



國立中山大學教育研究所

碩士論文

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Master's Thesis

七年級學生在三視圖解題歷程之研究

A Study on Grade Seven Students' Problem Solving

Processes on Three-view Diagram

研究生：潘東良

Dong-Liang Pan

指導教授：梁淑坤 博士

Dr. Shuk-Kwan S. Leung

中華民國111年7月

July 2022

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士班

研究生潘東良（學號：M076050017）所提論文

七年級學生在三視圖解題歷程之研究

A Study on Grade Seven Students' Problem Solving Processes on Three-view Diagram

於中華民國109年4月28日經本委員會審查並舉行口試，符合
碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 左太政 左太政 委員 梁淑坤 梁淑坤

委員 周珮儀 周珮儀 委員 _____

委員 _____ 委員 _____

指導教授(梁淑坤) 梁淑坤 (簽名)

國立中山大學博碩士論文公開授權書



etd-0313122-112701 2022-05-16 11:15:00

本授權書所授權之論文為授權人 潘東良 在 國立中山大學教育研究所 110 學年度 第 2 學期 取得 碩士 學位之論文。

論文題目：七年級學生在三視圖解題歷程之研究

指導教授：梁淑坤

注意事項：

- 依本校109年4月29日108學年度第2學期第6次行政會議修正通過，研究所畢業生可於上傳電子論文時，與指導教授討論後選擇學位論文紙本及電子檔之開放年限，紙本論文若選擇「四至五年後公開」者，電子論文若選擇「四至五年後公開」或「其他」者，應提供涉及機密、專利事項或依法令規定限制公開之證明資料，經指導教授及系所(學程)主管認定始能作上述選擇。
- 因專利申請涉及論文公開時間，為避免因喪失新穎性而無法申請專利，請各位老師及同學至經濟部智慧財產局網站參考「專利各項申請案件處理時限表」後再選定論文公開時間。
另有關著作權相關資訊，請參考「經濟部智慧財產局著作權專區」。
若尚有任何專利申請與著作權等相關問題，歡迎洽詢本校全球產學營運及推廣處技術移轉中心，分機2651。
- 授權書一式兩份，將簽署後論文公開授權書正本裝訂於審定書之後，辦理畢業離校時，除繳交一本論文至圖書與資訊處外，另一本繳交至教務處註冊課務組。

• **電子論文** 此項授權同意以非專屬、無償方式授權予本校圖書館，不限地域、時間與次數，以微縮、光碟或數位化方式將論文全文(含摘要)進行重製，及公開傳輸。亦提供讀者非營利使用線上檢索、閱覽、下載或列印。

立即公開 傳輸數位檔案

因特殊原因，校內請於 ___ 年後公開、校外(含國家圖書館)請於 ___ 年後將論文公開或上載網路公開閱覽。

※ 電子論文延後公開原因：_____。

※ 電子論文公開日期：校內 民國111年04月13日，校外(含國家圖書館) 民國111年04月13日

• **紙本論文** 此項授權同意以非專屬、無償方式授權予本校圖書館，不限地域、時間與次數，以紙本方式將論文全文(含摘要)進行收錄、重製與利用；於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行閱覽或列印。

同意 **立即公開**

因特殊原因，請於 ___ 年後 公開陳覽

※ 紙本論文延後公開原因：_____。

※ 紙本論文公開日期：民國111年04月13日

學 號：M076050017

授 權 人：_____ 潘東良 (簽章)

潘東良

指導教授：_____ 梁淑坤 (簽章)

梁淑坤

中華民國 111 年 5 月 17 日

※ 此授權書嚴禁塗改

- 若欲修改權限，請登入系統修改後重新列印此授權書。
- 若論文定稿核准後欲異動授權書，請洽詢etd@mail.nsysu.edu.tw或校內分機2452。
- 授權書需自行列印兩份。請於圖資處和教務處辦理離校手續時，裝訂於繳交的紙本論文內。

誌 謝

時光荏苒，轉瞬之間已達碩士最後階段。遙想四年過程中，即使道路上充斥著不確定性，但身旁的引導與鼓勵，總是能適時並適當的提醒自己莫忘初衷。而梁師的一言一行，實舉足輕重，亦耳濡目染，都將成為往後人生及任教時對自己的期許與標準。

要感謝的人太多。家煌、璿文於論文題材之發想；玉雪、炳宏於討論時之建議；中山大學教育所周珮儀教授及高師大數學系左太政教授於口試時之斧正。同時，在博幼基金會中遇到的芬雯老師與各個孩子們，提醒了我各種不同教學的面相；也是鈺琦和湘喻的不辭辛勞，才能讓我在焦頭爛額的第一學期時能無後顧之憂地學習，著實感動特別是桂民，謝謝你的支持、陪伴與鼓勵，我才能一步步地走到今天。

這契機得來不易，它已悄悄開闢一條截然不同的人生道路。改變或許就是這麼的不講道理吧，唯有時時精進自己，並勇於面對，才能把握住。謝謝身旁的你們，就像一盞盞靜謐而溫暖的路燈，給予我支持、導引我方向，使我在茫茫大海中，能找到屬於自己的一片天地。

潘東良 謹誌於

國立中山大學教育研究所

2022年7月

七年級學生在三視圖解題歷程之研究

潘東良

國立中山大學教育研究所

摘 要

自 2019 年起，我國實施十二年國民基本教育課程綱要，各領域均重視生活情境中的解題，並在數學領域中新增三視圖課程。本研究旨在此針對主題，分析學生在三視圖測驗的解題歷程：包含解題過程、解題策略以及解題困難。研究對象為七年級學生共計 4 名。研究者編撰三視圖描繪與解題測驗共 4 個題目（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題），請 4 名學生獨自以放聲思考方式回答，並蒐集資料，再藉由 Polya（1945）解題 4 階段與 Schoenfeld（1992）時間序列圖進行資料分析。研究發現有三點：（1）三視圖的解題歷程中都會出現如 Polya 所提出的解題 4 階段。（2）解題策略可分成使用紙筆與積木兩種類型：描繪的策略共有 10 種（6 種紙筆、4 種積木）；解題的策略共有 6 種（3 種紙筆、3 種積木）。（3）三視圖描繪共有 6 種困難。針對實務教學方面，研究者提出以下兩點建議：（1）教師宜仔細觀察學生在三視圖題目中的解題歷程。（2）教師宜在課堂中討論及分享學生多元的三視圖解題策略。

關鍵字：三視圖、解題歷程、解題過程、解題策略、解題困難

A Study on Grade Seven Students' Problem-Solving on Three-view Drawing

Dong-Liang Pan

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Abstract

Since 2019, Taiwan has implemented a 12-year basic education curriculum. All fields attach importance to problem-solving in real life scenario. In mathematics, introducing three-view drawing. The aim of this study is to analyze problem solving of Taiwanese students in three-view drawing: including problem-solving processes, strategies and difficulties. The researchers developed a test on three-view drawings and problem-solving with a total of 4 questions (view question, angle of view question, hidden figure question, and take-away question). The participants in the study were four 7th grade students, they were asked to answer by thinking aloud independently. We analyzed data by combining the four phases of problem-solving (Polya, 1945) and the time-line graph (Schoenfeld, 1992). The results of the study were as follows: (a) The problem-solving processes of students' three-view drawing resembled the four phases of problem-solving as proposed by Polya. (b) Problem-solving strategies can be divided into 2 types: paper-and-pen and blocks: There are 10 types of drawing strategies (6 types of paper-and-pen, 4 types in use of blocks); there are 6 types of problem-solving strategies (3 types of paper-and-pen, 3 types in use of blocks). (c) There are 6 types of difficulties in three-view drawing. Finally, based on the findings and discussions of this study, recommendations are suggested for educational practice and future research.

Keywords: three-view drawing; problem-solving; problem-solving processes; strategies; difficulties

目錄

論文審定書.....	i
誌謝.....	ii
中文摘要.....	iii
英文摘要.....	iv
第壹章 緒論	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的	4
第三節 待答問題.....	4
第四節 名詞釋義	4
第五節 研究限制	5
第貳章 文獻探討	7
第一節 空間能力	7
(一) 空間能力的定義	7
(二) 空間能力的因素	8
(三) 空間能力的評量	11
第二節 三視圖在幾何教材的角色	17
(一) 108 課綱的幾何課程的學習重點	17

(二) 三視圖的教材	22
(三) 三視圖的任務類型	27
第三節 解題與解題歷程	30
(一) Dewey 的解題歷程	30
(二) Polya 的解題歷程	31
(三) Schoenfeld 的解題歷程	33
(四) Mayer 的解題歷程	36
(五) Newman 的解題歷程錯誤分析	38
第參章 研究方法與設計	41
第一節 研究設計	41
第二節 研究對象	41
(一) 預試 (甲)	41
(二) 正式施測 (乙、丙、丁)	42
第三節 研究工具	42
(一) 三視圖試題	42
(二) 紀錄放聲思考之器材	44
(三) Polya 解題歷程時間序列圖	45
(四) 研究者本身	45
第四節 資料蒐集	45

第五節 資料分析方法	46
(一) 區分解題歷程的階段	46
(二) 原始資料編碼	47
(三) 解題階段順序和時間紀錄	47
第六節 預試資料分析	48
(一) 題目一：視圖題	48
(二) 題目二：視角題	51
(三) 題目三：隱藏題	53
(四) 題目四：拿取題	55
(五) 綜合討論與比較	57
第肆章 研究結果與討論	61
第一節 三視圖解題過程分析	62
(一) 乙同學（低分者）	63
(二) 丙同學（中分者）	74
(三) 丁同學（高分者）	85
(四) 解題過程的綜合分析比較	97
第二節 三視圖任務之解題策略探討	110
(一) 描繪三視圖之策略	110
(二) 解三視圖任務之策略	113

(三) 策略的綜合分析比較	115
第三節 三視圖任務之解題困難	116
(一) 描繪視圖之困難	116
(二) 解三視圖任務之困難	119
第五章 結論與建議	121
第一節 研究結論	121
(一) 三視圖任務之解題過程	121
(二) 三視圖任務之解題策略	122
(三) 三視圖任務之解題困難	123
第二節 未來研究與教學上的建議	124
(一) 未來研究的建議	124
(二) 實務教學上的建議	126
參考文獻	127
中文部分	127
英文部分	129
附錄.....	131
附錄一 有聲解題練習題目	131
附錄二 三視圖試題題目	134

(一) 題目一 (視圖題)	134
(二) 題目二 (視角題)	135
(三) 題目三 (隱藏題)	136
(四) 題目四 (拿取題)	137
附錄三 預試資料原案分析.....	138
(一) 甲一題目一逐字稿.....	138
(二) 甲一題目二逐字稿.....	139
(三) 甲一題目三逐字稿.....	140
(四) 甲一題目四逐字稿.....	141
附錄四 預試作答.....	143
(一) 甲一題目一	143
(二) 甲一題目二.....	144
(三) 甲一題目三.....	145
(四) 甲一題目四.....	146
附錄五 正式施測資料原案分析.....	147
(一) 乙 (低分者) 一題目一逐字稿.....	147
(二) 乙 (低分者) 一題目二逐字稿.....	148
(三) 乙 (低分者) 一題目三逐字稿.....	149
(四) 乙 (低分者) 一題目四逐字稿.....	150

(五) 丙 (中分者) 一題目一逐字稿.....	151
(六) 丙 (中分者) 一題目二逐字稿.....	153
(七) 丙 (中分者) 一題目三逐字稿.....	155
(八) 丙 (中分者) 一題目四逐字稿.....	157
(九) 丁 (高分者) 一題目一逐字稿.....	158
(十) 丁 (高分者) 一題目二逐字稿.....	159
(十一) 丁 (高分者) 一題目三逐字稿.....	160
(十二) 丁 (高分者) 一題目四逐字稿.....	161
附錄六 正式施測作答.....	163
(一) 乙 (低分者) 一題目一.....	163
(二) 乙 (低分者) 一題目二.....	164
(三) 乙 (低分者) 一題目三.....	166
(四) 乙 (低分者) 一題目四.....	167
(五) 丙 (中分者) 一題目一.....	169
(六) 丙 (中分者) 一題目二.....	170
(七) 丙 (中分者) 一題目三.....	173
(八) 丙 (中分者) 一題目四.....	174
(九) 丁 (高分者) 一題目一.....	175
(十) 丁 (高分者) 一題目二.....	176

(十一) 丁 (高分者) — 題目三.....	177
(十二) 丁 (高分者) — 題目四.....	178
附錄七 事後晤談資料.....	179

圖次

圖 2-1 立體物件與三視圖	22
圖 2-2 數學家解困難的兩部分數學題的時間序列圖	36
圖 2-3 一般學生嘗試解非常見數學問題的時間序列圖	40
圖 3-1 解題歷程時間序列圖	47
圖 3-2 甲視圖題解題歷程時間序列圖	50
圖 3-3 甲視角題解題歷程時間序列圖	53
圖 3-4 甲隱藏題解題歷程時間序列圖	55
圖 3-5 甲拿取題解題歷程時間序列圖	57
圖 4-1 乙視圖題解題歷程時間序列圖	66
圖 4-2 乙視角題解題歷程時間序列圖	69
圖 4-3 乙隱藏題解題歷程時間序列圖	71
圖 4-4 乙拿取題解題歷程時間序列圖	73
圖 4-5 丙視圖題解題歷程時間序列圖	77
圖 4-6 丙視角題解題歷程時間序列圖	80
圖 4-7 丙隱藏題解題歷程時間序列圖	83
圖 4-8 丙拿取題解題歷程時間序列圖	84
圖 4-9 丁視圖題解題歷程時間序列圖	89
圖 4-10 丁視角題解題歷程時間序列圖	92

圖 4-11 丁隱藏題解題歷程時間序列圖 94

圖 4-12 丁拿取題解題歷程時間序列圖 96

表次

表 2-1 空間能力指標	14
表 2-2 幾何學習內容主題和年級雙向細目表	20
表 2-3 國中幾何領域學習內容變化表	21
表 2-4 三視圖課程任務與內容表	25
表 2-5 三視圖任務類型一	27
表 2-6 三視圖任務類型二	28
表 2-7 Schoenfeld 解題階段及相關問題表	35
表 2-8 NAE 的訪談大綱	38
表 2-9 解題歷程彙整表	40
表 3-1 試題對應表	43
表 3-2 測驗階段研究者回應表	46
表 3-3 編碼表	47
表 3-4 預試試題題目表	48
表 4-1 正式試測題目表	62
表 4-2 乙同學視圖題之右視圖作答	65
表 4-3 乙同學拿取題之作答	72
表 4-4 丙同學視角題前視圖作答	78
表 4-5 丙同學視角題左視圖作答	79

表 4-6 丙同學拿取題之作答.....	84
表 4-7 丁同學視圖題後視圖作答流程.....	86
表 4-8 丁同學視圖題後視圖修改流程.....	87
表 4-9 視圖題—描繪視圖之分析表.....	98
表 4-10 視圖題—解三視圖任務之分析表.....	100
表 4-11 視角題—描繪視圖之分析表.....	101
表 4-12 視角題—解三視圖任務之分析表.....	103
表 4-13 隱藏題—描繪視圖之分析表.....	104
表 4-14 隱藏題—解三視圖任務之分析表.....	106
表 4-15 拿取題—描繪視圖之分析表.....	107
表 4-16 拿取題—解三視圖任務之分析表.....	109
表 4-17 描繪三視圖之策略表.....	110
表 4-18 解三視圖任務之策略表.....	113
表 4-19 描繪三視圖之解題困難表.....	116
表 4-20 丙同學隱藏題列舉之積木可能性.....	120

