問題。概念轉化文本的設計即植基於此項理念加以設計而成，不獨重視量的計算，也強調形的辨識、分割與組合，以理解等積異形保留概念，並透過乘法結構而推論公式意義，這些活動的設計和安排，皆與學生生活的運用息息相關，學生可透過相關策略與能力的表現，進行多重方法解題，提升了面積概念學習的效能。因此，課程的設計安排應朝向鼓勵學生多元能力表現的機會，建立積極有信心的態度。

五、依實際情境及學生個別差異之需要，修正與重構面積概念發展教學模式，以配合教學進行。

從上述可知，面積概念轉化文本的設計具有課程上的優勢，學生可藉由圖形的辨識與表徵、方瓦排列與覆蓋、圖形比對及操弄轉換，發現相關要素的關係，並透過策略的引導，建立面積保留概念，理解面積公式意義，並能運用於問題情境。這些提升學生幾何概念所應安排的學習環境，除依教學模式實施外，在圖形辨識與表徵活動方面，應安排多種不同的範例及非範例圖形，針對其圖形特徵提供學生討論機會，進行比對分類，引發學生參與興趣，減低認知負荷；其次，鼓勵學生發展數學語言進行幾何圖形特徵的描述，解釋圖形歸類的條件及要素，進而內化形成心像，作為面積解題的基礎能力。透過操弄及巡視監控的環境，培養轉換、組合及分解圖形的技巧，提升數學經驗，發現等積異形概念。

安排測量工具之運用與單位量之複製技巧，並將測量技巧運用於實際生活情境，結合數量要素與面積概念公式，發展堅固幾何概念。

貳、教學輔導方面

一、教師應本著耐心、信心，在學生面積概念發展的歷程中，等待孩子認知的成長，不可抹殺學生各種不同的觀點與表現。

從面積概念發展教學實驗中，學生操作表現觀察的紀錄顯示，學生建構某一面積相關概念或解題技巧，需要長時間的醞釀與塑造，才能成形且有效果，雖然費時不貲，但這些構念及成就是未來學習的基礎，基礎被抹滅了，則未來學習的信心與嘗試的勇氣將化為烏有，因此教師應秉持耐心和毅力，鼓勵學生堅持完成作業，並鼓勵闡釋其觀點與想法，建立正確學習態度，以探求更高深的知識。

二、面積概念發展教學的內容是無法與其他數學領域的力量分離，教學的內涵不僅要含括概念性的理解，尚且應包含解題技巧彈性及明智的運用，以及探究能力的建構和學習使用數學知識正確的態度。

從研究發現，有意義及實質性的面積概念教學，結合了兩組的歷程才能見效，一組包含了一般的解題、表徵、推理、溝通和連結的歷程，這些能力需與面積概念內涵的教導和學習編織一起，作為基本能力學習的要點，另外一組歷程則應該超越數學領域的要求，包含資訊的組織、型態化、分組組合與運用的能力，亦即好奇、創造和有意克服困境的習

性，這些態度和習慣的建立，將能有效且持久的維持幾何概念學習的動機，亦是達成數學教育重要目標的有效方式。

三、教師有關面積概念的陳述與說明應力求清晰，並鼓勵學生嘗試驗證，以促進幾何概念之發展。

從本研究中發現，學生的面積概念發展受到教師教學技巧的引導與提供知識討論與辯證活動的機會而提升。教師若能將相關幾何知識體系透過清晰與明確的指示，傳達學生推理與驗證，那麼學生概念的建立或是解題技巧的習得，將更完善。因此，教師進行面積概念教學時，除需具備豐富且正確的幾何知識外，相關的口語表達技巧與提問方式亟需加強，讓學生在合適的情境安排下，獲得有意義的幾何概念及知識。

四、教師教學前應將面積概念發展所牽涉到有關的知識層面予以統合，透過誘導、刺激與確認等方式，鼓勵學生表達與說明幾何概念。

從本研究中發現，學生對於面積概念學習的動機受到教材安排的新奇性與挑戰性影響頗重，重複且一成不變的計算易造成學生學習情緒的低落與逃避。因此，教師在教學前，宜將教科書之面積概念學習的內涵配合生活情境加以重組排列，適當安排學生認知程度之活動，提供多元嘗試的機會，運用教學策略，提振學生學習動機。

五、教師宜鼓勵學童利用符號、表格、圖形和視覺影像等多元方式，呈現面積基本概念，以促進問題解決。

從本研究中發現，兒童面積概念的建立透過視覺的比對、辨識，抽離相關要素，進而利用操作建立相關概念，並深入驗證探究，最後獲得實證的知識，是具有深層意義且不易遺忘的學習方法。因此，教師進行面積概念發展相關教學時，宜積極的運用操作機會，提供孩子連結經驗與知識運用的機制，幫助孩子遷移所學的知識與技能，以解決情境上面臨的問題。

六、教師宜布置合適、貼切的數學教室情境，安排學生在教室中合作學習及相互討論，協助學生自動獲得有關面積領域內的知識和技能。

由於現行小學數學每週教學時數為三節課，若恰逢學校重要活動之舉行，勢必要挪用既有之教學時間練習，因此會影響學生數學概念之習得與發展。因為有效幾何面積課程的設計應該花費充分及高品質的時間在幾何的教學上，但礙於時間排擠作用，教師可適時的配合單元教學，佈置對應的情境與操作材料，提供學生額外學習及練習的機會，以精熟圖形結構的轉化和公式之間意義的關聯，而讓學生自動獲得有關面積領域內的知識與技能。

參、進一步研究之建議

一、在研究的途徑上，應在「面積公式理解與運用」等概念轉化上多加關注，以改變學生只知熟記公式解題，不知其緣由及意義的困境。

由本研究結果發現，學生熟悉公式口訣後，不論何種情境，急欲以它進行解題，這對某些圖式而言是種便捷的方式，但對於複雜圖形來說，單用公式解題，常不能如願，尚須配合某些策略才能有所收穫，也因為熟記不知其推論來源，若無運用機會，時日一久即會遺忘或混淆。從研究中發現學生利用背誦公式解題主要原因是教師教學的重點強調計算為主，而忽略其意義的理解，因此在考試成績壓力下，此種解題策略因運而生，也形成了一種「密招」文化；另一問題則在於推理過程必須結合代數之結合律與分配律的運用，才能正確的組合成複合圖形的概念化公式，如何藉助「等量公理」或相關律則，配合公式推理時，學生使用的「要素比對」或「要素測量」以驗證面積公式之規則，是為日後面積概念發展探究的重點。

二、學生對圖形面積與邊長概念的混淆，在研究歷程中屢見不鮮，是受限於學生認知程度的發展，抑或課程與教材安排所致，可做深入探討。

本研究實驗過程安排了單位量邊長與面積關係變化的探討，發現學生在教師的導引下，能正確的轉化邊長與單位量方瓦大小的關係，然而透過「圖形與面積解題成就測驗」的表現，卻發現不少學生仍然採取周長代替面積解題的表現。這種現象是出於學生對於面積與周長概念的混淆，抑或受限於認知層次發展所致？課程及教學的安排是否可加以改變，以促進其區別和適當運用的能力，對於這長期困擾的議題，可再深入探究。

三、在研究變項上，可在面積相關概念上加以擴展，以促進學生幾何概念更完善的發展。

本研究探討的變項著重在學生概念保留及解題策略的探討，因此文本設計強調技巧的運用（如測量概念）及推理方式（保留概念）的導引，然而面積概念的內涵尚包含了圖形概念與估測概念，雖然本研究稍有提及，然非重點，日後研究欲進一步理解學生面積概念發展狀況，宜再增補變項，以積極建立我國小學生面積概念發展的模式。

四、為使研究控制更加嚴密、研究結果更加客觀，學生背景因素如家庭社經地位、智力發展等可融入研究設計變項，增加研究之信、效度。

本研究進行過程中，發現學生家庭社經地位亦是影響學生圖形與面積解題成就表現之一重要因素，社經地位佳者在學習歷程中，可透過其它途徑或資源，增益其學業成就的表現，而影響研究的結果；另外，隨著時間的變化所造成認知發展的影響，亦可能影響解題策略與方法應用的效能。因此，有關學童面積概念的發展，除相關變項控制外，可增補學童社經地位及智力發展的差異，探討其與面積概念發展的關係。

五、在研究的方法及工具運用上，宜再進行日常生活解題觀察的研究，以補測驗工具調查的不足。

本研究採取質化與量化方式蒐集資料，唯測驗工具設計包含的內涵偏向於制式知識與技能的運用，與生活情境問題較無關聯，因此對於學

生是否能運用及轉化其所學於實際情境，似嫌不足。雖然本研究指導教授與口試委員曾在論文計畫口試中提示修改，增補有關情境問題，以增加研究的效度，只是當時本研究相關教學活動已在進行，受試學生已經接受前測，為了維持研究之一致性與客觀性，對於文本及測驗內容並未加以修正。唯日後若欲深入探討學生面積知識轉化與遷移的表現，宜採用「生活數學」或是「情境式數學」的教學設計，加以分析驗證，以詮釋概念轉化文本的效用。

六、在研究程序上，除了採用橫斷面個別差異解題策略之比較外，可以採用縱貫式研究，加長觀察時間，以深入探討學生多階段性的變化。

本研究侷限於國小五年級學生面積概念發展情形，雖然經過文本教學實驗獲得重要面積概念與解題技巧，並能加以利用。然而日後仍會接觸相關的教材學習，例如圓面積或角柱（錐）體的表面積等，學生是否仍能以此階段所習得的概念和解題策略予以轉化、遷移，在研究文獻上尚缺乏此資料的報告，因此無法對我國學童面積概念發展做縱貫式的理解，在未來的研究設計，宜再補足此方面的探討，以能更有系統性地建立學生面積概念轉化的資料。

七、學生釘板圖形構築及方瓦排列覆蓋因能力及經驗的差異，在操作上顯現出不同之類型，其中是否有認知發展層次之分，可深入探討。

本研究發現，學生在釘板構圖及方瓦排列覆蓋的表現上，呈現出多

元的策略及方法，唯這些策略與方法層次的分類是根據學生解題成功與否和其步驟多寡而決定，雖與一些學者相關研究所發現之層次有切合之處但從認知發展及學習軌道之順序而言，是否一致，尚須深入研究加以驗證。

八、以面積公式進行解題是文化上不可跨越的鴻溝，如何結合概念、解題技巧與代數的運用，以提升學生幾何概念層次的課程設計，應多加深入探討分析，以理解及協助學生面積概念的發展。

利用公式解決面積計算問題是項簡易方便的技巧，為要發展對其意義的理解，似乎需結合多項概念與能力，如等積異形概念保留、代數之分配律才有所成，鑑於發展不易，又限於社會考試價值觀念的影響，已形成一道難以跨越的鴻溝，若要改變此偏重「計算」之文化，可由評量方式及策略加以調整改進。有關圖形幾何層面能力的發展如何評量及促進，恰為面積概念發展研究欠缺之處，因此，可結合評量及測驗的發展，一併解決及改變教學以「算」為軸心的文化。

附 錄

附錄一

面積概念轉化文本設計

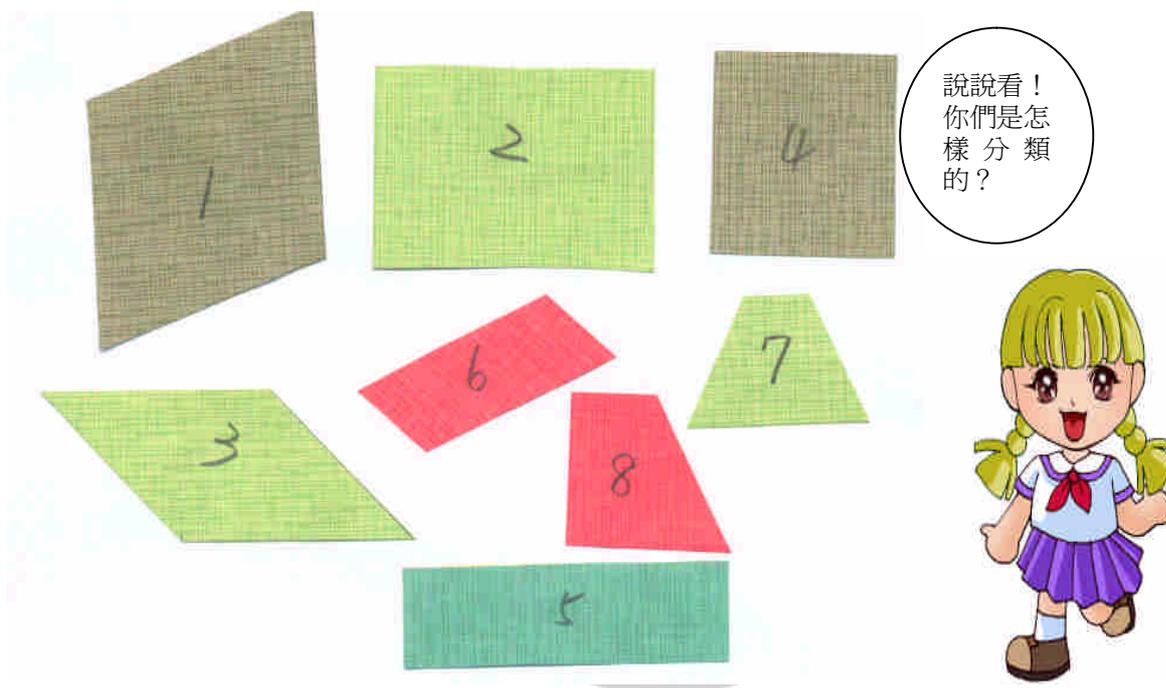


認識平行四邊形、梯形與三角形的特徵

下列有好幾種不同形狀的圖片，可以分成哪幾類？

（請用圖形中的數字，回答下列的問題）

說說看，你們是怎麼知道的？



（一）上面的圖形可以分成幾類？為什麼要這麼分？說說看？

1. ()等圖形可以放在一起，當成一類。

它們都具有 () 的共同特徵。

2. ()等圖形也可以放在一起，當成一類。

它們都具有 () 共同的特徵。

（二）還有沒有其它的分法呢？

（三）說說看

1. 什麼樣的圖形稱為平行四邊形？

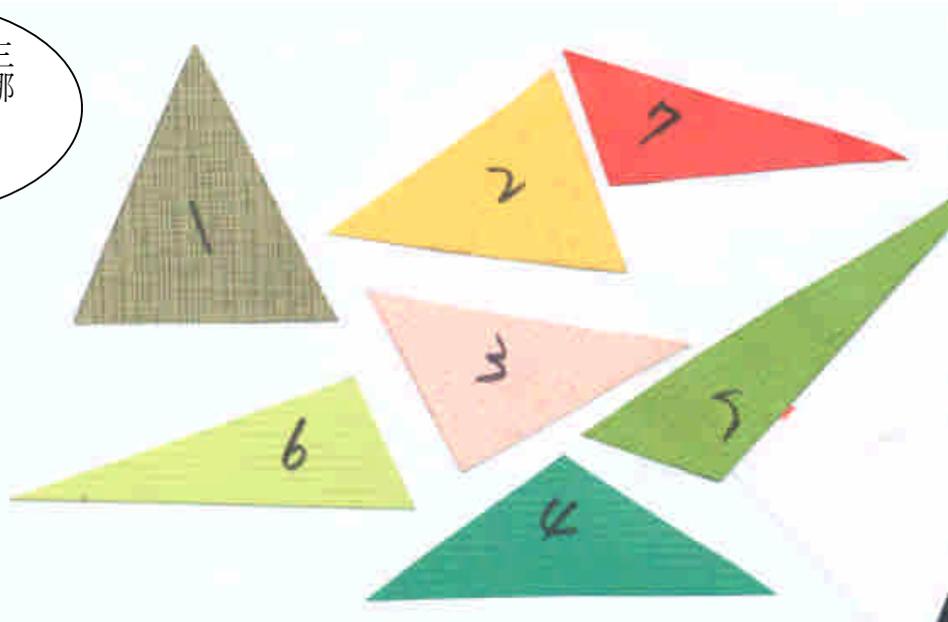
2. 什麼樣的圖形稱為梯形？

下列都是三角形的圖片，可以分成哪幾類？

說說看，你們是怎麼知道的？

（請用圖形中的數字，回答下列的問題）

說說看！這些三角形可以分爲哪幾類？



（一）上面的圖形可以分成幾類呢？為什麼要這麼分？說說看？

1. ()等圖形可以放在一起，當成一類。 ，
它們都具有 () 共同的特徵。
2. ()等圖形也可以放在一起，當成一類。
它們都具有 () 共同的特徵。

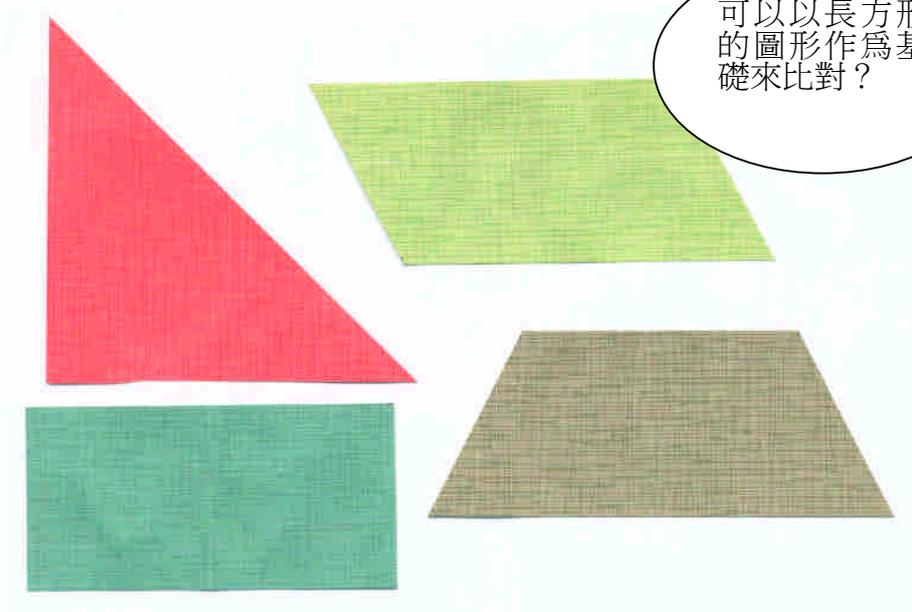
（二）還有沒有其它的分法呢？

（三）說說看，什麼樣的圖形稱為三角形？



認識平行四邊形、梯形與直角三角形的底和高

以下的圖形面積相同嗎？



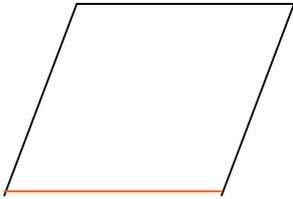
- (一) 這些圖形的面積一樣嗎？用什麼方法可以知道？
- (二) 是否還有其他不同的方法？
- (三) 分割再拼湊後的平行四邊形與長方形上下兩邊的長有沒有一樣？
這兩個邊叫什麼？
- (四) 找找看，平行四邊形的高在哪裡？
- (五) 三角形的圖形要怎麼才能變成長方形？
- (六) 三角形疊在長方形和平行四邊形上，有何地方是相同的？
- (七) 找找看，三角形的底邊和高在哪裡？與長方形有何不同？
- (八) 梯形的圖形要怎麼才能變成長方形？
- (九) 梯形疊在長方形或平行四邊形上，有何地方是相同的？
- (十) 找找看，梯形的底邊和高在哪裡？與長方形有何不同？



畫出圖形上的高

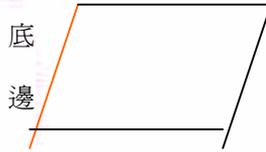
(一) 畫出平行四邊形上指定的高

1.



底邊

2.

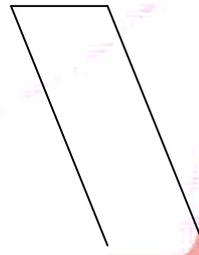


底
邊

3.



底邊

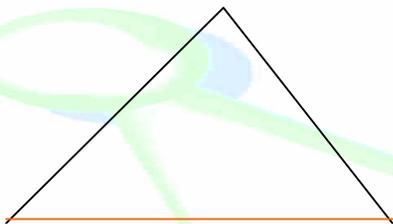


底邊

1. 平行四邊形的高與底邊有什麼關係？
2. 平行四邊形的高有幾個？
3. 用尺量量看，兩個平行的底邊一樣長嗎？

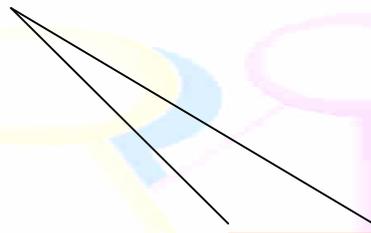
(二) 畫出三角形上指定的高

1.



底邊

2.

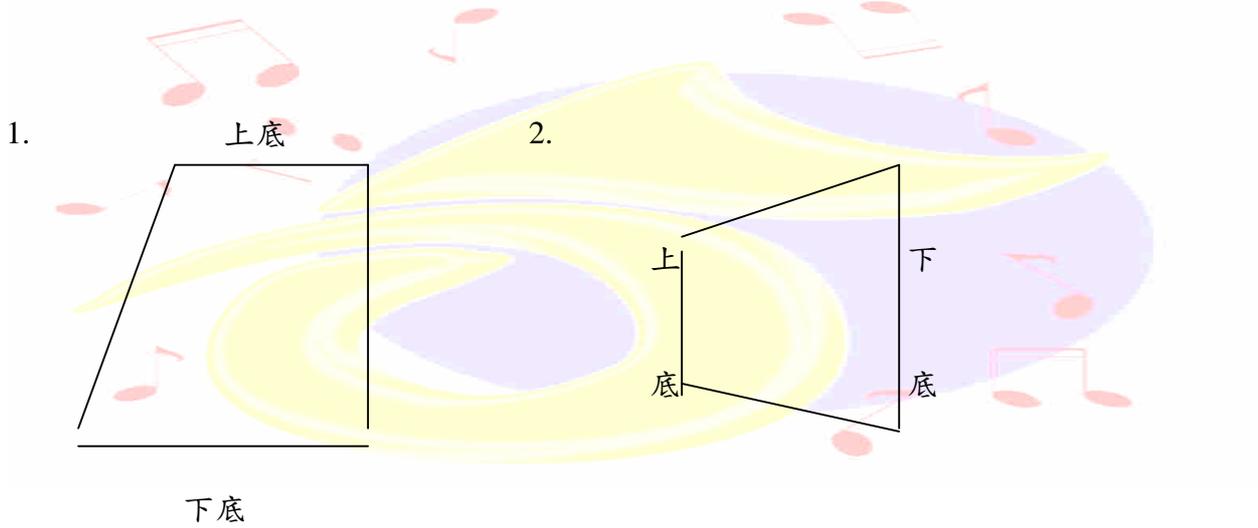


底邊

1. 三角形的高與底邊有什麼關係？
2. 三角形的高有幾個？
3. 想一想，三角形的高都會在圖形裡嗎？

(三) 畫出梯形上的高

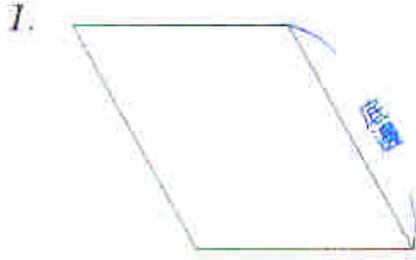
1. 指出等腰梯形的底邊在哪裡？
2. 等腰梯形的高與底邊有什麼關係？
3. 請將下列梯形中高的位置畫出來。





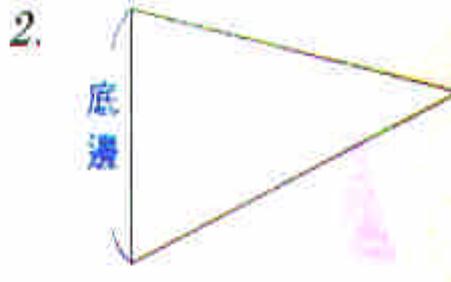
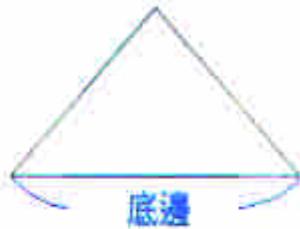
量出圖形的底邊與高有多長？

(一) 平行四邊形的底邊與高有多長？



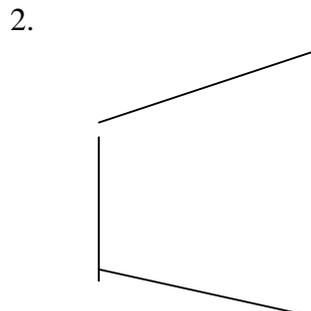
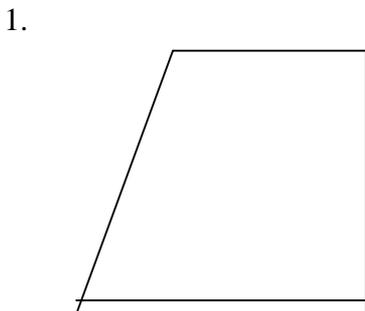
1. 畫出平行四邊形的高並測量出其長度。

(二) 三角形的底邊與高有多長？



1. 畫出三角形高的位置並測量其長度。

(三) 等腰梯形的兩個底邊與高有多長？

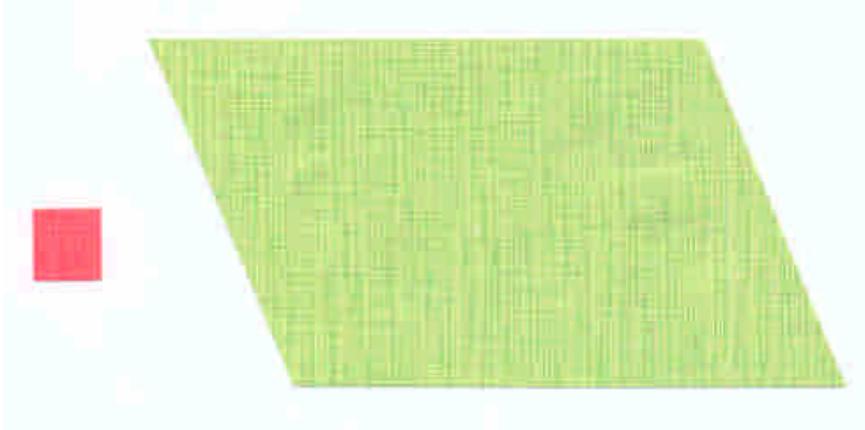


1. 畫出梯形高的位置並測量其長度。



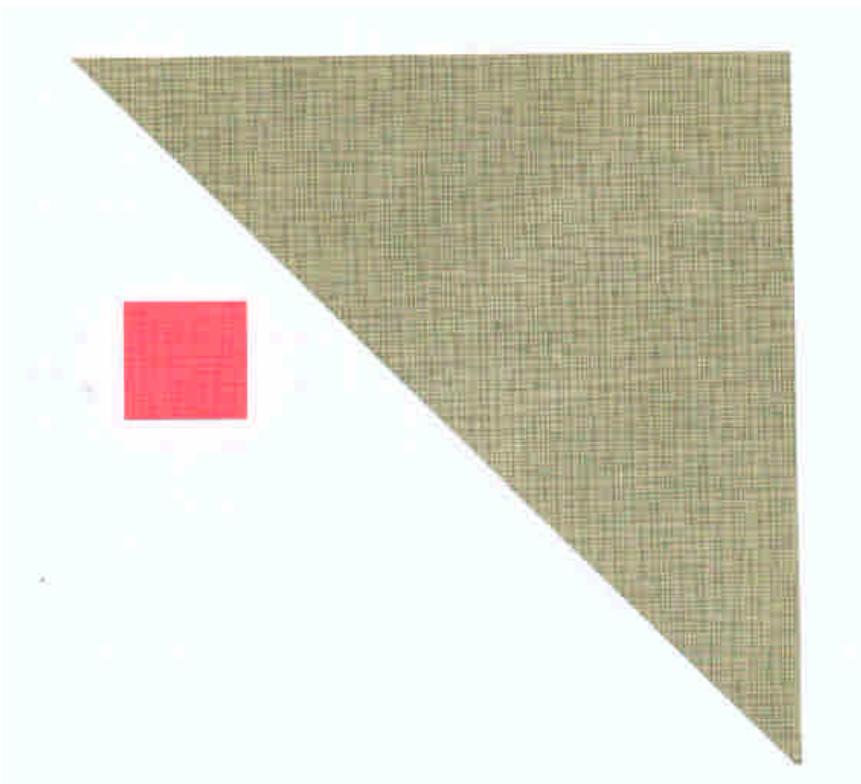
以下的圖形需用多少塊方瓦才能完全覆蓋

(一) 平行四邊形需要多少塊的方瓦，才能完全覆蓋



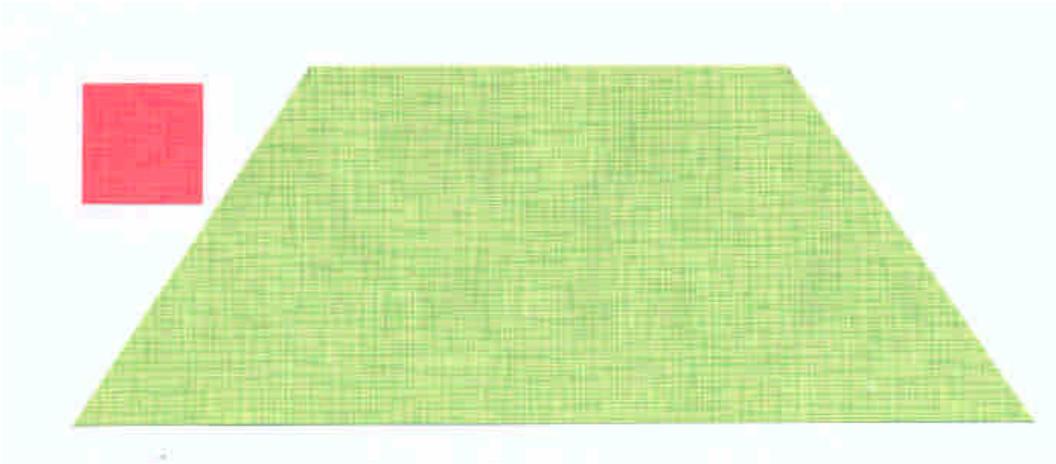
1. 想一想，如何才能將平行四邊形完全的覆蓋住？
2. 覆蓋方瓦時，需要考慮什麼因素呢？
3. 總共需要用多少塊方瓦呢？平行四邊形的面積是多少呢？
4. 量一量，平行四邊形的底邊和高有多長？面積是多少平方公分？

(二) 三角形需要多少塊的方瓦，才能完全覆蓋



- 1.想一想，如何才能將三角形完全的覆蓋住？
- 2.覆蓋方瓦時，需要考慮什麼因素呢？
- 3.總共需要用多少塊方瓦呢？三角形的面積是多少呢？
- 4.量一量，三角形的底邊和高有多長？面積是多少平方公分？

(三) 等腰梯形需要多少塊的方瓦，才能完全覆蓋

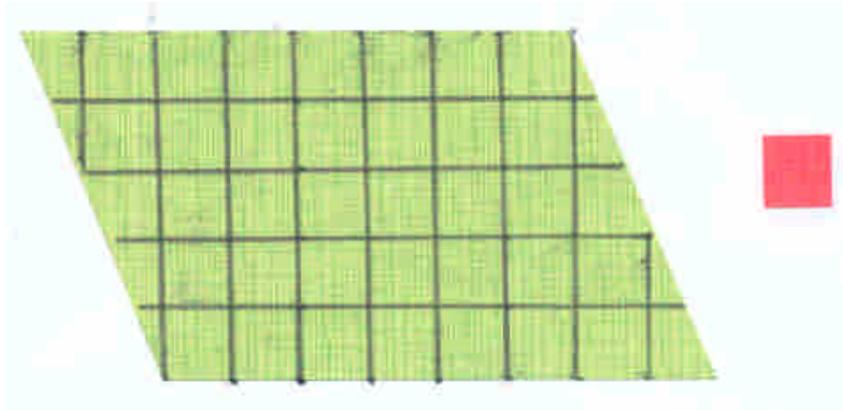


1. 想一想，如何才能將梯形完全的覆蓋住？
2. 覆蓋方瓦時，需要考慮什麼因素呢？
3. 總共需要用多少塊方瓦呢？梯形的面積是多少呢？
4. 量一量，等腰梯形的兩個底邊底邊和高有多長？面積是多少平方公分？



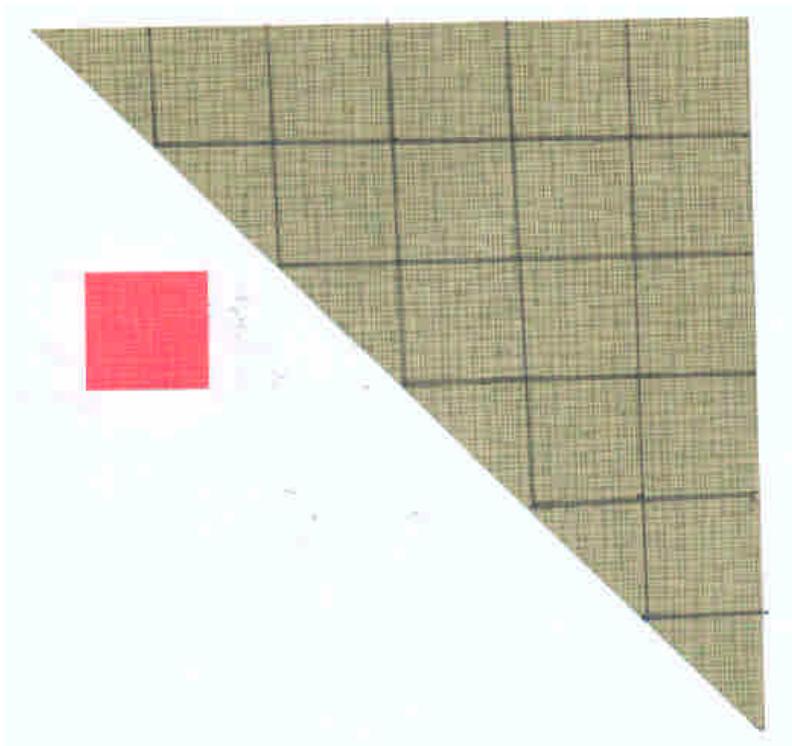
各類圖形面積公式的計算

(一) 算出下圖平行四邊形的面積



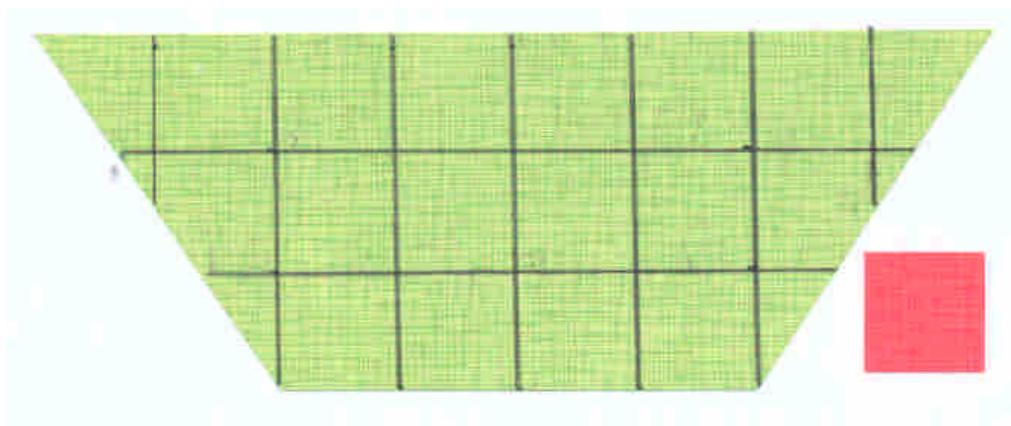
1. 想一想，如何算出方瓦覆蓋的平行四邊形的面積？有什麼方法？
2. 如何算出已有底長及高等條件的平行四邊形面積？
3. 這些方法合適嗎？可不可以找出另外的方法相互驗證一番？
4. 如何算出只有顯示圖形的平行四邊形面積？
5. 算出平行四邊形的面積需要考量哪些要素？
6. 測量時要考慮什麼因素？

(二) 算出下圖三角形的面積



1. 如何算出方瓦覆蓋的三角形的面積？有什麼方法？
2. 如何算出已有底長及高等條件的三角形面積？
3. 這些方法合適嗎？可不可以找出另外的方法相互驗證一番？
4. 如何算出只有顯示圖形的三角形面積？
5. 算出三角形的面積需要考量哪些要素？
6. 測量時要考慮什麼因素？

(三) 算出下圖梯形的面積



1. 如何算出方瓦覆蓋的梯形的面積？有什麼方法？
2. 如何算出已有底長及高等條件的梯形面積？
3. 這些方法合適嗎？可不可以找出另外的方法相互驗證一番？
4. 如何算出只有顯示圖形的梯形面積？
5. 算出梯形的面積需要考量哪些要素？
6. 測量時要考慮什麼因素？



圖形面積公式的探討

(一) 如何才能獲得平行四邊形的面積公式

1. 說說看，如何知道長方形或平行四邊形的面積公式？
2. 測量平行四邊形的底及高後，利用公式計算出其面積。

(二) 如何才能獲得三角形的面積公式

1. 說說看，如何獲得三角形的面積公式。
2. 測量三角形的底及高後，利用公式計算出其面積。

(三) 如何才能獲得梯形的面積公式

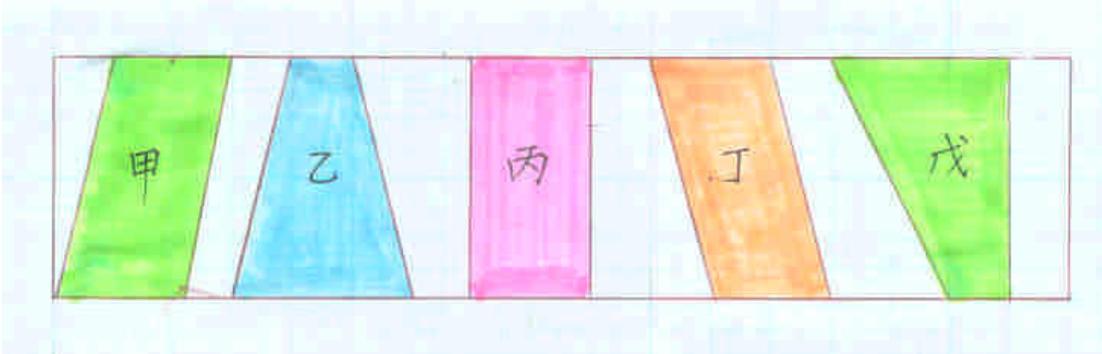
1. 想一想，兩個全等的梯形圖形如何拼湊才可以組成長方形的圖形。
2. 長方形的長與梯形的底邊有何關係？其面積與長方形的面積有何關係？
3. 想想看，還有其它的方法可以算出梯形的面積
4. 梯形的形狀與三角形和平行四邊形有何關係？



等積異形

(一) 哪些四邊形圖形的面積是相等的？

(請利用圖中的號碼豁達下列的問題)

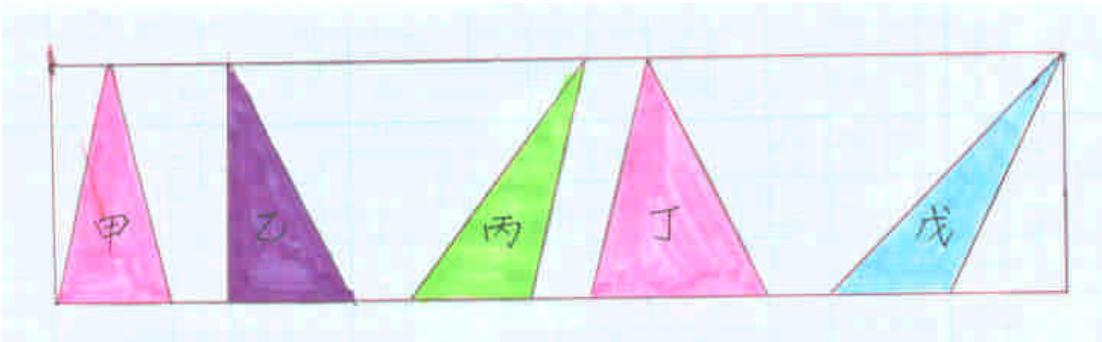


1. 這些圖形的面積是一樣嗎？可以用什麼方法得知？（

2. 找找看，面積相同的平行四邊形有哪些特徵是一樣的？

(二) 哪些三角形的面積是相等的？

(請利用圖中的號碼豁達下列的問題)

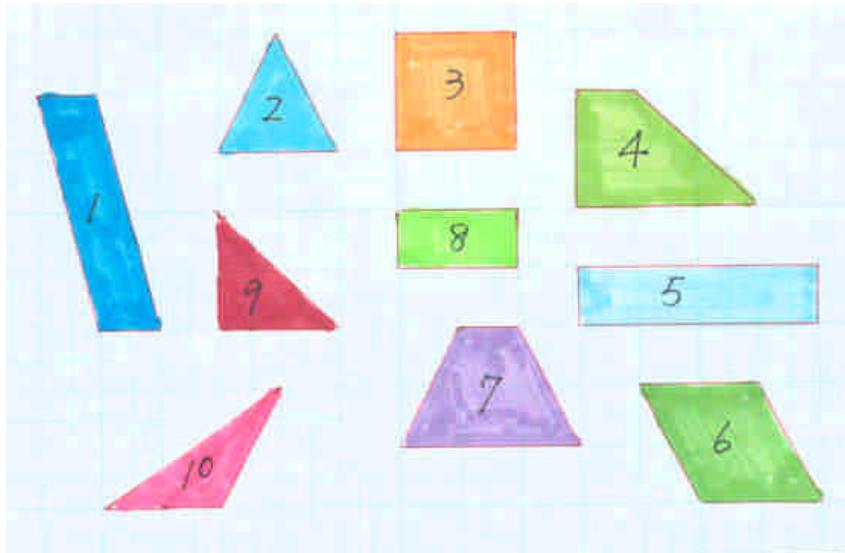


1. 這些圖形的面積是一樣嗎？可以用什麼方法得知？

2. 找找看，面積相同的三角形有哪些特徵是一樣的？

(三) 哪些圖形的面積是相等的？

(請利用圖中的號碼豁達下列的問題)



1. 這些圖形的面積是一樣嗎？可以用什麼方法得知？
2. 找找看，面積相同的三角形有哪些特徵是一樣的？
2. 想想看，面積相同的圖形，其底邊和高都相同嗎？
3. 想想看，形狀不一樣的圖形，面積可能一樣嗎？請舉出例子。



面積公式的利用

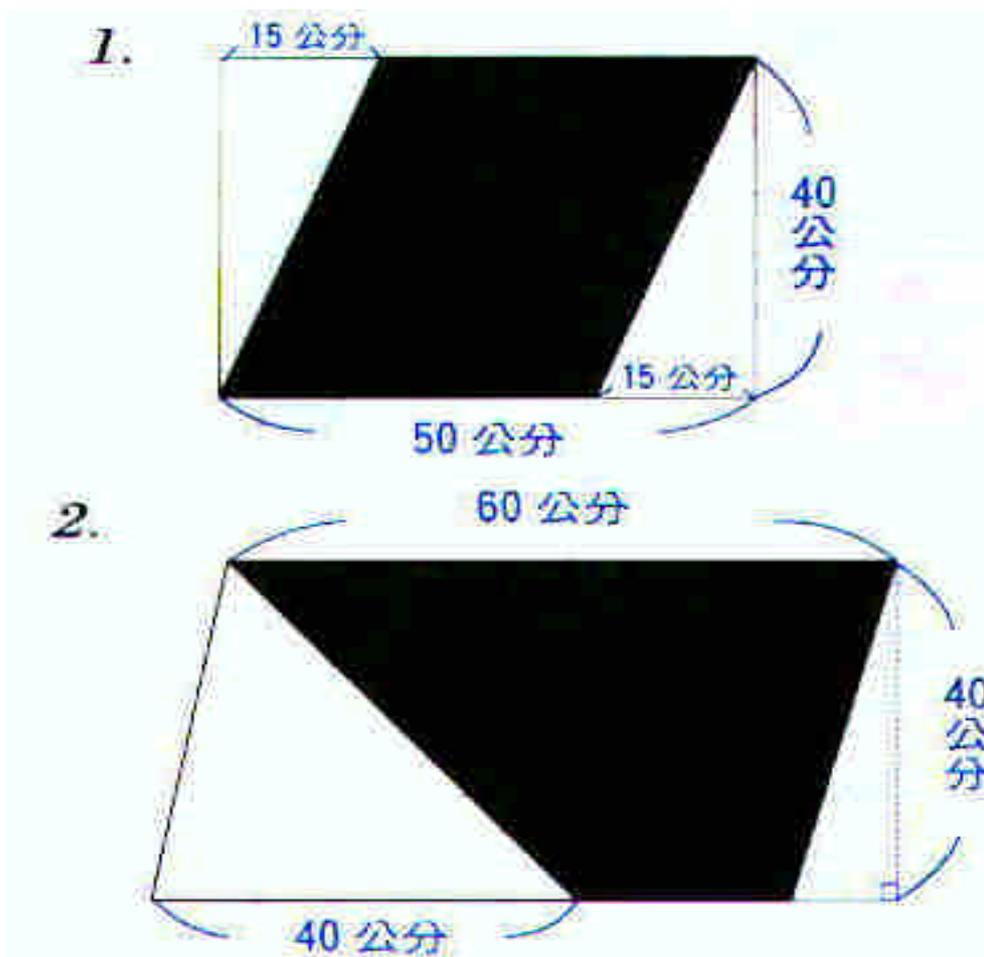
(一) 綜合練習

1. 將文字題畫圖並用算式把你做面積的方法記錄下來？

例題：陳老師有一塊上底是 8 公尺，下底是 10 公尺，垂直於兩底邊的高是 9 公尺的梯形菜園，菜園的面積是多少？

- (1) 面積的圖形是什麼形狀？計算時應該找到什麼線索？
- (2) 畫出這個圖形以及找出計算其面積重要的要素。
- (3) 利用你們覺得最方便的方法將面積求出。
- (4) 再檢查一次，這個方法是否正確？為何要用這個方法？

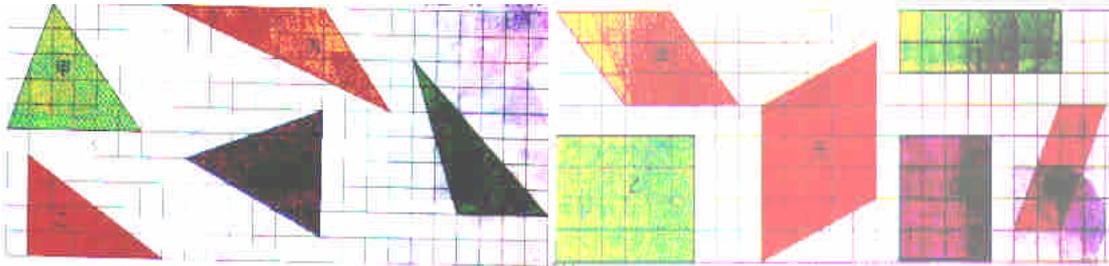
(二) 求出圖形中黑色部分的面積，並寫下你們的做法。



1. 黑色面積的圖形是什麼形狀？計算時應該找到什麼線索？
2. 計畫如何算出這個圖形的面積，並寫下你們的步驟。
3. 利用你們覺得最方便的方法將面積求出。
4. 再檢查一次，這個方法是否正確？為何要用這個方法？
5. 想一想，用這個方法有什麼好處？

(四) 哪幾個圖形的面積是相等的，寫下你們的做法，為什麼？

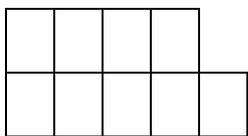
(利用圖中的數字，回答下列問題)



1. 觀察這些圖形可以找到什麼線索？
2. 利用你們覺得最方便的方法找相同的面積圖形出。
3. 再檢查一次，這個方法是否正確？為何要用這個方法？

(五) 試配合下列資料『擬題』，並請擬出數學題目來。

1. 梯形紙板面積 48 平方公分，高為 6 公分？
- 2.



附錄二

一般文本（南一書局出版）

認識平行四邊形與長方形的關係，並進行高與底的命名活動



上圖中， 表示邊長 1 公分的正方形方瓦。

將平行四邊形切割拼成長方形，平行四邊形中，上下兩個邊和長方形的長邊一樣長，這上下兩個邊叫做什麼？

長方形的長是幾公分？寬是幾公分？面積是多少平方公分？

平行四邊形的面積是多少平方公分？

【配合課本第 47 頁】

用直角三角版在圖形上畫一條垂直於上下兩個邊的線，再用直角三角版檢查是否垂直？

「同時垂直於上下兩個邊的直線，我們叫做什麼？」

把平行四邊形剪開拼成長方形，然後在和上圖疊合比較，那個圖形較大？

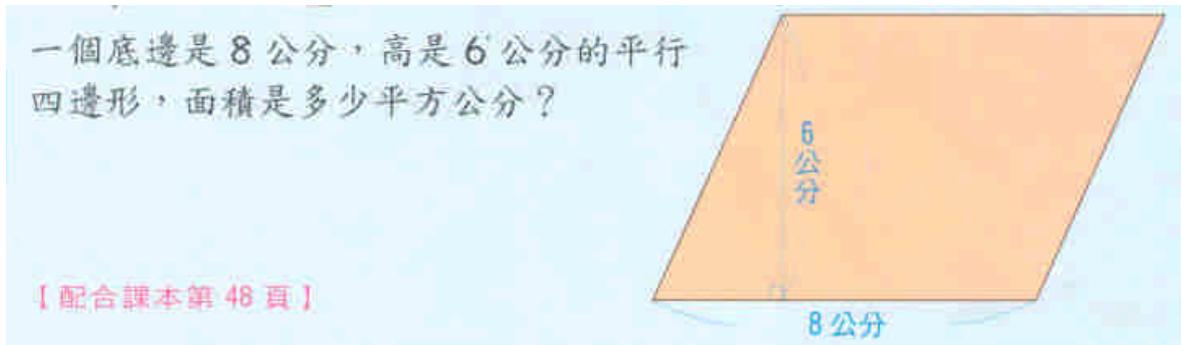
「平行四邊形的哪一邊和長方形的長一樣長？」

這個邊我們叫做什麼？

平行四邊形的底有多長，高有多長？

平行四邊形的面積有多大？

瞭解平行四邊形面積的求法公式



平行四邊形的底邊和長方形的哪一邊一樣長？

平行四邊形的高和長方形的哪一邊一樣長？

平行四邊形的面積和長方形的面積一樣大嗎？你是怎麼知道的？

平行四邊形的面積和長方形的面積是怎麼計算的？寫出算法。

想想看，如何畫出平行四邊形指定底邊上的高？

用直角三角版在平行四邊形的底邊上，畫一條垂直底邊的直線。

還有沒有其它的方法可以畫出平行四邊形的高。

平行四邊形面積的實測



要怎樣才能知道平行四邊形的高？

在平行四邊形上畫出高！

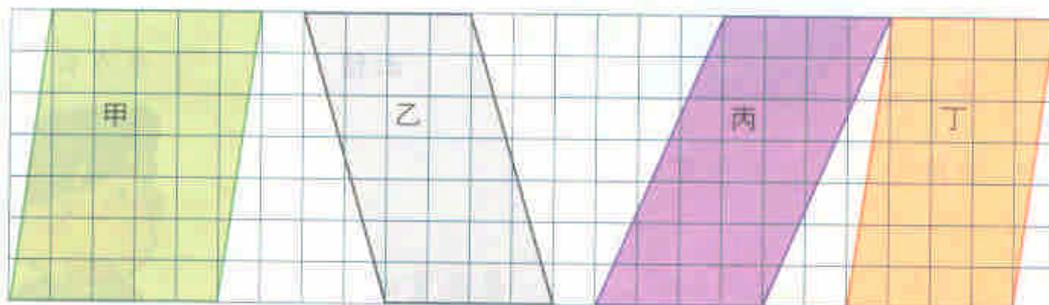
用什麼方法可以找出平行四邊形的高？

平行四邊形面積的公式為 **底乘高**

利用平行四邊形公式進行習作練習。

平行四邊形「等積異形」中底和高的關係

下圖中， 代表邊長 1 公分的正方形方瓦：



面積相等的平行四邊形是：()

甲、乙、丙、丁四個圖形都是 () 形。

甲圖形的面積為 () 平方公分，乙圖形的面積為 () 平方公分，

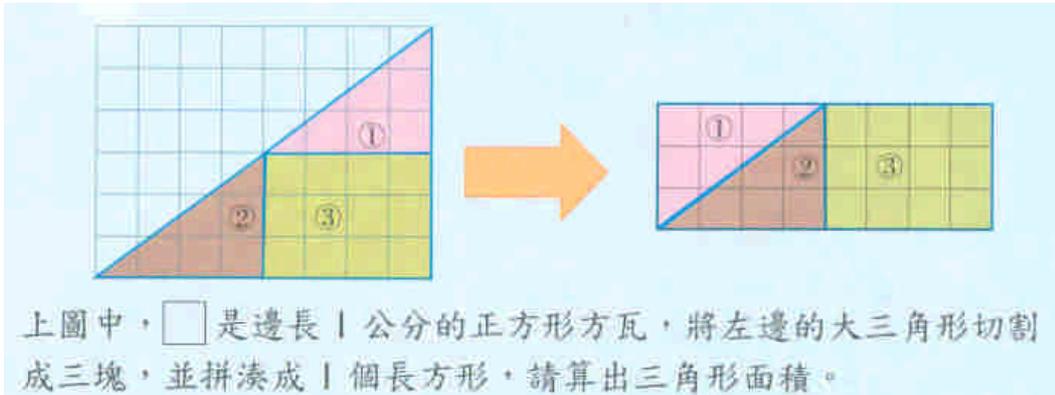
丙圖形的面積為 () 平方公分，丁圖形的面積為 () 平方公分，

說說看，這些面積相同的圖形，它們有什麼特徵是相同的？

認識直角三角形與長方形的關係，並進行高與底的命名活動

直角三角形如何形成長方形？

「還有沒有不同的作法？」



切割後的直角三角形也可以拼湊成什麼形狀？

直角三角形的面積是多少？

切割後圖 1 和圖 2 兩個直角三角形是全等的。

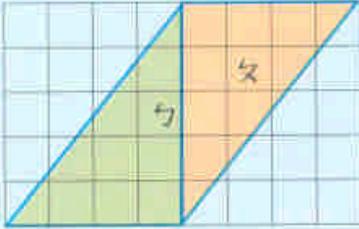
把兩個直角三角形拼湊成長方形，然後再和上圖疊合比較，那個圖形較大？

長方形的面積如何計算？面積是多少？

三角形面積的公式為 **底乘高 \div 2**

直角三角形的面積是多少？與長方形的面積有何關係？

瞭解直角三角形面積的求法公式



左圖中， \square 是邊長 1 公分的正方形方瓦，
三角形ㄅ和三角形ㄆ是全等三角形，現在把
2 個三角形組合成 1 個平行四邊形。請問：

- (1) 平行四邊形的面積是多少平方公分？
- (2) 三角形ㄅ和ㄆ合起來的面積有多大？
- (3) 1 個三角形的面積是多少平方公分？

把三角形切割拼湊成長方形，並把平方公分板放在上面。

長方形形的長有多長，寬有多長？

直角三角形的哪一邊與長方形的長相等，叫做什麼？

直角三角形與底邊垂直的另一邊，與長方形的寬有何關係？叫做什麼？



請在左圖的三角形上，畫出底邊上的高。

《配合課本第 79 頁》

畫出三角形指定底邊上的高

用直角三角板從三角形底邊上相對的頂點，畫一條垂直底邊的直線。

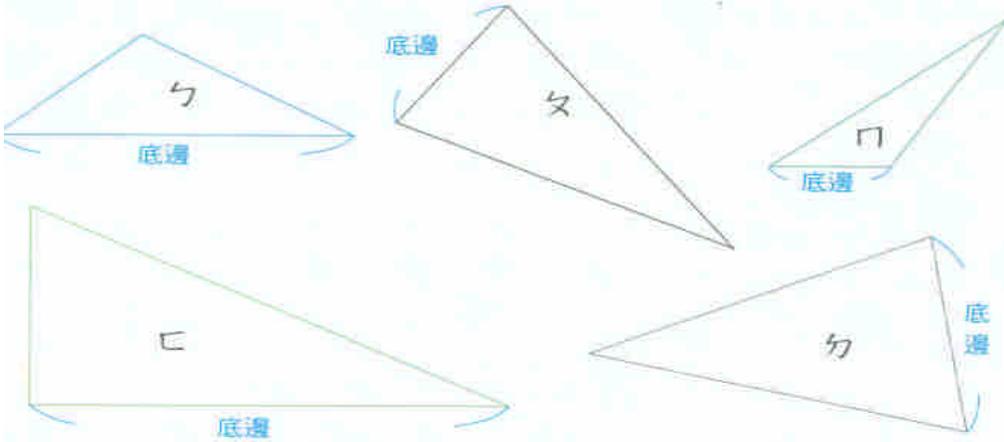
還有沒有其他的方法可以畫出三角形的高。

三角形的底邊是多長？高有多長？

三角形的面積是多少？

三角形面積的實測

畫出下圖中各三角形的高，再算出面積，並填在表格中：



填填看：

結果 項目	三角形	ㄅ	ㄆ	ㄇ	ㄏ	ㄏ
底邊 (公分)						
高 (公分)						
面積 (平方公分)						

要怎樣才能知道三角形的高？

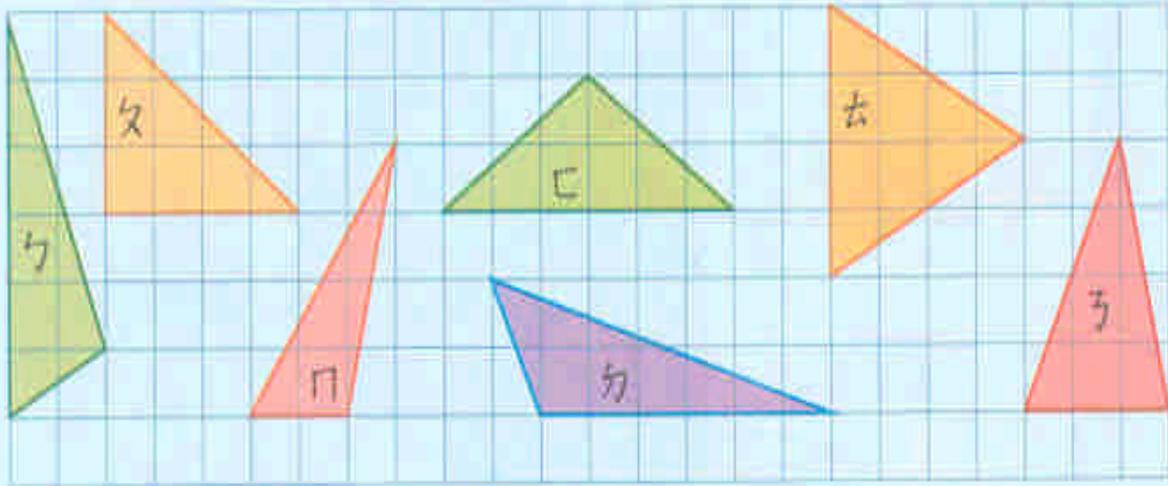
在三角形上畫出高！

用什麼方法可以找出三角形的高？

知道三角形的底和高長度，利用公式算出面積。

利用三角形公式進行習作練習。

三角形「等積異形」底和高的關係

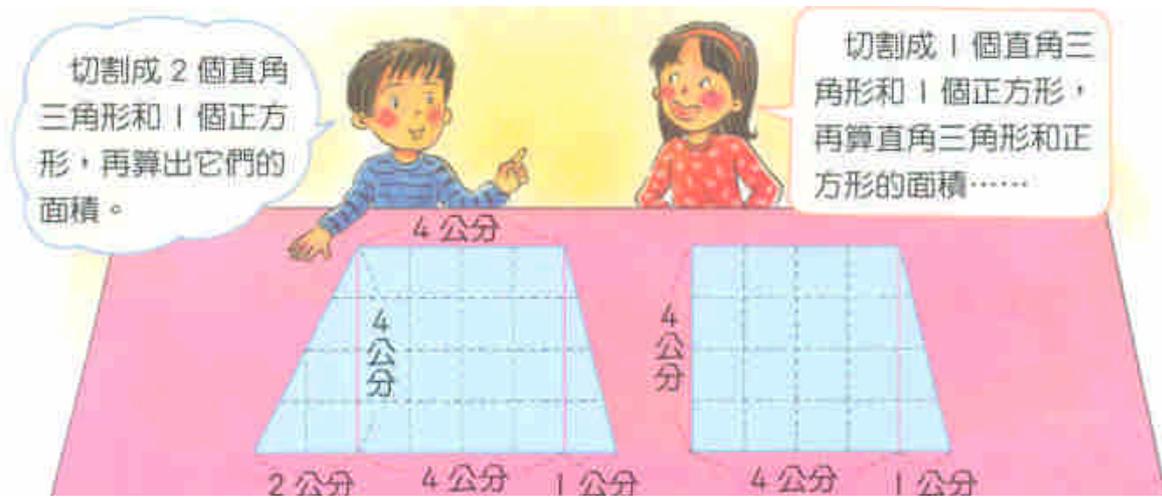


上圖中， \square 是邊長 1 公分的正方形方瓦，算算看，圖中各三角形的面積是多少平方公分？將結果填在表格中，並回答下列問題：

- (1) 哪幾個三角形面積相等？
- (2) 哪幾個三角形的底邊一樣長，高也一樣長？它們的面積都相等嗎？
- (3) 面積相等的三角形，它們的底邊都一樣長，高也一樣長嗎？

《配合課本第 81 頁》

認識梯形，並進行面積計算的活動



梯形可以切割成什麼形狀的圖形，而方便算出它的面積？

「有沒有不同的作法？」

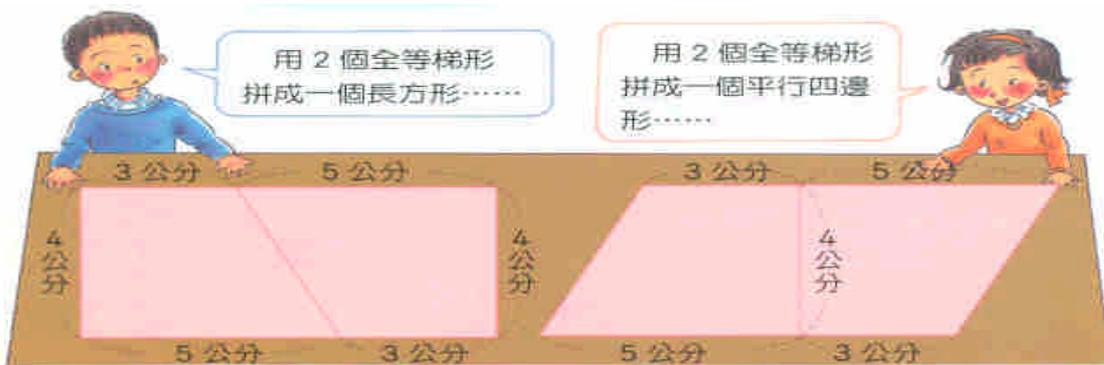
切割後的梯形面積是多少？

梯形如何才可以拼湊成長方形或平行四邊形？

長方形的面積如何計算？其面積是多少？

梯形的面積是多少？梯形和長方形面積有何關係？

瞭解梯形面積的求法公式



把兩個梯形拼湊成長方形，並把平方公分板放在上面。

長方形的長有多長，寬有多長？

梯形的底邊如何組合才能與長方形的長相等，叫做什麼？

梯形與底邊垂直的另一邊，與長方形的寬有何關係？叫做什麼？



$$\begin{aligned} \text{梯形面積} &= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2 \\ &= (4 + 6) \times 4 \div 2 \\ &= 20 \text{ (平方公分)} \end{aligned}$$

用直角三角板從梯形兩底邊上，畫一條垂直底邊的直線。

還有沒有其他的方法可以畫出梯形的高。

梯形的兩底邊各是多長？高有多長？

梯形的面積是多少？

梯形的面積公式為 $(\text{上底長} + \text{下底長}) \times \text{高} \div 2$

梯形面積的實測與應用

 陳媽媽有一塊上底是 8 公尺，下底是 10 公尺，垂直於兩底邊的高是 9 公尺的梯形菜園，菜園的面積是多少？



要怎樣才能知道梯形的高？

在梯形上畫出高！

用什麼方法可以找出梯形的高？

知道梯形的兩底和高的長度後，利用公式算出面積。

利用梯形公式進行習作練習。

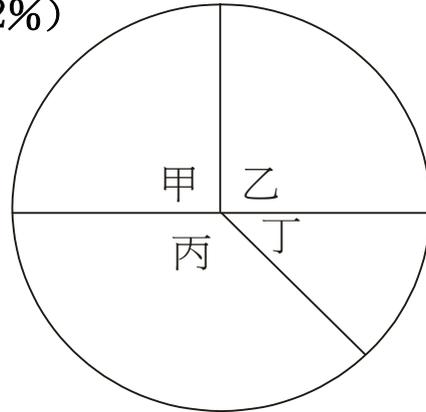
附錄三

面積解題成就測驗 I 〈預試〉

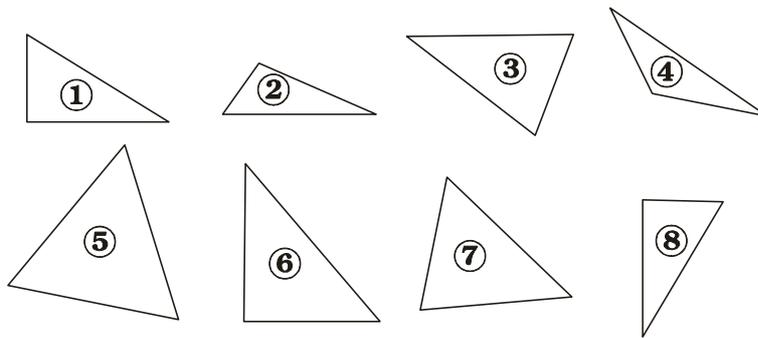
五年 班 號姓名：

一、右邊是個圓形，量量看、填填看：(12%)

- (1)圓形的直徑是()公分
- (2)扇形甲的角是()度
- (3)扇形乙的角是()度
- (4)扇形丙的角是()度
- (5)扇形丁的角是()度
- (6)一個圓總共有()個平角。



二、下列圖形都是三角形，請依據圖形之特徵，將適當答案填入空格內(16%)



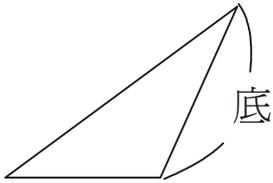
1. 屬於直角三角形有()
2. 屬於銳角三角形有()
3. 屬於鈍角三角形有()

三、用 16 個小正方形排圖形，需要完全用完，能排成哪五種長方形？請將排好的長和寬用數字表示出來(每格 2 分，6 分)

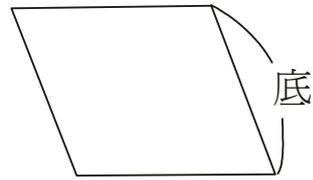
- 例如(1×16)
- (16×1)
- ()
- ()
- ()

四、下列圖形，左邊是三角形，右邊是平行四邊形，已經指出底邊，請你看一看後，畫出指定底邊上的高(4%)

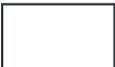
(1)



(2)

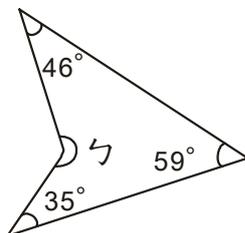


五、把下列各圖形所具有的性質在空格裡打勾，14%

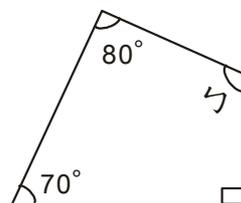
圖形 \ 性質	有兩雙對邊平行	只有一雙對邊平行	四個角都是直角	對角皆相等	對角現垂直	對邊皆等長
						
						
						
						
						

六、下列兩個圖形都是四邊形，請你看完後，求出各圖形中勺角是幾度？(4%)

(1)



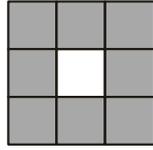
(2)



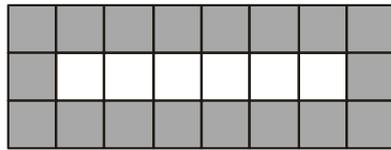
七、有許多張長 9 公分，寬 6 公分的長方形卡片，現在想將它們拼成一個最小的正方形圖形，這個正方形需用幾張長方形的卡紙 (3%)？正方形的面積是多少平方公分呢？(2%)

八、小明有一些白色和黑色的正方形方瓦，它們的大小都一樣，

(1) 首先他拿出一塊白色方瓦放在中間，再用灰色的方瓦覆蓋其周圍，請你算算看需用多少塊灰色方瓦才能完全圍住呢？2%



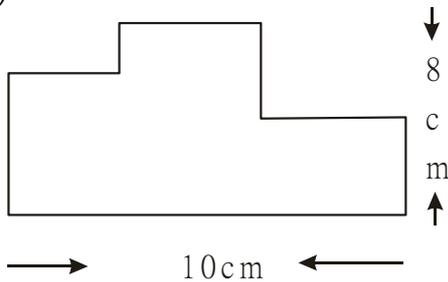
(2) 接著他將白色的方瓦 6 塊排成一列放在中間，再用灰色的方瓦環繞其周圍，算算看，需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？2%



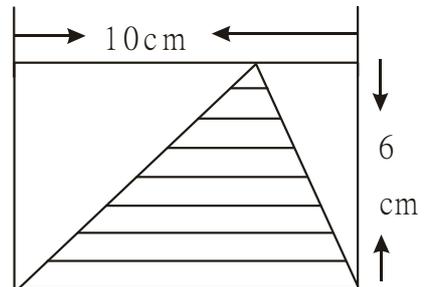
(3) 如果現在小明用 20 塊白色方瓦排成一列放在中間，周圍再用灰色的方瓦圍繞著，請你幫他算算看？總共需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？4%

九、針對圖形的特徵想一想，然後算算看(4%)

(1)



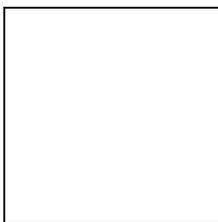
(2)



這個圖形的周長是多少()cm 斜線部分的面積是()平方公分

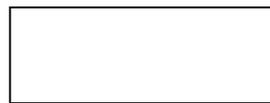
十、求出下面圖形的面積第 1 題為 3 分外，餘為 4 分，23%

① 以下是每邊為 15 cm 的正方形



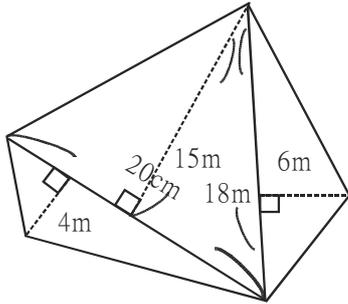
面積是()平方公分

② 以下是長 20 公分，寬 10 公分的長方形



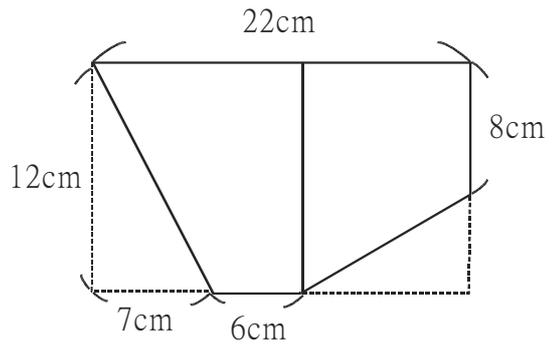
面積是()平方公分

③

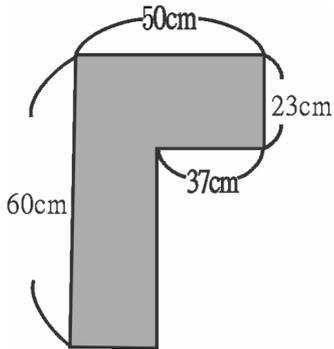


() 平方公尺

④

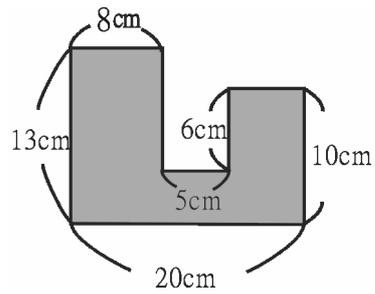


⑤



() 平方公分

⑥

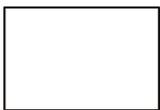


() 平方公分

十一、下圖中左邊是個長方形，右邊的圖形哪些會與左邊的面積大小相同，相同的請在()中打勾(4%)