第壹章 緒論

本研究目的在於了解七年級國中學生在三視圖的解題歷程，因應十二年國民基本教育數學領域課程綱要中新增的三視圖教學時(教育部，2018)，學生解題時可能遇到的困境以及其解決問題的策略，並以個案研究的方式分析學生於三視圖任務的解題歷程。本章一共分成五節，分別闡述「研究背景與動機」、「研究目的」、「待答問題」、「名詞釋義」與「研究限制」，詳列如下。

第一節 研究背景與動機

空間能力為多元智能理論中的主要面向 (Gardner, 1992)，亦是組成數學能力的重要元素 (左台益、梁勇能，2001)。更可以了解幾何概念所需之先備技能 (Freudenthal, 1973)。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 在 2000 年指出，幾何的想法和思考是學生學習推理和瞭解數學結構公設的關鍵，對於數學表徵及真實情境問題的解決是有利的。如何解讀與畫出空間表徵的解題歷程學習(陳韻如、楊凱琳、林福來，2018)，也是 STEM (science, technology, engineering and mathematics) 跨領域科技整合學習所必備的能力。

空間能力的重要，也可以從近期 3D 列印技術人才需求中得知，2012 年《經濟學人》推測 3D 列印技術將引發第三次工業革命，WTO 也於《2018 世界貿易報告》指出，3D 列印具有取傳統生產方式、降低組裝需求、減少物流及庫存成本的特色，將為數位科技產生顛覆性的影響。而根據市調機構 IDC 最新發布的報告《Worldwide Semiannual 3D Printing Spending Guide》，全球 3D 列印支出（包括硬體、材料、軟體，以及服務）到 2019 年將達 138 億美元，年增率為 21.2%。預估到 2022 年將增加到 227 億美元。對此，為了因應 3D 列印產業發展趨勢，我國經濟部工業局於 2015 年創立 FAST Lab 創用中心，指出 3D 列印設備普及帶動了自造者 (Maker) 族群興起，能讓創意快速實現，並增加國人對於 3D 列印的認知（經濟部工業局，2018）。

在全面的科技發展背景之下，十二年國民基本教育數學領域課程綱要，也於七年級的數學領域空間與形狀主題類別中，新增 3×3×3 的正立方體的前（後）視圖、右（左）視圖、俯視圖之三視圖課程，其目的是結合生活經驗使其對應到數學語言，並讓學生運用數學性質去思考生活中的空間問題，尤其是為高中職端 3D 動畫與 3D 列印之應用建立基石，以期進一步專業化學習之準備（教育部，2018）。

空間能力，其實也是一種解題能力，它使學生具備問題理解、思辨分析、推理批判的系統思考與後設思考素養，並能行動與反思，以有效處理及解決生活、生命問題，十二年國民基本教育課程綱要也將它列入系統思考與解決問題核心素養之中（教育部，2018）。「問題解決」亦是 NCTM 提出數學課程評鑑標準中的重點之一，PISA (the Programme for International Student Assessment) 國際學生能力評量計劃，也將問題解決列入知識技能的評核項目之中，藉以評估學生了解、解釋和解決未來生活中問題情境所能達到的程度（洪碧霞、蕭嘉偉、林素微，2009）。

既然空間能力及解題能力均重要，對一般民眾的空間能力要求及學童的訓練，是急不容緩的目標。研究者從事偏遠地區數學教育的相關工作，在教學的過程中，發現國中學生面臨幾何與空間的題型，常有不知道如何下手解題的困境，也觀察到許多學生一看到題目中有幾何圖形的示例，就直接選擇跳過題目放棄作答的現象。108 學年度的七年級學生是正式面臨三視圖課程的第一批學生，為了瞭解七年級學生第一次面對三視圖課程的學習過程，藉由空間能力與解題歷程的探討，本研究著重於七年級學生在面對三視圖任務時的解題歷程、歸納學生的解題策略並分析學生的解題困難之處，期許能為未來教師在三視圖教學時的參考之一。

第二節 研究目的

依據上節的研究動機，本研究的主要目的為探討七年級學生處理三視圖任務的解題歷程，具體而言，可分為以下三項進行描述：

- (一) 探討七年級學生在三視圖任務中的解題過程。
- (二) 歸納七年級學生在三視圖任務中的解題策略。
- (三) 分析七年級學生在三視圖任務中的解題困難。

第三節 待答問題

依據上節的研究目的，本研究擬定的待答問題分有下列三項：

- (一) 七年級學生在三視圖任務中的解題過程為何？
- (二) 七年級學生在三視圖任務中的解題策略分別是那些？
- (三) 七年級學生在三視圖任務中的解題時所遭遇的困難為何？

第四節 名詞釋義

- (一) 七年級學生

本研究中的七年級學生係指十二年國民基本教育課程綱中，第四階段國民中學七年級學生，為 108 學年度進入國中就讀的新生。

- (二) 三視圖

不同角度觀察立體圖形會形成不一樣的平面圖型，這些平面圖型又稱作視圖，視圖能幫助我們了解立體圖形的樣貌(國家研究教育院，

2017)。一般而言，同一個立體圖形的前視圖與後視圖、上視圖與下視圖、右視圖與左視圖會呈現形狀相同方向相反的現象，故描述立體圖形通常會選擇立體圖形的前視圖、上視圖以及右視圖來表示，也就是立體圖形的三視圖。本研究中的三視圖，係指因應 108 課綱（教育部，2018）中對於立體圖形所設條件，探討範圍限制於不得中空且內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體的立體圖形（S-7-2）。

（三） 解題歷程

解題歷程是指解題者在個人在進行題目處理時，經過閱讀、分析題目、探索解題條件、運用策略、計畫解題的程序並執行，直到找出答案並驗證其正確性的過程。本研究依照 Polya (1945) 的解題模式，將解題歷程區分為了解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧解答共四階段，並結合 Schoenfeld (1992) 時間序列表的架構，用以了解學生在題目中的解題歷程順序與時間。具體而言，本研究的解題歷程包含參與者的解題過程、解題策略以及解題困難。

第五節 研究限制

本研究之研究限制分有兩個主要項目，分別為研究樣本、研究教材。

- （一） 在參與者方面，基於時間與人力限制，研究樣本為立意取樣，研究對象並非隨機選取，故研究結果只能推論到學習背景相關的學生，不宜將研究結果過度推論。

- (二) 在研究教材方面，因應 108 課綱中三視圖的課程內容，立體圖形設有內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體且不得中空的限制條件。在三視圖的內容上，具有其獨特性，未必能推論至其它所有單元，故其它主題有待相關研究去作探討及驗證。
- (三) 在資料蒐集方面，本研究採取放聲思考法來蒐集參與者解題歷程的相關資料，因參與者解題過程中所使用的放聲思考法，可能會因熟悉度與認知負荷等因素所干擾，故研究者會以錄影觀察與事後訪談等方式進行多方的資料驗證。

第貳章 文獻探討

本章主要針對過去學者對於空間能力的探究、我國幾何教材的演進、108 課綱中三視圖的相關文獻進行回顧，並藉由部份的理論基礎作為採用的研究方法，進而分析學生的解題歷程。第貳章主要分有三節，分別是「空間能力」、「三視圖在幾何教材中的角色」以及「解題與解題歷程」。

第一節 空間能力

空間能力是理解、推理並和記住物體空間關係的能力，人們為了處理空間中的問題，將空間現象抽象化並簡化成平面或直線上的問題（國家教育研究院，2017），用以適應世界的架構與生活情境。空間能力同時也是許多專業領域的重要技能（Shea, Lubinski, & Benbow, 2001）。本節整理過去不同學者所提出的文獻，以「空間能力的定義」、「空間能力的因素」與「空間能力的評量」分別進行統整與探討。

（一） 空間能力的定義

由智力研究的觀點切入，以心理計量取向的 Spearman (1904) 所提出的智力二因論，以及 Thurstone (1938) 所提出的基本心能論中，皆將「空間能力」視為人類心智能力之一。而以認知發展取向的 Piaget 與 Inhelder (1967) 指出，空間能力包含辨認靜止圖形型態的「圖畫式」思考能力，以及移動操作圖形的「操作性」思考能力。採多元智能觀

點 Gardner (1983) 則將空間能力劃分表現色彩、形狀、線條的「形象」空間智能，以及表現結構、空間維度、形式的「抽象」空間智能。空間能力的定義在不同時期，都會因研究者採取的理論或者是研究方式的差異而有所不同，具體而言，空間能力是理解、推理和記住物體與空間關係的能力。

(二) 空間能力的因素

McGee (1979) 以因素分析的方式整理過往文獻中關於空間能力的研究，發現至少存在有兩種因素會影響空間能力，也就是空間視覺化 (spatial visualization) 與空間定位 (spatial orientation)，且這兩種因素是具有年齡和性別差異的。其中「空間視覺化」是指能將的幾何物件進行心理操作、旋轉或翻轉的能力，是一種能理解及想像物體在二度或三度空間的轉動情形之能力。而「空間定位」是指能理解幾何物件的形式與成分，且不受方位改變而混淆的能力，也就是能在幾何物件改變方位或成分重新排列後，仍能清楚理解空間關係的能力。

Lohman (1979) 則以「空間能力個體差異的主要因素是什麼？」與「研究過程對於理解空間能力的意義為何？」為研究主體，並以能力組織的層次模型，回顧並重新分析了美國的主要空間能力因素分析研究。研究指出影響空間能力的主要三個因素為空間關係 (spatial

relations)、空間定位 (spatial orientation) 以及視覺化 (visualization)。

第一個因素「空間關係」，是指能將眼前的刺激物，在腦中做快速旋轉的能力，代表了心像旋轉或反映簡單視覺刺激在速度方面上的個體差異。第二個因素「空間定位」，是指能設想從不同角度去觀察物件的能力，受試者必須想像自己在空間中重新定向，然後對情況做出一些判斷。至於第三個因素「視覺化」，是指能在腦中形成有關刺激的心像並做轉換的能力。研究中更進一步由「解題速度」與「測驗複雜度」兩種向度進行測驗的分析比較，指出「視覺化」與「空間關係」的不同，作者認為視覺化測驗相較於空間關係測驗而言，內容較為複雜，解題強調正確性而非速度，因此「視覺化」強調複雜的心智運作能力，而「空間關係」則是強調簡單快速的心像旋轉能力。

Linn & Petersen (1985) 的研究關注於受試者對不同空間物體的認知過程相似性，有別於 Lohman (1979) 與 McGee (1979) 研究中所使用的因素分析，Linn and Petersen 以後設分析 (meta-analysis) 的方法將空間能力分為空間知覺 (spatial perception)、心像旋轉 (mental rotation) 與空間視覺化 (spatial visualization)。「空間知覺」是指個體能辨識空間關係之能力，能不受外在的訊息干擾，並確認有關自身方向的空間關係；「心理旋轉」是指個體能想像旋轉空間中圖像之能力，

能在心理快速且正確的旋轉二度或三度空間的圖像；「空間視覺化」是指個體能操作一連串複雜影像折疊與移動之能力，涉及對於空間資訊複雜且多階段的操作能力。

Carroll (1993) 分析 140 多個數據集，並歸納出 5 個主要空間能力，分別為視覺化 (visualization)、空間關係 (spatial relations)、完形速度 (closure speed)、形狀應變性 (flexibility of closure) 以及知覺速度 (perceptual speed) 等。「完形速度」是指受試者在不完整的提示中尋找答案時，提取長期記憶中的空間表示能力的個體差異，而「形狀應變性」則是當受試者當被告知要尋找的內容時，在複雜圖案中找到隱藏的模式或圖形的能力，「知覺速度」的特徵在於在分散注意力的材料中找到特定模式的速度。

針對 Carroll 所提出對於空間能力的主要 5 個因素，Yilmaz (2009) 指出「空間視覺」與「空間關係」兩項主要的空間能力與各學者之間的定義無太多差異之處，但仍需考慮動態空間能力 (spatiotemporal abilities)、以及環境能力 (environmental ability)。「動態空間能力」指的是有關運動刺激的判斷，針對運動物體的速度來判斷到達時間，「環境能力」則是整合關於周圍環境中的空間訊息的能力。

綜合上述，研究者發現空間能力的研究中，會隨著不同領域、不同測驗方式、不同的分析層級而有差異。Oliviera (2004) 也指出空間能力已包含在大多數多重能力組合中；然而，空間領域的文獻中存在矛盾，這些矛盾包含描述空間能力的用詞不同、辨別空間能力的潛在因素數量的不同，以及測驗空間能力的目標不同等。因此，研究者於下一節中，回顧有關空間能力的評量方式，以及國內學者對於空間能力所關注的面向。

(三) 空間能力的評量

空間能力的評量常見於智力測驗與性向測驗之中，例如魏氏智力測驗第四版（陳榮華、陳心怡，2007）中的知覺推理指數（Perceptual Reasoning Index, PRI）涉及空間與幾何能力的評量，其中包含下列四項分測驗：

1. 圖形設計：

測量分析和綜合抽象視覺刺激的能力。測驗方式是讓受試者一面看示範圖樣或是刺激卡片冊上的設計圖，一面使用有紅白面的方塊，在規定的時限內照樣拼成該設計圖。

2. 圖畫概念：

測量抽象、類別的推理能力。測驗方式是讓受試者從兩列或三列圖畫中，各列選出一個具有共同特性的圖畫。

3. 矩陣推理：

測量視覺訊息處理和抽象推理技巧。測驗方式是讓受試者看一個不完整的矩陣圖後，再從5個答案選項中選出一個能填補其缺少部分的圖形。

4. 圖畫補充：

測量視知覺和組織、專注力、以及物體必要的視覺辨認。測驗方式是讓受試者看一張圖畫，並在規定的時間內指出或說出該圖畫中所缺少的重要部分。

康鳳梅（2002）在建構高工學生的空間能力量表時，產生五種空間能力指標，並針對各種能力指標設計不同的評量內容（表 2-1）：

1. 空間定位（spatial orientation）：

係指受試者能從不同的角度想像物體或圖形在空間的旋轉變化，且對改變方向之物體或圖形保持清晰，而能迅速和精確想像其以2D 或3D 旋轉的能力。

2. 空間關係（spatial relation）

係指受試者能夠想像在空間將不同的物體面互相關聯起來，並想像操弄物體摺合、展開或旋轉組合與分解的能力。

3. 空間感觀（spatial perception）

係指受試者能夠正確辨識物體相接合外觀所形成的線，且對所

觀看的物體能夠形成精確影像的能力。

4. 空間視覺化 (spatial visualization)

係指受試者能夠經由心理旋轉、移動，而將相對位置改變的物體操作或轉換其空間模式的能力。

5. 空間組織 (spatial organization)

係指受試者能夠組織經由觀察物體不同方向之空間影像，而揣想其另一方向之影像或立體的能力。

表 2-1 空間能力指標，引自康梅鳳 (2002)

能力 指標	能力次指 標項目	範例
1. 空間 定位	立體旋轉 空間定位	
	平面旋轉 空間定位	
2. 空間 關係	立體展平 空間關係	
	型版摺合 空間關係	
	型版分解 空間關係	
	型版組合 空間關係	

(續下頁)

表 2-1 空間能力指標 (續)

能力 指標	能力次指 標項目	範例
3. 空間 感觀	表面相交 線形成空 間感觀	
4. 空間 視覺	型版接合 空間視覺 I	
	型版接合 空間視覺 II	
	圖形對應 空間視覺	
5. 空間 組織	物體多向 圖形空間 組織	
	平面轉換 立體空間 組織	

以康鳳梅（2002）的觀點切入，學生面對三視圖任務時，需要物體多項圖形空間組織能力來判斷空間物件的不同面向的視圖；而在面對視角的轉換時，則需要運用立體旋轉能力進行空間物件的旋轉，並藉由平面旋轉能力理解三視圖中左、右視圖與前、後視圖的關係，這些能力與 Linn & Petersen (1985) 歸納出的空間能力類似。

由於 108 課綱中的三視圖題型只涉及由立體物件判斷三視圖的圖像，並以非動態的方式描述題型，因此本篇研究以 Linn & Petersen (1985) 歸納的空間知覺 (spatial perception)、心像旋轉 (mental rotation) 與空間視覺化 (spatial visualization)，來描述學生面對三視圖任務時所需要的空間能力。空間視覺化代表學生從平面圖中，建立相對應的立體圖心像。心像旋轉代表學生以心像的方式，思考不同視角下立體圖形所對應的各種平面視圖，空間知覺則代表學生藉由積木與教具的輔助，實際建立起立體模型，藉由立體模型的旋轉產生平面視圖的過程。

第二節 三視圖在幾何教材的角色

幾何不但可以做為學習其他數學主題的工具，加強幾何的空間思考，亦有助於高層次數學創造和思考能力的發展（徐偉民、董修齊，2012）。因此空間能力的探討、瞭解目前學生學習教材中對於空間能力發展的目標以及判斷學生學習成效所使用的評量方式，都是我們必須繼續探究的議題。為了更加清楚觀察學生在解題歷程中的表現，本節將分成「108 課綱的幾何課程的學習重點」、「三視圖的教材」以及「三視圖的任務類型」三個部分進行文獻回顧。

（一） 108課綱的幾何課程的學習重點

在過去九年一貫課綱的數學教材之中，幾何學習領域就佔有一定的比重。莊月嬌、張英傑（2006）以「形體外觀之辨識與建製」、「形體組成要素之辨識、發現與應用」、「形體性質之探究並運用其性質解題」、「形體之切割、重組與轉換」與「空間概念」，針對九年一貫的國小幾何教材進行內容分析，發現各版本的國小幾何教材皆合乎 van Hiele (1986) 的幾何思考層次，雖然有描述空間方位的教材，但缺乏空間視覺化的內容，建議加強空間視覺化的教學以提升學童空間能力。

鄭寰文、洪秀珍、周惠綺、梁淑坤（2012）以九年一貫數學能力指標針對民國 99 年部編版國中數學教材進行內容分析，發現國一沒

有幾何教材，而國二和國三的幾何教材的比例則大致相同的多。國一、國二和國三的細目數分別是 0、36 (59%) 和 11 (39.3%) 條，與九年一貫能力指標的比例相差很大，幾何教材並沒有以螺旋式的方式分散至國中三個年級(國一、國二、國三)的學習過程之中。對照 van Hiele (1986) 的幾何思考層次，國小階段幾何教材最多只到第二層次關係期或非形式演繹期，國中則從第二層次進到了第三層次形式演繹期。由此可知，九年一貫國中幾何課程的安排在國一有部分的學習斷層，而這樣的學習斷層有可能造成國中學生學習幾何概念的銜接困難。

十二年國民基本教育課程綱要數學領域(教育部，2018)將學生按照年級劃分為 5 個學習階段，其中一、二年級為第一學習階段，三、四年級為第二學習階段，五、六年級為第三學習階段，七、八、九年級為第四學習階段，十、十一、十二年級為第五學習階段，各階段的學習主題如表 2-2 詳述。對應各個學習階段的幾何學習重點如下：

1. 第一學習階段：長度與簡單圖形的認識
2. 第二學習階段：發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。
3. 第三學習階段：能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積與體積的計算。
4. 第四學習階段：在平面幾何方面，各年級分別學習直觀幾何(直

觀、辨識與描述)、測量幾何、推理幾何；空間幾何略晚學習。

5. 第五學習階段：全體學生都有學習基本空間概念的機會，透過坐標而連結幾何與代數，並認識基本的線性代數；選修數學 A 的學生還要熟悉空間向量的操作，用來進一步發展坐標幾何與線性代數。

針對第四學習階段，相比 108 課綱與九年一貫課綱，幾何相關的學習內容有所調移或增刪(表 2-3)，部分課程從過去八年級教材中調移至七年級，緩和了幾何的學習坡度。同時，三視圖教材的加入，也讓學生面對跨領域課程時，能具備更多的前置經驗。這樣的調動除了著重建立學生能解決生活問題的能力與回應世界各國朝向培養數學素養的趨勢外，108 課綱的幾何學習重點編排也和過去國內學者對於幾何教材分析的建議相有呼應。

表 2-2 幾何學習內容主題和年級雙向細目表，引自教育部（2018）

學習階段	年級	空間與形狀 (S)	
第一階段	一年級	長度、形體的操作	
	二年級	物體知己和特徵、簡單幾何形體、直尺操作、平面圖形的邊長、面積	
第二階段	三年級	角與角度、正方形和長方形、圓、幾何形體之操作	
	四年級	角度：「度」、解題：旋轉角、正方形與長方形的面積與周長、體積、垂直與平行、平面圖形的全等、三角形、四邊形	
第三階段	五年級	三角形與四邊形的性質面積、扇形、對稱軸、正方體和長方體、空間中面與面的關係、球、柱體與錐體	
	六年級	放大與縮小、解題：地圖比例尺、圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積、柱體體積與表面積	
學習階段	年級	空間與形狀 (S)	座標幾何 (G)
第四階段	七年級	簡單圖形與幾何符號、三視圖、垂直、線對稱的性質、線對稱的基本圖形	平面直角坐標系
	八年級	角、凸多邊形的內角和、平行、全等圖形、三角形的全等性質、畢氏定理、平面圖型的面積、三角形的基本性質、平行四邊形的基本性質、正方形、長方形、箏形的基本性質、梯形的基本性質、尺規作圖與幾何推理	直角坐標系上兩點距離公式
	九年級	相似形、三角形的相似性質、相似直角三角形邊長比值的不變性、圓弧長與扇形面積、圓的幾何性質、點、直線與圓的關係、三角形的外心、三角形的內心、三角形的重心、證明的意義、空間中的線與平面、表面積與體積	
學習階段	年級	空間與形狀 (S)	座標幾何 (G)
第五階段	十年級		坐標圖形的對稱性、直線方程式、圓方程式、直線與圓、廣義角和極座標、三角比、三角比的性質
	十一年級 A 類	空間概念	平面向量、空間坐標系、空間向量、三角不等式、三角的和差角公式、平面向量的運算、空間向量的運算、三階行列式、平面方程式
	十一年級 B 類	空間概念、圓錐曲線	平面向量、平面向量的運算、平面上的比例、空間座標系
	十二年級 甲類		二次曲線

表 2-3 國中幾何領域學習內容變化表，引自教育部（2019）

主題	學習內容	年段		
		新增	調移	刪減
空間 與形狀 (S) 坐標 幾何 (G)	S-9-5 直角三角形的三角比	九		
	S-9-13 空間中的線與平面	九		
	S-7-1 簡單圖形與幾何符號		八→七	
	S-7-2 三視圖	七		
	S-7-3 垂直		八→七	
	S-7-4 線對稱的性質		八→七	
	S-7-5 線對稱基本圖形		八→七	
	S-9-6 圓弧長與扇形面積		八→九	
	(九年一貫)圓的弦切角、兩圓的外公切線長與內公切線長			八
	(九年一貫)凸多邊形外角和公式			八
	(九年一貫)兩圓關係			九
	(九年一貫)9-s-08 能理解多邊形外心的意義和相關性質			九

(二) 三視圖的教材

三視圖，就是 108 課綱中增的新內容，課程安排於第四學習階段的七年級中，是第一次在學生學習過程中有系統性的說明，從不同視角所看到的立體圖形，會產生不同視圖的概念。學習內容對應 S-7-2，三視圖：立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖，立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。學習表現對應 s-IV-16：理解簡單的立體圖形及其三視圖與平面展開圖，並能計算立體圖形的表面積、側面積及體積，同時也幫助學生建立立體圖形與視圖之間的想像，成為後續學習空間平面的橋樑。

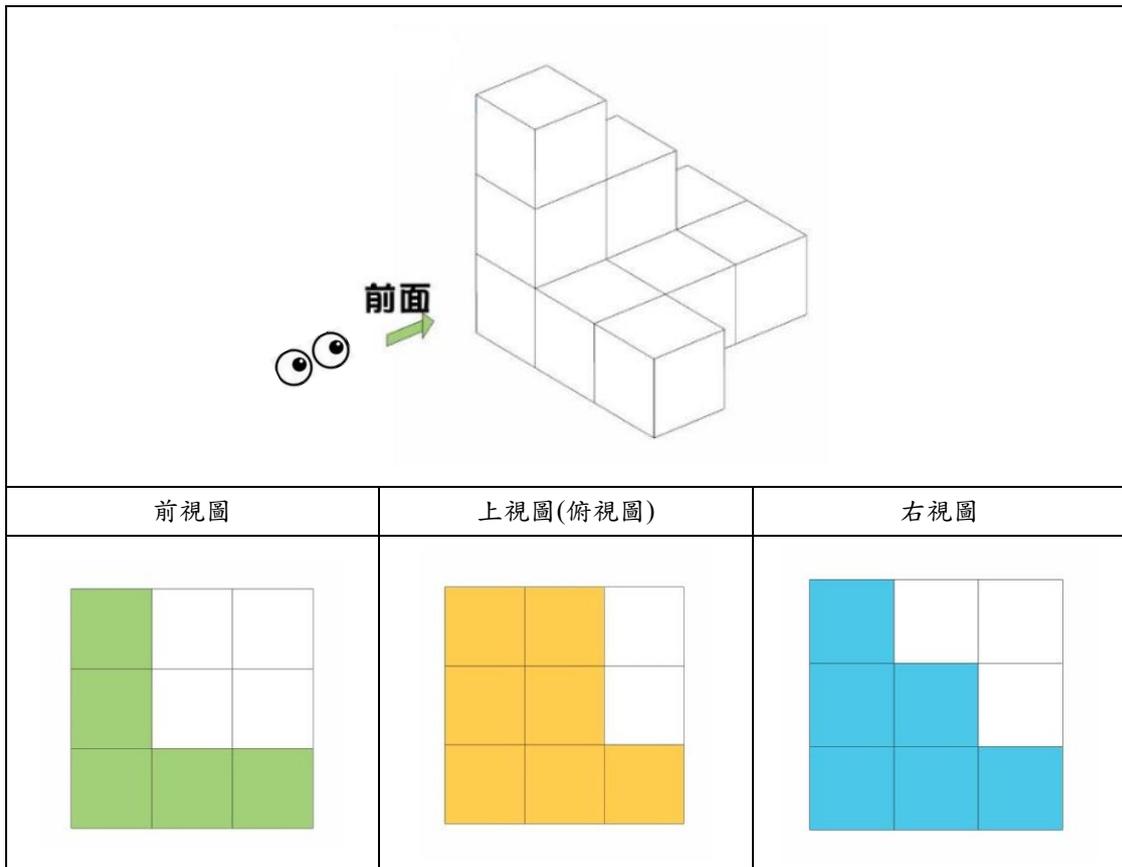


圖 2-1 立體物件與三視圖

針對三視圖的教學，數學領域課程手冊（教育部，2019）以基本說明、條目範圍、釋例、錯誤類型建立三視圖課程的學習架構：

1. 基本說明

- (1) 瞭解立體圖形的三視圖（包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖）的意義。
- (2) 繪製立體圖形的三視圖（包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖）。
- (3) 給定一立體圖形，理解各視圖間的關係，例如前視圖和後視圖、左視圖與右視圖均有線對稱的關係，因此從立體圖形的前視圖、上視圖與右視圖便可得知其他視圖。

2. 條目範圍

- (1) 不出現利用提供的視圖要求學生重製立體圖形。
- (2) 立體圖形的前(後)視圖、上視圖、左(右)視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體且不得中空。

3. 釋例

- (1) 給定立體圖形引導學生討論此立體圖形的樣貌，希望學生描述立體圖形時，不能僅單從某一方向觀察。
- (2) 透過從實物立體圖形的上方觀察以及水平方向的觀察，及繪

製視圖的練習與同班坐不同位置的同學討論，來理解觀察位置的不同與視圖（上、前、後、左、右視圖）的差異。

- (3) 整合前面對各方向視圖的學習，來理解視圖間的關係。
- (4) 由於是在立體圖形的上方俯視該立體圖形，因此我們稱此輪廓為「上視圖」或「俯視圖」。但要注意站在立體圖形的前方、後方、右方、左方俯視繪製的「上視圖」會有將此輪廓（平面圖形）旋轉的情況，因此一般我們強調「上視圖」是從站在立體圖形的正前方俯視繪製而成。
- (5) 從前視圖、上視圖與右視圖可大約知道原立體圖形的樣貌。

4. 錯誤類型

- (1) 學生易混淆左右視圖的方向。
- (2) 學生繪製上視圖時，可能誤解上視圖的定義，例如從立體圖形的左上方往下看，則會產生偏差 90 度的錯誤上視圖。

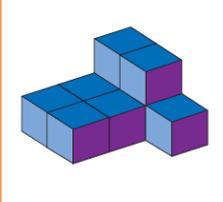
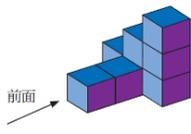
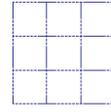
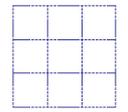
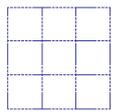
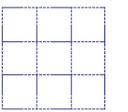
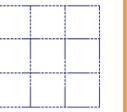
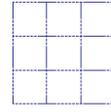
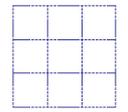
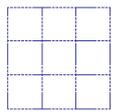
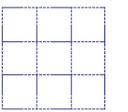
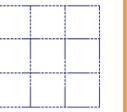
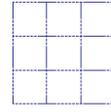
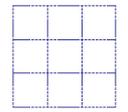
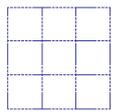
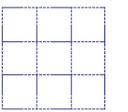
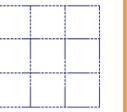
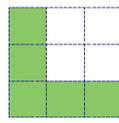
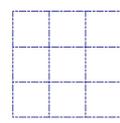
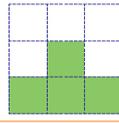
教育部因應本次教育改革設計素養導向數學教材（國家教育研究院，2017），此單元銜接國小有關立體圖形的簡易概念，填補國中有關立體空間的討論，再延伸至空間平面的了解，配合學習內容以及學習表現，進行學習任務設計。該銜接課程包含基礎內容「透過立體圖形的觀察來體認視圖的需求」、「理解不同位置的視圖的繪製與呈現」