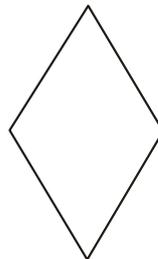
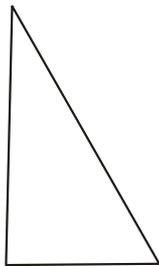
甲()

乙()



丙()

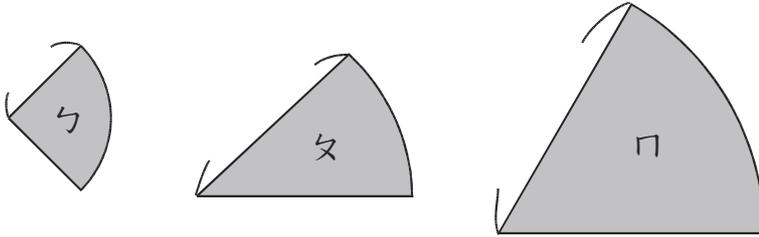
丁()



圖形與面積解題成就測驗Ⅱ〈預試〉

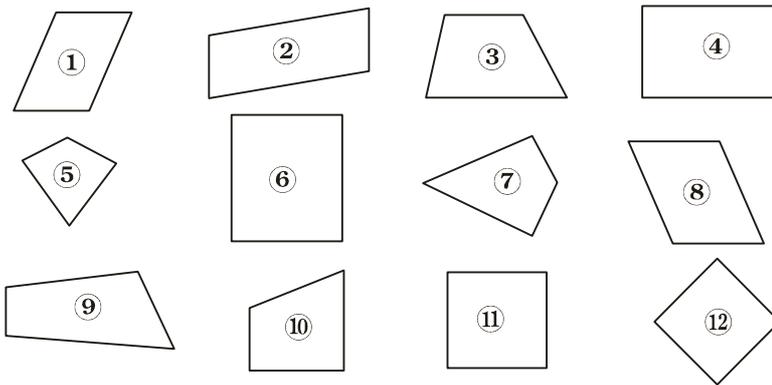
年 班 號姓名：

一、利用量角器和尺量量看，並回答下列的問題(12%)



- (1) 扇形ㄅ的角是()度，半徑的邊是()公分
 (2) 扇形ㄆ的角是()度，半徑的邊是()公分
 (3) 扇形ㄇ的角是()度，半徑的邊是()公分

二、下圖形都是四邊形，請依據特徵給予分類，將圖形號碼填入空格內(16%)

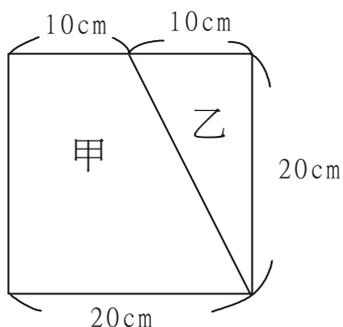


- (1) 平行四邊形：() (2) 正方形：()
 (3) 梯形：() (4) 菱形：()
 (5) 箏形：()

三、下面是一塊正方形土地，將它分成甲乙兩塊，甲和乙都得到不同的面積，

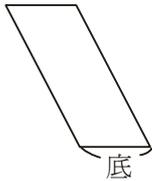
請回答下列問題：(6%)

- (1) 算出甲乙兩塊的面積後，它們的面積相差多少()
 (2) 甲的面積是乙的幾倍？()
 (3) 甲、乙的周長相差多少？()

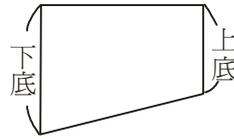


四、下列圖形，左邊是平行四邊形，右邊是梯形，已經指出底邊的位置，畫指定底邊上的高(4%)

(1)



(2)

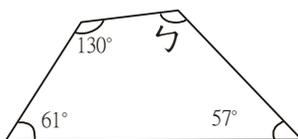


五、各圖形符合左例條件的請在空格中打勾(14%)

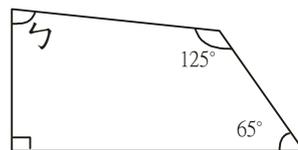
圖形 條件	平行四邊形	菱形	長方形	正方形	梯形
兩雙對邊分別平行					
一雙對邊平行，另一雙對邊不平行					
四個邊都等長					
四個角都是直角					
四個內角和是 360°					

六、下列圖形都是四邊形，請求出各圖中 \sphericalangle 角是幾度?(4%)

(1)



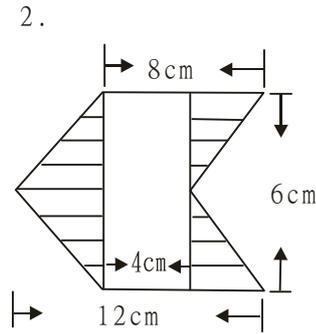
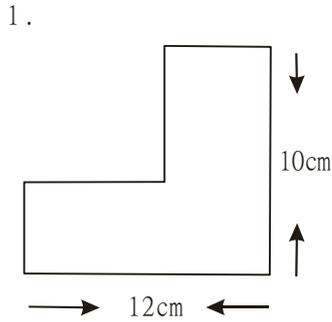
(2)



七、有一張邊長為 36 公分的正方形卡片，現在想將它們切割成長為 9 公分，寬為 6 公分的長方形圖形，這個正方形共可切割幾張長方形？長方形的面積是多少呢?(5%)

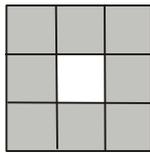
八、下列有兩個圖形，請仔細觀察其特徵後，回答下列問題(4%)

(1)下圖的周長()公分 (2)下圖黑色部分的面積為()平方公分

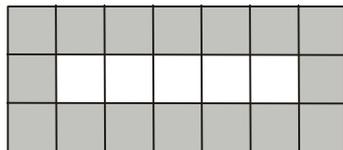


九、小明有一些白色和黑色的正方形方瓦，它們的大小都一樣，

(1)首先他拿出一塊白色方瓦放在中間，再用灰色的方瓦圍繞其周圍，請你算算看需用多少塊灰色方瓦才能完全圍住呢？2%



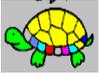
(2)接著他將白色的方瓦 5 塊排成一列放在中間，再用灰色的方瓦圍繞其周圍，算算看，需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？2%



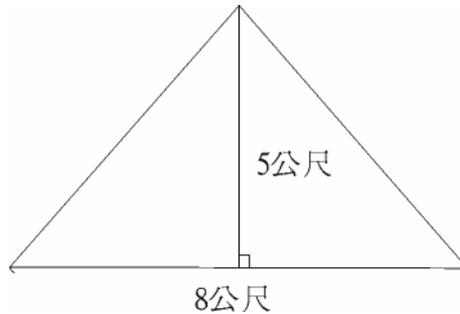
(3)如果現在小明用 15 塊白色方瓦排成一列放在中間，周圍再用灰色的方瓦圍繞著，請你幫他算算看？總共需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？4%

十、算算看下列說明或圖形的面積(第 1 題為 3%外，其餘每題為 4%，共 23%)

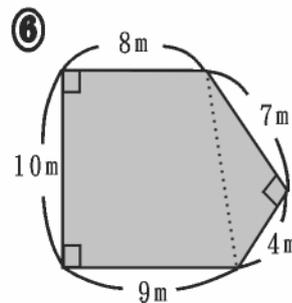
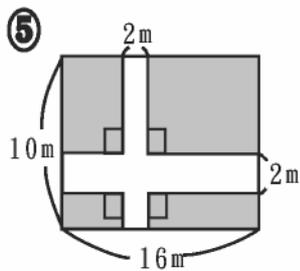
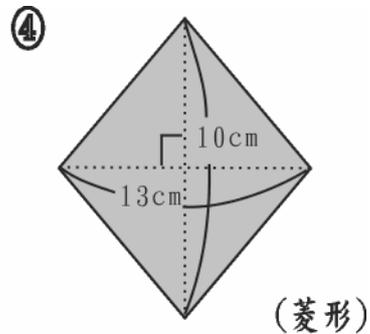
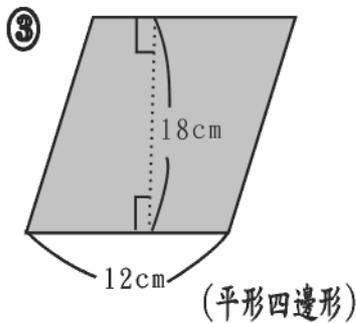
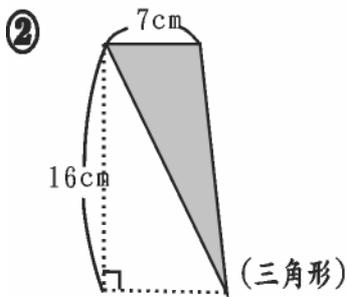
- (1) 一隻玩具烏龜的面積大約為 250 平方公分，下圖為一個三角形的沙堆，底 8 公尺，高 5 公尺，假設玩具烏龜一隻接一隻緊密排列，這個沙堆大概可以排列多少隻玩具烏龜？ () 隻



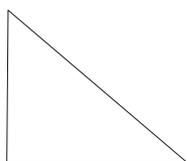
250 平方公分



- (2) 算出陰影部分的面積



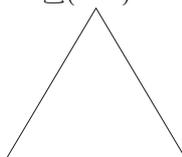
- 十一、下圖中左邊是個等腰直角三角形，右邊的圖形面積哪些會與左邊的面積大小相同，相同的請在()中打勾(4%)



甲()



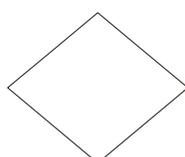
乙()



丙()



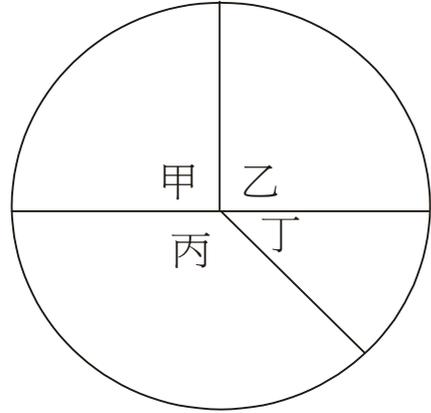
丁()



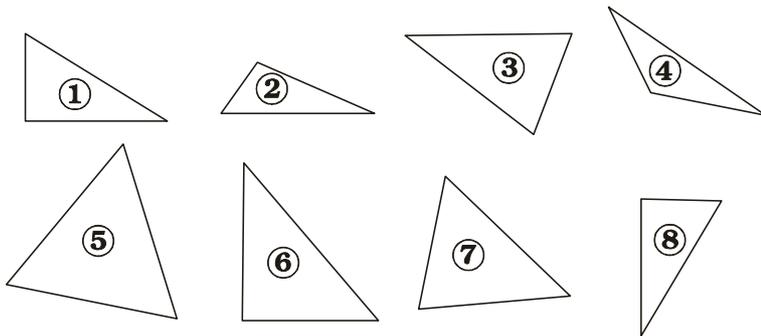
圖形與面積解題成就測驗 I 〈正式〉 五年 班 號姓名：

一、右邊是個圓形，量量看、填填看：(12%)

- (1)圓形的直徑是()公分
- (2)扇形甲的角度是()度
- (3)扇形乙的角度是()度
- (4)扇形丙的角度是()度
- (5)扇形丁的角度是()度
- (6)一個圓總共有()個平角。



二、下列圖形都是三角形，請依據圖形之特徵，將適當答案填入空格內(16%)



- 1. 屬於直角三角形的圖形編號有()
- 2. 屬於銳角三角形的圖形編號有()
- 3. 屬於鈍角三角形的圖形編號有()

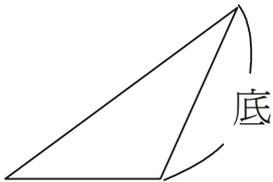
三、用 16 個小正方形排成長方形的圖形，需要完全用完，能排成哪五種長方形？

請將排好的長和寬用數字表示出來(每格 2 分，6 分)

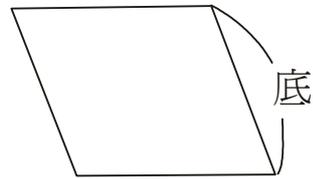
- 例如(1×16)
- (16×1)
- ()
- ()
- ()

四、下列圖形，左邊是三角形，右邊是平行四邊形，已經指出底邊的位置，請你畫出指定底邊上的高(4%)

(1)



(2)



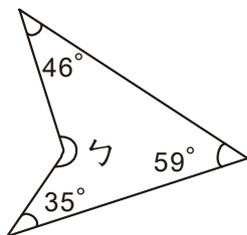
五、把下列各圖形所具有的性質在空格裡打勾，14%

圖形 \ 性質	有兩雙對邊平行	只有一雙對邊平行	四個角都是直角	對角皆相等	對角現垂直	對邊皆等長

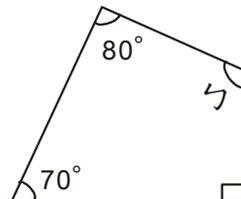
六、下列兩個圖形都是四邊形，請你求出各圖形中勺角是幾度？

(4%)

(1)

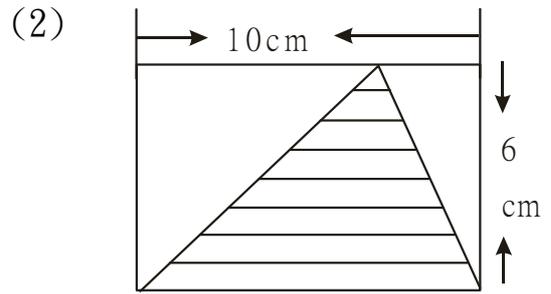
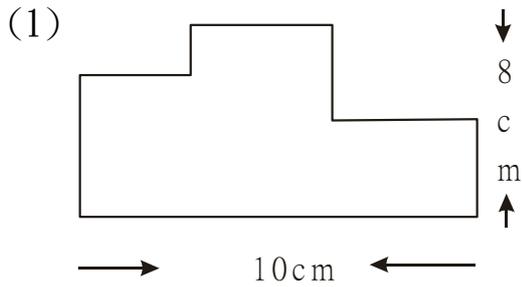


(2)



七、有許多張長9公分，寬6公分的長方形卡片，現在想將它們拼成一個最小的正方形圖形，這個正方形需用幾張長方形的卡紙(3%)？正方形的面積是多少平方公分呢？(2%)

八、針對圖形的特徵想一想，然後算算看(4%)

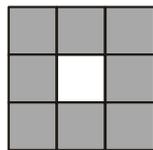


這個圖形的周長是多少()公分

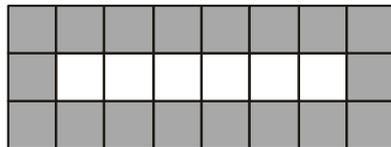
斜線部分的面積是()平方公分

九、小明有一些白色和黑色的正方形方瓦，它們的大小都一樣，

(1)首先他拿出一塊白色方瓦放在中間，再用灰色的方瓦覆蓋其周圍，請你算算看需用多少塊灰色方瓦才能完全圍住呢？2%



(2)接著他將白色的方瓦6塊排成一列放在中間，再用灰色的方瓦環繞其周圍，算算看，需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？2%

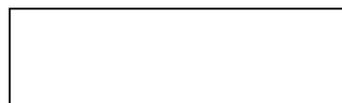
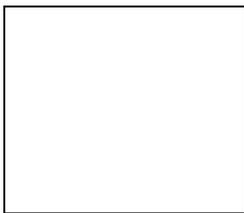


(3)如果現在小明用20塊白色方瓦排成一列放在中間，周圍再用灰色的方瓦圍繞著，請你幫他算算看？總共需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？4%

十、求出下面圖形的面積第5題為3分外，餘為4分，23%)

①以下是每邊為15分的正方形

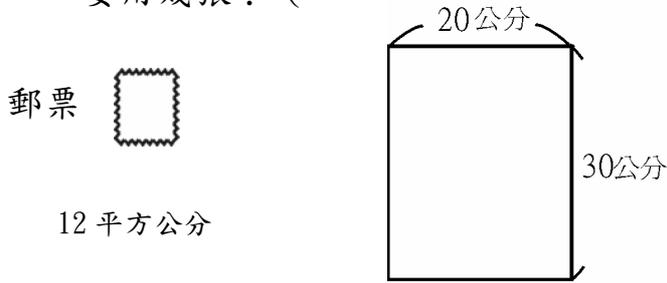
②以下是長20公分，寬10公分的長方形



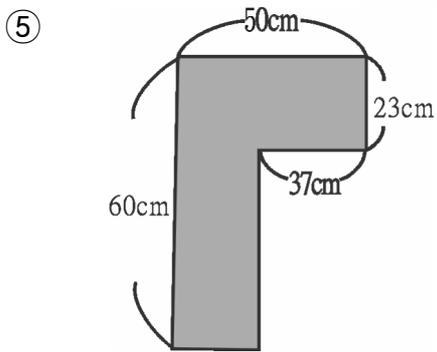
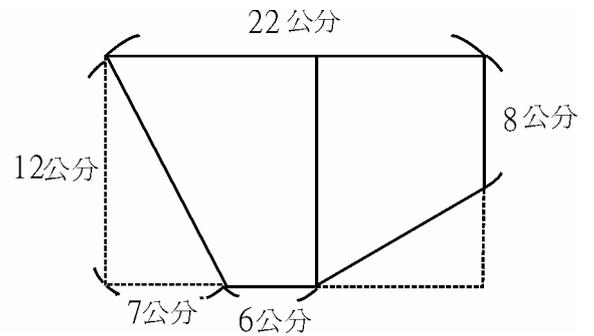
面積是()平方公分

面積是()平方公分

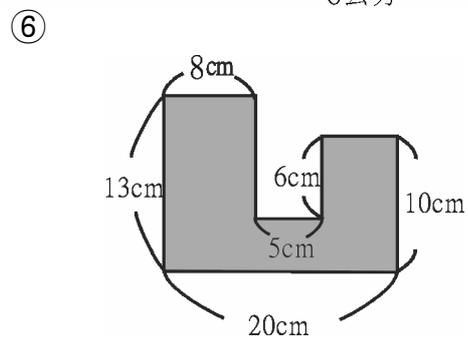
- ③ 一張郵票的面積是 12 平方公分，集郵冊一頁的長是 30 公分、寬 20 公分，用郵票將之完全覆蓋，大約要用幾張？（ ）



- ④ 以下圖形面積為（ ）



() 平方公分



() 平方公分

十一、下圖中左邊是個正方形，右邊的圖形哪些會與左邊的面積大小相同，相同的請在()中打勾(4%)

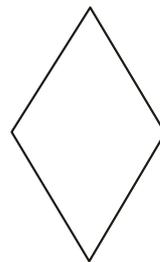
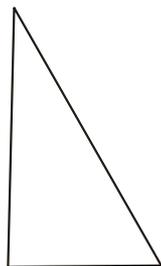
甲()

乙()



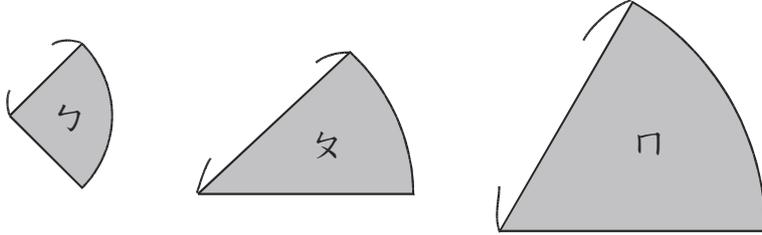
丙()

丁()



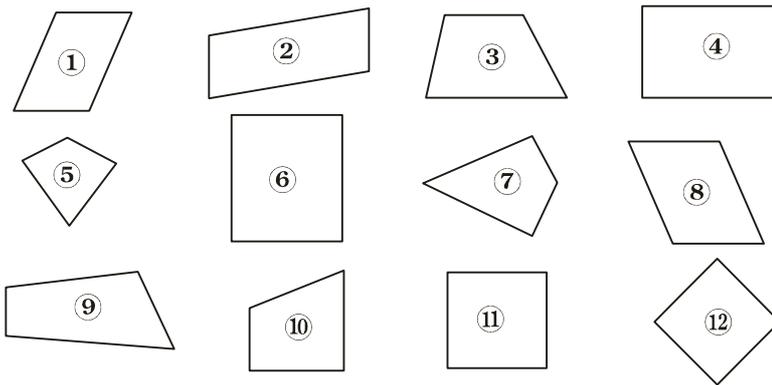
圖形與面積解題成就測驗Ⅱ〈正式〉 五年 班 號姓名：

一、利用量角器和尺量量看，並回答下列的問題(12%)



- (1) 扇形ㄅ的角是()度，半徑的邊是()公分
 (2) 扇形ㄆ的角是()度，半徑的邊是()公分
 (3) 扇形ㄇ的角是()度，半徑的邊是()公分

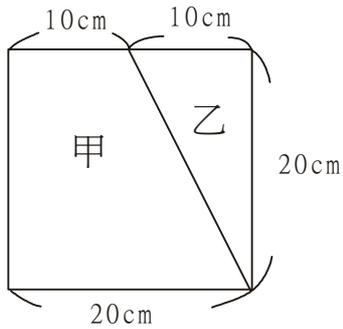
二、以下圖形都是四邊形，請依據特徵給予分類，將圖形號碼填入空格內(16%)



- (1) 平行四邊形：() (2) 正方形：()
 (3) 梯形：() (4) 菱形：()
 (5) 箏形：()

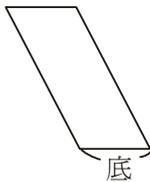
三、下面是一塊正方形土地，將它分成甲乙兩塊，甲和乙都得到不同的面積，請回答下列問題：(6%)

- (1) 算出甲、乙兩塊的面積後，它們的面積相差多少()
 (2) 甲的面積是乙的幾倍？()
 (2) 甲、乙的周長相差多少？()

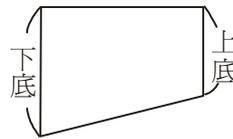


四、下列圖形，左邊是平行四邊形，右邊是梯形，已經指出底邊的位置，請畫出指定底邊上的高(4%)

(1)



(2)

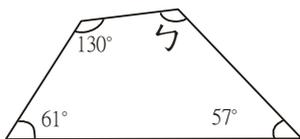


五、各圖形符合左例條件的請在空格中打勾(14%)

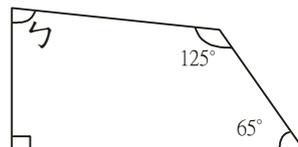
圖形 條件	平行四邊形	菱形	長方形	正方形	梯形
兩雙對邊分別平行					
一雙對邊平行，另一雙對邊不平行					
四個邊都等長					
四個角都是直角					
四個內角和是 360°					

六、下列圖形都是四邊形，請求出各圖中 \sphericalangle 角是幾度?(4%)

(1)



(2)

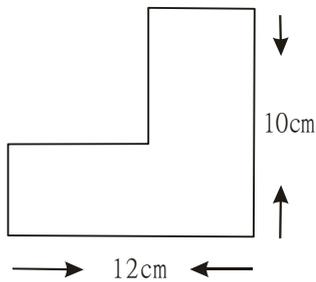


七、有一張邊長為 36 公分的正方形卡片，現在想將它們切割成長為 9 公分，寬為 6 公分的長方形圖形，這個正方形共可切割幾張長方形？長方形的面積是多少呢？(5%)

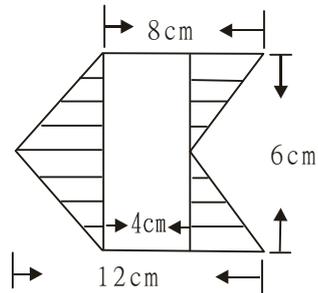
八、下列有兩個圖形，請仔細觀察其特徵後，回答下列問題(4%)

(1)下圖的周長()公分 (2)下圖黑色部分的面積為()平方公分

1.

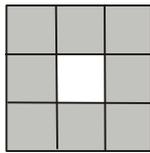


2.

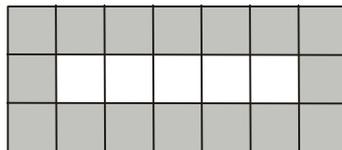


九、小明有一些白色和黑色的正方形方瓦，它們的大小都一樣，

(1)首先他拿出一塊白色方瓦放在中間，再用灰色的方瓦覆蓋其周圍，請你算算看需用多少塊灰色方瓦才能完全圍住呢？2%



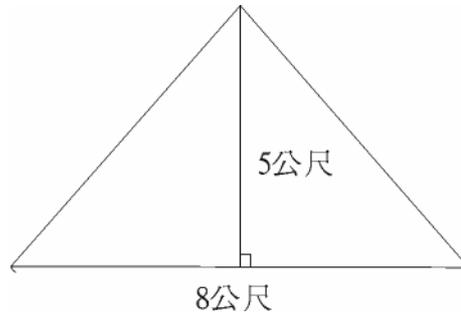
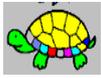
(2)接著他將白色的方瓦 5 塊排成一列放在中間，再用灰色的方瓦環繞其周圍，算算看，需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？2%



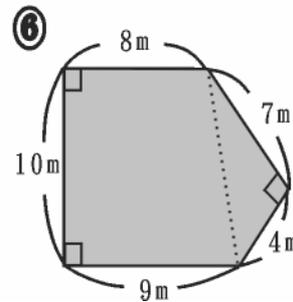
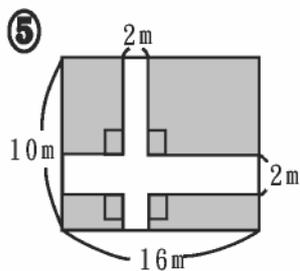
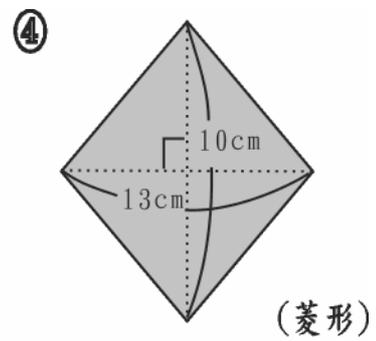
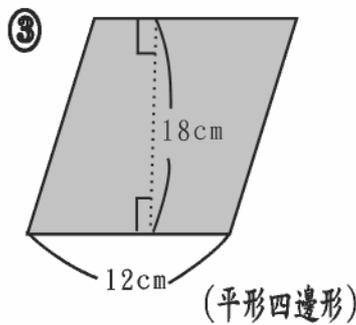
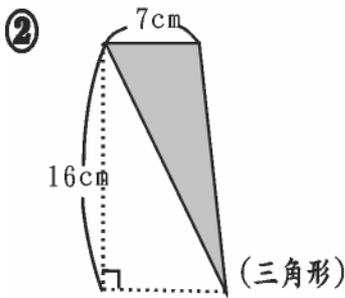
(3)如果現在小明用 15 塊白色方瓦排成一列放在中間，周圍再用灰色的方瓦圍繞著，請你幫他算算看？總共需要多少塊灰色的方瓦才能完全圍住呢？4%

十、算算看下列說明或圖形的面積(23%，1 為 3%外，其餘每題為 4%)

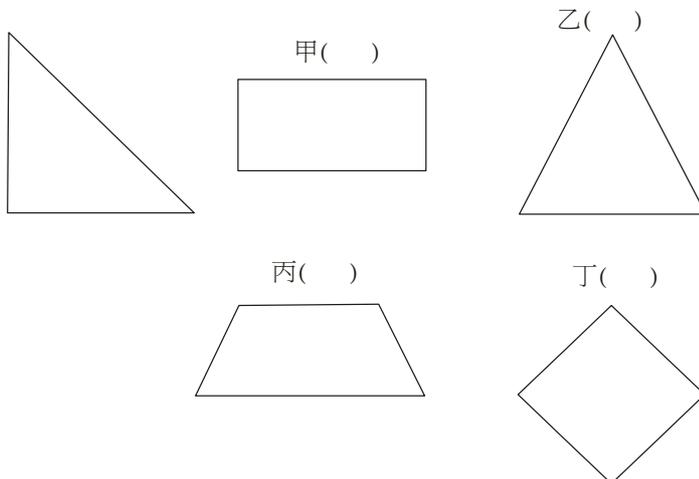
(1) 一隻玩具烏龜的面積大約為 250 平方公分，下圖為一個三角形的沙堆，底 8 公尺，高 5 公尺，假設玩具烏龜一隻接一隻緊密排列，這個沙堆大概可以排列多少隻玩具烏龜？ () 隻



(2) 算出陰影部分的面積

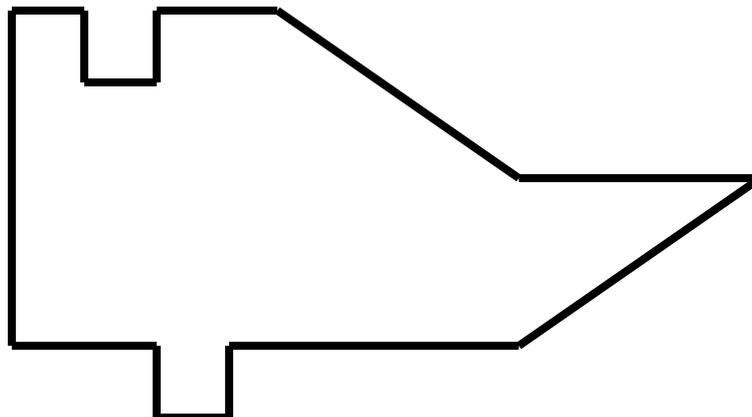


十一、下圖中左邊是個等腰直角三角形，右邊的圖形哪些會與左邊的面積大小相同，相同的請在()中打勾(4%)



面積解題實作訪談問卷內容

- 一、請你將日常生活周遭的事物依據它的形狀予以分類，例如，什麼東西的形狀像三角形？什麼東西的形狀像梯形？說說看，你為什麼要這樣分類？
- 二、桌上放有一釘板，每一格代表一平方單位，請你利用橡皮筋在釘板上圍成面積為12平方單位的圖形，想想看，要如何圍成平行四邊形？再想想看，如何圍成三角形？最後是梯形，你要如何做呢？試試看。
- 三、桌上有四個不同形狀、不同顏色的木板？請你們比較它們面積的大小？你們要用什麼方法才能得知？說說看你們的方法？（利用某形狀物件作為前置比對單位）
- 四、想一想，三角形這個圖形需要幾塊正方形方瓦才能完全覆蓋？而梯形又需要幾塊才能完全覆蓋呢？說說看你們的方法，並且實際操作，這時候需要注意哪些重點？（1. 直接覆蓋，2. 以單位量為準進行測量，3. 邊長比對計算）
- 五、桌上這些圖形形狀不同，它們的面積大小卻都一樣，為什麼？它們的面積公式之間有何關係？
- 六、以下的圖形，你覺得形狀像什麼？如何算出它的面積？（你們可以利用尺規等各種測量工具或方法來解決問題）



附錄八

5 年 6 班 2003.10.15.01 上課記錄〈圖形辨識與表徵活動〉

T：老師現在將教學文本的講義發給各位，各位拿到後，請將兩人的姓名寫上，老師希望上課的過程中，兩人能夠互相討論、合作解題。

T：在日常生活中我們會遇到很多的事物，這些事物都具有某些令人印象深刻的特徵，如果要讓我們針對這些特徵將它們進行分類，我們要如何將它分類呢？就以我們班上小朋友為例好了，今天，小朋友穿了各式各樣的服裝到學校來，以服裝為例，你們會如何將它分類呢？

文惠：我會以衣服的顏色來分類，例如，有兩人都穿橘色的衣服，那麼我會將他們歸於一類。

T：很好，文惠這組的同學要利用顏色來分類，除了顏色之外，各組想想是否還有其他分類的方法呢？

立安：我會利用畫統計表的方法來分類。

T：喔！你要用統計表的方式來分類，但老師不懂你說的意思，能否再說清楚一點。

立安：（看看隔壁同學，尋求協助），嗯………。

T：沒有關係，想清楚之後再跟大家分享你的想法。還有哪一組同學願意和我們分享你們的想法。

湘琴：我們會利用衣服是否有袖或無袖的差別來分類。

文羽：我會利用衣服的花色和圖案來分類，衣服有花朵的是一類，沒有花朵的是一類。

T：很好，小朋友都知道利用衣服的某些特徵來分類，想到的分類方式也有很多種，我們今天就利用分類的分式來辨認一些圖形，老師先問問大家，你們在生活上有沒有看過一些圖形，這些圖形是什麼形狀的，為何你要這麼稱呼它？

文羽：我看過平行四邊形和梯形！

立濬：我看過菱形和長方形！

立昇：正方形！

立宏：橢圓形和梯形！

T：小朋友都看過許多的圖形，老師現在將第一頁的圖片放在一起，分給每一組的同學，請你們將它們分類，這些圖形仔細的看看，它們有幾個邊呢？有幾個角呢？你們要如何分類呢？為何你們要這麼分類？是什麼原因呢？首先請你們檢查看看夾鍊袋裡是否有八個圖形（是），每個圖形上是否都有編號（有）？

S：顏色爲什麼都不一樣？（廢話）

T：老師希望每組的同學能夠互相討論，找出分類的類型。（每組同學認真分類）

T：老師給提示，第一個你們會分成幾類？其次，這一類的圖形有什麼特徵？爲什麼你會這麼分類，理由是什麼？

立祈：我會將他分成四類，第一類是 7 和 8，第二類是 2 和 5，第三類是 1、3 和 6 號，第四類是 4 號。

T：好！老師請你將分成這四類的理由說出來。

立祈：第一類都是梯形，第二類是長方形，第三類稱爲菱形，第四類是正方形。

T：嗯！文濬這組利用圖形的特徵將他分爲四類，小朋友同意他們的方法嗎？（同意）有沒有和他們不同的分法呢？

立安：我們將 6、7 和 8 歸於第一類，2 號和 5 號爲第二類，第三類爲 1 和 3 號，第四類爲 4 號。

T：喔！他們分類的方式和剛才那組很像，只是第一類增加了 6 號，第三類少了 6 號，他們將剛才那組第三類的 6 號歸爲第一類，是什麼原因呢？請你們說說看？

立安：我們認爲 6 是梯形，所以應該歸在第一類。

T：很好！有沒有人同意他們的分類方式（沒有），既然沒有，那有沒有人願意再提供他們分類的方式和我們大家一起分享。

立翔：我們將他分爲 6 類，第一類爲 2、3，第二類爲 1、4，第三類爲 8，第四類爲 7，第五類爲 5，第六類爲 6（紅色），2 和 3 號爲綠色。

T：你們認爲用顏色來分好不好（很好），但分的組別會不會太多了，有沒有組數較少的！

立濬：我們也是分成四類，第一類將 1、4 放在一起，第二類將 2、5 放在一起，第三類 3、6 放在一起，第四類將 7、8 放在一起。

T：爲何你們會將它分成這幾類

立濬：因爲 1、4 都是菱形；2、5 爲長方形；3、6 爲平行四邊形（喔！和前面幾組不同，產生新的圖形名稱）；7、8 爲梯形（大家同意他的分法嗎？）

T：小朋友好聰明喔！會用形狀、顏色等特徵來分類，還有沒有其它的分法呢？

文惠：我們分成兩類，第一類有 1、2、3、4、5，第二類有 7 和 8（少了一個 6，好 6 是第一類的），因爲第一類每個圖形都有兩雙對邊平行，所以是平行四邊形；7、8 只有一雙對邊

平行，所以歸在第二類。

T：好，我們就針對小朋友用形狀特徵的方式分類來討論，這裡有菱形、平行四邊形、長方形、正方形、梯形等形狀的圖形，這些分法並沒有對錯之分，但這些圖形都有某些特徵可以加以區別。哪些圖形是屬於正方形呢？

文霖：2 和 10

T：你們同意他的說法嗎？（不同意）為什麼不同意，有誰可以解釋理由？

文惠：因為 2 號是長方形，它的上下一樣長，左右一樣長，但四邊不一樣長，

T：正方形應該怎麼辨識呢？

文惠：四邊的數字都一樣（長度吧！），好！有人幫他修正，四邊都一樣長的圖形稱為正方形，大家同意嗎？（同意）

T：哪些屬於長方形呢？（2 和 5）為什麼？

立廷：一個邊較長而另一邊較短。

T：喔！一邊較長一邊較短的圖形稱為長方形，好！那老師在黑板上就畫出你說的特徵（黑板畫圖，同學大笑），你的說法並不清楚，哪位同學可以幫他補充的？

立濬：應該說上下平行、左右平行的圖形就稱為長方形，

老師在黑板上根據其提出的特徵畫出兩雙對邊平行的圖（同學哈哈大笑），那麼你說的特徵也不夠清楚，有哪位可以幫我們說清楚的？

立祈：有二雙對邊平行的圖形就稱為長方形（老師又在黑板上畫出圖形，同學又哈哈大笑）

T：好再給立翔一次機會，請說！

立翔：圖形裡有一些角是直角，稱為長方形。

T：有直角的圖形稱為長方形，那這樣有直角的圖形是否稱為長方形（在黑板上畫圖，同學大笑），嗯，還是解釋的不好，老師給你們提示：能不能將直角，平行和相等的邊湊在一起來做解釋。

文羽：有兩雙平行的線，而對角線是直角。

T：喔！對角線是直角，請你再說明清楚一點。

文羽：想一下，應該有兩雙平行的線，然後在裡面畫一條對角線（對角線這樣畫嗎，全班大笑）不是，應該上面……。

T：長方形大家都看過，但它的特徵好像很難解釋。

文惠：上下長度一樣，兩邊的長度又不一樣。

T：大家覺得聽不懂，那給大家在討論一下，如何將平行、等長與直角等特徵結合在一起，用一段通順的話來形容長方形。大家好好討論想一想。（三分鐘後）

文宇：圖形上下的邊一樣長，但和左右兩邊不一樣長，但左右兩邊的長度是一樣的，然後有4個角都是直角，而兩雙對邊都平行

T：喔！比較進步了喔，老師將文宇的話再歸納一次：長方形是有2雙等長且平行的對邊，且四個角都是直角的圖形，大家認為這樣說明好不好（好）跟正方形不同的地方在哪裡呢？（正方形是四個邊一樣長）對，他們的差異在於正方形的四個邊都等長，而長方形是有兩雙對邊等長，剩下的特徵則都一樣。什麼叫做平行四邊形？

立安：四個邊都平行的圖形叫做平行四邊形（老師將其說明在黑板上畫出圖形，同學大笑）
嗯……

T：你的說明好像不是很清楚，有沒有人可以補充

文惠：應該說是對邊平行，而且有直角。（嗯，沒有直角，只有平行就可以了）

T：要不要有直角呢（不要），再想想看！喔，只要有兩雙對邊平行的四邊形圖形就稱為平行四邊形，那麼長方形是否是平行四邊形。

立祈：是，因為他有兩雙對邊平行，所以是平行四邊形的一種。

T：那正方形不是也是長方形的一種（是）。那長方形和正方形不是包含於平行四邊形呢（是）正方形是不是長方形（是，平行四邊形是爸爸喔！），好！老師可以把它們的關係畫成這樣（在黑板上畫出三個圈圈）平行四邊形是大圈圈，長方形在這個大圈圈內，正方形又在長方形的圈圈內。什麼叫菱形呢？

文霖：對邊平行

立宏：四個邊一樣長，而上下兩個角是鈍角？（喔，鈍角）

T：這不是和正方形的特徵一樣嗎？大家再想一想有何不同？

S……（沈默沒有聲音）

T：這個圖形比較特殊，小朋友較不常見，但老師提示你們可以和正方形作比較，找出不同之處。

文宇：和正方形很相似，只是正方形的每個內角是直角，菱形卻沒有，但對角線會垂直平分，對角線是兩個對角平分連起來的線。

T：說的很好，正方形是菱形的一種。那什麼叫梯形呢？

文瀟：有一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形就稱做梯形。

T：這五種圖形我們可以將它歸類成一種名稱，是什麼名稱？

立廷：四邊形，因為他們都有四個邊。

T：很好，這五種圖形的關係請大家再思考一下（在黑板上整理關係）

5 年 6 班 2003.10.17.02 上課記錄〈圖形辨識與表徵活動〉

T：接下來請大家將講義翻到第二頁，可以看到有許多不同（7 個）的三角形，等下老師會將這些三角形卡片分給各組，請各組的小朋友相互討論一下，可以針對他們的特徵予以分類，你會分成哪幾類？為何要分成這幾類？他們有什麼特徵呢？

T：各位先將三角形的圖片攤在桌上，數數看有幾片（7 片），然後再予以分類，小朋友可以看見這些三角形的形狀是否一樣（沒有），好！沒有，有的圖形的邊一邊較長，有的圖形一邊較短，有的具有其他角度方面的特徵，這些特徵都可以用來作為分類的基礎，

文惠：我們將這些三角形分成三類，第一類是 3 號，第二類是 1、2，第三類是 4、5、6、7 四個，第一類稱為直角三角形，因為有一個角是 90 度的角，故稱為直角三角形，第三類稱為銳角三角形，因為它們的角度都小於 90 度，第二類，嗯……

T：第二類解釋不出來，沒關係，其它的，同意他對於第一和第三類的說法嗎（同意）好，有沒有同學願意為我們補充。

立翔：我們將它分成兩類：第一類有 2、3、4、5、6，另一類是 1、7；因為第二類的三角形圖形都有畫格子，其它的沒有畫，所以可以分成 2 類。

T：他用圖形裡有沒有畫格子的方式來分類，是利用其視覺所看到的效果來分類，可能受到老師使用材料的誤導，但這種分法也可以，還有沒有其他分法？

立安：我們也分成 3 類，第一類有 3 和 6，第二類有 5 和 7，第三類有 1，2，4，第一類因為都有直角（嗯，第 6 號沒有直角……）

T：嗯，有同學認為 6 號沒有直角，你有沒有用量角器量過（有），好，沒關係，請繼續

立安：第二類 5 和 7 是形狀相似。

T：何謂相似？請解釋（嗯……）那第三類有何特徵呢（嗯……）好！沒關係，請坐，有哪一組同學願意補充的。

文羽：我們也是分為三類，第一類是 1、2 號和 4 號，第二類是 3，第三類是 6、7，第一類是

等腰三角形，第二類是直角三角形，第三類是鈍角三角形。

T：那什麼樣的三角形才能稱為等腰三角形呢？

文羽：三角形的兩邊相等，而且角度都小於 90 度，上面和下面的兩個角都小於 90 度的三角形稱為等腰三角形，三角形有一個角等於 90 度的稱為直角三角形，三角形的角有一個大於 90 度稱為鈍角三角形。

T：三角形有幾個角（3 個），其中有一個角大於 90 度，我們就稱它為鈍角三角形。有一個是 90 度，就稱為直角三角形，等腰的兩邊和底邊所形成的角稱為夾角，當這兩個夾角相等的时候，就成為等腰三角形。剛才文羽分類時所賦予的名稱，老師覺得有點亂，為什麼？等腰三角形這個名詞是以什麼的特徵為主（邊……），而直角和鈍角是以什麼特徵為主（角…），文羽將三角形的邊與角的特徵混在一起來分類，似乎有點亂，這個方法好嗎？提示大家可否將圖形用角和邊分開來分類。

立廷：我們利用角來分類，可分成 3 類，第一類是 3 號成為直角三角形，第二類有 1，2 稱為銳角三角形（喔！有新的名詞出現了），第三類有 4，5，6，7 稱為鈍角三角形，

T：直角是有一角是 90 度，銳角是角小於幾度的角？（90 度）那三角形有幾個角是小於 90 度（3 個）鈍角是指大於 90 度的角，那鈍角三角形有幾個角大於 90 度（最多 1 個），有沒有小朋友用邊的方式來分類呢？

立廷：分成 3 類，第一類是 1，第二類是 2、4，第三類是 3、5、6、7，第一類是正三角形，第二類是等腰三角形，第三類什麼都不是（全班大笑）。

哇！好棒，說了好多沒學過的名詞，請坐，有沒有同學可以為我們做解釋，何謂正三角形

立翔：有三個邊一樣長的稱為正三角形

T：那等腰三角形呢？

S：三角形有 2 個邊一樣長就稱為等腰三角形，

T：好，那三個邊一樣長的三角形稱做（正三角形）也可以稱做（等腰三角形），正三角形也可以稱做（等邊三角形），那三個邊不一樣長的可以稱做什麼三角形？

S：嗯（無法解釋……）

T：有 3 個邊構成的封閉圖形稱做三角形，正三角和等腰三角形都是三角形的一種，只是它們都擁有獨特的特徵，它們之間有什麼包含關係？

文惠：正三角形雖然有三邊一樣長，其實也是 2 個邊一樣長，所以是等腰三角形的一種，但等腰三角形只有 2 個邊一樣長，所以不是正三角形的一種。

T：大家有沒有發現正三角形的三個角是否都一樣？

立廷：有，都是 60 度。

T：都是 60 度，為什麼，誰可以解釋？

立祈：因為三角形的內角總共是 180 度，3 個角都一樣，180 度去除，每個角可得 60 度。

T：所以正三角形也可以稱為等邊三角形，每個角度都是 60 度。對於等腰三角形來說，剛才
有同學說有兩個角相等，是哪兩個角相等呢，那它的角度怎麼算出來？

文羽：如果知道頂角的角度，可用 180 度減去，然後除以 2，就可以得到底角的角度。

T：老師示範解釋，其它三角形的角度怎麼算出。

S：要用量角器來測量。

T：何謂全等？何謂相似？

文惠：兩個圖形它的邊和角度大小都一模一樣，稱為全等。

T：很好（覆誦一次）那何謂相似呢？

立翔：圖形的邊長不一樣，有的長，有的短，但是它們的角度都一樣

T：哇！說的好棒（覆誦示範）

T：教師指著長方形圖形問小朋友上下兩個相等又平行的邊稱做什麼？（長），很好，那另外
兩個邊呢（寬）。大家看一看桌上的長方形圖形，討論長方形的長和寬有什麼關係？

立廷：長和寬是垂直的！

T：何謂垂直呢？

立廷：就是成 90 度嗎！

T：你們怎麼知道它是成 90 度呢？

文惠：可以用三角版測量，它會和直角的地方密合！

文維：可以用量角器量。

T：很好，小朋友已經知道長方形的長和寬這兩個元素，那麼平行四邊形是不是也有長和寬呢？

立宏：有（在哪裡呢？）嗯……

T：老師提示你們可以將長方形和平行四邊形拿出來比較一番，看看它們有無相似的地方？

文惠：我們發現這兩個一樣大（什麼一樣大）面積一樣大（喔！怎麼知道的）將這一塊切掉

移到這裡剛好就等於長方形的面積。

T：嗯，不錯，文惠發現這兩個圖形面積一樣，除了這項特徵外，有沒有發現還有哪些特徵也一樣呢？

文字：拿起圖形，平行四邊形這邊和長方形這邊一樣長，它們也一樣寬。

T：喔！這兩邊一樣長，長方形這個邊稱為什麼（長），那平行四邊形和它一樣長的這邊稱為什麼呢（嗯……）它稱為「底」，和長方形的寬一樣的稱為「高」，請大家找找看平行四邊形的高在哪裡？嗯，小朋友指出了很多不同位置的高，是不是平行四邊形有很多條高呢？

文字：沒錯，只要在兩底之間都可以畫出許多條高來。

T：你能不能解釋為什麼可以畫出很多高？

文字：因為平行四邊形的高和底要垂直，在圖形的兩底之間可以畫出和它一樣垂直底邊的無限多條這樣的直線，所以有無限多條。

T：說的很好，那麼高一定要在圖形的內部了！

立祈：不一定，也可以在圖形的旁邊！

T：那有沒有可能在圖形的外面呢？

S：嗯……不一定

T：怎麼說不一定呢？有哪組同學可以舉出例子說明（嗯……想不出來）好，沒關係，後面有個單元要小朋友練習畫高時，我們再來討論。剛才我們已經將平行四邊形的底和高找出來了，也發現平行四邊形經過切割移補之後，可以形成和長方形一樣的圖形，面積也一樣。小朋友可以利用這個技巧探索和比較一些圖形的大小喔。

5 年 6 班 2003. 10. 22. 03 上課記錄〈圖形辨識與表徵活動〉

T：延續上次上課內容，三角形到底有幾條高呢？但先討論三角形的面積和長方形那個大呢？你會利用什麼方法來比對（將圖卡發放給小朋友操弄）？讓大家討論一下，可以利用各種方法（老師可不可以剪呢？）

立宏：首先將三角形有直角的一邊對準長方形下面的長，然後將三角形的另一邊對準長方形的寬，再將多出的部分剪下，移到空下的部分，剛好和長方形一樣大，所以它的面積一樣。

T：大家同意他的說法嗎（同意）好，這是以長方形為比較的基礎，再將三角形與他比較，面積是否重疊一致，那麼就能知道那個圖形面積較大，除了這種方法之外，是否還有其他的

方法呢？

立濬：利用平方公分版，將三角形與長方形都覆蓋在他上面，得到長方形是 24 格又多一半，而三角形是 25 格，所以三角形較大，

T：大家同意他的說法嗎？（不同意）

文惠：剛才立宏量了兩次這兩個圖形的面積都一樣，應該是立濬量錯了。

T：立濬測量的過程可能有些偏差，但他利用平方公分版來比較兩個圖形的方法也不錯，我們也給他掌聲鼓勵

立廷：我把三角形當比較的基礎，將長方形的長和三角形直角的底重疊，然後將長方形多出的部份剪掉，移到空的地方，它們的面積剛好重疊，所以三角形和長方形是一樣大的

文字：用尺量長方形的長和寬有多長，然後將他們兩個乘起來，算出它的面積是多少，然後再量三角形的底和高，將它們乘起來再除以 2，算出三角形的面積，就可以比較看誰的面積大

T：長方形的面積在四年級就學過了，剛才文字介紹了三角形面積的公式是底乘以高除以 2，但是很多小朋友不知道三角形的高在哪裡？黑板上是三角形與長方形的重疊圖形，那長方形的高在哪裡？

文惠：長方形的高是它的左右兩邊，上下叫長，長方形沒有高，應該稱做寬。

T：當三角形和長方形疊起來時，和長一樣的叫做什麼（底），高在哪裡呢？

立濬：到前面指圖形（這是底）…再把它倒過來就是高。

文惠：和底垂直的那邊就是高（指著高）

T：大家看看這條高除了和底邊垂直外，還有沒有其它的特徵？

S：嗯……沈默不語

T：指著圖形，高除了和底邊垂直外，也會和底邊相對的這個角相交接（有沒有看到），所以小朋友要畫出三角形的高，可以從這個角（稱為頂角）畫一條和指定的底邊垂直的線，這條線就稱為高，等下大家可以試試看。

T：長方形的長和寬有沒有垂直呢（有），那三角形的高是不是也和它的底垂直呢？

S：不錯，也是垂直

T：三角形有幾個直角呢？長方形又有幾個直角呢？

立翔：三角形只有一個，長方形有四個。

T：很好，那請大家一起來完成講義第四頁「畫出指定邊上的高」，老師要提示大家底和高有何關係？（垂直），很好。（巡視課堂）

5 年 6 班 2003.10.24.04 上課記錄〈圖形辨識與表徵活動〉

T：我們現在請同學上台畫出平行四邊形的高，這個圖形的高在圖形內嗎？（沒有）為什麼沒有呢？

文羽：因為它太斜了，

T：什麼叫做太斜了？能不能解釋一下

文羽：你看它的底短短的，而且又離那麼遠，畫出的高就跑到外面了（指著圖）

T：說的很好，雖然高跑到圖形外面，但和底邊有沒有垂直（有）怎麼知道的？

文字：可以把底邊延伸，會發現它們是垂直的。

T：很好，但有些小朋友高的位置畫錯的，有誰可以告訴他原因

立宏：他們把底的位置搞錯了，那不是底，這個才是。

文濬：高畫的太長了，它只能在底和底之間

文羽：有的人高和底邊並沒有垂直。

T：小朋友已經將缺點指出來了，若要畫出高，首先需要了解指定的底邊在哪裡？第二，高和底要垂直而且不能超過圖形中兩底的距離，但是三角形的高如何才能正確畫出呢？

立翔：三角形的高好難畫喔！

T：為什麼？

立翔：它只有一個底邊，畫出的直線無法通過頂點。

T：畫出的高沒有通過頂點，你認為那不是高？

文羽：老師三角形的高一定要在圖形內嗎？

T：這個問題問的好，跟平行四邊形的高一定要在圖形內一樣的問題，你們想一定要在裡面嗎？

文字：也可以在外面，像這樣的圖形高就在外面（拿出畫的三角形）

T：嗯：有人幫我們解決了一個問題，但老師這裡還有另外的問題，三角形的高只能畫一條嗎？

立廷：我認為有很多條！

T：怎麼說呢？

立廷：我不知道……

文惠：老師，長方形可以由兩個三角形拼成，長方形的寬就是高，它有那麼多條的高，這些高和三角形的高都一樣長，只是三角形的高要通過頂點，如果不用通過的話，那應該有很多條才對。

T：這個解釋很有趣，你們看這個圖形要怎麼畫出高呢？（請小朋友上前嘗試，但畫不出高）老師示範，這調高是不是在圖形外（是），你們有沒有看見老師將三角形的底延伸（有）這樣可以幫助你將高順利的畫出來。

文字：老師，那可不可以將上面先畫出和底邊一樣的平行線，然後在它們之間畫出垂直線，也可以當成高。

T：噫，這個想法也不錯，小朋友也可以利用文字提供的方法，先通過頂點畫出一條和底邊平行的線，然後在兩平行線之間畫出垂直的線，那麼也可以很容易的畫出三角形的高。你們可以試試看。

T：梯形可以變成長方形嗎？（可以）它的底在哪裡呢？

立廷：兩個平行的邊就是它的底

T：這兩個平行的邊有像長方形和平行四邊形的兩個底一樣長嗎？（沒有）很好，那這兩個底在上面的我們稱它叫上底，下面的稱它為下底，它的高在哪裡呢？

文惠：這個就是，因為它和兩個底互相垂直，而且可以畫出無限多條的高。

T：很聰明，接下來請大家完成講義第四和第五頁的作業。（各組可以相互討論）

（量出圖形的底邊與高有多長）

結果如作業第五、六頁所示（掃瞄）

5 年 6 班 2003. 10. 29. 05 上課記錄〈方瓦覆蓋及測量〉

平行四邊形方瓦的覆蓋

T：黑板上是講義裡的圖形，旁邊也放了一個小方瓦，你們可不可以利用這些小方瓦算出圖形的面積呢？這個圖形是什麼形狀呢？（平行四邊形）用方瓦要如何算出它的面積呢？大家討論一下！該如何解決這個問題？

文惠：先把平行四邊形斜邊的地方先移到右邊（指著圖形）變成長方形之後，再從其直角的部分一片一片的覆蓋（四邊都有直角），也可以從有直角的地方開始覆蓋（因為跟方瓦的

直角一樣)，若從斜邊開始就會有不完整的地方，所以要從直角開始

立廷：斜邊的部分不完整，但可以將方瓦依照斜邊的大小剪掉然後覆蓋上去，再將它切掉移到右邊，這樣也可以數出到底有幾塊完整的方瓦。

T：若是不能用剪的，該如何處理呢？

立廷：可以將平行四邊形先想成長方形，將完整的方瓦鋪蓋上去後，在剪掉多出的部份，也可以算出需要多少方瓦？

T：若是此平行四邊形沒有畫出格子的話，哪怎麼知道哪裡有直角，可以將方瓦從那個地方開始覆蓋呢？

文惠：我可以利用尺先量平行四邊形以及方瓦的邊長，然後在底邊上一公分先點一點，再將上下底邊的點連起來，再用方瓦覆蓋上去。

T：先用邊長的單位量，畫出平行四邊形的格子，也可以很容易的將方瓦覆蓋上去，這個平行四邊形到底用了幾塊方瓦呢（用數的），但是點數的只能數出完整的，但斜邊上不完整的怎麼辦呢？

立翔：將右邊不完整的移到左邊不完整的部分後可以形成一個長方形，表示兩個不完整的可以形成一個完整的方瓦！

T：算出的 40 代表什麼意思呢？

S：代表方瓦的個數！（ \searrow ！代表面積）

T：代表面積，為什麼？

T：8 此數字代表什麼意思（是長度，方瓦的個數？）5 代表五列的意思，每列有 8 個方瓦，總共有 5 列，總共有 40 個單位量方瓦，每個方瓦代表一平方公分，所以它的面積是 40 平方公分。

T：若老師在黑板上呈現這樣的圖形，要用這樣的方瓦鋪蓋，你們要怎麼處理這樣的問題呢？

立祈：先用尺量（要量什麼呢？大家討論喔，老師並沒有告訴你它的長度喔）

文濬：先用尺量出方瓦的邊長，以方瓦的邊長為單位，再量出圖形的邊到底有幾個方瓦？

立祈：方瓦的邊長是一平方公分（是邊長嗎）不是，是面積（面積是一平方公分嗎），不是應該是方瓦的邊長為 1 公分，（上台測量（以方瓦的邊長為單位點出平行四邊形底邊上的距離，再畫出垂直線，在將垂直線上以方瓦邊長為單位量點出距離，再畫出橫線）。

立廷：覆誦立祈的方法（教師協助）。

T：教師歸納圖形所需方瓦的步驟（以方瓦為單位量做記號）總共有幾個方瓦？

T：黑班上的圖形總共用了幾個方瓦呢？

S：總用用了 24 個，先將完整的數出來（圖形中完整的 20 個，不完整的將他切割後移到右邊合起來形成 4 個完整的）

文惠：將不完整的移到右邊形成一個長方形，每一列可排完整的方瓦 6 片，總共有 4 列，所以有 24 個方瓦。

T：文惠所採用的方式就是老師今天要介紹的面積的公式（由單位量解釋），長方形的公式可由單位量的方瓦的覆蓋證明得到，就是我們所說的長的單位量乘以寬（有幾列），以剛才的例子來說，長有 6 個 1 平方公分的方瓦，有 4 列，所以有 24 個 1 平方公分的方瓦，所以有 24 平方公分。因為每 1 平方公分的方瓦其邊長是 1 公分，有 6 個，其長度是 6 公分，寬有 4 個方瓦鋪成，所以有 4 公分，也可以用長度來求面積（以教室的地磚做單位量的說明）

5 年 6 班 2003.11.12.06 上課記錄〈方瓦覆蓋與測量〉

三角形圖形的覆蓋

T：這個圖形是什麼三角形？有人說是直角三角形，又有人說是等腰直角三角形？還有沒有其它名稱？那個名稱會比較適當？為何稱爲是直角三角形（因爲它有一個 90 度的角）？為何又稱爲等腰三角形。

立廷：因爲它兩邊都一樣（哪兩邊都一樣？應該怎麼說？）

文羽：下面兩個角度都一樣大（怎麼說）嗯……。

T：老師之前有提示過你們可從特徵來辨識？

立宏：若是把它先想成一個正方形，倒過來看這兩邊會一樣長（指著圖形），所以稱爲等腰三角形（爲何你要倒過來看呢？請你解釋一下）嗯……（這樣正看就不行嗎）可以啊！（那你怎知這兩邊一樣，一定會有某種方法可以證明出來）

文羽：我會利用量角器測量（指著圖形）這兩個角會相等，所以是等腰三角形（你有用量角器量過嗎）都是 45 度。

T：文羽是利用角度測量的方式發現它們都是相同的，但是我們稱做等腰三角形，這個等腰是指邊的長，怎麼才知道邊一樣長？

立濬：用尺量它的邊就可以知道是不是等腰了，它的兩邊都是 25 公分。

T：小朋友利用尺和量角器得知這個三角形的兩邊是等長的，兩個角度也相等，所以稱做等腰三角形，但爲何稱做等腰三角形呢？

立宏：若兩邊一樣長兩個角一樣大時，可以從中間對折，兩邊就可以變成對稱的圖形，所以

稱做等腰三角形，

T：你的方法屬於利用視覺辨識的方法，能否利用其它方式來說明（嗯……）

T：這個三角形有兩邊相等，又有一個直角，同學說它為直角等腰三角形，又稱為等腰直角三角形，這兩種說明有沒有一樣（不一樣）那應該怎麼說比較適當呢？你們常聽到怎樣的表示方法呢？

S：應該是等腰直角三角形

T：通常我們都是先從邊來看，再看角度，因為這個三角形有兩個等邊，所以可以稱為等腰，加上含有一個直角，所以稱為等腰直角三角形。

T：老師現在手上拿了一些方瓦，要如何才能將它完全的覆蓋呢？大家討論看看

文惠：老師可以切割嗎？（可以試試看）

立祈：先複製另一個三角形讓他成為正方形，再用方瓦覆蓋，覆蓋完後數一數用了幾塊方瓦再除以 2，就可以得到所需的方瓦了。（那你要從哪裡開始覆蓋呢）從四個角開始，因為他們是直角（指著圖形）先從四個角一步一步覆蓋（那麼可以全部覆蓋住嗎）不一定？（若從四個角開始往中間覆蓋，中間沒有辦法完全覆蓋時，怎麼辦呢）可以用剪的！（那會不一樣大）

文惠：先找一個直角開始，一排一排的覆蓋，第一排覆蓋完後，再覆蓋第二排，這樣就不會有遺漏的地方，因為有順序不會亂掉。

T：教師說明覆蓋的策略，先從旁邊按部就班排列，這樣才能一片接一片沒有隙縫或重疊的情形產生，才能正確的知道覆蓋的方瓦有多少。好！剛才是先將它想成正方形與方瓦形狀一樣，可以很快地排出來，但若改成三角形呢？你們會如何覆蓋呢？

立廷：從直角的地方先排，因為方瓦有直角，直角對直角比較容易，不容易重疊或歪掉，可以形成一條直線。

T：可以將完整的排好，有些地方沒有辦法鋪滿，這些空缺的地方是否與原來的三角形圖形一樣（有），剛才可以看到兩個三角形可以拼成一塊正方形，所以兩個空缺的三角形也可以用一塊方瓦補滿。

文惠：我們總共用了 25 塊（是嗎）不是，是 12.5 塊

T：12.5 塊是幾平方公分呢？有人是 11.5 塊，好像小朋友用的方法不同，所需的方瓦數目就不同，真有趣喔！教師說明同學覆蓋時採用的策略，有人先用尺測量方瓦及三角形的邊長，畫出格子後，再將方瓦覆蓋，不完整部分也發現可將方瓦裁成兩個相等的三角形進而覆蓋，也有同學先將三角形移補成為長方形，在將方瓦覆蓋上去，也有將此直角等腰三角形移補成正方形，然後將方瓦覆蓋，但是覆蓋所使用的方瓦數目似乎不太正確。這個問題值

得大家探討。

T：那 12.5 塊的方瓦面積是多少呢？

立廷：是 12.5 平方公分

文宇：不是，應該是 25 平方公分

T：喔！有兩派人馬提出不同的看法，還有沒有哪一組有其他的看法？

文維：我們討論的結果是 50 平方公分！

T：現在有三組不同的答案，哪一組正確呢？

立廷：每一塊方瓦是 1 平方公分，12.5 塊應該是 12.5 平方公分（哪是，一塊不等於 1 平方公分）

立祈：我們用尺量方瓦，每個方瓦是兩公分，所以面積應該是 12 乘以 2 等於 25 平方公分。

文羽：2 公分是方瓦一邊的長，好像不應該乘以 2

T：好，現在大家產生了問題，到底這個三角形應該是多少平方公分呢？大家仔細比較剛剛老師拿給各位的小方瓦是多少平方公分的（1 平方公分的），那現在所用的方瓦和剛才的一樣嗎？（不一樣）好，哪裡不一樣呢？請大家比較看看，將不一樣的地方找出來

文羽：喔，我知道了剛才的方瓦要四塊才等於現在的方瓦

T：你怎麼發現的（因為用四個一平方公分的方瓦剛好可以將這個方瓦完全覆蓋），那剛才只有同學認為要乘以 2，你們同意嗎？

S：不同意！（那這個方瓦的邊長和面積有什麼關係呢）

文宇：我知道了，這個方瓦每一邊是 2 公分，剛好可以覆蓋 2 個一平方公分的方瓦，所以這個方瓦應該是 2 乘以 2 等於 4 平方公分，一個方瓦是 4 平方公分，所以三角形的面積應該是 12 乘以 4 等於 50 平方公分

T：很好，有沒有哪為同學可以告訴我們覆蓋時應該注意哪些重點？

立廷：要先量量看方瓦的邊長有多少，算算看它的面積有多大。

文惠：將圖形先切格移補成長方形比較好計算。

立宏：一塊接一塊地把方瓦覆蓋上去，然後再將完整的方瓦一塊一塊算出。

文宇：可以利用長方形的公式算出幾塊方瓦，然後再乘以每塊方瓦所代表的面積。

立廷：方瓦覆蓋時要從直角的部分開始覆蓋，這樣比較好黏，也才不會重疊在一起，或是產

生隙縫。

立宏：若是有畫格子時可以先將完整的覆蓋，然後再覆蓋不完整的。

5 年 6 班 2003.11.19.07 上課記錄〈圖形重構〉

T：小朋友的桌上，老師都放了一些方瓦和平行四邊形的圖卡，現在要各組想辦法利用這些方瓦完全的覆蓋住平行四邊形的圖形，如何將方瓦鋪上去？

文羽：我會先用課本後面的平方公分版疊在平行四邊形上，測量平行四邊形圖形佔了幾塊平方公分板，然後就知道用了幾塊方瓦，因為一個方瓦等於一平方公分。

T：說的很好，但老師問的問題是方瓦要如何才能將圖形完全的覆蓋住，注意喔，就是方瓦之間要做最緊密的連接，不能有隙縫。。

立宏：我用直尺將平行四邊形圖形的各邊測量看看有幾公分，然後每一公分做一個記號，再從上至下畫出一條直線（平行四邊形左上頂點垂直往下），因為左邊多出一塊所以把它補成一塊完整的長方形，右邊也畫一條直線，把不夠的地方補起來，然後每一公分畫一條直線，（指著圖形），把方瓦一格一格的覆蓋上去，這些不足的地方，就把兩個當成一塊來算，最後再把它扣掉，這樣就能夠算了。

T：重述立宏的方法，問大家有無問題（這是我們討論的，被他偷聽到的），沒關係，志宏將你們的想法提供出來，可見大家都很聰明，除了這種方法可以解決方法覆蓋可能遇到的問題外，你們還討論出什麼方法呢？

文惠：我們的方法是將平行四邊形左邊多出來的一塊切下，然後移到右邊補成一塊長方形，再用尺或平方公分版去量（為什麼？）量它有幾格，就知道需要的方瓦有幾塊了。

立廷：用尺去量可以知道一公分是一格，如果上面是七公分的話就有七格，右邊若是五公分的話就有五格，只要將 7 乘以 5 就知道需要 35 塊方瓦了。

T：（指著圖形）為什麼要將這邊乘以這邊，才能知道所需的方格呢？

立廷：上面一列可以覆蓋 7 個方瓦，長方形可以覆蓋五列，所以總共需要 $7 \times 5 = 35$ 塊方瓦。

T：說的很好，前面幾個同學的說法都是將平行四邊形的圖形變成完整的長方形來進行覆蓋，但若要讓你們真正的進行，你們會從這裡開始覆蓋嗎（指著平行四邊形左下角突出的部分）？

S：不會（為什麼？）嗯！應該從有直角的地方開始！（但是看不到有直角的地方啊！）

立廷：將方瓦先從這裡開始放一塊（在黑板上操弄），然後再將另一塊和它靠在一起鋪上去，把這一排完全鋪滿後，再重下一排開始，依此類推。

T：嗯，你們很聰明，想了很多的方法來探討平行四邊形需用多少方法，現在老師要讓各位實際的操弄，如何將桌上的方瓦完全的覆蓋到平行四邊形的圖形上，（想一想，如何才能完整的拼出來）作業如圖示

S：老師可不可以將方瓦剪成一半？（你可以試試看）

S：老師這些方瓦好像不全都是一公分（對不起，有些有誤差，如果誤差太大的，就把它挑出來不要貼，你們都很細心，方瓦覆蓋得很精細喔！）

立廷：老師一定要完全覆蓋完嗎？我已經知道要用多少方瓦了，全部覆蓋完很麻煩勒！（你試試看，並且驗證你的算法）

（巡視課堂，學生有的先畫格子，有的利用分合移補的方式形成長方形）

文羽：我們先將右邊的剪下移到左邊成為長方形，長方形的長可以覆蓋 7 塊，寬有五塊，長乘以寬總共有 35 塊，

文惠：但我們算一算總共用了 33.5 塊

T：喔，他們這組用一格一格的方式算出用了 33.5 塊，能不能解釋一下你們的算法。

文惠：我們先將完整的算出來，再算出不完整的，兩塊不完整的當成一塊完整的來算，所以總共需要 33.5 塊方瓦。

立廷：我們先將平行四邊形變成長方形，只要將長和寬各鋪一排就好了，然後乘起了就知道有多少塊了？

T：這對於邊長剛好是方瓦倍數的圖形是有用的，剛好可以完整的鋪滿，但若無法完整的鋪滿時，這種方法還可行嗎？

文濬：我們和立廷的方法一樣，總共用了完整的方瓦 21 塊，不完整的合起來的是 5 塊，總共是 26 塊，咦！好奇怪？

文霖：我們先用尺量，每一公分做一記號，然後將這些記號畫出直線，將一格一格的畫出，在將方瓦鋪上去，總共是 35 塊方瓦。

T：很好，小朋友們都用了很多的方法來解決方瓦覆蓋平行四邊形的問題，那麼若要將方瓦完全覆蓋在三角形和梯形的圖形，需要多少方瓦時，你們會用什麼方法呢？

立廷：先將三角形從中間切割，然後移到右邊形成長方形後，再將方瓦鋪上，比較容易知道需要多少塊方瓦。

T：但如果你切割拼成的長方形，剛好沒有辦法將整塊方瓦完全的覆蓋住時，你會怎麼辦呢？

文惠：就將方瓦切開覆蓋上去，看看用了幾塊完整的方瓦。

T：除了這種方法之外，哪一組想到比較合適的方法可以解決老師剛才提到的問題。

文霖：我們先用尺量三角形的邊，每一公分就做上記號，然後將這些點連起來成爲一條直線，可以得到許多方格，再從這個地方（指圖形中點處）把它切下來移到這邊就形成了長方形，這些不完整的和這些不完整的就能合成完整的方格，然後數一數完整的方格就可以知道需要多少方格了？

T：說的很好，除了這種方法之外，老師看見文宇這組的方法不錯，可否請你們將你們所用的方法和大家分享。

文宇：因爲正方形可以切成兩塊三角形（將圖形展示給大家看），我們就先畫成一個正方形，然後依照方瓦的邊長，在正方形的邊上做出每塊方瓦長度的記號，接下來看每邊有幾塊方瓦，用邊長乘以邊長的方式求出正方形用了幾塊方瓦，再除以 2 就得到三角形需用幾塊方瓦了。

5 年 6 班 2003. 11. 26. 08 上課記錄〈圖形重構〉

T：這個方法很好，小朋友可以嘗試看看。有關梯形部分呢，哪組小朋友願意和我們分享你們的想法

立翔：我們將左邊突出的部分直直的切下，然後到過來移到右邊，形成一個長方形，就可以將方瓦順利的覆蓋上去。

立廷：我們也是用切割的方式，但我們將左邊和右邊突出的部分切下來後，兩塊三角形合起來可以組成一個正方形，這個圖形總共有兩個正方形，只要算一個正方形需要幾塊方瓦，然後再乘以 2，就可以知道梯形需要幾塊方瓦了。

嗯！這個想法也不錯，還有哪組願意和我們分享的。

文羽：我們是將梯形從中間切下來，然後把其中一塊到過來和另一塊接起來也可以形成長方形，很快地就能算出需要多少塊方瓦了。

T：喔，他們發現從中間切下來移過去就能形成長方形，還有沒有其它方法也可以形成長方形

文宇：從這邊（指著圖形左邊約三分之一部份）切，移過去也會形成長方形

T：噫，這個發現真不錯，大家（相互合作）將講義的作業完成吧

5 年 6 班 2003. 12. 3. 09 上課記錄〈面積公式理解與運用的探討〉

T：三四年級的時候，小朋友們已經學過了長方形的面積公式，還記不記得它的公式呢？

S：知道，是長乘以寬！

T：很好，為什麼是長乘以寬呢？有哪位小朋友可以解釋？（嗯……沈默）

T：大家想一想如果用邊長一公分的方瓦來覆蓋長方形（ 3×5 cm），長的部分可以覆蓋幾片方瓦（5片），寬的部分可以覆蓋幾列（3列），那麼總共覆蓋幾片方瓦呢（想一想，15片）那從方瓦的覆蓋，有哪位可以解釋長方形的面積公式它的關係？