以及「探討立體圖形的觀察位置與視圖的關係；討論視圖間的關係」

共三堂，重製活動「觀察視圖並利用小立方體積木製作立體圖形」與

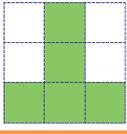
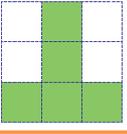
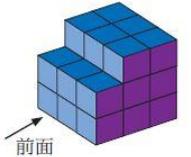
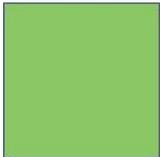
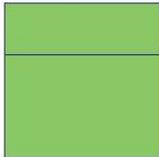
延伸活動「更嚴謹的視圖繪製」各一堂（表 2-4）。

表 2-4 三視圖課程任務與內容表，引自教育部（2017）

基礎課程	課程任務																				
<p>透過立體圖形的觀察 來體認視圖的需求</p>	<p>任務 2</p> <p>請觀察放置於教室中央桌子由相同大小的正方體紙盒組成的立體圖形，從自己的座位站起來由上方俯視此立體圖形，並且將看到的輪廓畫在下面的方格紙上。</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>每格正方形是用來協助同學觀察時，描繪看到的每個小立方體的面。</p> </div> </div> <p>請跟你周圍的同學比較看看，畫的一樣還是不一樣，為什麼？與同學討論你們的想法。</p>																				
<p>理解不同位置的視圖 的繪製與呈現</p>	<p>任務 6</p> <p>下圖的立體圖形是由相同大小的小正方體積木組成的。請小組利用小積木製作出這個立體圖形，並將該立體圖形的「上視圖」、「前視圖」、「後視圖」、「左視圖」、「右視圖」繪製在下表。</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td colspan="4"></td> <td style="text-align: center;">上視圖</td> </tr> <tr> <td colspan="4"></td> <td style="text-align: center;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">前視圖</td> <td style="text-align: center;">後視圖</td> <td style="text-align: center;">右視圖</td> <td style="text-align: center;">左視圖</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;"></td> <td></td> </tr> </table> </div>					上視圖						前視圖	後視圖	右視圖	左視圖						
				上視圖																	
																					
前視圖	後視圖	右視圖	左視圖																		
																					
<p>探討立體圖形的觀察 位置與視圖的關係； 討論視圖間的關係</p>	<p>任務 10</p> <p>(1)如下表左圖，為某一立體圖形的左視圖，請在右欄繪製出其右視圖。</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>左視圖</p> </div> <div style="margin-left: 20px;">  <p>右視圖</p> </div> </div> <p>(2)如下表左圖，</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>前視圖</p> </div> <div style="margin-left: 20px;">  <p>後視圖</p> </div> <div style="margin-left: 20px;"> <p>為某一立體圖形的前視圖，請在右欄繪製出其後視圖。</p> </div> </div>																				

（續下頁）

表 2-4 三視圖課程任務與內容表 (續)

重製活動	課程任務
<p>察視圖並利用小立方體積木製作立體圖形</p>	<p>任務 12</p> <p>如右圖，請觀察某立體圖形的上視圖。</p> <p>(1) 試著用最多的積木做出可能的立體圖形，跟同組的其他同學分享。哪些地方一樣？哪些地方不一樣？</p> <p>(2) 如果可以用更少的積木(沒有限制)讓你想像這個立體圖形可能的樣子，請試著做做看，跟同組的其他同學分享。哪些地方一樣？哪些地方不一樣？</p> <p>請參考提供的輪廓視圖，並調整你用積木做出的立體圖形。</p> <p>(3) 提供此立體圖形的右視圖與左視圖。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>右視圖</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>左視圖</p>  </div> </div> <p>跟同組的其他同學彼此分享。有什麼一樣？有什麼不一樣？</p>
延伸活動	課程內容
<p>更嚴謹的視圖繪製</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>前面</p> <p>立體圖形由前方觀察</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>粗線畫出視圖輪廓線</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>不同平面的以實線間隔</p> </div> </div>

其中，重製活動與延伸活動與「不出現利用提供的視圖要求學生重製立體圖形」的條目範圍有矛盾之處，課程發展者在課程中放入三視圖的觀察與推理重製活動的目的，是為了讓學生了解立體圖形的三視圖可以做為設計者與製作者之間的溝通管道，同時建議教師在處理此活動時，可以安排成遊戲讓學生操作、比較與討論，但不可設計為評量相關試題。研究者以課程綱要中的學習表現與學習內容，參酌此教材規劃，設計相對應的三視圖任務，以探討學生在該單元中的解題歷程表現。

(三) 三視圖的任務類型

三視圖的任務類型能以測驗中提示物的型態（立體圖、方塊積木圖、平面視圖等）、測驗方式（數立方體個數、畫出視圖、堆放立體圖以及判斷圖形對應等）以及表徵的轉換方式進行分類。三視圖課程目的之一在於理解各個視圖之間的關係，林慧美（2011）依照表徵轉換的方式，將三視圖任務分成「三維立體物至二維平面」、「二維平面經三維立體至二維平面」與「二維平面至三維立體物」。(表 2-5)

表 2-5 三視圖任務類型一，引自林慧美（2011）

類型	範例																		
<p>1. 三維立體物 至二維平面</p>	<p>壹、積木堆積 一、由立體物選擇視圖：共 5 題</p> <p>說明：立體物放在觀察者的正前方，小朋友從前面看過去，所看到的平面圖形為前視圖；從左面看過去，所看到的平面圖形為左視圖；從右面看過去，所看到的平面圖形為右視圖；從前面，由正上方往下看，所看到的平面圖形即為俯視圖。</p> <p>範例一：(2)請站在前面位置，選出正確的前視圖。</p>																		
<p>2. 二維平面至 三維立體物</p>	<p>三、由視圖選擇立體物：共 7 題</p> <p>說明：a.觀察題目中的平面視圖，請判斷它是立體物的哪一個方向？箭號 1 是俯視方向、箭號 2 是左面方向、箭號 3 是前面方向、箭號 4 是右面方向。 b.觀察題目中給定的二個視圖或三個視圖，判斷是哪個立體模型。解題需同時考慮題目設定的數個視圖條件，推論出正確答案。</p> <p>範例三：(3)題目中的平面視圖是立體物的哪個方向？</p>																		
<p>3. 二維平面經 三維立體至 二維平面</p>	<p>四、根據俯視圖畫出前視圖、左視圖：共 2 題</p> <p>說明：俯視圖上面的數字為積木的個數。</p> <p>範例一：請根據俯視圖上面的積木數字，畫出前視圖、左視圖。</p> <table border="1" data-bbox="606 1792 1149 1971"> <tr> <td rowspan="3">左面</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td colspan="3">前面</td> </tr> <tr> <td></td> <td colspan="3">俯視圖</td> </tr> </table>	左面	2	1	2	0	1	3	0	1	0		前面				俯視圖		
左面	2		1	2															
	0		1	3															
	0	1	0																
	前面																		
	俯視圖																		

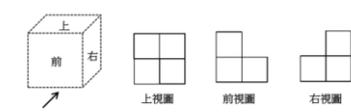
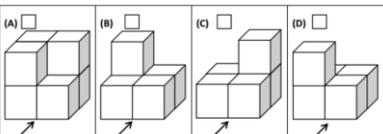
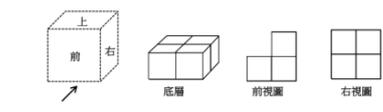
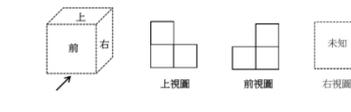
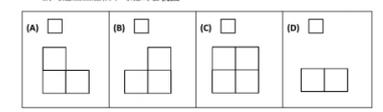
林慧美（2011）也指出上述的分類方式，參與者在二維平面轉三維立體的解題過程中，可能會從選項中的立體圖形，逆推與題目相符的平面視圖。因應此研究結果，陳韻如（2017）將「三維立體物至二維平面」與「二維平面至三維立體物」合併成「視圖與立體圖的對應」、

「二維平面經三維立體至二維平面」重新命名為「視圖與視圖的對應」，

並增加「由底層和視圖計數」的中介任務，提供中低數學程度的學生

畫出視圖的解題路徑。（表 2-6）

表 2-6 三視圖任務類型二，引自陳韻如（2017）

類型	範例
1. 視圖與立體圖的對應	<p>1. 以箭頭 ↗ 方向為前方，觀察立體積木，已知立體積木符合以下資訊。</p>  <p>請勾選出符合以上條件的立體積木。</p> 
2. 由底層和視圖計數	<p>4. 以箭頭 ↗ 方向為前方，已知立體積木符合以下資訊。</p>  <p>這個立體積木可能由多少個小立方塊組成？</p> <p>(A) <input type="checkbox"/> 4 (B) <input type="checkbox"/> 5 (C) <input type="checkbox"/> 6 (D) <input type="checkbox"/> 7</p>
3. 視圖與視圖的對應	<p>10. 觀察者站在箭頭 ↗ 所示位置，已知立體積木符合以下資訊。</p>  <p>請勾選出立體積木可能的右視圖。</p> 

由於 108 課綱中三視圖的學習內容條目，將三視圖的學習框架於「圖形需內嵌於 $3*3*3$ 的正方體且不得中空」與「不出現利用提供的視圖要求學生重製立體圖形」的設定之中，對照林慧美（2011）與陳韻如（2017）的分類方式，除了對於提示物的限制不同之外，兩者皆涉及由平面視圖重建立體物的任務類型。

除了上述的條目之外，為了因應素養導向課程設計的建議，本研究著重於理解參與者「由立體圖形理解各視圖間的關係」的解題過程，在題型設計的比例上，並不完全排除由平面視圖建立立體圖的任務，藉由理解參與者解題的思考方式與提供參與者不同的解題工具（立方體積木），探討參與者在三視圖任務中所使用的策略與解題困難。

第三節 解題與解題歷程

數學解題泛指能應用數學概念與程序，來解決日常、數學、其他領域的應用問題（教育部，2018）。而數學的解題歷程則是當人面臨有關數學的問題時，運用過去的知識經驗，將認知結構重組，產生策略，以求得解答的一種心智歷程，其中包括了解問題、選擇策略、轉換成數學問題、運用數學知識對該數學問題求解，並檢驗與詮釋這個解的意義，判斷是否完成解題之要求。本節回顧 Dewey (1910)、Polya (1945)、Schoenfeld (1985；1992；2013)、Mayer (1992) 所提出的解題歷程，以及 Newman (1977) 針對解題歷程所提出的五階段錯誤分析。

（一） Dewey 的解題歷程

Dewey (1910) 在其著作 *How We Think* 一書中以邏輯分析剖析建立知識與指導行動的重要性，說明教育者應該如何培養學生科學思維思考的方法，並將解決問題的歷程分為5個主要步驟：

1. 遭遇困難：個體意識到遭遇困難，產生認知困惑。
2. 分析情境：個體從困惑的情境中，確定問題的已知和未知，了解問題的關鍵。
3. 假設可能的解決途徑：個體分析問題情境，連結認知結構，從而提出各種問題解決的可能方案。
4. 由假設推理並蒐集相關資料：個體從所有解決方案中，選擇最

適當的方案。

5. 進一步驗證所得結果：個體執行所選擇的方案，並檢驗執行結果是否正確。

這些問題解決步驟說明當我們遭遇問題時，是如何進一步解決問題的歷程，因而導引出許多學者對解決問題時解題者心理活動之分析，並運用於教學情境，從而發展出許多解決問題的策略。

(二) Polya 的解題歷程

Polya (1945) 在其著作 *How to Solve It* 一書中強調解題策略的重要性，並將數學解題歷程分成四階段，包含：了解問題 (understanding the problem)、擬訂計畫 (devising a plan)、執行計畫 (carrying out the plan)、回顧解答 (looking back)。其四階段解題過程詳述如下：

1. 了解問題

- (1) 解題者必須了解「未知是什麼？」、「資料是什麼？」、「已知條件是什麼？」、「條件充足嗎？太多？太少？或是彼此有矛盾？」。

- (2) 嘗試繪圖，並使用適合的符號。

- (3) 解題者是否能把條件整理並列出？

2. 擬訂計畫

- (1) 解題者如何找出數據資料與已知條件的關係，探討條件如何

輔助思考。

- (2) 解題者是否曾經計算過過這個題目？或是計算過一樣，但以不同類型闡述的題目？
- (3) 解題者是否知道與此題關聯的題目？知道可以使用什麼定理？
- (4) 注意目標！並試著思考有什麼相關的問題。
- (5) 解題者過去作答的問題，能再運用它的方法或結果嗎？或者是否需要插入什麼要件，來運用這個作答過的問題？
- (6) 解題者能否重述問題？把問題重新敘述一遍？
- (7) 如果不能解決現在的問題，試著先從一些相關問題下手。試試一些有關聯但比較容易解決的問題？例如，比較普遍的問題？相似或類比的問題？只思考條件的某個部分，而先暫緩其他部分，再看看離真正的目標有多遠，還能做什麼變化？你能從條件中找到什麼關鍵點？目標或已知可以怎麼改變，來讓它們彼此更接近一些？
- (8) 解題是否已經運用了所有的已知條件？考慮了與問題相關的所有必要觀念？

3. 執行計畫

- (1) 檢查每一個步驟並且實行計畫。

(2) 解題者能徹底確定每一個步驟都是正確的？

(3) 解題者能證明這些步驟都是正確的嗎？

4. 回顧解答

(1) 解題者可以驗算所得的答案嗎？能否驗證過程？

(2) 解題者能否用不同的策略得到相同的答案？能否把這個結果或方法應用到別的問題上？

Polya 強調解題者可以從不同角度檢驗解題結果，並提出解題者能應用解題結與過程在其他的數學問題之中。第二階段中，教師可鼓勵學生思考能否直接運用定理、公式等解題。如果不能，則鼓勵他們將資料用圖或表顯示，或試解決較簡單的問題。在得到新的靈感後，便選取較適合的策略再進行探究。而當解題者實際解題時，並非一定是直線式地從第一步進行至第四步，有時需隨時折返重新審視題目，有時則需繞圈子改變解題策略，以達解決問題的最終目的。

(三) Schoenfeld 的解題歷程

Schoenfeld (1985) 承續 Polya 的解題步驟模式，除了重視各解題步驟的認知歷程外，他提出「後設認知 (metacognition)」與「信念系統 (belief system)」兩個概念，其著作 *Mathematical Problem Solving* 一書中，強調數學解題的研究需要考慮四個變項：

1. 資源 (resources)：解題者具有與解題相關的數學知識，包含

數學的定義、運算以及相關技巧。擁有較多資源的解題者，期解題成功的機率相對提高。

2. 捷思 (heuristics)：代表捷思策略，諸如簡化問題、畫表格、尋找模式、猜測等解題策略。
3. 控制 (control)：代表解題者如何制定解題的計畫、選擇目標、採用策略與評估解題結果等。控制因素是關鍵的一環，包含規劃、監控與調解題歷程，並從中獲得最後正確的答案。
4. 信念系統 (believe system)：代表解題者對於數學解題的觀點，而這些觀點會影響解題的行為。當學生對數學存有錯誤的觀點，會進而影響其對數學解題的態度。