文惠：將方瓦覆蓋在長方形上面，現從上面一片接著一片連續覆蓋，數出它總共有 5 片，長方形可以這樣的方式覆蓋 3 列，所以 5 乘以 3 等於 15。

T：很好，我們可以從方瓦的覆蓋之道長方形面積的公式長乘以寬，原來是長的部分覆蓋的方瓦數目乘以寬可以覆蓋幾列方瓦得到的，所以小朋友們可以利用覆蓋的方式來推敲長方形面積公式的由來。那平行四邊形也可以變成長方形，它是不是也有面積公式呢？它的公式和長方形有何關係？現在，小朋友請你們將桌上的長方形和平行四邊形拿起來比對一番，看看能不能發現它們之間的關係。

立廷：我發現它們的面積一樣

T：喔，立廷發現他們的面積一樣，怎麼知道的（平行四邊形這邊切割移補過去就跟長方形一樣），好，長方形的面積公式是（長乘以寬），那平行四邊形的底和高與長方形的長和寬有什麼關係？想想看

立宏：我發現長方形的長和平行四邊形的底一樣，長方形的寬和平行四邊形的高一樣。

T：喔！很好，長方形的面積是由長乘以寬構成，那麼平行四邊形的面積可否用底乘以高來代表

立廷：可以（為什麼）因為底乘以高算出來的面積和長方形一樣

T：很好，平行四邊形其實是長方形的變形，底乘以高其實就是長乘以寬，你只要將平行四邊形這邊切割移補後也能形成和長方形一樣的圖形。小朋友可以以長方形為基準圖形在和這塊三角形比較一下，觀察一下它們之間有何關係。

立彰：我以長方形為準，把這個三角形放在它上面，從這裡切割後移到這個空白處，剛好和長方形一樣，所以它們的面積是一樣的。

T：喔！立彰也發現這個三角形與長方形的面積也是一樣的，但是三角形的面積公式是底乘以高除以 2，和長方形的面積公式底乘以高不同，它們之間有什麼關係呢？

文儒：三角形的底和長方形的長一樣（比對圖形），高從這裡切一半將上面的部分移到這邊剛好等於是長方形，它的高是長方形的寬的兩倍，所以高除以 2 會等於寬，三角形的面積公式為底乘以（高除以 2）就會和長方形的長乘以寬相等了。

T：文儒發現了三角形的高是長方形的寬的兩倍，推理出它們面積公式之間的關係，再看這個

圖，如果老師將三角形的高和長方形的長重疊一起，可以發現它們相等，三角形的底和長方形之間的寬又有什麼關係呢？

文字：三角形的高從中間切割後移到上面也會成爲長方形，底除以 2 等於長方形的長。

T：那它們面積公式之間有何關係呢？

文字：長方形與三角形的面積一樣，長方形的面積公式是長乘以寬，三角形的高和長方形的寬一樣，底除以 2 等於長方形的長，所以三角形的面積公式也可以變成（底除以 2）乘以高。

T：非常的棒，小朋友能夠舉一反三真是太聰明了，除此之外，小朋友常常說三角形的面積公式是（長乘以寬）除以 2，這個公式是怎麼來的。

文羽：老師我知道，因爲兩個相同的三角形可以組成成一個正方形或長方形，長方形的面積是長乘以寬，再除以 2 就是一個三角形的面積了。

T：說得很好，那麼梯形的面積公式呢？（它是上底加下底乘以高再除以 2）哇！小朋友都知道它的公式，但這個公式是怎麼來的呢？小朋友你們可以利用桌上的梯形圖片和長方形圖片比較看看，這個梯形的面積也和長方形面積一樣，它們的面積公式之間有什麼關係？

文字：把兩塊相同的梯形到過來連在一起可以形成一個長方形，長方形的面積是長乘以寬，在除以 2 等於一個梯形的面積，長方形的寬等於梯形的高（指著圖形），長方形的長剛好就是這個梯形的上底和這個梯形的下底兩個加起來的和，這兩個梯形是一樣的，所以這個下底等於這個下底，將（上底加下底）乘以高再除以 2 就是梯形的面積了。

T：文字好厲害喔，謝謝他的說明，他是利用兩塊相同的梯形組合成一個長方形，再從它們的底邊探索出公式的關係，這是一種不錯的方法，除了這種方法之外，老師提示大家，其實利用切割的方法，也可以得到梯形面積公式的證明，大家討論看看，我們看看哪一組的小朋友最聰明，你們可以利用各種工具像是尺或是剪刀切割來協助，加油（經過 5 分鐘後，學生依然沈默）

T：由於時間的關係，老師就將這個問題當成作業，下課後你們可以繼續討論，看看哪一組的小朋友可以找出他們的關係並能夠清楚的說明他們的關係，老師會給他們獎勵。

隔天文字、立廷、立祈和文羽等四組分別提出他們的圖示和說明。

5 年 6 班 2003.12.10.10 上課記錄〈面積公式理解與運用〉

文字：將梯形分割成一個平行四邊形和一個三角形，平行四邊形的面積公式是上底乘以高，三角形的面積是底乘以高再除以 2，兩個圖形合起來的面積就是將（上底乘以高）加（底乘以高 \div 2），上底乘以高若要和後面的底乘以高除以 2 一樣的話，則可以變成 2 個上底乘

以高再除以 2，因為有兩個上底，拿出一個和這個底合起來就變成下底了，它們同時都要乘以高除以 2，可以把這個抽出來，面積公式就變成了（上底加下底）乘以高除以 2

立祈則將圖形切割成兩個直角三角形和一個正方形，三個圖形合起來推演出面積公式為（上底加下底）除以 2 再乘高。

（綜合解題活動）

5 年 6 班 2003.12.17.11 上課記錄〈面積公式理解與運用〉

T：今天我們要一起來討論等積異形的問題，什麼是等積異形呢？等下老師會呈現一些圖形，總共有六個，要請大家來看看，這些圖形當中有哪些面積是相等或一樣大？但我要先來問問看小朋友是否瞭解什麼叫做面積？好，請跟你的友伴討論一下，什麼叫做面積？

文羽：一個平面的大小叫做面積。

T：那什麼叫做平面呢？

文羽：由四個邊所構成的圖形叫做平面。

T：一定是由四個邊構成的圖形才能稱做平面圖形嗎？

文羽：（揉揉眼睛）嗯……。

T：沒有關係，小朋友還在猶豫或是不清楚，那麼老師再給小朋友一些時間討論，你們要怎麼定義面積？邊數和圖形的名稱有關係嗎？（三分鐘後）

立廷：我們認為面積指的是邊和邊密合起來的圖形！

T：喔！他們認為面積是邊和邊密合起來的圖形！大家同意嗎（大家同意）

T：嗯！大家都點頭同意面積指的是一個由邊封閉起來的平面圖形，那麼這個圖形可否辨認出來大小呢？

S：可以，他們可以比較而知道那個圖形較大或較小！

T：那怎麼比較呢？

S：可以數數看用了多少方瓦？方瓦多的面積較大。

T：很好，有小朋友說可以利用方瓦作為單位量來計算圖形的面積大小，因為它是封閉的，使用的方瓦是有限的，所以可以用來比較。好！黑板上的 6 個圖形哪些面積是一樣的，為什麼？也將你們的理由想出來。（小朋友討論熱烈）哪組要先發表呢？

立彰：我們覺得甲丙丁三個圖形面積是一樣的。因為丙可以變成和甲丁一樣的平行四邊形，所以這三個圖形是一樣的。

T：喔！眼鏡這一組的同學認為甲、丙、丁三個圖形面積一樣，大家同意嗎！

S：（搖頭）不同意

T：好，很多同學都不同意，那麼有哪一組的同學願意跟我們分享你們觀察的結果。

立廷：（走到黑板前指著圖形）我們認為黑板上的 6 個圖形面積都一樣，為什麼呢？因為丙是長方形，可以將甲（平行四邊形）左下方突出的部分一到右邊就跟丙一樣是長方形，面積一樣；乙是梯形，上面是 2 塊，下方是 4 塊，也可以把他切割後移到右邊，就變成和丙一樣的長方形。丁是和甲相反的平行四邊形，戊是梯形，同樣的可以將左邊切掉移過來就和丙長方形一樣，而已可以將兩邊突出的部分切掉後移到少的部分，也和丙一樣，所以 6 個圖形的面積是相同的。

T：嗯，立廷分析以及說明的很清楚，大家同意他們的看法們（同學們點頭），好，這 6 個圖形是什麼形狀的圖形呢？（都是四邊形）。

T：甲和丁是什麼形狀（平行四邊形），乙戊己呢？（梯形），因為他們都有四個邊，所以稱做四邊形。立廷他們是以切割的方式來做比較，其中以丙長方形作為基礎，可以很容易就比較出來那個圖形較大？除了這個方法之外，是否還有其他方法可以知道它們的面積是一樣大的！

S：用平方公分板來量

T：嗯！不錯，你來示範看看！

S：將平方公分版覆蓋上去，再用尺來量，然後……嗯（停頓思考）

T：嗯！沒有關係，形容不出來，我們請其它小朋友來幫你的忙，有沒有同學要幫他說明。

立廷舉手：（走到黑板前手指著圖）：直角的部分和圖形直角的部分重疊，先數出完整的方格有幾塊，再將不完整的數出來，加起來就可以比較了。

T：好，謝謝立廷的協助，大家認為用平方公分版點數用掉的方格這個方法可不可以比較出圖形的大小（同學點頭），除了這兩個方法外，老師還想聽聽看有沒有其它的方法？

T：小朋友沈默一陣時間，再想想看，上課時曾經教過小朋友使用（繼續沈默），可不可以使用公式（小朋友振奮一下）對，可以使用公式，甲是什麼圖形（平行四邊形），好，那它的面積公式是什麼？（底乘以高）己呢（梯形）面積公式（上底加下底乘以高除以 2）好！那用公式來算他們的面積是多少呢（24 平方公分）。嗯！你們再想一想為什麼這些圖形的面積都一樣呢？有沒有看出它們之間有什麼特徵不一樣？

文維：它們的圖形不同

T：很好，這些圖形形狀不同，但面積相同，我們可以給它一個名稱代表（等積異形）嗯！很好，叫做等積異形，它們的形狀不同，但面積一樣，那你們有沒有觀察到這些圖形除了面積相同之外，還有哪些特徵是影響面積相同的因素？

立廷：它們都有四個邊！

T：喔！沒錯，但這是影響它們面積相同的因素嗎？

S：高都是一樣，都有 8 格。

S：圖形的上底加下底除以 2 後都是 3 格。

T：圖形的底和高都一樣時，面積都一樣，所以圖形的形狀不同，但這兩個條件都一樣時，它們的面積都會一樣。很好，那下一個題目現在公布在黑板上，也請你們討論看看，哪些圖形的面積是一樣的？

T：黑板上這些圖形稱爲什麼（三角形），哪些是一樣的？（嘻…都一樣）你們都認爲這些圖形的面積都一樣嗎？（都一樣）

立昇舉手：我認爲丙不一樣

立廷：丙和己和其它圖形不一樣。

T：好！我們來檢查看看，喔！乙和己有沒有一樣（有），ㄟ，一樣，那丙是不是不一樣呢？雖然都是三角形，高都一樣，但丙的底有 5 格，和其它的不同，其它的三角形只有 4 格，很明顯的和其它圖形不同。

T：好！那你們能不能解釋其他的圖形面積爲什麼會相等？

S：因爲三角形的底和高都一樣，所以把底和高乘起來的面積都一樣。

5 年 6 班 2003. 12. 29. 12 上課記錄〈面積公式理解與運用〉

T：今日的課程已經進入本單元的尾聲，我們要驗收小朋友近幾日來學習的成果，希望小朋友們能將所學的策略或技巧運用思考將它表現出來或解決問題。有時要找出它的高或底，有時要算出他的面積，有時要利用分合移補的方式簡化複雜的圖形，然後利用公式求出圖形的大小，小朋友也要利用合作解題的態度，共同探索問題的線索，腦力激盪以求得答案，這樣不懂的人可以學得新的方法，懂得人也可以驗證自己的想法。講義的題目爲一個文字題，你們在解題時可能就需將它轉化成一個圖形的表徵的方式來解題，此題目爲陳老師有塊地，上底爲 8 公尺，下底爲 10 公尺，兩底之間的高爲 9 公尺，這塊地的面積有多大。首先你要先想一想這個圖形是什麼？計算面積時須考慮什麼要素呢？請你們討論一下，如何畫出這個圖形？要怎們算出他的面積呢？

S：老師，我們已經算出答案了（老師要你們討論如何畫出這個文字題所敘述的圖像）

S：老師我們的圖形會畫超出紙張（喔！那你們就要想想，怎樣才不會超出紙張，而且它們的比例能過合乎邏輯）

立廷：梯形可以切割？（沒有啦，要畫出完整的圖！）

文羽：要畫出 9 公尺嗎？

文維：沒有啦！你可以縮小簡化。

T：老師觀察到有小朋友將 1 公尺用 1 公分來畫。（成果如習作所示）

T：畫出講義中指定的三角形並算出其面積，你們會採取什麼步驟呢？

立廷：我們先將他從中切割後，再移到旁邊形成長方形，然後量出它的長是 7.5，寬是 9，乘出的答案是 66.5，單位是什麼呢？老師（同學告訴他好不好？）平方公分（大家同意它的答案嗎，不同意）

文羽：我的方法和立廷的方法一樣，只是答案不同，因為量出的長和寬不同，我們的答案是 67.9 平方公分

文字：把三角形切成一半，中間那一條稱為高，因為它和底邊垂直，底邊為 14 公分，高為 10 公分，用三角形的公式算出為 70 平方公分

T：接下來為一個六邊形，你們要怎樣算出它的面積呢？

立安：老師這個題目好難喔！（沒關係，試試看）

文羽：好，我要用填補的方式來算！

T：小朋友，你們可以利用上課時所教過各種方法來解題，先思考一下再作答，不要寫了又擦，擦了又寫，可以想想看要採取什麼步驟？

立廷：我們先將右上角擷取和坐下角空白處一樣的三角形將它移補後（如圖）就形成了這樣的圖形，然後去量它的底和高（指剛切割的三角形），底是 5，寬是 4.5，全部的長加起來為 20，再除以 2 是 10，所以面積是 10 平方公分（誤以為是求三角形的面積）

T：你的面積是怎麼算出來？（喔！我把圖形的所有的邊都加起來，其實是三角形的兩邊 5 和 4.5，加上旁邊的 10.5 公分）邊和面積所代表的意義一樣嗎？面積是一封閉的圖形大小

文惠：我們把六邊形旁邊空白的地方補起來想像為一個長方形（如圖），然後這把這兩個想像出來的邊量出來後，發現它們可以變成一個正方形，面積是 25，再算出整個長方形的面積，長是 15 寬是 10，面積為 150 平方公分（S：再除以 2），再減去 25，這六邊形為 125 平方公分。

T：老師有聽到同學說還要再除以 2，爲什麼呢？它是三角形嗎？（不是，是長方形）長方形面積算出來後要除以 2 嗎？（不用）

立安：我說三角形要除以 2（剛才文惠的方法你沒有聽懂，他說這兩個三角形可以合起來變成一個什麼圖形）（S：正方形）（正方形面積要不要除以 2）嗯……..

T：覆誦文惠的方法

立祈：我們把左下角的三角形切下（如圖）然後移到右上角空白處，就成爲一個 L 行的圖形（指著圖）從這個地方將它切成兩個長方形，分別量出它的長和寬加以來就是 L 圖形的面積，也就是剛剛六邊形的面積，大約是 126.5 平方公分。

T：回到講義例題，第一題你們會怎麼解題呢？

鳴元：第一題是個梯形題目，我們用梯形的公式，即上底加下底乘以高的方式算出來，面積爲 81 平方公尺。

文宇：我們先畫出一個梯形，再複製另一個相同的梯形然後倒過來形成一個平行四邊形，它的底邊剛好是梯形的上底和下底之和，然後乘以高後就是全部的面積，再除以 2 就是一個梯形的面積了。

立廷：我們將八公尺以八公分的比例方式畫出梯形後，再將它切割，然後移過來可以組成一個正方形！（正方形嗎？）喔！不是，是長方形，然後用長方形的公式長乘以寬算出，噫！它的長是 9 公分，寬也是 9 公分，應該是正方形，所以面積算出來是 81 平方公分。

T：想一想三位同學的方法，哪一種會比較好。

S：用鳴元的，因爲用公式算比較快。

T：接著第二題，我會利用想像的方式將它先變成一個長方形，再扣除空白的部分，就可以算出原來的面積了，第三題是否可以利用公式就算出答案了，我想未必，所以你可以根據老師在講義中提出的步驟先思考一下，或許可以順利的將問題解答出來

立廷：老師，如果算出來的數字差很多會怎樣（可能你們用的方法不精確，還需要再檢查一下）

立祈：我們先將左邊的三角形切掉移到右邊就形成一個長方形，利用長方形公式就能算出答案了，他的面積是 1400 平方公分

T：有沒有小朋友直接採用公式的，它的底是多少？（文宇：是 35，要扣掉空白的長度），高是多少？（40）所以面積是底乘以高等於 1400 平方公尺

T：第二題是一個梯形的題目，從圖中只有看到上底和高，並沒有看到下底，若用公式，則沒有辦法算出它的面積，所以我們要轉變一些方法或策略。大家可以看一看提示，整個圖形是個平行四邊形，另一個是三角形，平行四邊形的面積扣掉三角形的面積後，是不是就能

算出梯形的面積了，所以要用兩步驟來解題，第一個步驟要將平行四邊形的面積算出來，它的底是 60，高是 40，所以面積是 2400 平方公分，再來，三角形的公式是底乘以高除以 2，所以 40 乘以 40 再除以 2 等於 800，那麼梯形的面積可否由全部的減去三角形的就能算出(可以)，2400 減去 800 等於 1600，這就是梯形的面積。這種方法只是一種策略的轉變，利用整體扣除部分的方法就能算出來。

T：說明第 15 頁的步驟，引發解題條件不足而轉變策略的思考。

5 年 6 班 2004. 1. 3. 13 (擬題紀錄)

T：我們上課探討的內容包含了哪些圖形呢？

S：有平行四邊形、三角形、梯形和長方形。

T：有探討到長方形嗎？

S：有，還用它作為基礎來探討其他圖形的公式。

T：除了這些外，我們還探討了這些圖形的什麼特徵呢？

S：包含了面積、高、邊長、上底和下底、角度、垂直和平行。

T：好，之前的幾節課，我們都是利用圖形的特徵來解決它的面積問題，最後可以使用公式或是分合移補的策略來解題，今天我們要改變方式，讓小朋友利用老師提供的訊息或是線索來設計數學問題，這就是黑板上所寫的擬題，什麼叫擬題呢？以前有沒有學過呢？

文羽：是不是寫數學故事。

T：嗯！很接近了，他是利用一些資料編成一道數學題目，這道題目可以配合生活的經驗或是所遇過的情境，讓其他人看過後，可以從題目的線索思考而解題。講義提供了三個不同類型的資料，以第一題來說，大家可以看到題目中畫了 9 個小長方形，它的常和寬的資料都呈現出來，再看看箭頭右邊，組成了一個大長方形，從提供的資料來看，你們會設計出什麼樣的題目呢？

立廷：可不可以將資料從後面到回來設計呢？

T：可以的，甚至你還可以補充一些額外的資料到題目裡。

文霖：老師要不要算出設計題目的答案呢？

T：我們今天的活動只是讓小朋友針對資料設計數學問題，並沒有要求要算出答案，若要算出答案也可以。

文羽：磁磚的磁是不是字典裡的這個瓷，

T：應該可以通用吧！你的題目可以設計得很有趣喔！

文羽：真的的小朋友設計出很有趣的題目！

立祈：我們設計的數學問題是有一個小長方形的周長是 18 公分，已經知道這個小長方形寬是 4 公分，現在將相同的 9 個小長方形組合成一個大長方形，那麼這個大長方形的面積是多少？

T：覆誦一次，但要注意這個題目轉了兩個彎，一個是小長方形的長要先算出，然後才知道小長方形的面積，再將小長方形的面積乘以 9 就可以得到大長方形的面積了。

文惠：我們的題目是有一塊長方形蛋糕分給九個人，每個人得到的小蛋糕長是 5 公分，寬是 4 公分，那麼這一塊蛋糕的面積是多少平方公分？

T：覆誦一次，題目中的條件都具備了，所以整個圖形的面積可以算出來。

文羽：我們設計的題目為一塊小磁磚長為 5 公分，寬為 4 公分，爸爸鋪浴室鋪了 9 塊，請問浴室的面積有多少平方公分。

T：大家有沒有問題要問他？老師想問你一塊磁磚面積是多少呢？（20 平方公分），一塊磁磚長 5 公分（手比），寬 4 公分（手比）那一塊的面積有多大？9 塊呢？（像手掌那麼大），你想想 180 平方公分有多大（老師用手比出大小，全班大笑）你知道 180 平方公分有多大了嗎，那麼你說的浴室真的只有這麼大麼？你要怎樣修改這個題目？

文羽：將爸爸鋪磁磚……改成爸爸修補浴室的地板……

T：這個題目不錯，但是脫離了情境，可以加以修改。這是第一題，題目的線索包含了文字說明和圖形，所以你可以很快的設計出題目，但第二題只有文字說明，老師提醒小朋友，可以先將資料先看一遍，是否有缺少，再將這些條件配合起來編成一道題目。

文羽：老師圖形中的高是不是立體的！

T：題目中不是告訴你面積嗎？仔細想想！

文羽：對喔！

依婷：32 平方公尺有多大？可不可以畫圖來表示？

T：你們可以想一想！

立廷：大概從我們的教室（六班）到四班那麼大吧（以為是邊長，不是面積）

立廷：我們設計的題目是有一棟公寓他的地板面積是 32 平方公尺，高為 8 公尺，長是多少？寬是多少，是什麼形狀？

T：一個圖形內有高、有長、有寬，是什麼圖形具有這些特徵呢？（嗯）這題目可以解決嗎（不

可以) 因為他的陳述不合邏輯

文宇：我們設計的題目是一張平行四邊形的大地毯，已經知道它的面積是 32 平方公尺，高是 8 公尺，請問它的底是多長？

T：問題很清楚，將面積、高和底的關係配合得很好，雖然不是很新奇，但是很流暢，若是老師設計的話，我會設計這樣的問題，有一塊平行四邊形的土地，面積是 32 平方公尺，高是 8 公尺，其中三分之一種絲瓜，三分之二種菊花，那麼它們的面積各是多少？第三題只有提供小朋友四組數字，你會設計出什麼樣的題目呢？

文羽：我想出的題目是小明走 8 公尺掉 200 元，走了 40 公尺掉了 4800 元，他總共掉了多少錢，可以嗎？

T：是可以的，但最好配合我們面積的教學目標。

附錄九 訪談記錄

5年6班 2004.1.15 訪問對象，文濬 01

T:好！文濬，老師今天要問你的第一個問題是，你有沒有觀察到我們日常生活中有很多的物體，這些物體它是不是都有一個外表，所以我們說它有一個形狀對不對？

S:對

T:那你能不能根據這些形狀來分類呢？

S:可以

T:可以，那老師想要你來分幾類，你來想看看哪些東西是屬於這一類的，屬於三角形的

S:三角形的

T:想想看有什麼東西呢？

S:…三角板

T:三角板，嗯不錯，還有沒有呢？

S:…

T:吃的東西有沒有想過

S:…

T:早餐有沒有吃過一種東西

文濬:三明治、三角板

T:三明治，好三角板、三明治還有沒有呢？

S:…

T:食衣住行育樂都可以，有沒有衣服、褲子是像三角形的

S:有圖案

T:圖案有三角形的喔？

S:有

T:好！那你為什麼要把圖案、三角板、三明治把它歸類成三角形是什麼原因？

S:因為，它們有三個角

T:有三個角就是三角形喔？

S:對

T:還有沒有其他特徵呢？

S:特徵…

T:想一想，有三個角你把它稱做三角形，那三個邊可不可以稱做三角形呢？

S:可以

T:那什麼情形下三個邊才能稱做三角形

文濬:正三角形，三個邊都一樣

T:三個邊一樣稱做正三角形

S:對

T:只有正三角形是三角形而已是不是？

S:沒有，還有等腰三角形

T:等腰三角形好！除了三角形以外你想一想在日常生活中有哪些東西可以稱做正方形的

S:正方形…土司

T：土司，不錯還有呢？
S：電視、土司、時鐘（2）
T：還有呢？
S：…時鐘
T：時鐘，不錯想到那麼多東西那你爲什把它們歸類成正方形呢？
文瀾：因爲…它們四個角都是直角
T：對都是直角，還有呢？
S：有一些正方形的邊都一樣長
T：邊都一樣長，你指的是什麼邊，哪一個邊呢？
S：…
T：四個邊嗎？
S：對
T：四個邊都一樣長
S：對
T：四個角都是直角
S：對
T：你認爲這是正方形的特徵，哪想想還有沒有其他的呢？
S：…都是正的，沒有歪的
T：都是正的，什麼叫做都是正的，要解釋清楚
S：就是沒有歪掉
T：沒有歪掉的，就是正的，好那想一想有什麼東西像長方形
S：長方形…袋子
T：袋子，還有呢？
S：書本、盒子
T：書本、盒子，那你爲什麼把這些東西歸類爲長方形呢？
S：因爲它們有兩雙對邊的邊
T：有兩雙對邊，然後呢？
S：然後…比較長
T：什麼叫比較長
文瀾：上面的邊和下面的邊比左右的邊還要長
T：不錯！還有沒有其他條件呢？
S：……
T：你是剛從邊的角度來想，那如果用角度來想呢？它有幾個角
S：4 個
T：那這 4 個角有什麼特徵
S：都是直角
T：都是直角，跟和正方形有沒有一樣
S：有
T：都是直角，好那這是長方形，那你想想看有沒有看過哪些東西像梯形
S：山

T：山像梯形，還有沒有呢？
S：沒有
T：沒有，那梯子呢
S：對
T：那山跟梯子你爲什當梯形來看呢？
文濬：因爲，它們兩旁的邊都向外發展
T：都向外發展，然後呢？
S：然後……
T：它兩旁的邊都向外發展，那有沒有上面的邊和下面的邊
S：有
T：那上面的邊叫
S：上底，下面的邊叫下底
T：對那上底和下底有沒有什麼樣的特徵
S：互相垂直
T：兩個會互相垂直，上底和下底會互相垂直
S：對
T：確定是垂直，什麼叫垂直
S：互相
T：互相怎樣
S：互相平行
T：一定要互相平行，那還有沒有其他特徵呢？梯形有幾個邊
S：4個
T：是不是是四邊形的一種
S：是
T：好，那它有沒有四個角
S：有
T：好這是你把它分類的，接下來老師桌上有黃色這個板子，這個叫什麼知道吧！這個叫釘板，以前有沒有玩過釘板
S：斷掉了學生未回答
T：我現在桌上有放四個不同形狀不同顏色的四個木板，那能不能告訴我黃色的這個是什麼形狀
S：三角形
T：三角形，藍色的呢？
S：平行四邊形
T：這一塊呢？
S：梯形
T：梯形，那這個粉紅色的呢？
S：長方形
T：長方形，好那你能不能告訴老師這四塊圖形哪一塊的面積比較大，你怎樣去比較，你會用什麼方法，隨便你，可以用很多方式，看你如何去比較，如何去做
S：這裡……這裡……

T：好
S：然後……割成長方形
T：那你爲什麼要把它切割成長方形呢？
S：比較好量
T：比較好量？好那你看看桌上有沒有長方形的東西
S：有
T：好那你改用這個去比對的
S：把著個多餘的移到這邊……
T：然後這下面的長方形怎樣
S：一樣
T：一樣好，用長方形做基準
S：這個也一樣，把著個…然後…
T：對，不錯喔，那它麼兩哪個面積大呢？
S：…
T：剛才平行四邊形跟長方形哪個面積大呢？把這個移過去
S：移過去
T：移過去，你認爲哪個大
S：這個大
T：哪個大，確定這個大喔，還是一樣大
S：一樣大
T：好！三角形跟長方形一樣大，現在平行四邊形又跟長方形一樣大，這三個有什麼關係？
S：……
T：三角形跟長方形一樣大，平行四邊形又跟長方形一樣大，這三個有什麼關係？誰大
S：都一樣大
T：都一樣大，好還有一個梯形怎麼辦？梯形比較大嗎？
S：……把這兩個補到這裡
T：對補到這裡，也是一樣大，跟長方形一樣大，好！你要用尺幫忙量？
S：……
T：移過去移上去是一樣大的啦
S：一樣大的喔
T：你把那塊切掉啊
S：把這裡都切掉，然後…
T：對，那這四塊有什麼關係
S：……
T：四塊面積是不是一樣大，爲什麼呢？告訴我吧！
S：……
T：因爲三角形跟長方形的面積？
S：因爲三角形跟長方形的面積一樣大
T：再來呢？
S：平行四邊形的面積也跟長方形一樣大，然後梯形的面積也跟長方形的一樣大

T：所以都跟長方形一樣，所以面積都一樣大
S：對
T：那形狀有一樣嗎？
S：沒有
T：那這個叫什麼呢？
S：……
T：等積…
S：等積圖形
T：等積異形
S：等積異形
T：對，記住沒
S：有
T：那你可不可以告訴我，如果我要用公式來算長方形的面積要怎樣算？
S：長方形是長*寬
T：長*寬，那平行四邊形呢？
S：……
T：底
S：底*高
T：高有沒有，底*高，記住嗎？
S：嗯
T：那三角形的面積呢？
S：三角形面積：底*高/2
T：底*高是不是長方形的面積，除以 2 是不是它的一半
S：對
T：那梯形面積呢？
S：[(上底+下底)*高]/2
T：對那這四個面積，這四個圖形它們的公式都不一樣對不對，可是它們的面積怎樣
S：一樣
T：一樣，那它們公式之間的關係怎樣，那你能不能說說看
S：公式之間
T：像平行四邊形跟長方形來比的話，它們面積一樣但公式不一樣，想想長方形長的跟平行四邊形的底有沒有什麼關係
S：……
T：平行四邊形的底和長方形長有沒有一樣
S：有
T：那它的高跟寬有沒有一樣
S：有
T：所以它麼的面積乘起來會
S：一樣
T：底*高和長*寬有沒有一樣

S：有

T：好那三角形呢？底跟它的長有沒有一樣

S：底跟它的長

T：跟長方形的長

S：……

T：三角形的底長方形的長，長方形的長在哪裡指指看

S：這哪

T：那三角形的底和長方形的常有沒有一樣

S：有

T：那三角形的高在哪裡，三角形的高要如何跟長方形的寬一樣？

S：把這裡多餘的部分移到這裡來

T：那我現在問你的說三角形的高要怎樣才會跟長方形的寬一樣

S：……

T：三角形的高在哪裡，指給我看好不好

S：這裡

T：好，那長方形的寬呢？

S：這裡

T：那三角形的高要怎樣，它的高是長方形的幾倍

S：2 倍

T：那要如何才能等於寬

S：除以 2

T：對那底*高/2 就是三角形的面積那是不是跟長方形的長*寬一樣

S：對

T：因為它的高是長方形的寬的 2 倍，那梯形呢？

S：……

T：你剛才用比對的對不對，用比對的方式，這邊可不可以切下來

S：嗯

T：把這個邊移到這邊來，對不對，就等於這裡有長方形的長，下面有長方形的長

S：對

T：那它的上底+下底是幾個長方形的長

S：2 個

T：2 個對不對，所以除以 2 是不是等於長方形的長

S：對

T：那它的高有沒有跟長方形的寬一樣

S：有

T：所以，梯形的面積如何算

S： $(\text{上底} + \text{下底}) / 2 * \text{高}$

T： $(\text{上底} + \text{下底}) / 2 * \text{高}$ 對不對，因為這邊的長加這邊長等於 2 倍的長，2 倍長方形的長，所以除以 2 等於 1 倍的長，這樣來的對不對

S：對

T：好，很好，接下來這裡有一個圖形，你覺得像什麼東西

S：高跟鞋

T：那它能不能算面積出來

S：可以

T：可以，那老師要你算出他的面積那你會用什麼方法來算呢

S：把這裡

T：好沒關係，你來操作好不好，來這裡有紙利用紙來做，你要怎樣做

S：這一塊移到這裡來

T：好移到這邊來，你可以把它畫起來

S：（計算中）再把這一塊移到這裡來

T：好，要怎麼寫呢

S：（計算中）

T：沒關係你可以畫一畫，這兩邊有沒有一樣

S：有（計算中）

T：你說這一邊跟這一邊有一樣長嗎？

S：沒有

T：量一量，確實量一下，這邊跟這邊有沒有一樣長

S：有

T：這邊也量一量，老師覺得著邊沒有量好

S：沒有一樣（計算中）

T：你看差這麼多，要切的時候要切好

S：（計算中）

T：．．．

S：（計算中）

T：好接下來要寫的作業是這3題，要讓你去出題目，這3個題目老師都給你不同的線索，第一題是給你一個圖形，你覺得這個圖形像什麼形狀

S：杯子上有冰淇淋

T：那它是幾邊形呢？

S：梯形跟三角形

T：那合起來像什麼形狀

S：……

T：這是幾邊形

S：五邊形

T：好五邊形，把它切割，你說杯子上有冰淇淋，那杯子是什麼形狀呢？

S：梯形

T：那上面呢？

S：三角形

T：好那三角形的底是10公分，高是5公分，杯子的下底是4公分上底是10公分高用虛線是8公分，老師給你它的底高圖形這些條件來設計一個題目根據這些線索設計一個題目。這是第一題。

第二個題目是我只給你文字說明，梯形的面積48平方公尺，高是6公尺，只給以這樣的圖形給你面積給你高，請你設計出一個題目。

第三個老師條件只給你面積而已，面積是24平方公尺，只給你這樣的條件，去想出一個題目，這題目給以誰你的意思去想，好現在就讓你開始來

5年6班 2004. 1. 14 訪談對象文儒 02

T：文儒你好，老師要問你的第一個問題是你每天早上起床開始我們生活有很多的東西，這些東西是不是都有一個形狀，那我們可不可以用這些形狀來分類呢？

S：可以

T：可以，好那你想想看我們當時在上課時後有教小朋友，三角形、正方形、長方形、梯形那你能不能告訴我，你看過哪些東西像長方形的

S：尺

T：尺，還有呢？

S：桌面

T：桌子的面，還有呢？

文儒：黑板、桌面（1）

T：不錯喔！那你為什麼要把這些東西歸類為長方形呢？

S：因為……

T：為什麼你們要把這些東西都跟長方形一樣呢？

S：因為它們都長的一樣

T：什麼都一樣

文儒：像桌子、黑板，它們形狀都長的一樣

T：可不可以講清楚一點，什麼叫一樣，什麼東西一樣

文儒：桌子的板跟黑板的那個面，兩個合起來，它們長的很相似

T：很相似，我說為什麼很相似，為什麼你都把它說成是長方形來看，什麼叫長方形？

S：……

T：長方形有幾個邊

S：有四個邊

T：有四個邊，再來想想看這四個邊有什麼特徵

S：有四個頂點

T：有四個頂點，不錯喔

S：有四個面

T：四個面？你認為有四個面

S：對

T：不對

S：……

T：長方形有四個頂點，再來它的邊有什麼特徵呢？

S：……

T：這個邊跟這個邊怎樣？

S：都一樣長
T：然後呢？
S：是兩個邊也一樣長
T：左右兩邊也一樣長，還有什麼特徵，它四個角會怎樣
S：四個角會連在一起，上面的面…
T：上面的面？這是面嗎？
S：這邊…
T：這個面嗎？老師對你所說的話，不清楚你可不可以說清楚一點
S：……它的左右邊一樣長
T：那上下呢？
S：也一樣長
T：好那除了這樣還有沒有其他特徵呢？
S：沒有
T：好那日常生活中有哪些東西它像正方形的
S：電視
T：電視，很好還有呢
S：這個
T：椅子的坐墊
文儒：床鋪、玻璃（正方形）
T：好這也是，那你為什麼說它是正方形的呢？
S：因為正方形有四個頂點和四角邊
T：四個邊
S：它的大小一樣
T：什麼叫大小一樣，能不能講清楚一點
S：椅子的坐墊、床鋪、玻璃它們大小都看起來一樣
T：四個邊，長的很像，那什麼叫做正方形呢？
S：它的什麼邊和邊相連在一起，
T：那長方形就不行？
S：長方形也可以…還可以……
T：想不出來，好沒關係，那你再想想看有哪些東西像三角形
文儒：三角形喔？屋頂上面的那一塊，
T：喔屋頂，喔這個屋脊
S：對
T：你覺得它像三角形，還有呢？
S：帽子
T：帽子，什麼帽子？
文儒：有點像帆船那樣的帽子
T：長得像帆船的樣子，有像三角形對不對，帆船帽
S：……帆船
T：好帆船，想的不錯，那你為什麼把這些東西把它當成三角形來看？

S：.....三角形交於三個頂點
T：好，交於三個頂點，三個邊有三個頂點
S：然後.....它的邊都一樣長
T：三個邊都一樣長，一定三個邊都一樣長嗎？
S：不一定
T：不一定，是有三個邊，不一定要一樣長
S：對
T：好那還有沒有其他特徵呢？
S：.....
T：沒有，好，你講了很多東西喔，最後老師要問你有什麼像梯形？
S：梯形.....帽子
T：什麼樣的帽子像梯形？
S：像.....
T：好
S：房屋的那個屋頂
T：房屋的那個屋頂，喔像梯形像廟的那個，那你為什麼把那些東西當成梯形來看呢？梯形有什麼特徵？
文儒：屋頂它有兩個邊一樣長，可是上面下面不同
T：有兩個邊一樣長，哪裡有兩個邊一樣長，旁邊？
S：左邊右邊，然後有 4 個頂點
T：然後有 4 個頂點，
S：可是那個下面的邊和上面的邊不同
T：上面的邊叫上底，下面的邊叫下底
S：阿！下底的邊比較長，上底的邊比較短
T：比較短，還有呢？還有什麼特徵，它的上底和下底有沒有相交接？
S：沒有
T：那沒有叫什麼？
S：.....不知道
T：這個叫平行，有沒有學過
S：有
T：3~4 年級就學過了，對不對，好，那接下來呢，老師這裡有一塊板子，這一塊板子叫什麼你知道嗎？有沒有玩過？這個叫釘板，以前也沒有玩過，3~4 年級也沒有玩過
S：沒有
T：這個叫釘板，那這個釘板，這個一格是一平方公分，這樣知道吧？那 2 平方公分你能不能指給我看？

S：二.....
T：幾格？
S：兩格
T：你畫給我看，二平方公分有多大？這是一平方公分喔，二平方公分有多大它的範圍有多大？

S：.....