上述數學解題所需要的四個變項中，Schoenfeld 認為控制是關鍵的一環，即使解題者具有豐富的解題資源，若缺乏適當的解題策略時，在解題的過程中，常會有不知如何著手的困擾，所以，他以控制因素的觀點，將解題歷程區分為：讀題 (reading)、分析 (analysis)、探索 (exploration)、計畫-執行 (planning-implementation)、驗證 (verification) 與轉移 (transition) 六個階段 (表 2-7)。

表 2-7 Schoenfeld 解題階段及相關問題表，譯自 Schoenfeld (1985)

一、讀題 (Reading)：受試者開始閱讀問題。
R1：注意到問題所有條件嗎？ R2：正確瞭解目標狀態嗎？ R3：解題者是否能評估現有知識與問題的關係？
二、分析 (Analysis)：受試者將問題簡化或重述，以便更了解問題。
A1：選擇什麼觀點？ A2：選擇問題的條件來採取行動嗎？ A3：根據問題的目標來採取行動嗎？ A4：條件和目標有何相關？ A5：解題者的行動 (A1-A4) 合理嗎？
三、探索 (Exploration)：受試者尋找已知條件、未知條件以及問題目標彼此間的關聯性。
E1：是經由問題的條件引起的？或目標條件所引起的？ E2：所採取的行動有方向或焦點嗎？ E3：有無監視行為？監視行為有無對答案的結果有何影響？ E4：解題者所採取的行動 (E1-E3) 是否合理？
四、計畫-執行 (Planning-Implementation)：受試者擬定、檢視、評估解題計畫，執行計畫並檢視是否依計畫執行。
PI1：是否有計畫行為？ PI2：計畫與解題間有關係嗎？有良好的架構？ PI3：參與者評估計畫的相關、適當及結構性？ PI4：執行是否依計畫有系統的進行？ PI5：是否在整體或局部層次評估執行？ PI6：評估之有無對結果的影響如何？
五、驗證 (Verification)：受試者檢視解題結果是否合理與正確。
V1：是否重新檢查計算過程？ V2：有無驗證答案？如何驗證？ V3：是否針對計算過程或對結果的信心做評估？
六、轉移 (Transition)：指各階段之間的連結。
T1：有無對目前解題狀態做評估？若放棄一種解題途徑，是否企圖利用其中有用的部分？ T2：當前一工作放棄時，有無評估放棄的當時狀況之行為對答案的整體或局部有何影響？ T3：是否評估採取新途徑時對解題的短程或長程的影響？還是直接跳入新的方法？ T4：採用新途徑後有無評估短程及長程影響如何？行動是否適當而必要？

Schoenfeld (1992)以 6 階段時間序列圖 (time-line graph) 提供研究者一種呈現解題歷程的方法。圖 2-2 描述一位數學家在解困難的兩部份數學題的解題歷程，記錄解題者在讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證各個階段所花費的時間，其中倒三角形的符號，是標記解題者在每階段使用明顯策略 (explicit comment) 的時間點。Schoenfeld (2013) 也指出科技的運用，包含計算機、繪圖儀器、Wolfram Alpha

(線上自動問答系統)、動態幾何的軟體，都能幫助學生的解題。

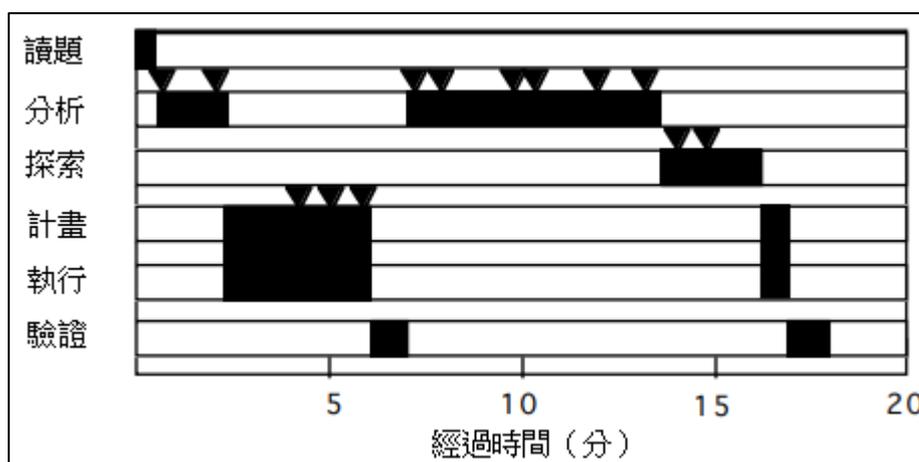


圖 2-2 數學家解困難的兩部分數學題的時間序列圖，引自 Schoenfeld (1992)

(四) Mayer 的解題歷程

Mayer (1992) 從認知心理學的觀點，強調解題者的心理運作過程，對數學解題歷程及其所涉及的知識進行結構性的分析。以文字題「每邊長 30 公分的正方形瓷磚，每塊售價 0.72 元，若要以此瓷磚鋪滿一間長 7.2 公尺、寬 5.4 公尺的長方形房間，需要花多少錢？」為例，Mayer 分析解題者所需具備的知識應包含：

1. 語言 (linguistic)：例如認字與讀懂題意的能力；
2. 語意 (semantic)：例如 1 公尺等於 100 公分、正方形四邊相等；
3. 基模 (schematic)：例如長方形的面積等於長乘以寬；
4. 策略 (strategic)：例如先設定子目標，先算出房間的面積；
5. 程序 (procedure)：例如能做乘、除法的運算。

Mayer 的解題歷程包含「問題表徵 (problem representation)」與「問題解決 (problem solution)」兩階段，每階段又可分為兩個步驟：

1. 問題表徵：將問題的文字或圖像轉為內心的心智表徵。
 - (1) 問題轉譯(problem translation):解題者運用語言與語意知識，必須全盤了解題目的意思，進而將問題的陳述或詞語轉化為內在表徵。
 - (2) 問題整合 (problem integration)：解題者運用基模知識，區分問題的類型以及相關和無關的訊息，進而將問題中所有的訊息統整成連貫的表徵。
2. 問題解決：從心裡的問題表徵到最終答案的過程。
 - (1) 解題計畫與監控 (problem planning and monitoring)：解題者運用策略知識，選用適當的策略並擬定解題計畫，並監控自己的解題行為過程。
 - (2) 解題執行 (problem execution)：解題者運用程序知識，利用正確的方法，最終能正確求得答案。

Mayer 認為問題的三個特質為已知數 (given)、目標 (goals) 及障礙 (obstacles)，解題則是由已知狀態移動到目標的歷程。解題者在解題歷程中，若欠缺五種必要知識中的任何一種，很可能就無法成功地解題。

(五) Newman 的解題歷程錯誤分析

Newman (1977) 以數學文字題作為研究，提出參與者進行解題需要的五種能力，包含閱讀 (reading)、理解 (comprehension)、轉換(transformation)、處理技能(process skill)與編碼(encoding)。

White (2005) 以 Newman's error analysis (NEA)，分析學生在解題歷程中發生的錯誤型，提供教師相對應的提示策略，同時指出利用 NEA 的提示策略可以幫助教師協助學生理解。Rohmah & Sutiarto (2018) 對應 NEA 的每階段，分別設計三道題目進行訪談，試圖了解參與者在解數學問題時所遇到的困難 (表 2-8)。

表 2-8 NAE 的訪談大綱，引自 Rohmah & Sutiarto (2018)

Newman 的問題解決階段	訪談大綱
閱讀錯誤	<ol style="list-style-type: none">1. 你能讀出這個問題嗎？2. 閱讀問題後你得到什麼樣的信息？3. 這個問題有哪些數學符號？
理解錯誤	<ol style="list-style-type: none">1. 嘗試說明這個問題的已知信息？2. 嘗試說明這個問題要求什麼？3. 確定問題的已知條件時有遇到困難嗎？
轉換錯誤	<ol style="list-style-type: none">1. 你了解題目用到了什麼數學模型嗎？2. 你能在已完成的答案中描述數學建模的階段嗎？3. 在進行數學建模時有遇到什麼困難嗎？
處理技能錯誤	<ol style="list-style-type: none">1. 你能解釋使用了什麼方式來解決問題的嗎？2. 你的做法是不是正確的呢？3. 在進行運算的過程中有沒有遇到困難呢？
編碼錯誤	<ol style="list-style-type: none">1. 你能將運算過程的結論做總體的說明嗎？2. 你確定你的答案是最終的結果嗎？3. 在這個階段中你有沒有遇到任何的困難呢？

從以上 5 位學者 (Dewey, Polya, Schoenfeld, Mayer & Newman) 所提出的解題歷程而言，解題歷程能被區分成不同階段，且多數之間可以互相對應。Polya 主要將解題歷程區分成了了解問題、擬訂計畫、執行計畫、驗算與回顧解答這四大階段。

其中，「了解問題」階段對應 Dewey 所提出的遭遇困難階段與分析情境階段、Schoenfeld 的讀題與分析階段和 Mayer 的問題轉譯與問題整合階段，這個階段描述解題者剛面對問題時對於題目本身的理解程度。「擬定計畫」階段對應 Dewey 的假設可能的解決途徑與由假設推理並蒐集相關資料、Schoenfeld 的探索階段與計畫階段，以及 Mayer 的解題計畫與監控階段，這階段描述解題者延續前一階段的思考脈絡，連結自身既有的解題經驗後所提出的解題策略。「執行計畫」階段則可以對應 Schoenfeld 的執行階段與 Mayer 的解題執行階段，這個階段描述解題者執行解題策略與進行運算的過程。

最後則是「回顧解答」階段，對應 Schoenfeld 的驗證階段，此階段描述解題者檢視運算後所得出的答案，同時思考答案的合理性。Mayer 著重於解題者的心理運作過程，在此階段中並沒有提及相對應的概念。上述這兩階段同時也對應到 Dewey 的進一步驗證所得結果。各個階段也能與 Newman 的解題歷程錯誤類型相互對應（表 2-9）。

Schoenfeld (1992) 提出解題者在處理不知下手的問題時，因為解題者的能力尚未發展充足，時間序列圖可能會時常發生沒有分析階段的狀況（圖 2-3）。故本研究主要採用 Polya 所提出的解題歷程，並結合 Schoenfeld 的時間序列表架構，將讀題與分析合併，對應到 Polya 的了解問題階段；探索與計畫階段合併，對應到 Polya 的擬訂計畫階段，用以描述解題者的解題過程（徐家煌，2019）。對應解題歷程之策略方法，許佳齡（2008）則指出學生在解題過程中會以本身不同能力提出不同的解題策略，故本研究將依資料進行分析，並提出不同解題者在三視圖題型中所用的解題策略，以及相對應的解題困難。

表 2-9 解題歷程彙整表

	理論提出者	階段一	階段二	階段三	階段四	階段五	階段六
解題歷程	Dewey (1910)	遭遇困難	分析情境	假設可能的解決途徑	由假設推理並蒐集相關資料	進一步驗證所得結果	
	Polya (1945)	了解問題		擬定計畫		執行計畫	回顧解答
	Schoenfeld (1985)	讀題	分析	探索	計畫	執行	驗證
	Mayer (1992)	問題轉譯	問題整合	解題計畫與監控		解題執行	X
錯誤類型	Newman (1977)	閱讀錯誤	理解錯誤	轉換錯誤		處理技能錯誤	編碼錯誤

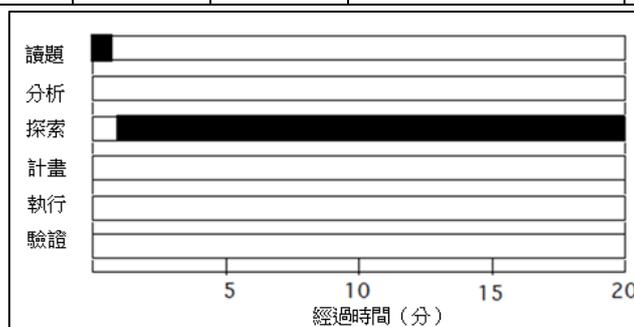


圖 2-3 一般學生嘗試解非常見數學問題的時間序列圖，引自 Schoenfeld (1992)

第參章 研究方法與設計

本研究主要探討七年級學生在三視圖任務的解題歷程，本章主要分有六節，分別是「研究設計」、「研究對象」、「研究工具」、「資料蒐集」、「資料分析方法」與「預試資料分析」。

第一節 研究設計

本研究採質性研究的方法，蒐集參與者的解題時的放聲思考過程與作答的影片，並以及事後晤談的方式進行資料的校正。研究主要採用 Polya 所提出的解題歷程，包含「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」、「回顧解答」共四階段，並結合 Schoenfeld (1992)時間序列表的架構進行原案分析，探討學生的在三視圖任務中的解題過程、解題策略以及解題的困難之處。信效度方面，本研究採專家評量一致性來增加原案分析的信度；並採用專家效度，以 2 位具備教育與數學相關背景知識的同儕共同審閱。

第二節 研究對象

本研究的參與者共有 4 位同學（甲、乙、丙、丁），分述如下。

（一） 預試（甲）

由於本研究預試階段，七年級學生尚未學習三視圖，故先以便利取樣選取屏東市某課輔班七年級學生一名進行預試。這名甲同學（女）從國小二年級開始參與課輔班，學生的媽媽也是課輔

班的數學老師。甲同學的整體成績名列前茅，數學方面的表現高於乙、丙、丁三位同學。

(二) 正式施測 (乙、丙、丁)

正式施測以立意取樣選取屏東市某課輔班七年級學生 3 名，選取方式是以 108 學年度上學期第三次段考數學成績為主，將學生分成低、中、高三組。因應放聲思考的研究方式，研究者會從各組中選取一位表達流暢者，分別是低分者乙同學 (男)、中分者丙同學 (女)、高分者丁同學 (男)。

第三節 研究工具

本研究使用的工具為三視圖試題、紀錄放聲思考的器材、Polya 解題歷程時間序列圖以及研究者本身，共有四項，分別敘述如下：

(一) 三視圖試題

本研究以翰林版數學課本 (2019 年) 與《素養導向國民中學數學教材：三視圖—從哪裡看？》為主軸，建構對應空間能力運用的 4 題三視圖任務。首先經由 2 位具備教學與數學相關背景的研究生，以及 1 位指導教授修改題目語句敘述後進行預試，其測驗的目的與研究者的觀察重點如試題對應表 (表 3-1) 所示。測試之前，參與者先練習數積木題與 $2*2*2$ 的視圖題，奠基立方體不懸空以及三視圖的基本

概念，同時熟悉放聲思考的作答模式。其中，放聲思考題型經由「避免記憶性的試題」、「需要兩個或兩個步驟以上方能完成」、「題目合乎邏輯且語意清晰」及「題目不會過於艱深」四個標準進行挑選。

表 3-1 試題對應表

題目	測驗目的	使用能力	觀察重點
一、視圖題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 觀察紙本上的平面圖示，藉由生成立體心像，旋轉視角畫出對應的前、上、右、後、左視圖。 2. 能從5個視圖中觀察到左右視圖與前後視圖的圖形呈對稱。 3. 驗證：以立方積木塊輔助，先從平面圖示堆出正確的立體圖形(9個)，再藉由實際的立體物旋轉，確認視圖的正確性。 	空間視覺化 心像旋轉 空間定位	視圖順序 視圖正確性 視圖間的關係 堆立方體的順序 旋轉物件的方式
二、視角題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 觀察紙本上的平面圖示，藉由生成立體心像，旋轉視角畫出對應的前、上、右、後、左視圖。 2. 能從題目一與題目二中察覺到同樣的立體圖形，從不同視角觀察時，其兩者示圖間的關係，例如：上視圖會旋轉，左右前後視圖會相互對應。 3. 驗證：以立方積木塊輔助，先從平面圖示堆出正確的立體圖形(9個)，再藉由實際的立體物旋轉，確認視圖的正確性。 	空間視覺化 心像旋轉 空間定位	視圖順序 視圖正確性 不同視角下 視圖間的關係 堆立方體的順序 旋轉物件的方式

(續下頁)

表 3-1 試題對應表 (續)

題目	測驗目的	使用能力	觀察重點
三、隱藏題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 觀察紙本上的平面圖示，藉由生成立體心像，旋轉視角畫出對應的前、上、右視圖。 2. 依照視圖畫出的結果，數出立方體的數量(11~14個)。 3. 驗證：以立方體積木輔助，先從平面圖示堆出正確的立體圖形，再藉由實際的立體物旋轉，確認視圖的正確性。 	空間視覺化 心像旋轉 空間定位	視圖順序 視圖正確性 計數的方式
四、拿取題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 觀察紙本上的平面圖示，藉由生成立體心像，旋轉視角畫出對應的前、右視圖。 2. 觀察可能使用的策略： 視圖：先數出原本有6塊，拿取1塊立方體機幕後後剩下5塊，再藉由前、右視圖組出立體圖形。 立體圖：直接由立體圖中操作，畫出每一種被拿取後的立體圖，藉此對應。 3. 驗證：以立方積木塊輔助，能找出正確拿取的方式，觀察視圖是否吻合。 	空間視覺化 心像旋轉 空間視覺化 空間定位	視圖順序 視圖正確性 策略的使用

(二) 紀錄放聲思考之器材

為詳細記錄參與者完整的解題歷程，放聲思考的過程中全程以相機錄影，主要拍攝參與者的解題過程，以利製作原案產生與原案分析，解題過程中的錄影皆有取得參與者以及參與者的家長同意。

(三) Polya 解題歷程時間序列圖

國內外有諸多學者提及解題歷程，本研究參考 Polya (1945) 的解題歷程與 Schoenfeld (1992) 時間序列圖的架構，將解題歷程的模式分為「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」、「回顧解答」共四階段，用以分析蒐集之資料。

(四) 研究者本身

在質性研究中，研究者本身即是研究工具。研究者本身是數學系，並於大學階段修過教育學程。畢業後曾擔任國中數學教材編輯、數學補習班教師及偏遠地區課輔班數學專員，具有五年以上的國中小數學教學經驗。課輔班中，研究者負責國中小的補救教學課程規劃，並制定課輔班數學教師的培訓課程。

第四節 資料蒐集

本研究主要以放聲思考、事後晤談的方式進行研究資料的蒐集，同時錄影記錄學生的解題歷程，並經整理並轉為原案。進行有聲解題之前，研究者事先設想有聲解題過程中可能會發生的突發狀況，並針對每種可能的突發狀況擬定相對應的回應方式(表 3-2)，因題目之間有相關性連結，如參與者作答時出現錯誤狀況，研究者會在參與者作答到一個段落後進行提醒，以利蒐集相關資料；此外，為了使參與者更加順利地表達內心真實的想法，在進行正式施測之前，參與者會先

進行的放聲思考的作答訓練，使其能更加明確的表達解題時的思考過程，增加研究資料的精確度。若解題歷程中有模糊或者是不確定之處，研究者會再進行事後晤談，多方驗證放聲思考的資料。

表 3-2 測驗階段研究者回應表

參與者測驗狀況	研究者回應方式
當學生安靜超過 5 秒	你在想什麼呢？一邊寫一邊說出心中的想法喔。
當學生說出：「老師，我不會寫。」	你之前有做過類似的題目嗎，再試試看。
當學生提出問題	你認為呢？
當學生檢查時，學生自己發現圖畫錯	(1) 你剛才是怎麼畫出來的呢？ (2) 這有另一張紙，可以把另一種畫在這邊。
當學生沒有完全回答完題目	還有沒有回答的題目喔。

第五節 資料分析方法

本研究將參與者的解題歷程的原始資料編碼為原案後，邀請 2 位修習過解題研究的同儕共同核對，以增加本研究資料的信度，是為調查者的三角校正法（investigator triangulation），即使用不同研究人員真度同一對象資料進行分析比對（Denzin, 1978）。本研究之原始資料的整理規則如下：

（一） 區分解題歷程的階段

研究者主要採用 Polya (1945) 所提出的解題歷程，將解題歷程區分為「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」、「回顧解答」共四個階段。階段代號以英文字母代表，U 代表了解問題階段、P 代表擬訂計畫階段、C 代表執行計畫階段、L 代表回顧解答階段。

(二) 原始資料編碼

資料的編碼共有四碼，第一碼為參與者編號，第二碼為題目，第三碼為解題過程，第四碼為次序（表 3-3）。舉例來說，「甲-1-U1」代表在甲同學施測第一題的過程，第一次了解問題階段；「甲-2-C3」代表在甲同學施測第二題的過程，第三次執行計劃階段。

表 3-3 編碼表

編碼位置	編碼意義	編碼
第一碼	參與者	甲、乙、丙、丁
第二碼	題目	1、2、3、4
第三碼	解題階段	U、P、C、L
第四碼	次序	1-9

(三) 解題階段順序和時間紀錄

將每個解題歷程區分後，紀錄每個解題歷程所經歷的時間（秒），再以 Polya (1945) 的解題歷程與 Schoenfeld (1992) 時間序列圖的架構，繪製成解題歷程時間序列圖。為凸顯各個解題階段占所有解題時間的比例，研究者將按照不同階段所花費之時間比例進而調整圖形。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖					
1.了解問題 (U)						
2.擬訂計畫 (P)						
3.執行計畫 (C)						
4.回顧解答 (L)						*
時間 (秒)	23	15	2	11	7	58

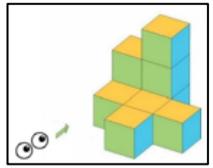
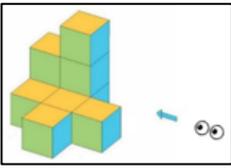
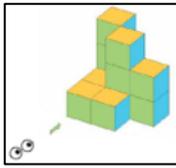
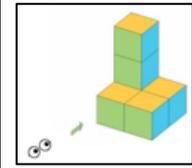
圖 3-1 解題歷程時間序列圖

「*」代表解題成功。右下的數字代表解題總時間。

第六節 預試資料分析

研究者整理預試參與者(甲同學)之原始蒐集資料，並參考 Polya (1945) 的解題歷程與 Schoenfeld (1992) 時間序列圖的架構，將參與者之解題歷程分為四個階段：了解問題 (U)、擬定計畫(P)、執行計畫 (C)和回顧解答 (L)，最後繪製成解題歷程時間序列圖，完成原案分析。以下為預試者解題分析，以 Polya 解題歷程四個階段逐題呈現。本預試試題分別為視圖題、視角題、隱藏題與拿取題 (表 3-4)。

表 3-4 預試試題題目表

題目	題目一	題目二	題目三	題目四
名稱	視圖題	視角題	隱藏題	拿取題
問題數量	4 題	4 題	4 題	3 題
圖示				

(一) 題目一：視圖題

1. 了解問題 (U1)

甲同學利用28秒先閱讀題目中的4個小題，因為題目敘述的情境單純，故並未耗費太多時間了解問題。

2. 擬定計畫 (P1)

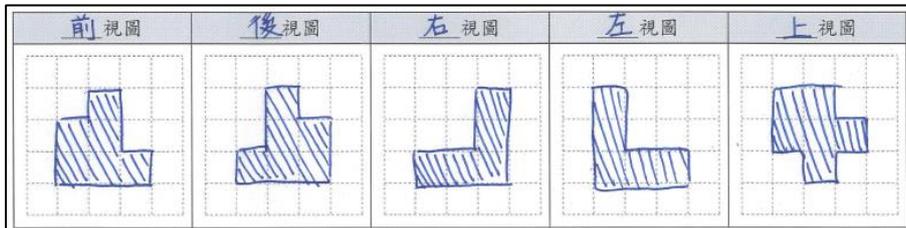
甲開始說明她的作法，是由前視圖開始描繪，費時8秒。

3. 執行計畫 (C1、C2)

甲描繪前視圖時分成2個步驟，第1個步驟是描繪前視圖的邊框，此執行計畫階段 C1 費時17秒。第2個步驟是塗色，此執行計畫階段 C2 費時8秒。描繪前視圖的過程歷經25秒，並正確畫出。

4. 執行計畫 (C3、C4、C5、C6)

甲描繪完前視圖後，同樣以描框後塗色的方式依序完成後視圖、右視圖、左視圖及上視圖，分別對應執行計畫階段的 C3、C4、C5、C6，費時26秒、23秒、20秒、18秒。其中，甲描繪後視圖與左視圖時，採取「用對稱性」之策略。以上所述的5個視圖皆正確畫出。



5. 擬訂計畫 (P2)

甲在進行第二題時，向研究者說：「然後，我是，我可以寫在上面嗎？」來確認作答的方式。費時4秒。

6. 執行計畫 (C7)

甲說明自己繪畫視圖所運用的策略為：「我是照邊去描繪。」

此階段歷經22秒。

我是照邊去描繪

7. 執行計畫 (C8)

甲指出5個視圖之間的關係為「前視圖和後視圖相反」及「右視圖和左視圖的圖形相反」。此階段歷經57秒。

前視圖和後視圖的圖形相反
右.....左.....圖形相反

8. 回顧解答 (L1)

甲先掃視題本上的作答過程後，再向研究者說：「我認為我是正確的，因為，我有認真想。」此階段歷經18秒。

因為我有認真想

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
	1.了解問題 (U)						
2.擬訂計畫 (P)							
3.執行計畫 (C)							
4.回顧解答 (L)							*
時間 (秒)	28	8	112	4	79	18	249

圖 3-2 甲視圖題解題歷程時間序列圖

(二) 題目二：視角題

1. 了解問題 (U1)

甲先閱讀題目中的4個小題，此階段歷經27秒。

2. 擬定計畫 (P1)

甲說明要從前視圖開始描繪，並觀察到：「前視圖的方向改變了。」同時指出本題（視角題）的前視圖的位置是上一題（視圖題）的右視圖。此階段歷經13秒。

3. 執行計畫 (C1)

甲先處理本題（視角題）的前視圖，一樣先描繪邊框後塗色。
此階段歷經13秒。

4. 執行計畫 (C2)

甲採取「用對稱性」之策略描繪出題目二的後視圖。此階段歷經15秒。

5. 執行計畫 (C3)

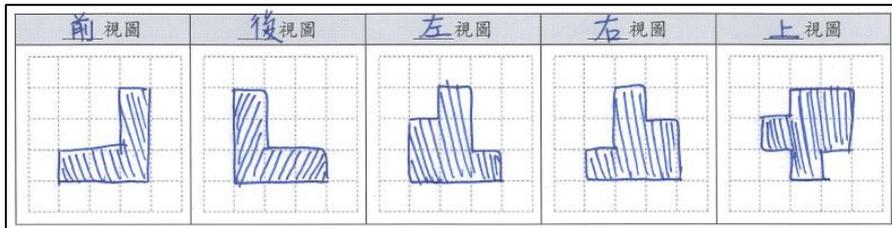
與上一題（視圖題）的描繪視圖順序不同，甲優先畫出題目二左視圖，說明：「因為左邊是從這個方向看，所以比較，快，然後畫得出來。」此階段歷經22秒。

6. 執行計畫 (C4)

甲採取「用對稱性」之策略描繪本題的右視圖，費時14秒。

7. 執行計畫 (C5)

甲說明描繪上視圖的視角也有改變：「上視圖，從這個方向，然後往，這邊去看。」此階段經歷23秒。

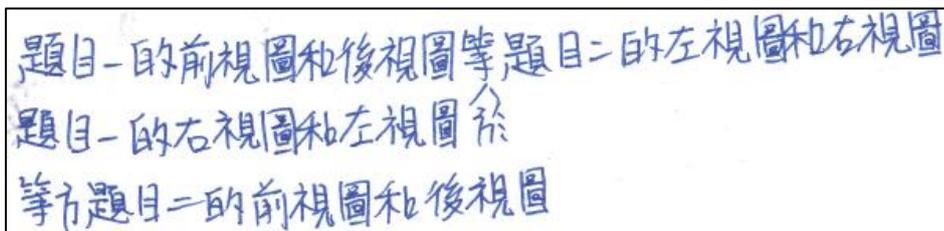


8. 執行計畫 (C6)

甲說明自己繪畫視圖所運用的方式為：「我是照邊描繪」。此階段歷經25秒。

9. 執行計畫 (C7)

觀察視圖題與視角題的5個視圖後，甲指出：「題目一的，題目一的前視圖跟後視圖會，會等於，題目二的左視圖跟右視圖。然後，題目一的，右視圖跟左視圖會等於題目二的前視圖跟後視圖。」此階段歷經132秒。



10. 回顧解答 (L1)

甲直接說明：「我認為我是正確的，因為我有把，題目一跟題

目二，兩個連在一起，然後去想。」此階段歷經43秒。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖				
1.了解問題 (U)					*
2.擬訂計畫 (P)					
3.執行計畫 (C)					
4.回顧解答 (L)					
時間 (秒)	27	13	219	43	302

圖 3-3 甲視角題解題歷程時間序列圖

(三) 題目三：隱藏題

1. 了解問題 (U1)

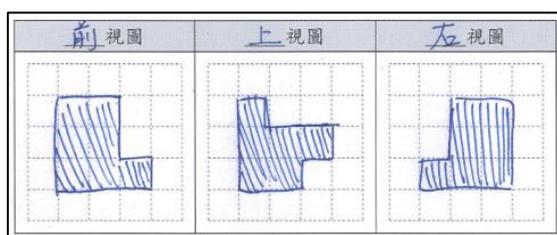
甲先閱讀題目中的4個小題，此階段歷經31秒。

2. 擬定計畫 (P1)

甲說明要從前視圖開始描繪。此階段歷經8秒。

3. 執行計畫 (C1、C2、C3)

甲以描框後塗色的方式依序完成前視圖、上視圖、右視圖，分別對應執行計畫階段的 C1、C2、C3，費時18秒、26秒、16秒。



4. 擬定計畫 (P1)

甲將積木由下到上分成三層，逐一討論每一層各有多少個小立方體積木。她表示最底層因為有可能會被遮住，無法確定立方

體積木的數量，所以甲列舉了2個情形，最底層分別可能有6個或7個立方體積木。此階段歷經55秒。

$$\begin{aligned} \text{⊖} &= 6, 7 \\ \text{⊖} &= 3 \\ \text{⊖} &= 2 \end{aligned}$$

5. 執行計畫 (C4)