T：好，那三平方公分呢？這三個對不對，那你能不能利用橡皮筋，老師這裡有很多橡皮筋，你能不能圍出幾個圖形給老師看好不好，

S：好

T：第一個請你圍出一格長方形

S：.....

T：好，這是你圍出來的長方形，那平行四邊形呢？

S：.....

T：這個是什麼形？

S：正方形

T：正方形，你圍出一個平行四邊形，平行四邊形是上下兩個底怎麼樣，平行，左右兩個邊也要怎麼樣，平行

S：.....

T：這個是什麼，梯形，不知道？平行四邊形上下兩邊要平行對不對？好，這是平行四邊形，上下兩個邊平行，左右兩個邊怎麼樣，平行，所以叫平行四邊形，好！再來你圍成一個三角形給老師看

S：.....

T：好這是三角形，再來梯形呢？

S：.....

T：好這是梯形，好，這四個圖形都圍得很好，接下來，老師要請你加上一個條件，請你圍成面積是 12 平方公分的長方形

S：.....

T：12 平方公分的長方形喔，你說明看看這個面積是多少？

S：11

T：11，長方形這個面積是 12 平方公分喔

S：.....斷掉，學生未回答

T：桌上有 4 塊不同形狀的東西，能不能告訴我是什麼形狀，這粉紅色是什麼形狀

S：長方形

T：那這個藍色的呢？

S：....四邊形

T：這個叫平行四邊形，那這個呢？

S：三角形

T：三角形，那這個呢？

S：梯形

T：好這些形狀你都知道，那這些形狀顏色不同，那這些圖形顏色不同，那老師現在想了解這 4 塊哪一個比較大，哪一個比較小，我現在請你幫我一個忙，怎樣來比較出來，你會用什麼方法

S：用尺

T：好沒關係，你用你的方法，說說看好不好，你怎麼知道哪一塊最大，那一塊最小，請你幫我找找看，你要怎麼做？

S：.....

T：你爲什麼要量出它的邊呢？

S：用邊來比較

T：好，你要用邊來比較大小，那邊越大表示越大

S：.....

T：你要比較哪一個邊呢？

S：.....

T：哪一個面積比較大喔，你要量它的邊

S：這兩個

T：那兩個一樣，爲什麼

S：它們兩個的邊

T：它們兩個的底邊都一樣長，好

S：那平行四邊形，它們兩個的邊也一樣長，

T：所以那兩個，你說長方形跟平行四邊形一樣，爲什麼

S：因爲它的底跟底

T：因爲它的底邊一樣長，那哪一個最大？

S：這兩個。

T：那兩個三角形跟平行四邊形比長方形跟平行四邊形大，三角形和梯形比長方形跟平行四邊形大，這是你用長度比較出來的，好那什麼叫面積你告訴老師

S：面積是.....長乘以寬再乘以.....

T：那個是面積

S：面積是.....上底跟下底

T：好你認爲上底跟下底，你看老師呢，面積我們所說得面積是這個面的大小，也就是它由線條所圍成的這一個平面，這個叫什麼呢？

S：面積

T：面積對不對，那這個面跟這個面有沒有一樣或跟這個面有沒有一樣，你看老師怎麼做喔，我把這兩個疊起來，你可以跟剛才比的時候，這邊的底跟它的長一樣，但是我可不可以把這塊切起來，移到這邊來，面積有沒有一樣？

S：有

T：有，好再來這塊梯形你認爲比它還大，有一樣，我把它疊起來，這一塊移過來有沒有一樣

S：有

T：那這兩塊有沒有一樣，有，那有沒有比它大，

S：沒有

T：沒有，那這一塊也是一樣，你看我把底跟長有沒有一樣？這塊切起來，移過來，

S：一樣大

T：一樣大，那這 4 塊有沒有一樣大？

S：有

T：有，所以面積可不可以只量一邊的長而已，不行對不對，不行喔，特別注意，那這四塊的面積都一樣，形狀有沒有一樣？

S：沒有

T：這個叫做什麼，等積異形，相等的面積不同的形狀，這樣懂了嗎？好那這四塊，既然面積都一樣，可是形狀都不同，那它的公式你還記不記得呢？長方形的面積公式怎麼做？

S：長乘以寬

T：對，很好，那平行四邊形呢？

S：長乘以寬....再乘以

T：平行四邊形的面積變成，底乘以高，有沒有底乘以高，那三角形的面積呢？底乘以高再怎麼樣，除以 2，因為底乘以高是不是一個長方形的面積，可是它只是它的一半，所以底乘以高再怎麼樣

S：除以 2

T：除以 2，這樣知道嗎？好再來梯形的面積？梯形的面積呢是上底加下底，上底加下底除以 2 之後再乘以高，這 4 個面積都一樣，只是公式都不同，那它們之間有什麼關係呢？可以比較看看，比較看看老師來跟你說明，平行四邊形跟長方形一比較，平行四邊形的底跟長方形的長有沒有一樣？有，那平行四邊形的高跟長方形的寬有沒有一樣？

S：有

T：你看這裡有沒有，那長方形的面積是長乘以寬，它是底乘以高，所以長乘以寬跟底乘以高是怎麼樣？

S：一樣

T：是一樣，面積是一樣，因為它的長跟底一樣，寬跟高一樣，那三角形也是一樣，三角形的底跟長方形的什麼一樣，長一樣對不對，好那三角形的高要怎麼樣才會變成它的寬

S：這裡跟.....

T：那你可以看到這裡，這個寬，這個高，是不是 2 倍，它的寬，所以你只要除以 2 就會等於它的高，高除以 2 是不是等於它的寬，所以三角形的面積，是不是底乘以高除以 2，高除以 2 是不是等於長方形的寬，底是不是跟它的長一樣，所以底乘以高除以 2 等於長方形的面積這樣懂嗎？好那梯形的面積呢，你看看我從這裡切，這邊的長可不可以移過來這裡

S：可以

T：可以對不對，所以梯形的面積是上底加下底，那這兩個上底和下底的合，是不是跟這裡的長和這裡的長一樣，對不對，但是算面積是不是只要一個長就好了，所以說上底加下底要怎樣？

S：除以 2

T：除以 2，就等於它一個長，那它的高是等於它寬，所以長方形的面積，是長乘以寬，可是梯形的面積是上底加下底要除以 2，才會等於它的長，對不對，這兩個它們才會相等，那它的高是不是也是一樣上底加下底除以 2 再乘以高，這樣懂嗎？好 ok

T：好，那你要用拼的，好那你告訴我你要怎麼拼才知道它有幾塊，你要用什麼方式來做，好你用拼的，從這個地方開始拼，好你從直角開始拼，好

S：.....

T：再對折，沒關係老師知道，大概就知道了，大概情形怎樣

S：.....

T：那總共要幾塊方瓦，

S：8 塊

T：好 8 塊，把這不完整的把它折起來很好，好接下來老師給你一個這個形狀的，那你覺得看看要幾塊方瓦才能完全覆蓋，好這個先舖，你可以用很多方法喔！

S :

T : 怎麼樣，好!

S :

T : 是這樣子的嗎?

S :

T : 好，剩這一塊，這完整就六塊對不對，那老師告訴你這一塊可不可切下來，移到這邊來

S : 可以

T : 變成一個什麼?

S : 長方形

T : 那總共需要幾塊? 變成長方形為什麼你告訴我!

S : 因為，不完整的有一個，然後 1 加 1 等於 2 再加上 6

T : 好很好，切八塊喔! 不錯很好! 那你看一下! 這個圖形你覺得它像什麼?

S : 鴨舌帽

T : 好，鴨舌帽，可以用成幾塊，可以，你會怎麼說，能不能把你的方法說出來或做出來

S :方塊

T : 方塊，你用一公分的嗎? 還有沒有其它方法

S : 用尺

T : 好! 用尺，你試試要怎做，會比較快知道它的面積，你除了方法之外，你還想用什麼方式

S :

T : 你為什麼要用方瓦?

S : 一個一個排

T : 一個一個排，好，可是這個形狀都可以用方瓦一個一個排上去嗎?

S : 不一定

T : 為什麼不一定

S : 輕輕的

T : 輕輕的，那有沒有什方法會讓它比較方便的?

T : 這裡是有，方法怎樣，把這個方瓦貼上去這樣好拼嗎?

S :

T : 你有沒有想到更好的方法?

S :

T : 好，那你可以繼續用這個方法拼，用這個方法拼，好這樣子嗎?

S :

T : 括弧起來平方公分，這地方用切的好不好?

S :

T : 好 ok 再來呢，老師呢這裡有三個問題要讓你來擬題，3 條件要讓你來擬出問題，這個形狀呢，有 3 個題目，第一個題目是提供一個圖形給你，第 2 題是文字說明，第 3 題也是文字說明，你要針對這裡面的線索擬來出問題，那這是什麼形狀你知道嗎? 長的什麼形狀?

S : 杯子

T : 杯子，為什麼像一個杯子

T : 放東西，好那你這整個圖形是幾邊形?

S：五邊形

T：好五邊形，有五個邊對不對，把這五邊形切割變成什麼，這是梯形，那上面呢

S：三角形

T：好那上面三角形，下面是梯形，好那我告訴你這個梯形是下底是 4 公分，高是 8 公分，好接下來這三角形的底是多少

S：10 公分

T：好 10 公分，好那我告訴你，這樣一個圖形的條件，邊的長度，高的長度，(聽不清楚)這是第一個題目，那第二個題目呢，我只告訴你他的條件是一個梯形，它的面積是 48 平方公尺，這樣知道吧?高是 6 公尺，告訴你高還有它面積，還有它是梯形，然後這裡是一個題目，一樣針對這些條件去出一個問題，第 3 個問題只有告訴你它的面積，是 24 平方公尺，好，你去設計一個題目，就這 3 個，然後你去擬出 3 個問題，你可以針對你最厲害的看哪是一題，去發揮

5 年 6 班 2004.01.15 訪談對象立彰 01

T：這個內容主要是針對前幾次老師在你們班上，有關面積概念的課程，還記不記得？

T：記得哦！那問的問題大概都是跟那有關係的，所以等一下你可以針對你所了解的，知道多少就可以答多少。要是不知道的，你也可以好好的想一想，想了之後，你如果想到答案，也可以回答。

T：那有一些題目可能會操作，那老師桌上有橡皮擦、鉛筆、尺之類的東西，你可以拿來用。不要緊張

T：好，那我們現在就開始啦。第一個問題老師要問你的就是說，在日常生活中你可能看到很多很多的東西，有些物體，它都有很特殊的形狀，那你會不會針對它們的形狀給它們分類呢

S：會

T：會，有時候會這樣做，對不對？所以有些東西你會把它分為三角形啦，可能會把它分為長方形啦，對不對？

S：嗯

T：那你先想一想，日常生活中哪些東西你會把它看成是三角形？

S：.....

T：想想看，有沒有什麼東西可以把它想成是三角形？

S：.....

T：我提示你好不好？早上起來會吃什麼東西？

S：.....

T：對，吃早餐。早餐有一種東西它是三角形的？

S：三明治

T：好，三明治，對！還有沒有呢？

S：.....

T：有沒有一種東西上面是包海苔？

立彰：三角飯糰

T：三角飯糰，對不對？還有你上數學的時候，老師有沒有叫你們帶一種板？

S：三角板

T：對不對？這些東西你都把它看成三角形，好！那你為什麼會把它看成三角形？

S：它有三個角

T：它有三個角，那有沒有其它的原因？它有三個角，所以你把它看成三角形，還有沒有其它條件，比如說針對這個東西你會依照這個條件把它想成三角形，除了三個角之外，還有沒有其它的特色？

S：.....

T：什麼叫三角形呢？你認為？

S：.....

T：說說看，什麼叫三角形呢？

S：它們的角都不是直角

T：它們的角都不是直角，還有呢？

S：.....

T：不要緊張哦，慢慢地想。好，沒關係。那你再想想看你會把什麼東西看成是長方形？

S：窗戶

T：窗戶，不錯。還有呢？

立彰：桌子、窗戶

T：桌子，好。還有沒有？

S：沒有

T：那你為什麼會把這些東西看做是長方形？

S：兩個邊一樣長

T：兩個邊一樣長，那另外兩個邊就不一樣長了？

S：一樣長

T：一樣長，那是什麼意思呢？能不能說清楚一點？

立彰：.....兩個邊比較長，兩個邊比較短（長方形）

T：好，還有沒有呢？除了這個條件之外，還有沒有其它的，你想要說的？

S：四個角都直角

T：四個角都直角，你觀察到了，還有沒有呢？

S：.....

T：四個角都直角，還有兩個比較長的邊，兩個比較短的邊，還有沒有其它條件呢？

S：.....

T：好，沒關係，那你再想想看，有沒有什麼東西你會把它看看正方形？

S：.....鉛筆盒

T：鉛筆盒是正方形，有看過正方形的鉛筆盒？還有哪些東西呢？

立彰：錄音機（正方形）

T：錄音機也是正方形，我怎麼都沒看過呢？好，你有看過，還有呢？

S：箱子

T：箱子，外表看起來是正方形，那這些東西你為什麼會把它看成是正方形呢？

立彰：四個邊都一樣、四個角都是直角

T：四個邊都一樣長

S：四個角都直角

T：嗯

S：然後...

T：那它跟長方形有什麼不同？

S：它四個邊都一樣長，長方形是兩個一樣長，另外兩邊一樣長

T：好，就這樣子，好！說的很好哦

T：那你再想想看日常生活中有什麼東西，你會把它看成是梯形？

S：樓梯

T：樓梯，還有沒有呢？

S：.....

T：除了樓梯之外，還有想到什麼東西像梯形？

S：.....

T：很難想，它比較少，對不對？好，比較少，好。那沒關係，你為什麼會把樓梯看成是梯形呢？

S：一個邊是平行的

T：一個邊是平行的，一個邊嗎？還是一對？

S：一對

T：一對的邊是平行的

S：另外一對不平行

T：另外一對不平行，那它是三角形嗎？

S：不是

T：那是幾邊形？

S：四邊形

T：四邊形，那可是裡面有一雙對邊是怎麼樣？一雙平行，一雙不平行，所以你把它當成梯形，很好，謝謝

T：那接下來呢，老師桌上放了一個板子，知道叫什麼吧？

T：有沒有玩過？這個叫釘板，我們可以在上面用橡皮筋把它圍起來，圍成一個圖形，或者算出它一個面積

T：好，那這個釘板一格代表一平方公分，兩格代表多少？

S：兩平方公分

T：好，兩平方公分，那三格呢？

S：三平方公分

T：你指給我看，三格是哪三格？

S：哪三格

T：好，哪三格三平方公分，那四平方公分，你可以怎麼樣圍？四平方公分的話...

T：好，那是四平方公分，很好。所以它可以圍起來，可以根據它的面積大小來圍成一個範圍，對不對？

T：那現在老師呢，就讓你來圍一個長方形

S：.....

T：要讓你圍一個長方形，你要怎麼圍呢？隨便你哦，你要圍成什麼樣的長方形都隨便你，好！請你圍成一個長方形

T：OK，你確定它是一個長方形嗎？

S：嗯！

T：好，再來，請你圍成一個平行四邊形

S：.....

T：這樣子是平行四邊形，好！請你圍一個三角形

S：.....

T：好，很好！圍的好快，那再請你圍一個梯形

S：.....

T：好，這是梯形。你都可以把各種圖形很快的圍出來。

T：那現在老師加一個條件哦，面積是 12 平方公分的長方形，那請你把它圍起來

S：.....

T：面積是 12 平方公分的長方形

S：.....

T：好，很快。能不能請你解釋一下，你確定它是 12 嗎？

S：確定

T：那你解釋一下，你怎麼證明的？

S：有 12 個方格

T：有 12 個方格，好！所以這是 12 平方公分

T：好，很好！那請你再一樣，圍成一個面積是 12 平方公分的平行四邊形

S：.....

T：好

S：.....

T：確定嗎？為什麼？你能不能解釋一下？

S：有 12 個

T：有 12 個方格，你數給我看哪裡有 12 個方格？

S：.....

T：其實我們可以從這裡把它切割下來，這一塊可不可以移到這裡來？它就可以變成什麼？

S：.....（老師，他的聲音太小，聽不清楚）

T：對，就可以這樣解釋，也可以，對不對？好，那很快哦，很快就把它圍成平行四邊形。那請你再圍成一個面積也是 12 平方公分的三角形

S：.....

T：確定嗎？面積是多少？

S：確定

T：確定，數數看

S：.....

T：12 個嗎？完整的有幾個？

S：.....

T：那也完整嗎？

S：.....

T：3 個，那再來呢？

S：.....

T：確定？好，你再數一次，你告訴我，你是怎麼樣串出 12 個的？

S：.....（老師，這聽也聽不清楚）

T：這樣可以當成一個嗎？

S：.....

T：你不覺得它很小，這兩個合起來可以確定一個嗎？

S：.....

T：那老師用另外一種方式證明，你看 1、2、3、4、5、6，這是它的高；這是它的底 1、2、3，6 乘以 3，所以就等於多少？6 乘以 3 是 18，18 除以 2 等於 9，我怎麼證明跟你不一樣？

S：.....

T：好奇怪哦，那我現在如果把它改成這樣呢？總共 12 個。你看完整的 1、2、3，有沒有？4、5、6、7，好，然後呢，這個可以合起來，這個可以跟它 8、9，一不一樣？123 這個應該是在這邊，4、5、6、7、8、9、10、11...這裡再乘上 12。1、2、3、4、5、6 這個乘以 4，24 除以 2 等於多少？

S：12

T：對，為什麼這樣想呢？你看這裡整個合起來是一個長方形，對不對，6 乘以 4 是不是 24 個，那它的一半是幾個？12 個，那這是三角形可以用這個方式。那梯形呢？也是面積 12，你要怎麼樣圍？

S：.....

T：好，你要怎麼解釋？你確定它是 12？怎麼解釋的？

S：上底 2

T：上底 2

S：下底 4

T：下底 4 個，好

S：高是 4 再除以 2

T：高是 4 嗎？1、2、3，3 格而已啊。上底是 12，下底是 1、2、3、4、5、6，2 加 6=8，8 乘以 3=24，24 除以 2 多少？

S：12

T：好，很好。但另一個方式，你看老師把這一塊切起來，這一塊移過來這一塊是不是這樣子？那變成一個什麼？長方形

1、2、3、4，4 乘以 1、2、3，是不是 12？

S：嗯

T：很快，你很快就圍起來了，很好。接下來呢，老師的桌上呢，有這四塊圖形，那它的形狀都不同，顏色不一樣，你能不能告訴我粉紅色這一塊是什麼形狀？

S：長方形

T：那這一塊呢？藍色的

S：平行四邊形

T：平行四邊形。黃色的呢？

S：三角形

T：三角形，那原木的顏色呢？

S：梯形

T：梯形。那這四塊板子呢，我現在擺在桌上，我很想知道它們哪一塊面積比較大，哪一塊面積比較小？你要怎麼樣來處理這個問題？

S：用尺量

T：好，那你可以用尺量量看，你要怎麼做呢？好，你說要用尺量

S：.....

T：好，用尺量量看，8 對不對？8 乘以 4 是 32。好，8，這是平行四邊形，高也是 4。

T：好，32。你是用面積來算，那這個呢？三角形的底 8，高也是 8，8 乘以 8=64，64 除以 2，也一樣，那這一塊呢？上面是 4，下面是 12，對不對？4 加 12=16，那它的高是 4，16 乘以 4=64...

T：那它四塊哪一塊最大？

S：一樣大

T：都一樣大，好！那老師看到你，是用面積公式來算它的面積，然後來比較它的大小，對不對？

S：嗯

T：能不能告訴我長方形的面積公式是什麼呢？

S：長乘以寬

T：好，那平行四邊形呢？

S：底乘以高

T：那三角形呢？

S：底乘以高除以 2

T：底乘以高除以 2，很好。那梯形呢？

S：(上底加下底)乘以高除以 2

T：很好，不錯哦！那剛才你是用公式來算，那這四塊面積都一樣，那圖形有沒有一樣？

S：沒有

T：那這個叫什麼？等積異形，對不對？

T：好，那你看到這四塊面積都一樣，可是公式不同哦，能不能告訴我它們公式之間有什麼關係呢？像長方形跟平行四邊形的公式有什麼關係？

S：.....

T：想看看，它們之間有什麼關係？

S：.....（老師這裡聽不清楚）

T：這我知道，那長方形的公式是什麼？

S：長乘以寬

T：平行四邊形呢？

S：底乘以高

T：那它們底乘以高跟長乘以寬之間有什麼關係？能不能告訴我？

S：.....（老師這裡也不清楚）

T：對啊，那它的長跟它的底...

S：一樣

T：一樣，還有哪些一樣？

S：寬和高一樣

T：寬和高一樣，所以長乘以寬跟...

S：一樣

T：一樣，因為它們的底跟長一樣，寬跟高也一樣，對不對？那三角形呢？三角形有什麼地方一樣呢？三角形的底...

S：底乘以高跟長方形一樣，除以 2...（老師這裡聽不清楚）

T：所以它們之間...但是你可不可以告訴老師底跟長方形的長有什麼關係？

S：一樣長

T：一樣長，然後呢？高呢？

S：高...兩倍大

T：長方形兩倍，它的寬的兩倍就等於它的高，所以三角形的高除以 2 等於什麼？

S：.....

T：長方形的什麼？三角形的高啊除以 2 等於長方形的什麼？

S：.....

T：三角形的高哦，除以 2 等於長方形的什麼？

S：等於寬

T：對，所以你看到三角形的面積等於底乘以高除以 2，因為它的底跟長方形的長一樣，那高除以 2 是不是跟長方形的寬一樣？

T：好，那梯形呢？它的長...我們說梯形的公式是（上底加下底）乘以高除以 2，那你看這個是下底，對不對？多了一點，從這裡切掉是不是跟它的長一樣？一個長，對不對？從這裡切掉這個是不是跟它的長一樣？那這個長可不可以移到這裡來？跟上底加起來，是不是就變成一個長，所以你有沒有發現到梯形的上底加下底剛好幾倍的長？

S：剛好

T：剛好嗎？這裡一個哦，這段切掉移到這裡來，這裡又一個，所以這個上底加下底總共有幾個長？幾個長方形的長？

S：一個

T：一個嗎？那這邊一個啊，這邊移過來這邊又一個，那幾個長？幾個長方形的長？

S：2 個

T：2 個，所以你可以看到梯形的面積是不是上底加下底除以 2 是不是長方形的長？那高有沒有一樣？高跟它的寬有沒有一樣？

S：有

T：有，一樣。所以它的公式是不是上底加下底除以 2 之後，乘以它的高，是不是等於長乘以寬？是不是？沒有錯吧？這樣你了解了吧？

S：嗯

T：好，OK。接下來，老師這裡是一個三角形，對不對？那我桌上這裡擺了很多方瓦，那如果我想要讓你利用方瓦把三角形鋪滿，完整的覆蓋哦，需要多少塊方瓦呢？你可以用什麼方法來算？

S：.....（老師這裡不清楚）

T：好，你說明看看，你要怎麼算？第一個，你要怎麼辦？你先量方瓦的...

S：2 公分

T：2 公分，然後呢？你要覆蓋的話，為什麼要量方瓦的長度呢？

S：因為我想先算

T：好

S：.....

T：你是要算等一下不夠的，不完整的

T：四塊，8 公分。好，那邊也是四塊

S：.....

T：8 公分。那這一個三角形需要幾塊方瓦才能覆蓋呢？

S : 32

T : 32 ? 怎麼來的 ? 確定 32 張嗎 ? 它的底用幾張方瓦 ?

S : (老師這邊也不清楚)

T : 高呢 ?

S : (老師這邊也是)

T : 那為什麼是 32 張呢 ? 10 乘以 4... 總共有幾張 ? 再想想看

S : 8 張

T : 8 張, 為什麼 ?

S : 4 乘以 4=16

T : 4 乘以 4=16, 再來呢 ?

S : 然後公式再算上來, 再除以 2

T : 好, 就是 8 張, 很好。那我現在改變圖形, 如果梯形的話, 要幾張呢 ? 你想你要怎麼處理 ?

S :

T : 好 ! 一張一張接著一張哦, 覆蓋上去, 好 !

S :

T : 大概會幾張 ?

S :

T : 完整的有幾張呢 ?

S :

T : 有沒有想過, 我可不可以從這個地方切過 ? 把它多的地方切了之後, 把它移到哪裡 ?

T : 移到那邊, 你看看... 好 !

S : 8 塊

T : 8 塊, 那這一塊是不是可以移過去 ?

S : 嗯 !

T : 好, 這是一個長方形 8 塊, 很好 ! 好 ! 接下來, 老師要讓你來看看這一個圖形, 你覺得它像什麼呢 ?

S :

T : 它像什麼東西呢 ?

S : 一個長長的...

T : 這整個形狀像什麼 ? 一個長方形裡面的三角形...

S : 對

T : 那這整體形狀你覺得它像什麼 ?

S :

T : 有沒有想到像我們日常生活中看過的像什麼 ?

S :

T : 不知道 ? 看不出來 ?

S : 嗯

T : 好, 沒關係 ! 那這個東西可不可以算出它的面積呢 ?

S : 可以

T : 可以, 那你要怎麼樣算呢 ?

S：把這個...

T：好，你來做做看，好不好？那你一邊說明一邊來做哦，首先你會怎樣？

S：把這個切過來

T：好，你把它切掉，你可以用尺來幫忙哦，你說要把那個地方切掉，然後呢？

S：然後移過去

T：好，你把它移過去，畫一個箭頭吧！好，移過去，確定可以移過去嗎，剛好？

S：可以

T：可以，爲什麼可以呢？

S：都一公分

T：好，都一公分。好，那你把它畫一個箭頭移過去。好，都是一公分，移過去，再來呢？你要怎麼辦？

S：切割

T：好，切割。好，你算算看，你要用切割的方式，好。4.5，這邊呢？

T：好！4.5 跟 3.5，你寫在旁邊 4.5 跟 3.5，等一下再算好了。4.5，等一下再算。再來呢？你要怎麼辦？

T：好，你要把它切成這樣？這樣好算嗎？好，覺得不好算，把它擦掉，再怎麼辦？T：：你想到要從哪裡切，變成 2 個？一個梯形，一個三角形，再來呢？

T：那邊是 2，那這邊是多少？4.5

T：5 哦？好，高...加上 3=8.5，那它的高呢？8.5。上底加下底，對不對？乘以高，8.5 乘以高，高是多少？

T：在在量了。好，3。8.5 乘以 3，這是梯形對不對？好，等一下再算，你先把它記下來

T：三角形，3 乘以多少？好，後面把它乘出來

S：.....

2004. 01. 15 受訪學生：立宏 01

T：今天很高興找你來訪問一些數學的題目，那首先老師要請你想一想，我們日常生活中有很多的事物，這些事物是不是都有一個形狀，對不對？

S：對

T：那我們今天所做的形狀是以平面爲主，那老師要你看一看想一想，什麼東西的形狀是像三角形、四邊形、平行四邊形或梯形？能不能想一想告訴老師？

S：你是說現在嗎？

T：對，你想一想或者是用看的也可以，什麼東西像長方形或三角形

S：桌面是像長方形

T：好，還有呢？

S：還有...電風扇上的蓋子是圓形的

T：好，還有沒有呢？你不必看我們教室裡面的東西，你可以想一想日常生活中曾經接觸過什麼東西的形狀像三角形或像梯形或平行四邊形？

S：還有書是長方形

T：好！書本是長方形。不錯哦。再想想看，還有什麼東西呢？

立宏：那邊的洗手臺是長方形

T：洗手臺也是長方形

S：我發現很多東西都是方形的

T：很多東西都方形的。

S：對啊

T：能不能舉個例子，像什麼？

S：像是前方的黑板還有那一邊的洗手臺，還有很多東西

T：能不能想一想有沒有像三角形的？你吃的啦，用的啦

S：吃的話那就是三明治

T：三明治是三角形，還有沒有？

S：呃...

T：用的東西啦

立宏：那個鉛筆的筆頭，這個是三角形嗎？

T：噢，你從上面這樣看筆頭是三角形，還有沒有呢？

S：還有這個是圓的

T：那個是圓的

S：還有...讓我想一想

T：還有什麼東西呢？能不能想到什麼東西像梯形的

立宏：梯形的話...某一些紀念盃它也是做成梯形的

T：噢，紀念盃。對！我有看過那種紀念盃像是梯形的。不錯喔

T：再想想看還有沒有像梯形的東西呢？或是三角形的東西？

S：.....

T：在數學課有沒有用過某一種尺？

S：噢！我知道！三角板

T：三角板，還有沒有呢？

S：.....

T：有一種食物它是用海苔包的

S：我知道了，飯糰

T：飯糰也是三角形的，那梯形的東西除了你剛才說的獎盃，想想還有沒有其它的？

立宏：梯形以外，還有一些大樓啊，它也是做成梯形的

T：大樓，喔，有些大樓的外形像梯形

T：好，那你舉了這些那麼多形狀的東西，有三角形有長方形有梯形有平行四邊形。有沒有看過平行四邊形的東西？

立宏：平行四邊形的...我好像沒看過

T：沒看過喔？平行四邊形比較少

立宏：嗯...可能平行四邊形這種特質比較奇怪的形狀日常生活中少見

T：喔，比較奇怪的形狀日常生活中比較少有看到。那你為什麼會把這些東西把它歸類為三角形或梯形或者是長方形呢？

S：呃...那個，你的意思是說...

T：你為什麼會把書本把它歸類為長方形，然後把獎盃歸類為梯形，你是為什麼要這樣分類呢？

S：呃...因為我看到這整張桌面它是長方形的

T：為什麼是長方形的？你為什麼認為它是長方形？

S：因為它...你看嘛，這兩旁邊的邊它是比較短的嘛，然後我們前方還有最前方的邊呢，它也是很長的。然後至於那個書呢，上面有標題或者是下面的邊，它也是比較短，然後兩旁邊的高度也看起來比較高

T：那除了這些特徵是長方形的特徵之外，還有沒有其他的特徵呢？長方形還有沒有其他特徵呢？

S：還有...長方形它還有一種獨有方形的、四邊形的，四邊形獨有的一些特徵。你看它這邊不是有四個角嗎？

T：有四個角，還有沒有？

S：而且長方形和正方形是一樣，那個是直角的

T：噢，那你剛才談到正方形，那你認為什麼叫做正方形呢

S：正方形的話，那要四個邊都等長

T：四個邊都等長

S：然後這個也要直角

T：什麼要直角？能不能說清楚？

S：就是說它的角要跟它一樣有直角

T：好，跟它一樣要直角，跟桌面一樣要直角

T：好，那什麼叫直角呢？

S：直角...意思就是...正好是 90 度的角

T：正好是 90 度的角，你認為是直角。好，那也就是兩個邊會怎麼樣？

S：兩個邊會相交在那個角

T：相交在那個角，那這兩個邊有沒有什麼特性？

S：你是說這兩個邊...

T：對，這兩個形成的這個角會形成直角，那這兩個邊有什麼特性？會互相...

S：這兩個邊它會互相...呃...垂直

T：好，互相垂直。

T：好，那你剛才舉到說有三角飯糰像三角形，三角板也像三角形，你為什麼會把它歸類為三角形呢？

S：呃...因為它也只有三個邊嘛

T：它有三個邊

S：嗯，然後它有三個角

T：這樣你就把它當成為三角形，那梯形呢？梯形在日常生活中比較少看到，什麼叫梯形呢？

S：梯形它也是四邊形的一種

T：嗯！很好，四邊形的一種，對。

S：然後，它必須有一個邊是斜的

T：必須有一個邊是斜的

S：對

T：怎麼說呢？

S：呃...就是說

T：它是一個四邊形，那它有沒有什麼比較重要的特徵呢？你為什麼稱它為梯形？

S：我知道，那個如果說有斜角的邊，它會相交於這上下兩個邊，然後這上下兩個邊跟這個斜的邊相交的話，不會是直角

S：然後另外一個它是直的嘛，所以說它除了斜角那邊的角以外，幾乎都是直角

T：那這個是角度，你這樣認為。那邊呢？邊有沒有什麼特徵？

S：邊的話，那它上下兩個邊會有點不一樣

T：有點不一樣

立宏：梯形，它上面的邊會比較短，因為它這個斜線是從上面往下斜，越來越長

T：好！

S：然後下面的邊當然會很長

T：比較長。你看到上面比較短，下面比較長。那可不可以倒過來看？

S：你是說...

T：圖形把它倒過來看，那是不是梯形呢？

S：倒過來看的話，應該也是啊

立宏：因為它這邊有一個比較短的邊，這樣子總共加起來是有四個邊，然後再加上這個邊又是斜的，所以說我當然認的出來它是梯形

T：你剛才說一個邊比較長一個邊比較短，那上下兩個邊互相平行嗎？還是互相垂直？

S：上下兩個邊...它是互相平行

T：互相平行。你怎麼知道它是互相平行呢？

立宏：因為你看嘛，這上下兩個邊都是這樣子橫的，上面短的是橫的，下面也是跟著它是橫的，所以說那個邊不可能會彎嘛，所以說它這樣子如果一直直直的話，它永遠是不會相交在一起的

T：哇！說的很好

T：好，剛才你也說到平行四邊形是比較特殊的，日常生活中比較少看到，對不對？

S：嗯！

T：好，那你能不能告訴我平行四邊形是什麼？

S：平行四邊形它的意思是說...那個四個邊都會互相平行的

T：四個邊會互相平行哦？

立宏：噢，不是不是，我的意思是說，平行四邊形它上下兩個邊是平行的，左右兩邊也是平行的

T：那除了這個特徵之外，平行四邊形還有沒有其他的特徵可以代表它？

S：要說出它的特徵...