甲分別將2個不同情形的立方體積木數量加總，說明這一塊積木可能是由11個或12個立方體積木所組成。此階段歷經25秒。

$$\begin{aligned} 1. & 6+3+2=11 \\ 2. & 7+3+2=12 \\ & A: 11個, 12個 \end{aligned}$$

6. 執行計畫 (C5)

甲覺得會有其他的答案，並說明：「因為，它這邊被遮住了，所以你不能真的去確定說它是有還是沒有的。」此階段歷經73秒。

還會有，因為第一層有部份位置被擋到，
所以不能確定它的有無。

7. 回顧解答 (L1)

甲覺得自己是正確的，說明：「因為我有假設兩種，方法，去算他。」隨後掃視隱藏題的所有作答。此階段歷經30秒。

有, 因為我假設2種方法算

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
1. 了解問題 (U)							
2. 擬訂計畫 (P)							
3. 執行計畫 (C)							
4. 回顧解答 (L)							*
時間 (秒)	31	8	60	55	98	30	282

圖 3-4 甲隱藏題解題歷程時間序列圖

(四) 題目四：拿取題

1. 了解問題 (U1)

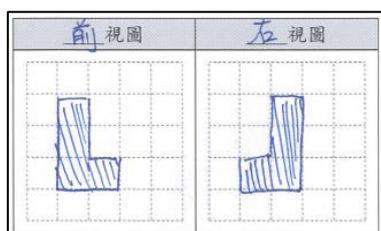
甲先閱讀題目中的3個小題，此階段歷經30秒。

2. 擬定計畫 (P1)

甲說明要從前視圖開始描繪。此階段歷經4秒。

3. 執行計畫 (C1、C2)

甲以描框後塗色的方式依序完成前視圖與右視圖，分別對應執行計畫階段的 C1 和 C2，費時13秒與15秒。



4. 了解問題 (U2)

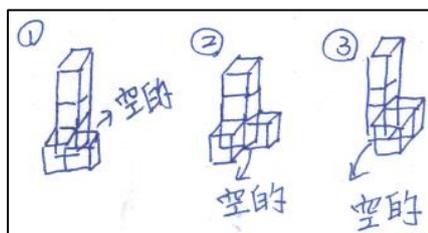
甲提出是否可以使用桌上的立方體積木的疑問。此階段歷經7秒。

5. 擬訂計畫 (P2)

甲決定使用繪畫的方式進行作答，並解說自己的解題計畫：「我先講解，然後再，把它畫出來。」此階段歷經11秒。

6. 執行計畫 (C3、C4、C5)

甲提出三種有可能的解答。說明自己的想法後，畫出相對應的立體圖形，最後圈出拿走立方體積木的位置。三種可能的解題歷程分別對應執行計畫階段的 C1、C2、C3，個別費時53秒、53秒、47秒。



7. 回顧解答 (L1)

甲掃視自己的作答。此階段經歷3秒。

8. 回顧解答 (L2)

甲認為自己是正確的，並提出：「如果把下面四個都拿走的話，會是長什麼樣子，阿如果是，後面這個拿走的話就不可能，因為他，這個上面不可能會懸空。」說明自己已經考慮過全部的

可能性。此階段歷經98秒。

正確，因為我認^認為後面左邊那塊積木，不可能沒有，因為上面的那2塊不會懸空。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖								
1.了解問題 (U)	■			■					
2.擬訂計畫 (P)		■			■				
3.執行計畫 (C)			■			■	■	■	
4.回顧解答 (L)								■	*
時間 (秒)	30	4	28	7	11	153		101	334

圖 3-5 甲拿取題解題歷程時間序列圖

(五) 綜合討論與比較

1. 解題過程

研究者將這四題（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題）的原案進行個別分析後，得知甲分別使用249秒、302秒、282秒、334秒完成解題，且大部分的解題過程都集中在執行計畫階段，該階段的時間占比分別為76.7%、72.5%、56%、54.2%。當題目具有多種條件時，例如隱藏題與拿取題，甲在擬訂計畫與回顧解答階段所花的時間，占比都會相對提高。

描繪視圖方面，甲都是先畫出視圖的邊框後再塗上顏色，並將視圖描繪在方格紙的正中間（3*3 方格）處；順序方面，則是都先畫出積木的前視圖；描繪時間方面，前視圖花費在

13 秒至 25 秒，且所有視圖皆能在 30 秒內繪製完成。

相較視圖題與視角題，雖然題目的性質相近，皆是畫出 5 個視圖、說明繪製的方法後，再提出視圖之間關係，但視角題的作答時間相較於題目一多出 53 秒。甲在兩題中的了解問題與擬訂計畫階段所花費的時間相近，差別則是在於視角題的執行計畫與回顧解答階段，推測時間差異的原因有二，第一是解題者必須同時觀察視圖題與視角題的所有視圖，第二則是回答視角題所需要的文字書寫的時間也相對較長。

2. 解題策略

從預試對象（甲）的資料中，研究者一共分析出 5 種解題策略，逐一說明。第 1 種策略為「直接觀察」，甲在觀察題目中的 2D 平面圖示之後，她進而理解這個圖示所代表的意義是 3D 的立體圖形。第 2 種策略為「產生心像」，例如描繪前視圖時，能直接由相對應的視角進行視圖的繪製。第 3 種策略為「從易到難」，當觀察積木的方向不同時，某一些視圖無法利用直接觀察進行繪製，解題者從而調整繪圖順序的策略。例如甲在視圖題的視圖描繪順序為前、後、右、左、上，而視角題的試圖描繪順序為前、後、左、右、上，其中順序不同的原因是視角

題（題目二）的左視圖可以藉由直接觀察繪製而成。第4種策略則是「用對稱性」，在描繪視圖時，不經由觀察，而是利用前視圖與後視圖、右視圖與左視圖的圖形對稱的特徵，直接由其中一種視圖，推測出另一種視圖。第5種策略是在畫上視圖時，甲同學會捏著試題本的右上角，向上傾斜一些高度「翻起題本」。另一種解題的策略則發生在隱藏題與拿取題中，甲在描述答案的多種可能性時，會以「列舉可能」的方式（①、②、③），寫出或畫出所有的可能性。

3. 解題困難

綜觀甲的解題歷程與原案分析，研究者提出2個解題困難。

第1個解題困難是在隱藏題（題目三）中，甲雖然有指出2種立方體積木數量的可能性，但是並未檢查出視圖也有對應的兩種可能。研究者推測可能在甲描繪出可能的第一種視圖後，她覺得自己已經完成此題的要求，所以未能完整地將所有視圖的可能性描繪出來。但如果提供多餘的作答空間，解題者可能會依循此線索判斷其他可能性，對此，研究者不更改題目的作答形式，而是以事後晤談的方式進行確認。

第2個解題困難則是在拿取題（題目四）中，當甲詢問作

答的方式(是否可以使用積木)後,她選擇使用繪圖的方式,將3種拿取的可能性畫出,但甲卻無法精確地建構出立體物件的圖像。這也與數學領域課程手冊(2019)中所提及的「不出現利用提供的視圖要求學生重製立體圖形」之限制範圍相互呼應。雖然解題者能以心像的方式在心中建立積木的形狀,但在畫出相對應的形狀時可能會有解題上的困難。對此,研究者以方塊積木協助解題者,並在正式施測時直接告知參與者可以運用方塊積木協助解題。

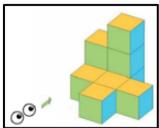
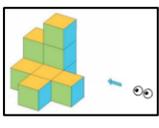
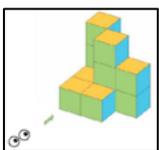
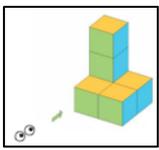
第肆章 研究結果與討論

研究結果與發現共分為三節，第一節為三視圖解題過程分析，以參與者的逐字稿、試題計算過程及事後晤談，分析三視圖題型的解題過程。第二節與第三節將探討參與者在三視圖任務之解題策略及解題困難；由於正式施測的題目與甲同學的預試題目相同，且甲同學也尚未學習三視圖課程，故研究者將甲同學的解題歷程一併納入分析討論。以下為資料分析。

第一節 三視圖解題過程分析

本節主要採用 Polya 所提出的解題歷程，包含「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」、「回顧解答」共四階段，並結合 Schoenfeld (1992) 時間序列表的架構，先針對乙（低分者）、丙（中分者）、丁（高分者）3 位參與者的解題歷程進行探討與，再納入甲同學的資料進行逐題分析。正式測驗的題目共有四大題，依解題順序分別為視圖題、視角題、隱藏題與拿取題（表 4-1）。

表 4-1 正式試測題目表

題目名稱	圖示	三視圖任務	
		描繪視圖	解三視圖題型
第一題 視圖題		1. 畫出 5 個視圖 2. 如何畫出	3. 找出視圖關係 4. 正確與否
第二題 視角題		1. 畫出 5 個視圖 2. 如何畫出	3. 找出視圖題與視角題的視圖關係 4. 正確與否
第三題 隱藏題		1. 畫出前、右、上視圖	2. 計數積木（11個） 3. 找出其他可能性（12個） 4. 正確與否
第四題 拿取題		1. 畫出前、右視圖	2. 拿取一塊後前、右視圖不變（3種） 3. 正確與否

(一) 乙同學 (低分者)

1. 視圖題

乙同學先閱讀题目的 4 個小題 (了解問題 U:45 秒), 開始進行题目的第一個部分 (畫出 5 個視圖)。接著說明自己要先做上視圖, 並使用研究者所提供的原木正立方塊積木 (以下簡稱方塊積木) 拼出立體圖形。(擬訂計畫 P:27 秒)



拼出立體圖形之後, 乙同學為了畫出上視圖, 他站起身來, 眼睛由立體圖形的上方俯瞰進行觀察。他繪製上視圖的方式是從中間 3*3 的方格中, 一格一格由上到下進行描繪。(執行計畫 C:28 秒)



隨後, 乙同學按照順序畫出剩下的 4 個視圖 (右、前、後、左視圖)。畫出這 4 個視圖的方式與首次畫上視圖的描繪方式有所不同, 乙同學會先站起來, 以立體圖形做為中心點, 將自己的身體移動到欲觀察的對應位置, 並蹲下身子, 以水平視角的方式

進行觀察，然後再一格一格地描繪。(執行計畫 C：204 秒)



完成第 1 小題 (畫 5 個視圖) 的繪製之後，乙同學繼續回答第 2 小題 (如何畫出)，他說明自己繪圖的方式，是先利用方塊積木拼成立體圖形後，藉著不同視角的觀察，然後再畫出相對應的視圖。(執行計畫 C：18 秒)

2. 你是怎麼畫的呢? *用方塊拼的*

回答第 3 小題 (視圖的關聯) 時，乙同學先觀察第 1 小題的 5 個視圖，並發現當由不同視角看過去時，所描繪出的視圖也有所不同。(執行計畫 C：31 秒)

3. 從五個視圖之中，你發現了什麼? *每個角度看都不一樣。*

最後，回答第 4 小題 (正確與否) 時，乙同學認為自己的作答是正確的，並說明自己是：「拼完圖後再用積木的視角看。」(回顧解答 L：53 秒) 研究者認為，乙同學的意思是因為自己有利用原木方積木塊拼成立體圖形，並且有移動自己的身體到不同的視角去觀察，所以畫出來的視圖應該會是正確的。

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢? *正確，拼完以後，再用題目的視角看。*

乙同學在視圖題中，全程花費時間為 286 秒。在描繪視圖之前，乙同學會先利用方塊積木拼出立體圖形，並藉由移動身體來進行視圖的描繪。視圖的繪畫區域集中在中間 3*3 的方格之中。值得注意的是，乙同學的部分視圖作答超出 3*3 的範圍（下圖方框所示）。



研究者在觀察與後續的訪談中，發現乙同學利用移動身體的方式進行視圖的描繪時，會產生視角落差的情形。以右視圖為例（表 4-2），乙同學認為這個立體圖形中，最右邊的方塊積木是比較明顯的，所以他先在作答區中間 3*3 的方格中畫出右方三格，而針對中間那一塊相對突出的部分，乙同學覺得應該要畫在比較下面的位置。所以乙同學在繪畫視圖時，作答會因為視角上的落差而產生不一樣的答案。

表 4-2 乙同學視圖題之右視圖作答

	題目一	正確的右視圖	乙同學看到的右視圖	乙同學的右視圖作答
圖示				

整體而言，乙同學進行此題的作答時，他會先使用方塊積木拼出立體圖形並進行觀察。在畫上視圖時，他會站起身子俯瞰立體圖形；而畫其他 4 個視圖時則是會以立體圖形為中心，移動到相對應的位置，再蹲下身子進行繪圖。這 5 個視圖之中只有上視圖作答正確，其他 4 個視圖都因為視角落差而造成視圖的繪製錯誤。這也可能是乙同學無法發現左、右視圖與前、後視圖的對稱關係的原因之一。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖				
1.了解問題 (U)					
2.擬訂計畫 (P)					
3.執行計畫 (C)					
4.回顧解答 (L)					
時間 (秒)	45	27	161	53	286

圖 4-1 乙視圖題解題歷程時間序列圖

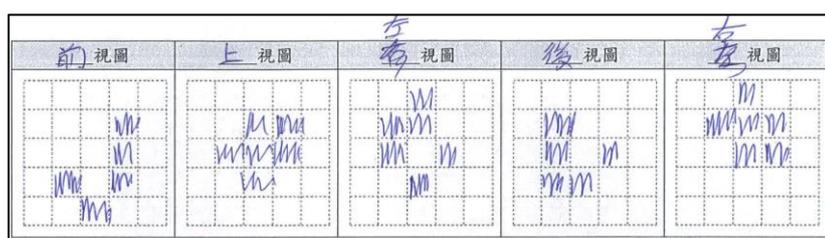
2. 視角題

乙同學先閱讀題目中的 4 個小題 (了解問題 U: 31 秒)，開始進行題目的第一個部分 (畫出 5 個視圖)。他這次說明自己要先做前視圖，並利用方塊積木拼出立體圖形 (擬訂計畫 P: 35 秒)。待拼好立體圖形後，他低下頭調整自己的視角進行觀察，並畫出前視圖 (執行計畫 C: 31 秒)。



雖然乙同學有將此題的題目念出，但他並未發現此題的眼睛方向有變，還是按照上一題（視圖題）的眼睛方向畫出前視圖。故研究者在乙同學畫完前視圖之後，提醒乙同學此題要從眼睛的方向看過去，乙同學立即反應：「唉叻威，怎麼變這邊，我寫錯了，他眼睛在這邊。」（回顧解答 L：17 秒）然後，研究者給予乙同學另一張新的試卷繼續作答。

乙同學按照前、上、右、後、左視圖的順序，畫出相對應的視圖（執行計畫 C：148 秒），描繪的視圖的方式與上一題（視圖題）相同。在進行左視圖繪畫時，乙同學發現自己不小心混淆了右視圖與左視圖，並提出：「老師可以改嗎，因為左右寫錯，因為它說右，右邊在這邊。」，隨後在試卷上進行更正（回顧解答 L：17 秒），並完成視圖的繪製。