T：你認為呢？還有沒有其他特徵可以來形容平行四邊形呢？

S：平行四邊形...那我這樣子說好了，它不是像梯形一樣，有一個邊是它左右兩個邊會相交於一點，然後，平行四邊形它是這樣子上下兩個邊是平行的，然後左右兩個邊也是平行的

T：好，謝謝你告訴老師這些圖形的特徵。那接下來老師桌面上有一個黃色的...你知道這叫什麼吧？

S：釘板

T：有沒有玩過？

S：有啊

T：有，好！那現在呢，這個釘板老師先介紹一下，二個釘子它可以形成一個邊，對不對？

S：嗯

T：那這四個釘子就可以形成一個面，這一個面一個小框格我們叫稱它為一平方公分好了。這樣知道哦

S：嗯！一平方公分

T：那現在老師手上有許多橡皮筋，你拿出一條，我要請你弄出一個形狀

S：弄出一個形狀

T：那這個形狀面積是 12 平方公分，那你要怎麼圍呢？
S：12 平方公分...
T：這樣你要怎麼圍呢？
T：圍成 12 平方公分哦
S：圍成 12 平方公分
T：對，那形狀你可以自己訂，那我剛才說一格是...
S：一格是一平方公分
T：對，你把它圍成 12 平方公分
S：等等..
T：你要怎麼圍呢？
S：我想要這樣子
T：圍成 12 平方公分哦
S：嗯！
T：你確定它是 12 平方公分嗎？
S：嗯...我來算一算好了
T：老師是要你們從實驗中看到...
S：等等，這邊少弄了一個
T：好，現在圍起來的這個是一個什麼形狀呢？你告訴我現在圍起來是什麼形狀？
S：正方形
T：正方形。那老師要讓你圍成面積是多少？
T：是不是太大了？
S：太大
T：好，那你現在重新改過來
S：這樣子...
T：好，你這個是...
S：這樣子我真的確定是 12 平方公分
T：確定嗎？
T：你要圍成這樣？那這樣像是什麼形狀呢？
S：這個啊...這個不是四邊形也不是三角形
T：那是什麼形狀？
S：嗯...不規則
T：好，不規則，那你為什麼認為它是 12 平方公分呢？
S：你看嘛，這個一排有 5 個，然後兩排加起來是 10 個，然後我剛才發現這樣子排可能只有 10 個，
所以說我就想說兩邊再加兩個
S：所以總共 12 個
T：好，這是你把它圍成面積是 12 平方公分的圖形，那老師現在讓你圍成面積是 12 平方公分的長方形，你要怎麼圍？
S：12 平方公分的長方形
T：對，你現在這個圖形是多邊形
S：那我知道

T: 好，那你怎麼圍成面積是 12 平方公分的長方形呢

S: 好，把下面再多兩格，這個是不是就是 12 平方公分了？

T: 對！

T: 好，很厲害。那我現在讓你把它改變形狀變成 12 平方公分的平行四邊形

S: 平行四邊形

T: 對，你怎麼圍呢？

T: 告訴我，你為什麼要這樣排這樣圍呢？

S: 嗯，因為它這邊我是故意把那個完整的排成 10 個

T: 完整的有幾個呢？

S: 完整的有 10 個

T: 噢，在哪裡呢？那數給我看

S: 12345678910

T: 然後呢？再來呢

S: 然後，其實算面積，可以說一個不完整拼到一個不完整的，所以說這兩邊我剛開始想，是要把它合成一個，然後這兩個也把它合成一個，這樣子的話，完整的不就是兩個了嗎？

T: 這就是兩個

S: 所以說兩個加上 10 個不就是 12 個

T: 哇，很好！這是平行四邊形，你好棒喔

T: 那現在老師要讓你把它圍成一個 12 平方公分的三角形

S: 三角形

T: 對，你能不能試試看呢？

S: 好哦！

T: 好，三角形哦

S: 想出來應該有個頭緒

T: 會有一個頭緒，你要怎麼把它圍起來呢？12 平方公分的三角形

T: 要不要老師提示你？

S: 不必了

S: 可以合成一個長方形，不過我打算要用一個三角形涵蓋 12 平方公分

T: 你只要用三角形去...好

T: 那我剛才提示你的就是說，兩個三角形可以合成一個長方形

S: 嗯？兩個...

T: 那一個三角形...

S: 你說什麼？

T: 好，那你用你的方法拼好了，OK

T: 一個長方形可以分成幾塊三角形？

S: 二塊

T: 二塊，那一塊三角形如果是 12 的話，那兩塊，長方形是多少？

S: 兩塊加起來

T: 面積應該多少？

S: 兩塊如果加起來的話，面積應該是...

T：24

S：對！

T：24 的一半，你能不能先把長方形弄好之後，釘圖圍起來之後，它的一半是不是就是一個三角形？

S：嗯...你是說要把 12 分成一半

T：24 分成一半啊

S：24 分成...

T：那 24 是什麼圖形？

S：24 的話，就是長方形

T：那它的一半是不是是 12？那你可不可以從長方形來想辦法？

S：好啊

T：好，要接受我的意見哦，所以你是不是先把長方形弄出來，再弄它的一半，是不是 12？

S：這個是長方形

T：對

T：然後呢，我現在讓你拼成三角形啊

T：你怎麼知道它是 12 平方公分呢？

S：等等，我現在還沒有確定這是 12

T：還沒有確定

S：沒錯

T：沒錯。爲什麼呢？你能不能解釋一下？

S：這個嘛，它原本像這樣子排的時候是...

T：是一個什麼形狀呢？

S：一個 24 平方公分的正方形

T：是一個正方形嗎？

S：哦不是，我講錯了，是長方形

T：24 平方公分...

S：然後呢，如果是要排三角形的話，這兩個對..

T：這兩個叫對角

S：對，這兩個對角，然後我就想說要把這個畫成一條線

T：好，兩個對角連成一條線

S：連成一條線，然後把這邊移過去

T：好，移過去

S：等一下

S：很像啊

S：這樣就形成 12 平方公分了

T：好，12 平方公分的三角形。不錯，很好

T：那現在老師想要讓你圍成一個 12 平的梯形

S：梯形

T：你要不要試試看？

S：嗯！

T：好，你來試試看

T：好，這是你說的哦，能不能再重說一遍呢？

S：好，我看你就把錄音機打開，好吧，那我就重做

S：那它...你看嘛它這斜線，它這個不完整的是兩個兩個加起來是 1 平方公分

S：不是不是，我講錯了，應該說是 2 平方公分，然後這個完整的數數看有 10 個，然後這加起來總共有 12 平方公分。

T：哇，說的很好！好，你終於把這四個圖形全部記起來了，很棒哦。

T：今天老師桌上這裡啊，有四個不同顏色不同形狀的木板，你能不能告訴我，它們各是什麼顏色什麼形狀呢？

S：這個...你是說連顏色都要講？

T：對

S：這個藍色是平行四邊形

T：好

S：這個粉紅色是長方形

S：這個黃色是三角形

S：然後這個木頭的顏色是梯形

T：好，它是梯形，很好。

T：那你能不能告訴老師，你怎麼比較它們的面積大小

S：面積大小

T：你要用什麼方法才能夠知道？

S：這個嘛，我通常就是說，先把不完整的先...

S：你是說在長尺上量出一個面積...

T：沒有，你用你的方法，老師沒有...

S：量出一個面積

T：這四個的面積，你要怎麼比較它們的大小呢？

S：我覺得這兩個...你的意思是說要我比比看哪個比較大，哪個比較小？

T：對對～你用什麼方法呢？

S：這樣子啊，這兩個是比較大

T：哪兩個是什麼呢？

S：梯形跟平行四邊形的，我發現它們是一樣大

T：為什麼呢？

S：因為我是用對的嘛。如果說我這樣子比，我看到這邊突出一個角去掉，然後我覺得這個角大概可以補上這個角，所以說我就想說把它切掉再補到這裡，應該會一樣大。

T：好！

S：然後呢，梯形跟三角形比起來的話，一看就知道是三角形比較大，因為三角形比梯形多出一個角

T：好

S：然後長方形跟梯形來比的話，這邊有個角去掉貼到這裡，不就一樣了嗎？所以說這兩個是一樣大的。

T：那能不能做個總結？

S：嗯？然後這兩個...

T：哪兩個呢？

S：三角形跟正方形來比的話
T：正方形嗎？
S：三角形跟長方形來比的話，我是這樣子比的，我先把這個角切掉，對到這裡，這樣子不就跟長方形一樣了
T：那你剛才跟老師說三角形比較大，那現在三角形又跟長方形一樣，長方形又跟平行四邊形一樣，怎麼會這樣？
S：這是用對的啊
T：用對，但是你剛才說三角形比大啊
S：那我跟你說長方形跟平行四邊形一樣大
T：那平行四邊形又跟梯形一樣大，又跟三角形一樣大，那到底是...應該怎麼樣說才能比較清楚呢？
S：難道你是要我比出哪一個比較大
T：對啊，你剛才說三角形是比較大啊，現在怎麼又說三角形跟長方形一樣，長方形又跟平行四邊形一樣
S：呃...你的意思是說要我算出哪一個
T：沒有，我沒有要叫你算出，我要請你解釋為什麼你剛說三角形比較大，然後現在又說三角形跟長方形一樣大
S：沒有，我剛才的意思是說，這個三角形跟長方形來比的話它是一樣大
S：然後它跟平行四邊形來比的話
T：跟梯形啦
S：跟梯形來比的話，是三角形比較大
T：但是你剛才又講說梯形跟長方形又一樣
S：梯形跟長方形是一樣的
T：對啊，那為什麼三角形又比梯形大？但是你剛才又講說...
S：你看，我都是說把這個角截掉的
T：對啊
S：如果說把這個角擺到這裡的話它會一樣大
T：沒有錯。但是我現在意思是說你剛才說三角形跟梯形一樣大
S：嗯
T：然後呢，梯形又跟長方形一樣
S：嗯
T：但你剛又說三角形跟長方形又一樣，那怎麼會這樣子呢？
S：呃...因為我發現我把這個角截下來擺到這裡的話是一樣
T：是一樣沒錯啊。那你剛才又把長方形跟梯形比又一樣，但是你又說三角形比梯形大，要怎麼解釋呢？是什麼原因呢？
S：你知道為什麼這三角形會比梯形還大呢？原因是因為它突出了一個角
T：好，它突出了那個角，你這樣比對它突出一角。所以這裡面哪個最大？
S：三角形
T：好，三角形最大
T：好，這四個圖形都一樣大
S：呃...

T：爲什麼呢？你剛才說這個跟它一樣大，對不對？

S：對

T：這個切掉，移過來這裡是不是跟它一樣？那三角形跟長方形又一樣大，這個切過來這裡那這兩個都跟它一樣大，那這兩個爲什麼這個比它大？

S：原因...你說這四個圖形都一樣大嗎？

T：對啊，都一樣大啊。爲什麼，你看看，如果用這個來比對...

S：那我再想想看這個要怎麼來想呢？

T：要怎麼來想？其實不用想啊，你就用這個做比對啊。你看這個，你可以把這個切掉移過來這裡，是不是跟它一樣。

T：那這個切掉移過來這裡，是不是跟它一樣，所以，這兩個是不是都跟它一樣？啊這兩個當然會一樣啊

S：這個我應該可以用這個辦法...

T：好，你用這個辦法。怎麼用？

S：或許可以把這個換過來這裡的話

T：你還是認爲三角形會比較大，因爲它突出一個角

T：老師剛才說過了哦，這個跟它比，梯形跟長方形是一樣大的，對不對？

S：對啊

T：那三角形跟長方形其實有沒有一樣大？有！那這兩個應該都一樣大啊

S：奇怪...

T：我跟你一樣大，那你跟哲羽一樣大，那我跟哲羽是不是也一樣大？對啊！那你跟老師說它突出來一塊，所以比較大一點，好！那老師現在問你哦...

S：那我想到...如果說...

T：沒關係，我們繼續哦，這四個圖形真的很不一樣，對不對？但它們面積都一樣大，

T：爲什麼呢？你有沒有想過是什麼原因？

S：好像沒想過...

T：它們之間一個通識，知不知道？

S：呃...這個嘛。咦。等一等，我知道！現在我跟你說

S：這個，你看嘛，我們現在把這個切掉到這裡，它的確是缺了一個角角沒錯。沒錯嘛，它是這邊缺了一個小角，如果說...

T：好，沒關係哦！老師現在這裡有很多方瓦，知道吧？

S：知道

T：這方瓦有很多塊，這是一個三角形的圖形那這個三角形需要幾塊方瓦才能完全覆蓋呢？你可以用你的方法來試試看，你要怎麼樣才能把三角形完全覆蓋呢？

S：尺呢？

T：好！沒有尺

S：你看嘛，從這裡它是 8 公分，然後...

T：這邊是什麼呢？你把它稱爲什麼？

S：呃...應該是寬吧

T：寬？

S：不是不是，應該說是高

T：那你爲什麼要從那邊量？

S：我要先量量看它的高度

T：好

S：它的高度是 8 公分

S：然後寬度我再量量看，也是 8 公分。如果說它這個寬度是 8 公分，你把它除以 2。S：你知道我爲什麼要除以 2 吧？

T：你說說看

S：我要把算...因爲這方瓦它是 2 平方公分的，我有量過了

T：2 平方公分嗎？

S：對啊

T：好，什麼叫 2 平方公分呢？你能不能告訴我，這個方瓦爲什麼是 2 平方公分？

S：我量過，我用尺量它這個方瓦是 2 平方公分

T：是 2 公分還是 2 平方公分？你可以講出面積 2 平方公分嗎？

S：因爲我發現它四邊都等長，所以我量一邊就可以了，然後，我回到剛才那個問題，這個我剛才發現有 8 公分嘛，然後它每一邊有兩公分，所以說我得必須先把 8 公分除以 2。8 除以 2 是 4 嘛，那從這裡可以知道它每一邊要排四個

S：然後呢，嗯...

T：好，你現在開始要排了

S：我要開始排了

T：好，你先把它量出來，每邊可以排四個。再來呢？

S：這邊也有四個

T：好，底邊也有四個

S：然後接下來要算中間了，呃...這個嘛，你看嘛，它還沒有量到的，其實也可以知道它還有三個沒有蓋到，你看是不是還有三個呢？如果說，這邊我剪斷的話，就不會超出去了

T：好，那完全覆蓋，用了幾個？

S：這樣子啊，19 個

T：你數數看總共幾個？

S：不對不對，好像是 10 個

T：你能不能告訴我總共 10 個是怎麼來的？但是有的是超出去的啊

S：難道你是叫我說不完整的要把它弄成完全的是嗎？

T：對啊，那總共要用幾個方瓦？

S：那我再想一想...好

S：我知道有 8 個。你知道爲什麼嗎？因爲這個不完整的有 4 個，然後再把這 4 個兩個兩個加起來，總共會有 2 個，然後這個中間，我先把這個邊邊算了一下，然後這個算過之後就不要再算了，這邊又 2 個，然後加起來有 5 個，再加上這完整的有 6 個，然後再把這些不完整的 2 個再加上這些 6 個，總共是有 8 個！所以說我就知道它總共用了 8 個。

T：不錯！這是你的方法，先用量的，再把它鋪上去。接下來呢，老師改變圖形喔，好，我現在把它改變成梯形。好，你一樣用這些方瓦來鋪，到底要幾個才能鋪上去？

T：好，要用什麼方法呢？你要把它鋪上去喔

S：現在呢，這邊的這個邊是 4 公分，然我就除以 2，答案是得必須要 2 個才能排完這個邊，不過這是

不完整的。接下來，我再量這...我量量看，它總共有 10 公分再除以 2 是 5 嘛。所以說這需要 5 個方瓦才能排完。現在我要把方瓦舖在上面...

T：那完全覆蓋梯形需要幾塊呢？

S：現在呢，我正在想...

T：這四個圖形它們的面積都一樣對不對？但是它們的形狀有沒有一樣？

S：不一樣

T：這個我們叫做等積異形，上課有沒有講過？

S：有

T：好，那這四個圖形形狀是不一樣，可是它們的面積大小一樣，你能不能告訴老師為什麼呢？可不可以從它們的公式來想？

S：公式

T：嗯！

S：我都沒在背公式

T：對，不用背公式啊，但是你知不知道長方形面積怎麼算？

S：呃...就是高乘以寬

T：那個是高乘以寬嗎？

S：呃，不是不是，是長

T：嗯，長方形的面積是長乘以寬，好！這個長方形的面積我們很早就學過叫長乘以寬，對不對？那其他圖形面積都跟它一樣，為什麼都一樣？

S：你是說...

T：對啊，這三個圖形的面積都跟長方形一樣，那它們之間有什麼關係呢？

S：它們之間有什麼關係呢？

T：像老師舉個例來講，像平行四邊形的面積就跟它一樣，好！那它們的公式之間有什麼關係？

S：公式之間

T：你有沒有發現到平行四邊形的底跟長方形的什麼一樣？

S：平行四邊形的底跟長方形的什麼不一樣？

T：一樣啊

S：呃，什麼地方一樣，它長度一樣

T：這個長度是指什麼長度，平行四邊形這邊是指什麼？那個叫什麼？那個叫底，對不對？

S：對

T：跟長方形的什麼一樣？

S：跟長方形的長一樣

T：對，還有沒有呢？像你剛才說把平行四邊形多的地方切過來移過來，是不是跟長是一樣的？

S：嗯

T：那你可以看見長方形這個叫什麼？

S：寬

T：那這個呢？切過來移過去這個叫平行四邊形的什麼？

S：高

T：那平行四邊形的面積是怎麼算？

S：平行四邊形的是底乘以高

T：那底乘以高跟長乘以寬有沒有一樣？

S：不一樣

T：爲什麼不一樣？你剛才說它的底跟長方形的長一樣，寬又跟高一樣，那現在爲什麼又不一樣？

S：好像一樣一樣，只是名字不同

T：名字不一樣

T：那三角形的面積呢？它的面積又跟長的一樣，那要怎麼解釋？能不能告訴老師它們之間有什麼關係一樣？三角形的

S：這邊上面去掉移過來，然後這樣子就變成寬乘以長啦

T：你能不能告訴老師長方形的長在哪裡？

S：長方形的長是這裡

T：好

S：好像是長乘以寬，這樣子三角形它就...

S：那三角形的哪一邊...（老師，這邊聽不清楚）

T：爲什麼呢？

S：呃...因爲它上面的去掉移到這裡的話，這不就是長乘以寬了？

T：就變成長乘以寬，好，那你看看喔，長方形的長是不是這一條，那下面這一個是不是叫底，底跟長有沒有一樣？

T：有！那這是不是長方形的高

S：嗯

T：長方形的高，切成一半移過去是不是就它的寬一樣？

S：對

T：所以說，三角形的面積是不是底乘以高除以 2？是不是跟長方形一樣

S：底乘高除以 2

T：是不是這樣？

S：應該吧

T：因爲它的底是不是跟長方形的長一樣？

S：嗯

T：那高除以 2 之後，是不是跟它的寬一樣？所以是底乘高除以 2

T：好，這個是三角形，那梯形呢？能不能解釋呢？梯形的面積爲什麼跟長方形一樣？它們公式之間有什麼關係？

S：我知道，梯形的公式是寬乘以長吧

T：梯形的公式是寬乘以長，爲什麼這樣？

S：因爲它那個去掉，然後它邊邊的角移到最底，然後這邊要先算，這就是寬，然後這裡移到這裡，它這邊叫寬乘以高

T：好，但梯形的面積是這樣嗎？梯形的面積不是上底 + 下底...

S：喔，對對對

T：那怎麼會變寬乘以長？

S：上底加下底才對

T：（上底加下底）...然後呢？

S：乘以寬再除以 2 吧

T：那爲什麼呢？想想看

S：乘以長，然後好像是上底加下底然後乘以寬再乘以長

T：爲什麼乘那麼多呢？能不能解釋一下爲什麼乘那麼多？我們上課不是有講到基礎面積的由來嗎？有沒有想起來？

S：沒有，我沒有記這個公式

T：好，沒有記這個公式，所以你解釋不出來。

T：好，那沒關係！接下來呢，老師要給你這個活動在這一頁，你覺得這個圖形像什麼呢？

S：這個形狀...

T：你覺得它像什麼？

S：像一艘小艇

T：好，你爲什麼覺得它像一艘小艇呢？

S：因爲它這邊有可以坐的地方，然後這個地方像個...

T：舵

S：舵一樣

T：好

S：然後它這邊底下像...（老師這邊也聽不清楚）

T：好，所以你認爲它像一艘小艇，那可不可以算出它的面積呢？

S：面積？

T：對，這艘小艇的面積，你認爲可不可以算出來呢？

S：你是說這個圖形的面積

T：對，你認爲可不可以算出來呢？

S：應該可以！

T：那你要怎麼算呢？可不可以告訴老師？

S：現在呢，這個把下面那一塊去掉移到這裡

T：好，先把它變成什麼？

S：我現在就是先要把它併在這裡

T：好，把它切掉移到上面去，那你把它畫成什麼形狀？

S：畫成一個長方形

T：好，把它想像成一個長方形。再來呢？你怎麼算出裡面的面積？

S：再來呢，我要把它分的更細一點

T：你要分的更細一點，好

S：就像這樣子，好，現在這艘小艇被分成有這幾塊空位，然後...

T：你怎麼算出來呢？

S：我來看一看，這個加起來總共有 10 公分

T：哪裡有 10 公分？

S：然後這個這邊的總長也 10 公分，然後，我再算這邊畫起來的，大概有 3 公分，這邊加起來總共有 7 公分左右

T：好，那邊有 7 公分

T：然後，這邊總長有 7 公分，去掉有 3 公分，接下來我要算這裡的，這邊的總共有 2 公分那麼長。這邊呢，有 3 公分，然後這裡的有 2 公分，好了！

T: 那你要怎麼算出面積呢?

S: 現在有一點點問題。我想我再用另一種方法

T: 沒關係, 你可以用

S: 好, 我另一種方法是像這樣子的, 這邊加起來也是兩公分, 然後現在我算起來這個 3 得必須再減掉一公分, 你知道為什麼吧? 因為這邊會突出, 有一塊嘛, 如果說這兩個都併在一起算的話就不行了, 所以說呢這邊我就把它改成 2 公分比較好。

T: 但是你剛才量是三公分啊

S: 我知道啊, 可是...

T: 你可以把它縮小變 2 公分嗎?

S: 這個...

T: 你剛才量確實是 3 公分啊, 怎麼把它變成 2 公分呢?

S: 不對不對, 這邊原本是 3 公分嘛

T: 對啊, 那本來就是 3 公分啊

S: 然後我把它變成一公分, 因為這裡會突出一小塊, 然後這是 3 公分沒錯, 這是 2 公分沒錯, 但是這個 3 公分, 我如果真的把它當成 3 公分, 這個當成 2 公分的話, 這樣子併起來是不行

T: 老師現在問你是要算出剛才這艘小艇的面積, 你想想看要怎麼樣比較容易算出來?

S: 比較容易算出來

T: 你現在都算外面的面積啊, 你為什麼要算外面的面積呢?

S: 這個嘛, 到最後, 我要把它分成一半

T: 為什麼要把它分成一半?

S: 這樣子, 我現在這個 3... 我發現這個應該乘以 2

T: 你不能說發現什麼啊, 你剛才量是 3 公分, 一個是 2 公分...

S: 這個有點複雜, 我方法幾乎都會換來換去

T: 對啊, 換來換去...

S: 然後這樣乘起來呢, 它這一小塊有 6 平方公分

T: 好, 你能不能告訴我這一小塊為什麼是 6 平方公分?

S: 因為 2 乘以 3, 因為我發現這邊分成二列, 然後呢, 所以說我就把它 3 乘以 2 是 6 嘛

T: 好, 能不能畫出來 6 平方公分是哪一塊?

S: 6 平方公分...

T: 是哪一塊?

S: 這一小塊然後我再除以 2 的話, 它不就是 3 平方公分

T: 哪一塊是 3 平方公分?

S: 這邊這一塊, 所以說我發現這裡是 3 平方公分

T: 好, 再來呢?

S: 再來我就是算這一塊的面積, 才能去減...

T: 那你要把它算出來去減掉它

S: 嗯, 對, 現在我知道這邊有 3 平方公分, 好! 現在呢?

T: 你有沒有發現在這裡長是 3, 對不對? 這邊是 2, 跟這塊有沒有一樣? 跟剛才你算出來的面積有沒有一樣?

S: 我發現這一塊真的是很像, 應該是一樣

T：應該是一樣，那你可不可以把這塊移過去呢？
S：嗯，可以啊，那麼這樣子加起來的話
T：你可以把這邊變成什麼形狀？
S：正方形
T：這邊移過去啊，畫一個箭頭好不好？
S：好啊
T：那它會變成什麼形狀？
S：長方形
T：好，那你可不可以算出它的面積了？
S：現在呢，我要把這邊的總長給量出來
T：你剛才說這邊多少？2，那總共多少？
S：我現在不是說要把這邊量出來嗎？這邊的總長大概是 4 公分
T：那長呢？你剛才量出來多少？7
S：嗯
T：那面積怎麼算的呢？
S：28
T：好，你把它寫出來好不好？
S：28 平方公分
T：好，接下來最後一個問題，就是我們上課的時候，曾經教過你的，把一些問題的線索把它看清楚之後呢，來擬一些數學的問題，那你看第一題，第一題呢，你覺得這個圖形它像什麼呢？它是什麼形狀的問題
S：很像棺材的一面
T：好，棺材的一面，那是什麼形狀？
S：我發現它是五角形
T：好，五角形，為什麼你認為它是五角形？
S：因為我說它很像五角大廈
T：好，五角大廈，為什麼呢？
T：因為它是五角形，有五個角，好！那這五邊形或五角形，現在你看到哦，老師把它從這裡切一條線，那這是它的高有 5 公分，這邊的底是 10 公分，這邊的高是 8 公分，那就變成這個圖形，那你能不能利用這樣線索，想一個題目出來，那這個線索要放到裡面來，想出一個題目。
T：那第二題也是一樣，第二題老師提供給你的線索只有這樣而已，梯形的面積告訴你了，48 平方公分，高也告訴你了，就只有這兩個線索，你怎麼去擬出一個問題來？那聽的懂哦？
T：那第三題是，它給你的線索它的面積就剛好是 24 平，就這樣而已，那你怎麼擬出一個問題？
S：那我先想這題
T：沒關係，你可以挑最簡單的，你認為哪一題最簡單就從哪一題開始寫，好不好？這三題都要寫完，
OK

5 年 6 班 2004.1.14，訪談對象文維 02

T：好，文維老師第一個問題要問你的是，你在日常生活中看過很多的東西對不對，這些東西有沒有形狀

S：有

T：應該都會有一個形狀對不對，那你看到這些物體，你會把它利用形狀來做分類嗎？

S：會

T：會，好那你想想看喔，有哪些東西它的外表看起來像是三角形的？

哪些東西看起來像是三角形的呢？食衣住行育樂通通可以想，提示你，像是掛衣服的文維：衣架

T：衣架，是不是三角形，那你可以食衣住行育樂這方面去想

S：三明治

T：三明治，還有呢？

S：三角板

T：三角板嗯不錯唷，再想想看

S：聖誕樹

T：好聖誕樹，上面有三角形，好這是三角形，那什麼東西像梯形？

S：.....

T：你來桌上畫一個梯形的形狀，來想想什麼東西像梯形

S：樓梯

T：家裡面用的樓梯像梯形，梯形的東西比較少見，那還什其他東西像梯形？

S：.....

T：想不出來？好沒關係，這個東西比較少看到，那你想想看什麼東西像正方形？

S：手帕

T：手帕

S：箱子

T：箱子是正方形，還有沒有呢？

S：磁磚

T：地磚、磁是正方形的，觀察的很仔細唷，還有沒有呢？

S：窗戶

T：窗戶、門窗，好那這是正方形，那有沒有看過長方形的東西？有！什麼呢？

S：桌子

T：桌子，好桌面，大聲講沒關係阿

S：紙張

T：紙張也是長方形

S：黑板

T：好黑板也是，那你為什麼會把黑板這些當成是長方形呢？

S：因為它的左右兩邊不一樣長，還有上下也不一樣長

T：那了這些之外，還有哪些特徵呢？

S：.....

T：你把它分成是長方形，除了上下相等，左右相等之外還有沒有其它特徵來代表它們？

S：.....

T：沒關係，那等你想到再跟老師講，那你剛才說的正方形的東西像手帕、箱子外表，你為什麼會把這些東西當成正方形來看？

S：因為他們的 4 個邊都一樣，而且他們的 4 個角都是直角

T：4 個腳都是 90 度，所以你認為它是正方形，那你剛講的梯形，你怎麼會把它當成梯形來看呢？

S：因為它的都兩邊一樣長，上下不一樣

T：上下不一樣，能不能講清楚什麼是上下不一樣

S：就是上面比下面還要再短一點，然後下面比較長

T：那除了這個特徵之外還有沒有呢？你為什麼把它當成梯形來看？

S：.....

T：你剛才講到上底和下底，那上底比較短下底比較長，那除了這個條件之外還有沒有其特殊的地方？

S：左右兩邊如果延伸出去的話它會相交

T：會相交在一起，那還有沒有呢？想想看

S：.....

T：好，沒關係，那三角形呢？你為什麼會把三角形當成三角形來看呢？它有什麼特徵？

S：因為它下面就是左右兩側的角，會有 2 個點然後形成三角形

T：形成一個三角形，那老師如果畫 2 條線也是三角形嗎？相交一個點

S：就兩條線的話，下面再一條線就會形成三角形

T：形成三角形，那你再想一想，它的邊和它的角有什麼特徵，你剛說正方形因為他們的 4 個邊都一樣，而且他們的 4 個角都是 90 度，那有 4 個邊 4 個角，那三角形呢？

S：三個角

T：三個角很好，還有沒有其他特徵呢？三角形有 3 個角，那 3 個角合起來會有幾度？一個三角形它的內角合是幾度呢？這 3 個角合起來

S：.....

T：不知道？忘記了？沒關係...好!! 接下來呢，老師桌有 4 塊不同形狀的圖形，那這個是什麼形狀呢？

S：直角三角形

T：直角三角形，為什麼你稱它為直角三角形

S：因為它有一個直角

T：還有沒有其他特徵呢？它是一個三角形嗎？

S：嗯

T：算，他有一個直角，所以你稱它直角三角形，還有沒有其它稱呼，你覺得呢？

S：.....

T：好，那姑且稱它為直角三角形好了，那這個粉紅色的呢？

S：長方形

T：長方形，為什麼稱它為長方形

S：因為它的上底和下底都一樣長，然後左右兩邊有都一樣長

T：好，那這個呢？

S：梯形

T：梯形，為什麼叫梯形

S：因為左右兩邊都一樣是一個斜角，然後如果延伸出去的話會碰到，然後上底比下底還要短，下底比上底還要長

T：這你稱它為梯形，那這個藍色的呢？

S：平行四邊形

T：為什麼稱它為平行四邊形

S：因為如果把這個地方連接起來，和這個地方連接起來，會變成一個長方形，然後長方形再把它的那個一半弄掉，就變成一個平行 4 邊形

T：還是一樣阿，是一個平行四邊形，能不能告訴我它有什麼特徵

S：.....

T：什麼叫做平行四邊形

S：平行四邊形就是.....

T：上底和下底會怎樣

S：會成平行

T：那左邊和右邊呢?

S：左邊和右邊也會平行

T：也就是他有幾雙對邊會平行

S：2 雙對邊

T：2 雙對邊會平行的四邊形稱它為

S：平行四邊形

T：好，那老師現在要讓你幫我一個忙，我想要來比較這它們 4 個圖形的面積的大小，你會用什麼方法?來比較它們的大小呢?試試看好不好?

S：.....

T：你要怎麼樣來比較他們的大小，你會用什麼方法?試試看

S：.....

T：好，你先拿出長方形，為你會先拿出長方形

S：因為這三個圖形都是長方形的變化

T：好，那你能不能比較看看，哪一個最大，哪一個最小，你要怎麼樣來比較，你可以用這種方法喔!

S：.....

T：你剛才為什麼把長方形從這邊畫一半，從它的對角線

S：如果從它的對角線畫一半，就是等於這直角三角形

T：你怎麼知道

S：如果是這樣畫一半的話，用這個去比較，然後從這邊畫一半，它的對角線畫下來

T：對角線畫下來，你確定它會那個嗎?你現在是把它們 2 個疊在一起做比較，這個方法不錯唷!要不要再嘗試看看，你剛剛這樣疊好像不容易比較出來對不對，這樣疊好像不容易，有沒有其它方式

S：用補的

T：好，你說說看要怎麼做?

S：就是把這個三角形和另一個三角形組合起來就變成長方形，

T：嗯不錯!!

S：然後，這就是一個長方形，然後這個正方形和長方形去比較

T：然後呢?

S：.....

T：你剛說變成一個正方形，那這個正方形是幾個長方形呢？

S：這個正方形就是等於 2 塊長方形

T：然後哪一個圖形的面積比較大？

S：這個三角形的面積

T：爲什麼

S：因爲他把這個三角形移過來就是等於這個長方形

T：這個三角形是等於這個長方形嗎？

S：他是等於這個三角形

T：爲什麼等於三角形，長方形爲什麼等於三角形？你現在改變了

S：因爲他把這裡切一半的話

T：你把長方形切一半爲什麼要把長方形切一半，你剛說兩個三角形合成一個怎麼樣阿？兩個三角形一個正方形，然後這一個正方形是兩個長方形的面積，那這個正方形是不是也兩塊三角形的面積

S：嗯！然後就是.....

T：你要怎麼說？再重說一遍好了，用你自己的話

S：就是.....這一個長方形是等於這個三角形，如果我拿另外一個三角形把它合在一起的話，就是等於正方形，然後這個長方形如果有另外一塊長方形的話，就是等於這一塊正方形

T：說的很好，再來呢？所以正方形是兩塊三角形對不對，那也是兩塊長方形，所以三角形和長方形面積誰大？

S：一樣大

T：那再來還有兩塊還沒比呀！那怎麼辦呢？

S：如果把這個跟這個拿下來比的話，把這裡跟他一樣切一半

T：把什麼切一半

S：把長方形拿來跟他比較，然後把他多出來的 2 個角去掉，就是等於這個平行四邊形

T：好，那兩個的面積誰大呢？

S：也是一樣大，因爲平行四邊形把它彌補起來話，就是等於一個長方形

T：但是你把平行四邊形彌補起來它不會比長方形大嗎？

S：會，就是比它長一點

T：對阿，那應該是平行四邊形比較大阿，你爲什麼認爲它一樣大呢？你要怎麼樣比呢？好，你把一邊對齊，再來呢？平行四邊形是不是多了一塊？

S：對，所以把這多出來的一塊移到這裡有一個小的這裡有一塊

T：好

S：然後再把它補起來

T：補起來，跟它的面積怎麼樣

S：一樣

T：那平行四邊形跟三角形呢？

S：平行四邊形跟三角形.....

T：你剛才是三角形跟誰一樣大

S：跟這個長方形

T：那它跟這個平行四邊形有沒有什麼關係？

S：.....

T：它的面積會怎麼樣，誰大？三角形大？那你剛才說三角形跟長方形一樣大對不對，那長方形又跟平行四邊形一樣大，那現在三角形會比平行四邊形大？

S：.....

T：它形狀有沒有一樣？

S：不一樣

T：不一樣，但是面積有沒有一樣阿？

S：有

T：那這叫什麼？

S：.....

T：等積異形

S：等積異形

T：清楚了嗎？那還有一塊，這一塊還沒比勒

S：我是照剛才的方法一樣，把這個邊對準它的這個，然後，這裡有一個多出來的一塊角，然後把它移過來就是等於一塊跟這個上面一塊的長方形一樣

T：好，那你不能告訴我，這四塊哪一個的面積最大？

S：一樣

T：都是一樣大，那上面形狀怎麼樣

S：不一樣

T：不一樣，那這個叫做什麼

S：等積異形

T：等積異形，好，那接下來你能不能告訴老師，長方形的面積怎麼算？

S：長方形的面積就是，長*寬

T：嗯很好，你記住了，那三角形呢？

S：就是長*寬，除以 2

T：那三角形的面積我們叫底*高

S：底*高

T：有沒有把一個長當成底了，那寬變成什麼？

S：高

T：高，好，那平行四邊形的面積呢？

S：平行四邊形的面積....

T：底*高

S：底*高

T：這樣就好了，為什麼你剛才比了對不對，它的底跟它的長怎麼樣？

S：一樣

T：一樣，那它的寬跟它得高一樣，只是名稱不同而已，那梯形面積呢？

S：梯形面積...就是....底

T：上底

S：上底加下底，乘以高，除以 2

T：好！那它的四個面積都一樣，但是公式不同對不對，它們都公式之間有什麼關係呢？

S：.....

T：像長方形跟平行四邊形，長方形的面積是長乘以

S：寬

T：寬，那平行四邊形，是底乘以高，它們都公式之間有什麼關係呢?你能不能解釋一下

S：.....

T：長方形的長跟平行四邊的底，一樣

S：然後它的寬，把它切下來，也是等於它這個寬

T：對，平行四邊形的高跟長方形的寬，怎麼樣

S：一樣

T：一樣，好，再來呢?三角形呢?

S：.....

T：三角形的底跟長方形的長有沒有一樣

S：也是一樣

T：然後呢?

S：然後.....

T：它的高

S：它的高

T：高除以 2 是不是跟他的寬一樣?好，那梯形呢?

S：梯形它的.....

T：梯形這上面的底跟下面的底兩個合起來等於什麼，等於長方形兩個長，對不對，所以它的面積是不是要把這兩個底加起來之後，除以 2 就是等於它一個長，對不對，那它的高跟長方形的寬有沒有

S：也是一樣，因為它這裡也是有多出來的一塊，然後它的寬如果延伸出去的話，所以這樣子也是形成一個長方形

T：嗯，很好!好!接下來老師的桌上，這個綠色的是一個直角三角形，對不對那我桌上也擺放了許多方瓦，這些方瓦我現在要麻煩你想辦法把它鋪上去，意思是這樣子，這塊三角形如果我現在用方瓦來鋪的話，我需要幾塊方瓦，你怎麼知道到的，你會用什麼方法?這裡有尺什麼的，你都可以利用阿，這是一個直角三角形，我要讓你用方瓦來鋪，你會怎樣鋪呢?你覺得用這種方式來鋪的話好嗎?你先把它想成一個什麼

S：長方形

T：長方形，你有沒有想過方瓦有什麼特徵

S：4 個邊都一樣長

T：4 個邊都一樣長

S：然後每一個角都是 90 度

T：好，那這個剛才給你的三角形是什麼三角形

S：直角三角形

T：好，有沒有跟方瓦特徵一樣的地方

S：.....

T：沒有關係，你試試你看要怎麼拼

S：直角開始

T：好，那你試試看，你現在發現從那個地方開始拼，好你要從直角開始，為什麼呢？

S：因為這裡有直角，這裡也有一個直角，所以我們這樣對上去是剛好密合

T：嗯，剛好密合，對，再來呢？

S：.....

T：你用一片一片的拼起來，大概就可以了，這裡，這個圖形你覺得他像什麼呢？

S：.....

T：不知道，日常生活中，有沒有想過哪些東西跟它很像？不知道像什麼？

S：嗯

T：好，那它能不能算出面積？

S：可以

T：可以，為什麼它可以算出面積？

S：.....因為.....嗯.....

T：什麼叫面積？

S：面積就是這個圖形的.....

T：圖形的什麼

S：它所佔的

T：所佔據的這個範圍，這個叫面積，也就是由很多的線條怎麼樣？

S：圍起來

T：嗯，圍起來的一個密閉空間，所以它就是一個面積，那你告訴我，你要怎麼算出這個圖形的面積呢？你可以用什麼方法？

S：用....

T：用什麼

S：彌補

T：彌補，好那你怎麼做呢？你可以用筆用尺，用你的方法，沒關係喔，你要把下面那塊移上去，那你畫一個箭頭好不好？好，把他移上去，再來你會怎麼做？把那塊切下來，為什麼你要把那塊切下來呢？

S：因為移來這邊

T：移來那邊。好，那你要怎麼移呢？你確定可以移嗎？

S：用填補的方式

T：用填補的方式，為人你要用填補的方式

S：因為用填補的方式，它是有一點不規則，所以我們用填補的方式把它圍起來

T：圍成一個什麼形狀

S：圍成一個長方形

T：然後再來你要怎麼做？

S：圍成一個長方形

T：好那你先圍好了沒關係，我們一步一步來，先把它圍成一個長方形，那再來呢？

S：圍成一個長方形之後，就.....嗯

T：再來你怎麼算出原來勾那個面積呢？對，你要先算出什麼面積

S：這個長方形

T：好，這個長方形面積怎麼算出來？

S：長*寬

T：長*寬，好，那你第一個步驟要怎麼樣，量出它的長，長大概是 10 公分，好！假設是 10 公分，寬呢？4.5，好！這個面積怎麼算？

S：長加寬除以 2

T：加嗎？面積怎麼算？

S：10*4.5

T：好，你乘乘看

S：等於 45

T：好！45 這是長方形面積，再來呢？你怎麼辦？

S：.....再來，就是這個角它就是 45，然後把它算出來

T：為什麼要把它算出來多少，你剛才不是把它移過去把它補了嗎？

S：.....

T：再來要怎麼辦？

S：再來如果要算這塊面積的話，要去掉這兩塊

T：好去掉這兩塊，那下面那一塊的形狀是什麼？下面你剛指的要去掉的這兩塊，那兩塊形狀分別是什麼？

S：一個是三角形

T：一個是三角形，那另外一個呢？

S：是....梯形

T：梯形，好那你要去掉這兩塊你要怎麼算出它的面積？

S：.....

T：三角形的面積是多少？要怎麼算

S：上底

T：上底在哪裡？

S：.....

T：沒有上底嘛

S：底*高除以 2

T：底*高除以 2，好那你算算看吧！3，高，2，假設 2 好了，沒關係，底*高除以 2 多少？

S：3

T：好你把它寫下來，那不是長喔，那面積呢？3，好那上面這是梯形，梯形面積怎麼算？

S：梯形面積.....

T：剛你講過啦！

S：上底加下底乘以高除以 2

T：那上底多少？6.5，下底呢？3.5，上底加下底總共多少呀？10，那高呢？

S：.....

T：高在哪裡

S：2

T：2 對，那 10 乘以 2 除以 2 等於多少

S：10 乘以 2 除以 2，10

T：好你把它寫上去 10，再來，你怎麼算出剛才那塊面積的，全部是多少？

S : 45

T : 對 45 扣掉 3 再扣掉 10，總共多少?你把它寫出來

S : 32

T : 好你把它寫上去 32，很好 ok 你把它算出來了，好辛苦，接下來要讓你來擬題，這裡面有 3 個題目，這 3 個題目就是要讓你根據它的線索，來出一道問題，知道吧，這叫擬題，好那這 3 個題目呢，第一個是這樣一個形狀一個圖形它像什麼形狀，它是屬於什麼形狀，這整個，

S : 這個?

T : 對! 對! 它是什麼形狀，它是一個什麼形

S : 六邊形

T : 為什麼是六邊形，

S : 因為它有六個邊

T : 好哪六個邊，你指給我看

S : 這個，這一個

T : 裡面也是嗎?它整個圖形，什麼形狀

S : 五邊形

T : 五邊形，那我從中間把它切一條線的話，可以變成兩個圖形對不對?上面的是什麼?

S : 三角形

T : 下面呢

S : 梯形

T : 梯形，好也就是這個五邊形，我可以把它切成這兩塊，那三角形的底是 10 公分，高是 5 公分，那梯形呢，上底是 10 公分，下底是 4 公分，那這個虛線是它的高，8 公分，那老師給你一個這樣的條件，要叫你出一個題目讓你去想，那第二個題目呢，並沒有圖形只有文字說明，梯形的面積是 48 平方公尺，高是 6 公尺，好老師告訴你這樣一個條件，那請你參考這個條件呢，也是一樣擬出一個題目來，看的懂嗎?這是梯形唷，再來第 3 個呢，我都沒有告訴你什麼條件，我只告訴你有一個圖形呢，它的面積是 24 平方公尺，那你會出什麼樣的題目?你來好好的想一想。

附錄十 實作記錄

文維〈2004.01.14〉

一、三角形的方瓦覆蓋（圖形不完全覆蓋，採取部分推理計算）

將三角形圖版放在桌上，較長的底邊放在靠近自己的一邊，直角邊在上方，先拿起兩片方瓦放在底邊試著覆蓋，左邊先放，發現不好，將一片移到右邊，發現沒有跟方瓦對應的直角邊，又將方瓦移到左邊，還是無法進行（你發現了這種覆蓋的方式不好嗎？）接著用手指在圖形周圍畫出一個長方形，試著覆蓋（方瓦有什麼特徵）四個邊一樣長，用手指指著兩個邊的夾角，而且有四個直角（你再看看這個三角形有什麼特徵）將三角形轉了位置，看看，又轉了回去，然後轉了回來（發現有一角是 90 度），將方瓦放在直角處從底部開始往右一片接著一片覆蓋，底部總共覆蓋了三片完整的方瓦後，將方瓦移到第二列，覆蓋了一片後，將第三列再覆蓋一片，再往上覆蓋一片（這樣就可以算出有幾塊了）

底邊我用了 3 塊，高我用了 4 塊，指著高最上面一塊方瓦：這裡多出一半可以移到下面右邊這裡，兩個剛好可以合成一塊，這裡也是少一半，這邊也是，所以要用一塊方瓦，將滿格的加起來，再將這些加起來就是了（那需要幾塊方瓦呢）用手指從上至下將完整的一個一個數出來，但不準確，用手指畫未覆蓋的地方，無法計算，將方瓦再拿出一片將空白之處覆蓋上去（只剩半格未覆蓋之處）再用手指一個一個數，總共用了 8 塊。

二、梯形的覆蓋（覆蓋後，發現可移補圖形，形成可順利完全覆蓋方瓦的模式）

將梯形放在桌上，下底面向自己，用手指在圖形周圍畫出一個長方形，想像它現在是一個長方形的圖形，然後拿取一片方瓦覆蓋在有直角的地方，先在左底邊晃一下，再往右底部晃一下，然後移到右上邊開始覆蓋，再往下覆蓋一片，右邊一行覆蓋了兩片，再拿取方瓦從左上邊覆蓋一片（為何要一到左上角覆蓋呢）指著左邊多出的圖形，可將這一部分移到右邊，形成長方形，拿出兩片方瓦將右邊空白處覆蓋住，但下面一列有 2 塊並未覆蓋，用手指從左上往右一點數，總共有 8 片方瓦。

三、面積圖形重構（填補再扣除）

拿出尺後，將下面小正方形切割，畫一條線，移到上面空白處填補，然後將右邊切割出一塊三角形，想移到上面填補，將圖形旋轉一下，用手指比對一番，不敢確定，在將圖形轉移一下，好像不行，改變方法要將圖形纖維成一長方形再扣除多出來的部分，用尺在右邊畫出一條直線，將底部連起來，再將上面連起來，用尺量出長方形長的長度，再將圖形旋轉 90 度，量出寬的長度，將長乘以寬算出面積，一個是三角形，另一個是...旋轉 90 度看一看是梯形，量出底長度，再量出高長度（直角兩邊），梯形面積是上底加下底乘以高除以 2，用尺量出上底 6.5，下底 3.5，加起來是 10，高是 2，面積是 10，全部減掉 3 再扣掉 10，全部是 32 平方公分。

立濬〈2004.01.15〉

一、釘板操弄

拿出橡皮圈後，在左下角將橡皮圈拉開兩格後左手壓住，再將橡皮圈往右拉了 7 格後，用手指由左上往右下一格一格點數，發現太多了，將右邊往內移一格，但橡皮圈脫落，又重新操弄，再由左上往右下點數，少了 2 格，將身體傾斜，將右邊往外移一格，馬上說出 12，上面有 6 個，左邊有 2 個，6 乘以 2 等於 12 個。

又拿出另外一條橡皮圈，但並未操弄，先用眼睛對著釘板觀察，然後用右手移動點數，將橡皮圈斜套在剛才的長方形上，不行，移到長方形外，橡皮圈脫落，用右手手指比劃計算，再將橡皮圈張開斜放在長方形上，又拿下來，繼續觀察，用手指比劃（平行四邊形和長方形有何關係）放掉手上的橡皮圈，將丁版上的長方形右上之頂點往右移一格，左下之頂點往左移一格，這是平行四邊形，也是 12 格，因為這邊突出的部分不完整，可以和這邊合起來，兩個合成一格。

將平行四邊形的橡皮圈取下，圍成一個倒三角形，準備點數，手鬆掉圖形成為一個本壘壘包的圖形，發現後，重新調整，再用手點數，停頓、用眼睛觀察，先數半格，總共是 12 格，從中間切開來，移過去可以形成一個長方形，拿出紅色橡皮圈，圍成一長方形，長有 4 格，寬有 3 格，所以是 12 格。

拿出橡皮圈後馬上為成一倒立的梯形（上底長下底短），再用手點數完整的格數，將左邊這裡切割後移到這裡也是長方形，算起來總共是 12 塊

二、圖形面積比對

直接拿起三角形從中間切割後移到這邊可以變成一個長方形，比較好量，發現有長方形積木，將三角形積木疊上去，直角邊對應，把三角形多餘的補到這邊可以變成一個長方形，他們面積一樣，接著將平行四邊形疊放在長方形上，底邊與角和長方形底邊及角重疊，他們面積也是一樣，這邊切下後移到這邊也變成長方形。（哪一個圖形面積大呢）猶豫了一下，看了三角形與平行四邊形，將他們放在一起，應該一樣大。再將梯形放在長方形上，這邊切掉補過去也是長方形，所以也是一樣大（一樣大嗎？）用尺量一量，一樣大，面積一樣大，但圖形形狀不同，稱為「等積異形」。

三、面積公式理解（比對要素理解公式）

長方形面積的公式為長乘以寬，指著長和寬的位置，平行四邊形面積公式為底乘以高，指出底和高位置，三角形的面積公式為底乘以高除以 2，畫出一正方形，三角形面積是正方形的一半，底乘以高是正方形面積，所以要除以 2，梯形面積是上底加上下底乘以高再除以 2。將平行四邊形疊在長方形上，觀察一下後，平行四邊形的底和長方形的長一樣，高和寬也一樣，所以底成高算出的面積和長乘以寬是一樣的；將長方形的直角邊和三角形的直角邊重疊，指出三角形的底和高，底和長方形的長一樣，高切一半後移過去面積相等，高是寬的兩倍，底乘以（高除以 2）會等於長乘以寬算出的面積。將梯形疊在長方形上，這邊多出的部分移到這邊後，和長方形一樣，梯形面積是上底加下底乘以高再除以 2，切開的這邊的

下底長和長方形的長一樣，這個移到上面與這邊的長加起來和長方形的長也一樣，所以上底加下底等於 2 倍的長方形的長，高和寬也一樣，因此「上底加下底」後除以 2 等於一個長，再乘以高就和長方形的面積的公式一樣了。

四、方瓦覆蓋

(一) 三角形覆蓋 (單位量邊長為主，利用乘法結構計算)

拿出方瓦，用尺量出邊長是 2，再用尺分別量出三角形的底和高各為 8，想一想後，用 8 除以 2 等於 4，這邊有 4 塊，這邊也有 4 塊，畫出一正方形，這全部要 16 塊的方瓦，三角形是他的一半，所以用了 8 塊。

(二) 梯形覆蓋

將梯形倒立放在桌上，指著左邊部分用切割的方式移到這邊就成爲一個長方形，手指著切割的點，拿出尺，從一端量到此點是 8，將尺從底邊量到上面的邊，高是 2，這邊放 4 塊，高放 2 塊，所以放了 8 塊。

五、圖形切割

將底下之小正方形切割後移到上面空缺的地方補起來，用箭頭表示，將右邊的三角形切下移到這邊來，用箭頭表示，用尺量三角形的各邊長度，無法量出三角形的各邊長度，老師鼓勵重量，發現切割不準確，擦掉線條重劃，再重量，發現一樣長，可以移過去，再量一量新的長方形之長爲 7，寬爲 4.5，面積是 31.5 平方公分。

文儒〈2004.01.14〉

一、釘板操弄

拿出橡皮圈後，即在釘板中間圍出一長方形，圍平行四邊形時，形成一正方形，將下邊左部往外拉一格，右邊拉一格形成了梯形，覺得不是平行四邊形，再將上面左右各拉一格，形成另一正方形，猶豫呆住片刻，教師示範如何圍出平行四邊形，自己再操作一次；將橡皮圈頂端套上釘子，往下拉形成一個本壘壘包的形狀，調整橡皮圈的位置，形成一個三角形；將橡皮圈上部拉出一條直線後，往下擴張，即將梯形拉出。

先用手指點數出 12 格，拿出橡皮圈在右邊拉出一長方形，但不夠，又拿出另一條橡皮圈皆在下面，但只有 11 格，手指再點數一次，拿除另一條橡皮圈在原長方形旁匡出另一小長方形，發現整個圖形不像長方形，把後兩條橡皮圈拆下，在將原橡皮圈拆下，用手指再筆畫一下，然後在丁版上部圍出一個長六格，寬一格的長方形，在拿出另一條橡皮圈，空一格處圍出另一全等的長方形，發現兩個長方形是分開的，猶豫片刻，教師示範，再重新操弄一次；拿出橡皮圈後，及匡出一多邊形圖形，即用手指點數，但被指明不是平行四邊形後，重新匡成長方形，在一個一個點數，發現太大，將圖形調整後成爲平行四邊形，完整的方格有 10 個，

不完整的有 2 個，不完整的兩個可以組成一個完整的格子，左邊一個完整的，右邊也有一個，總共是 12 個。

拿出橡皮圈後即匡出一三角形圖像，用手點數一番，發現太少，固定上面的頂點後，將三角形下部往外擴張，再用手指點數，發現太少，再重數一次，真的太少，將三角形再往下拉，匡出較大的三角形後，再點數，總共是 12 格。

將橡皮圈固定梯形上底後往下拉出完整的圖形，直覺太小，再往下擴張，然後用手指點數，發現太多了，再將梯形圖形兩邊縮減，再用手指點數，完整的有 9 格，不完整的 6 格，所以總共有 12 格。

二、面積比對

拿出尺後，先量出長方形的長，再分別量出另外圖形最長之邊，三角形量斜邊，梯形量下底，用邊比較大小，邊越大面積越大；梯形和三角形底邊一樣大所以他們的面積一樣，平行四邊形和長方形的長邊也一樣長，所以面積也一樣；前兩者面積較後兩者大，何謂面積？長乘以寬，底乘以高！

三、面積公式理解

無法說出圖形面積公式，教師說明長方形面積公式後，還是無法解釋其它圖形與長方形長、寬之關係。

四、方瓦覆蓋

(一) 三角形覆蓋

將方瓦直接從三角形之直角部分覆蓋，由上往下，不完整的則將方瓦從對角現對折後覆蓋上去，再將另一邊覆蓋，最後將其完整的覆蓋出，總共用了 8 塊。

(二) 梯形覆蓋

從上面一片一片覆蓋上去，不完整的則將方瓦對折再予以覆蓋，接著第二列，兩邊則將一方瓦切成兩個不同之部分，剛好可以填補下邊兩側不完整的部分，剛好是八塊方瓦。

五、圖形切割

用方瓦一塊一塊覆蓋，就能算出，尖尖的地方可以將方瓦剪成和它一樣的形狀再貼上去，這樣就可以用方瓦算出它的面積了。但實際操作卻無法完成，因此無法得知需用多少塊方瓦。

立元 〈2004. 01. 15〉

一、釘板表徵

拿出橡皮圈為成一個正方形，因為這兩邊一樣，另外兩邊也一樣，而且四個角都是直角，接著將長方形右下邊往外拉，左上邊往外拉，形成一平行四邊形；然後取下橡皮圈，固定釘板一點，往左及往上拉，即刻形成三角形圖形；在取下橡皮圈，雙手張開將橡皮圈拉開一段距離套在釘子上，同時兩邊往下、往外張開，即成一梯形，對圖形表徵非常的快。

眼睛看著釘板移動，然後將橡皮圈套在左邊的四根釘子上（有 3 格）上下平行的往右邊

拉四格，接著固定形成長方形，這裡有 3 格，上面有 4 格， $3 \times 4 = 12$ ；將原長方形圖形左下往外拉，右上往外拉形成平行四邊形，思考一下，這邊圖出來的一到這邊就跟剛才的長方形一樣。取下橡皮圈，看著釘板，然後先套四格成一條直線，再往下數四格後，形成一直角三角形，用手指點數，發現不是，再將直角兩邊往外拉，各成爲 5 格，重數，不對，將下邊縮回一格，上邊往外再拉一格，是 12 格，因爲 $6 \times 4 = 24$ ，還要再除以 2，所以是 12 格；先套成一個上是 4 格下是 6 格，高是 2 格的梯形，直覺太少，將下底往外拉 2 格，用點數方式，是 12 格。

二、圖形大小比對

直接拿起平行四邊形疊在長方形上，以長方形爲主，這邊切掉移到這邊是一樣大，梯形這一塊移到這邊也是一樣大，將三角形直角邊與長方形對齊，這裡切掉移過去也是和長方形一樣，所以四個圖形面積都一樣。

三、圖形公式理解

三角形直角和長方形直角疊在一起，它的底邊和長方形是一樣的，高是長方形寬的兩倍，將高除以 2 乘以底邊剛好與長方形的面積一樣；平行四邊形的底和長一樣，寬就是高，所以長乘以寬就是底乘以高；梯形的高和長方形的寬一樣，底邊這個地方多的切掉移到上面剛好等於另外長方形一邊的長，上底加下底剛好有 2 個長，除以 2 就等於一個長，再乘以高就等於長方形的面積了。

四、方瓦覆蓋

（一）三角形覆蓋

將小方瓦先放在三角形直角處，然後一片一片往上覆蓋，總共覆蓋了 3 個完整的方瓦，再覆蓋第二行，覆蓋了 2 塊，在覆蓋第三行，有一塊完整的方瓦，眼睛觀察一下，完整的總共有 6 塊，不完整的有 4 塊，剛好等於兩塊完整的方瓦，所以總共有 8 塊。

（二）梯形覆蓋

將方瓦先覆蓋第一列，有完整的三塊，接著覆蓋第二列也有完整的 3 塊，這兩邊可以合成一個長方形，指著右邊多出的圖形，剛好可以覆蓋 2 塊，所以總共有 8 塊。

五、圖形切割

將下邊突出的正方形切下移到上邊空缺處，切割右邊三角形，量它的邊後，認爲可以移到左邊空缺處，將整個圖形移補成一個長方形，用尺量出此圖的長 7 公分，寬是 4.5， $4.5 \times 7 = 31.5$ 平方公分。

文霖〈2004.01.14〉

一、釘板操弄（長方形爲基準轉化最爲順利的模式）

將橡皮圈放在左下角手一撐開就形成了長方形，然後取下在左下角上方處從斜邊開始，馬上圍成平行四邊形，在取下固定三角形之頂點，然後往下張開，就形成一站立的等腰三角

形，再將三角形之頂點往外張開就形成了梯形。

先用手指數，馬上圍成 3×2 之長方形，直覺太小，擴大圖形成 3×3 之正方形，手指點數長方形內之格數，發現不對又往上張開成 4×3 的長方形，一列有 3 格，總共有四列，所以有 12 個，將長方形圖形右上角的邊往右移一格，左下角的邊往左移一格，就形成 12 格的平行四邊形，因為這多出的部分可以移到這邊，剛好與長方形一樣。用眼睛找出一面積為 $6 \times 4 = 24$ 格的長方形範圍，直接將橡皮圈套在上底的一點就形成了一三角形，因為從長方形裡面所形成的三角形都是長方形面積的一半；三角形圖形不變，再將三角形頂點上的橡皮圈往外移成兩格，看一看，則將上底往下移一格，形成一上底為 2 格，下底為 6 格，高為三格之梯形，好像太小了，用手點數，馬上說出是 12 格，因為從中間切，把一塊到過來接上去就等於長方形。

二、面積大小比對

直接拿起平行四邊形疊在長方形上，以長方形為主，這邊切掉一到這邊是一樣大，將三角形的斜邊與長方形一邊長對齊，但發現不能，轉動三角形圖形，讓直角的兩邊分別與長方形長寬對齊，這裡切掉移過去也是和長方形一樣，梯形放到長方形上，下底邊比長方形的長大，上底邊比長短，指著梯形兩邊多出的部分，宜過去剛好等於長方形，另外將一角對齊，這邊多出的部分可以補這邊的空缺，也和這個長方形一樣，所以四個圖形面積都一樣。

三、面積公式理解

三角形直角和長方形直角疊在一起，它的底邊和長方形是一樣的，高是長方形寬的兩倍，將高除以 2 乘以底邊剛好與長方形的面積一樣；平行四邊形的底和長一樣，寬就是高，所以長乘以寬就是底乘以高；梯形的高和長方形的寬一樣，底邊這個地方多的切掉移到上面剛好等於另外長方形一邊的長，上底加下底剛好有 2 個長，除以 2 就等於一個長，再乘以高就等於長方形的面積了。

四、方瓦覆蓋

(一) 三角形覆蓋

將小方瓦先放在三角形直角處，然後一片一片往上覆蓋，總共覆蓋了 3 個完整的方瓦，再覆蓋第二行，覆蓋了 2 塊，再覆蓋第三行，有一塊完整的方瓦，眼睛觀察一下，完整的總共有 6 塊，不完整的有 4 塊，剛好等於兩塊完整的方瓦，所以總共有 8 塊。

(二) 梯形覆蓋

將方瓦先覆蓋第一列，有完整的三塊，接著覆蓋第二列也有完整的 3 塊，這兩邊可以合成一個長方形，指著右邊多出的圖形，剛好可以覆蓋 2 塊，所以總共有 8 塊。

四、圖形切割

將下邊突出的正方形切下移到上邊空缺處，切割右邊三角形，應該可以補上去，好像不行，量它的邊後，認為可以移到左邊空缺處，將整個圖形移補成一個長方形，用尺量出此圖的長 7 公分，寬是 4.5， $4.5 \times 7 = 31.5$ 平方公分。

立彰〈2004.01.15〉

一、釘板操弄

先從圖形上邊拉出 2 格的線後，再將橡皮圈往下拉形成一長方形，取下橡皮圈後，從斜邊開始往右圈出平行四邊形，然後取下橡皮圈，先將向皮圈在底部連成一條直線後，在將橡皮圈往上拉，套在一點上即形成一等腰三角形；三角形圖形不變，將頂點往外移一格，形成上底後，再調整側邊形成了一梯形。

拿起橡皮圈後，先用手點數方格，套住右邊六格後，再將橡皮圈往左移一格，因為一行有 6 格，兩行就有 12 格；直接將長方形上邊往左移一格，底邊固定，將圖形整個往左移動，形成了平行四邊形，因為底乘以高 = 12。平行四邊形底邊往左擴張一格成三格，高還是不變，用點數的方式認為面積是 12，老師質疑，因為底乘以高再除以 2 等於 9；將底邊再往左移一格為 4 格，面積為 12，因為底乘以高除以 2 以後為 12；接著將橡皮圈拿下，先決定上底兩格後，套住橡皮圈然後往下拉，形成一等腰梯形，高為 3 格，下底為六格，上底加下底後乘以高再除以 2 等於 12。

二、面積圖形比對

拿出尺先量長方形之寬（4）與長（8），面積是 32，再用尺量出平行四邊形的底（8）和高（4），面積也是 32；再量直角三角形的底和高，各是 8，所以面積也是 32，梯形上底是 4，下底 12，高是 4，所以面積也是 32，這四塊圖形面積都相同。

三、面積公式理解

長方形面積的公式為長乘以寬，指著長和寬的位置，平行四邊形面積公式為底乘以高，指出底和高位置，三角形的面積公式為底乘以高除以 2，畫出一正方形，三角形面積是正方形的一半，底乘以高是正方形面積，所以要除以 2，梯形面積是上底加上下底乘以高再除以 2。將平行四邊形疊在長方形上，觀察一下後，平行四邊形的底和長方形的長一樣，高和寬也一樣，所以底乘以高算出的面積和長乘以寬是一樣的；將長方形的直角邊和三角形的直角邊重疊，指出三角形的底和高，底和長方形的長一樣，高切一半後移過去面積相等，高是寬的兩倍，底乘以（高除以 2）會等於長乘以寬算出的面積。將梯形疊在長方形上，這邊多出的部分移到這邊後，和長方形一樣，梯形面積是上底加下底乘以高再除以 2，切開的這邊的下底長和長方形的長一樣，這個移到上面與這邊的長加起來和長方形的長也一樣，所以上底加下底等於 2 倍的長方形的長，高和寬也一樣，因此「上底加下底」後除以 2 等於一個長，再乘以高就和長方形的面積的公式一樣了。

四、方瓦的覆蓋

（一）三角形的覆蓋

先量方瓦的邊長為 2 公分，然後從三角形的直角底邊往上一片一片覆蓋，高共用了 4 塊，所以是 8 公分，底也用了 4 塊，所以也是 4 公分，這塊三角形的面積是 32 平方公分，那要用

幾塊方瓦呢？ $4 \times 4 \div 2 = 8$ 塊

(二) 梯形的覆蓋

拿出方瓦從上一列一片一片連接覆蓋，完整的有 3 片，再覆蓋下一列，也是 3 張完整的方瓦，沒有覆蓋到的部分移過去形成一個長方形，這樣還可以覆蓋兩片，總共 8 片。

五、圖形切割

先將圖形下面突出之正方形切割後移補到上面填補空缺，然後這從有斜邊這個地方切開，左邊是個長方形，長是 4.5，寬是 3.5，相乘可以得到它的面積；再從這個地方切割，覺得圖形很奇怪，擦掉線條，重新切割，可以得到梯形和三角形兩個圖形，三角形的高是 3，底是 2，梯形上底是 2，下底是 6.5，高是 3，乘出來後全部加起來就是這個圖形的面積。

文羽〈2004.01.14〉

一、釘板操弄

先用手指在釘板上數出橫列 6 格，用橡皮圈套上，並再重複點屬一次，再將橡皮圈往下拉一格，即為 12 格的長方格，因為一列有 6 格，兩列剛好為 12；將長方形上面的邊同時往右移一格，行成一平行四邊形，用眼睛觀察，覺得不妥，再往右移一格，說出是 12 平方公分的平行四邊形，因為完整的是 $5 \times 2 = 10$ ，另外兩邊各有多出的 1 格（因為是兩格的一半），所以是 12 格；取下橡皮圈，很快固定一點往下拉，即成一等腰三角形，用手指一點數，（想將不完整的兩塊合成一塊，但碰到困難），將底邊往外拉了兩格，形成新的三角形，再點數，發覺太大，在將底邊往內縮一格，調整三角形，不敢確認是 12 格（教師提供策略）發顯可利用切割方式從中切割後，將右邊移動至左邊填補起來剛好是一個長方形， $4 \times 3 = 12$ ，另外也可以由三角形的面積公式也可算出，底是 6 高是 4， $6 \times 4 \div 2 = 12$ ，也能證明它的面積；取下橡皮圈後，先將他套在上底 3 格處，然後往下拉成一個直角的梯形，用手指點數，發覺太少，再將下底左邊往左擴張 1 格，形成一個較大具有直角的梯形，但不確認是 12 格，因為上底是 3 格，下底是 4 格（後來發現尖角那邊也有一格，總共是 5 格），高是 4 格，用面積一算是 12（固定上底為要素）

二：圖形大小比對

以長方形為基準，拿出梯形，指著上底與斜邊交接的角處，從這裡垂直切下，移到右邊，可以形成相等的長方形，他們的長和寬都是一樣；平行四邊形也是一樣切割移補之後，它也是長方形，底和高和長方形都一樣；拿出三角形，用手指做切割狀，旋轉圖形，再將圖形與長方形比對，斜邊與長放在一起觀察，發覺不好切割，旋轉三角形直角邊與長相對，發現一樣，將三角形疊在長方形上，從這裡切割移到這邊，他們的面積也是一樣。所以四塊圖形面積都一樣，只是形狀不同。

三、面積公式理解

很快地說出四種圖形的面積公式，平行四邊形的底和長一樣，寬就是高，所以長乘以寬

就是底乘以高；三角形直角和長方形直角疊在一起，它的底邊和長方形是一樣的，高是長方形寬的兩倍，將高除以 2 乘以底邊剛好與長方形的面積一樣；拿出尺量出長方形的長是 8 公分，寬是 4 公分，梯形的高和長方形的寬一樣，底邊這個地方多的切掉移到上面剛好等於另外長方形一邊的長，上底加下底剛好有 2 個長（因為是 4 加上 12 是 16），除以 2 就等於一個長，再乘以高就等於長方形的面積了。

四、方瓦覆蓋

（一）三角形的覆蓋

因為兩個三角形可以和成一個正方形，所以正方形面積除以 2，就能得到三角形的面積，將方瓦沿著三角形直角向兩邊覆蓋，這邊有 4 塊，這裡也有 4 塊， $4 \times 4 \div 2 = 8$ ，所以用了 8 塊

（二）梯形的覆蓋

先將右邊多出的部分切開移到又邊想像成一個長方形，從圖形上底之左邊開始一片一片覆蓋，總共覆蓋四片，這個圖形可以覆蓋兩列，所以 $4 \times 2 = 8$ 。

五、圖形切割

將下邊突出的正方形切下移到上邊空缺處，切割右邊三角形，量它的邊後，認為可以移到左邊空缺處，將整個圖形移補成一個長方形，用尺量出此圖的長 7 公分，寬是 4.5， $4.5 \times 7 = 31.5$ 平方公分。

文字〈2004.01.14〉

一、釘板操弄

馬上將橡皮圈拉出四格後，套上往下拉 3 格，形成一個長方形，因為 $4 \times 3 = 12$ ，這是長方形面積的公式，因為有 12 個 1 平方公分；再拿出一條橡皮圈，上底邊長與上面的長方形一樣，將下底邊長往右移動兩格，形成了一平行四邊形，因為底有 4 格，高有 3 格，所以總共有 12 格，而且可以將這邊一到這邊就形成和上面一樣的長方形；再拿出另一條橡皮圈，固定上面的頂點，往下拉成一個等腰三角形，直覺不夠大，馬上發問可否與剛才的圖形重疊，於是重來，固定上面頂點後，馬上往下拉了 6 格，寬為四格的等腰三角形，因為從中間切開移到這邊，與剛才的長方形一樣，或是用底乘以高也可以算出是一樣的， $6 \times 4 \div 2 = 12$ ，三角形和梯形都要除以 2，因為兩個才能成一個長方形然後拿出另一條橡皮圈；上底先套出 3 格後，往下拉出 3 格形成一個下底為 5 格的等腰梯形，因為從這邊切格移到這邊就可以形成和剛才一樣的長方形，或是用公式也可以得知，將上底加下底乘以高後再除以 2 等於 12。

二、圖形大小比對

利用尺規量出各圖形有關面積公式的要素後，利用面積的公式算出各圖形的面積，發現四個圖形面積都一樣，只是形狀不同。

三、面積公式理解

拿出長方形作為基礎，瞭解各要素的關係很快地說出四種圖形的面積公式，平行四邊形

的底和長一樣，寬就是高，所以長乘以寬就是底乘以高；三角形直角和長方形直角疊在一起，他的底邊和長方形是一樣的，高是長方形寬的兩倍，將高除以 2 乘以底邊剛好與長方形的面積一樣；拿出尺量出長方形的長是 8 公分，寬是 4 公分，梯形的高和長方形的寬一樣，底邊這個地方多的切掉移到上面剛好等於另外長方形一邊的長，上底加下底剛好有 2 個長（因為是 4 加上 12 是 16），除以 2 就等於一個長，再乘以高就等於長方形的面積了。

四、方瓦覆蓋

（一）三角形覆蓋

先量出方瓦的邊長是 2 公分，面積是 4 平方公分，三角形的底和高都是 8 公分，面積是 $8 \times 8 \div 2$ 等於 32 平方公分，因為方瓦是 4 平方公分，所以 $32 \div 4 = 8$ 塊，

（二）梯形覆蓋

梯形上底是 6 公分，下底是 10，高是 4，上底加下底是 16，乘以 4 再除以 2 等於 32，一樣也是 8 塊。

五、圖形切割

將下邊突出的正方形切下移到上邊空缺處，切割右邊三角形，量它的邊後，認為可以移到左邊空缺處，將整個圖形移補成一個長方形，用尺量出此圖的長 7 公分，寬是 4.5， $4.5 \times 7 = 31.5$ 平方公分。