接著，乙同學繼續回答第 2 小題（如何畫出），他說明自己繪製視圖的方式為：「看積木，看方塊，從題目的視角看。我會站起來。站起來從題目視角看。」（執行計畫 C：35 秒）研究者認為，乙同學此次說明的方式較上一題（視圖題）詳細，能更加仔

細的描述自己的解題方式。

2. 你是怎麼畫的呢？
看方塊，從題目的視角看的，我會放起來

回答第 3 小題（視圖關係）時，乙同學花費許多時間仔細對照這一題（視角題）與上一題（視角題）的所有視圖，嘗試找出它們之間關聯性，最後說明：「就，每個積木的位置都不一樣。從每個視角看都長不一樣。」（執行計畫 C：227 秒）研究者認為，上述兩點發現與上一題（視圖題）的第 3 小題回答是類似的，也就是乙同學並沒有發現視圖之間的關聯性。

3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？
① 從每個視角看都不一樣
② 一個視角對一個視角，發長的不一樣

最後，回答第 4 小題（正確與否）時，乙同學認為自己是正確的，因為自己在拼完立體圖形後，有再有從不同的視角進行觀察與繪製（回顧解答 L：77 秒）。

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？
正確，拼完以後再從題目的視角看。

乙同學在視角題中，全程花費 718 秒。此題的解題時間約是視角題的 3 倍，原因有 2 點，第 1 點是因為乙同學在一開始作答時，他沒有注意到眼睛的方向有所改變，所以衍生額外的作答時間；而第 2 點則是他花費許多時間在觀察觀察此題（視角題）與

上一題（視圖題）的關聯性。此外，他繪製視圖的方式與上一題類似，都是移動自己的身體到相對應的視角後，再進行觀察與描繪。在這 5 個視圖中，只有上視圖的作答正確，其他的視圖繪製都因為視角落差的原因而有部分偏誤，這也是他無法找到視圖關聯性的原因之一。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖									
1.了解問題 (U)	■									
2.擬訂計畫 (P)		■								
3.執行計畫 (C)			■		■		■			
4.回顧解答 (L)				■			■			■
時間 (秒)	31	35	31	19	148	31	296		77	718

圖 4-2 乙視角題解題歷程時間序列圖

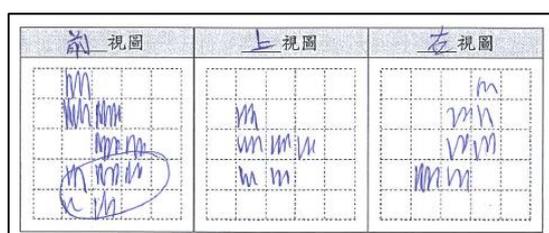
3. 隱藏題

乙同學先閱讀題目的 4 個小題（了解問題 U：35 秒），開始進行題目的第一個部分（畫出 3 個視圖）。這次也是由前視圖開始作答。乙同學先利用方塊積木排出立體圖形，直覺性的認定立體圖形的沒有隱藏的積木（擬訂計畫 P：39 秒）。然後，乙同學站起身子後蹲下觀察，一格一格地描繪前視圖（執行計畫 C：82 秒）。

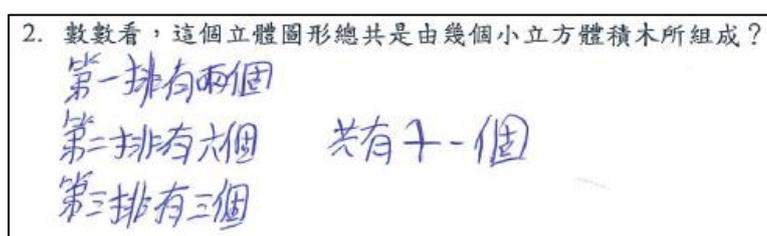


由於此題（隱藏題）的前視圖較上兩題（視圖題、視角題）

複雜，乙同學畫到一半時就開始檢查，並說明：「欸，可是前面。這一個沒辦法，因為它上面兩個，阿然後這格畫這邊的話，因為我要把這個畫出來，然後如果畫在這邊的話他們不是平的……這樣就怪怪的……」（回顧解答 L：80 秒）研究者認為，因為乙同學在描繪視圖時有視角落差的狀況，所以此題的前視圖對於乙同學是較為困難的。在乙同學思考一陣子之後，由於他無法確定要怎麼描繪前視圖，故研究者先請他將不會畫的部分圈起來。乙同學隨後繼續作答上視圖與右視圖（執行計畫 C：89 秒）。



接著，乙同學開始解第 2 小題（計數積木），他將立體圖形按照前面第一排、中間第二排、後面第三排分別拆解，並逐項計數後加總方塊積木的數量，算出共有 11 個積木。在回答第 3 小題時（其他可能），乙同學不假思索的直接回答沒有其他可能，研究者認為他並無察覺這個立體圖形中，可能隱藏著其他的方塊積木。（執行計畫 C：129 秒）



進行第 4 小題（正確與否）時，乙同學認為自己的作答是正確的，原因也與上兩題（視圖題和視角題）相同，他說明自己先拼出立體圖形後，再從不同的視角進行確認與驗證（回顧解答 L：72 秒）。

乙同學在隱藏題中，全程花費 541 秒。其中，前視圖的繪製過程為 173 秒，約占隱藏題的全程花費時間的 1/3，主要的關係是觀察視角的落差所造成繪製上的困難。另外，乙同學並無察覺到此題的立體圖形中，可能隱藏的方塊積木，研究者也從乙同學的上視圖作答中，再次確認他並沒有察覺隱藏積木的信息。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
1.了解問題 (U)	■						
2.擬訂計畫 (P)		■					
3.執行計畫 (C)			■		■		
4.回顧解答 (L)				■		■	
時間 (秒)	35	39	82	83	226	76	541

圖 4-3 乙隱藏題解題歷程時間序列圖

4. 拿取題

乙同學先閱讀題目的 3 個小題（了解問題 U：27 秒），開始進行題目的第一個部分（畫出 2 個視圖），並利用方塊積木排出題目中的立體圖形（擬訂計畫 P：11 秒）。然後，他按照前視圖與右視圖的順序，依序畫出相對應的視圖，繪製視圖的方式也與前三題（視圖題、視角題、隱藏題）相同（執行計畫 C：50 秒）。



乙同學接著進行第 2 小題(拿取 1 個積木)的解題,他提出:「拿掉 1 個, 1-2-3, 1-2-3, 下面那個可以拿走嗎?」的疑問(了解問題 U: 56 秒)。研究者認為, 乙同學這句話的意思是在說明自己拿取積木的方式, 同時確認在取走 1 個積木之後, 是否允許立體圖形呈現懸空的狀況。在確認之後, 乙同學利用方塊積木嘗試擺出各種可能性, 觀察並找出 2 種可能的答案(執行計畫 C: 216 秒), 然後他分別繪製這 2 種答案的前視圖與右視圖(表 4-3), 並與原本的前視圖與右視圖相互比較, 嘗試檢驗這 2 種答案的正確性,(回顧解答 L: 128 秒)。比較之後他回答:「沒有, 沒有。」(執行計畫 C: 12 秒), 並刪去了這 2 種可能的答案。

表 4-3 乙同學拿取題之作答

	原始立題圖形	答案一	答案二												
立體圖形															
對應作答	<table border="1"> <tr> <td>前視圖</td> <td>右視圖</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table>	前視圖	右視圖			<table border="1"> <tr> <td>前視圖</td> <td>右視圖</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table>	前視圖	右視圖			<table border="1"> <tr> <td>前視圖</td> <td>右視圖</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table>	前視圖	右視圖		
前視圖	右視圖														
前視圖	右視圖														
前視圖	右視圖														

最後回答第 3 小題(正確與否)時, 乙同學認為自己是正確的, 原因與前三題(視圖題、視角題、隱藏題)相同, 他說明自

己：「有用方塊試過，和從前、右視角看。」進行確認與驗證（回顧解答 L：42 秒）。乙同學在拿取題中，全程花費 536 秒。因拿取題的立體圖形較為簡單，乙同學能夠正確地描繪出前視圖與右視圖的圖形。而在回答第 2 小題（拿取 1 個積木）時，雖然乙同學有找到其中 2 種可能性，卻因為視角落差的關係畫出錯誤的前視圖與右視圖，比對檢查後他反而刪去了正確的 2 種答案。研究者認為，即使乙同學可以找到正確的答案，但如果視圖描繪的方式有所偏誤，這樣反而會影響到他後續的作答判斷。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖									
1.了解問題 (U)	■			■						
2.擬訂計畫 (P)		■								
3.執行計畫 (C)			■		■	■		■		
4.回顧解答 (L)						■		■		
時間 (秒)	27	11	50	56	218	128	14	42	536	

圖 4-4 乙拿取題解題歷程時間序列圖

(二) 丙同學 (中分者)

1. 視圖題

丙同學先閱讀題目，並看著題目中的圖片，在還未閱讀到第 1 小題時，向研究者詢問：「老師我可以弄這個 (積木) 嗎？」隨後繼續閱讀下面的 4 個小題 (了解問題 U：33 秒)，並利用研究者提供的方塊積木排出立體圖形 (擬訂計畫 P：26 秒)。



接著，丙同學按照第 1 小題的要求，在學習單上依序填上「前」、「上」、「右」、「後」、「左」，代表共有 5 個目標。她從前視圖開始描繪，將立體圖形後方的積木，依序水平地往前移動，並在前方觀察移動後的方塊積木，然後由左至右、一條一條地描繪出前視圖的外框後填滿，畫出前視圖的圖形，完成第 1 個目標。其繪圖的區域集中在作答區的左下角。(執行計畫 C：55 秒)



當前視圖描繪完成後，丙同學將桌上的方塊積木還原。她下一個目標則是「上」視圖了，這一次，她並不搬移積木，而是本

人站起身子，俯瞰立體圖形，繪製出上視圖，完成第 2 個目標（執行計畫 C：69 秒）。第 3 個目標，是「右」視圖，她身體坐下來，手將積木從前方由逆時針轉 90 度，開始繪製右視圖，其繪圖方法與「前」視圖類似，水平移動後方的積木至前方，然後先以最長的左邊開始長條型地的描繪外框，填滿後依序完成右視圖。（執行計畫 C：128 秒）

第 4 個目標，丙同學描繪「後」視圖，方法與前視圖與右視圖相同，皆是旋轉積木，然後將後方的積木水平移動到前方，觀察後繪製。丙同學在描繪「後」視圖時，有具體說出自己所採取的策略為：「我要畫後視圖，我先旋轉積木，好。我先畫中間的，因為這個比較長。好了。」（執行計畫 C：51 秒）

最後一個目標是畫「左」視圖，也是運用搬移積木的方式（執行計畫 C：36 秒），但在重組積木的過程中，丙同學有進行檢查：「我把他那個，恢復。疑，怎麼少 1 個，還是我做錯了，好沒有拉，他只是跑去這邊。」（回顧解答 L：28 秒）研究者觀察得知，丙同學能自己檢查出在旋轉及搬移的過程時所發生的錯誤。

到回答第 2 小題（如何畫出）時，丙同學說明自己的作法是：「排出形狀，然後把空位補滿，就是把積木往前移。好了。就是，

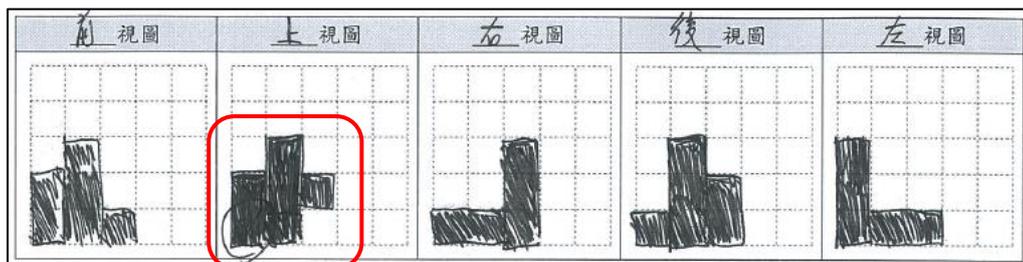
先畫長，再畫比較短的。好。」(執行計畫 C：106 秒) 丙同學的意思是說，在畫視圖時，她會從按視圖的長度，依照 3 格、2 格、1 格的順序畫出，這也與她的作答方式相互呼應。

2. 你是怎麼畫的呢？
拿積木，排形狀，把空位補滿
先畫長再短

針對第 3 小題 (視圖關係)，丙同學只有發現：「就形狀一直變阿。然後咧，沒有拉。」(執行計畫 C：53 秒) 研究者認為此時丙同學還尚未發現視圖之間的關係。

3. 從五個視圖之中，你發現了什麼？
形狀一直變

回答第 4 小題 (正確與否) 時，丙同學認為自己的作答是正確的，並逐項檢查視圖的正確性。其中，丙同學檢查上視圖時，發現自己畫錯，她圈出畫錯的地方 (下圖方框所示) 並重新繪製在另一張試卷之中。(回顧解答 L：186 秒)



在視圖題中，全程花費時間為 748 秒。依序檢查視圖的正確性使回顧階段約占 1/4。而視圖的繪畫區域集中在左下 3*3 的方格之中。在描繪視圖之前，丙同學先利用方塊積木拼出立體圖形，除了上視圖是站起身子俯瞰觀察，其他 4 個視圖的繪製方式，都是轉動積木到相對應的方向後，藉由水平移動後方積木至前方，觀察積木的形狀後，長條狀地依序描出外框後填滿。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
1.了解問題 (U)							
2.擬訂計畫 (P)							
3.執行計畫 (C)							
4.回顧解答 (L)							*
時間 (秒)	34	26	280	28	194	186	748

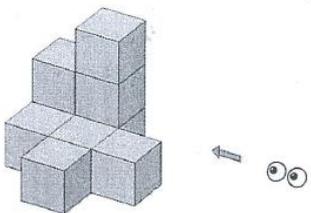
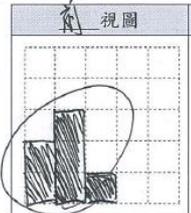
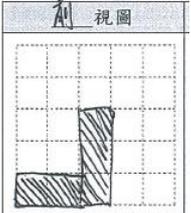
圖 4-5 丙視圖題解題歷程時間序列圖

2. 視角題

丙同學在開始閱讀題目前，她直接先用方塊積木拼出此題(視角題)的立體圖形(擬訂計畫 P: 9 秒)，隨後繼續閱讀題目的 4 個小題(了解問題 U: 21 秒)，開始進行題目的第一個部分(畫出 5 個視圖)，並規劃此題的視圖繪畫順序(擬訂計畫 P: 17 秒)。但由於丙同學沒有注意到此題的眼睛方向有改變，她還是按照上一題(視圖題)的觀察方向描繪前視圖。待她完成前視圖的描繪後(執行計畫 C: 43 秒)，研究者提醒丙同學此題的眼睛方向，丙同學隨後進行檢查，並說：「第一題是從前視圖.....從眼睛，

他的眼睛怎樣……喔！我又畫錯了，眼睛的方向是……往哪裡看，側面喔……」（回顧解答 L：32 秒）她接著重新組合方塊積木，並旋轉到相對應的方向，然後在新的試卷上先規劃視圖的繪畫順序（擬訂計畫 P：102 秒），隨後繼續作答（表 4-4）。

表 4-4 丙同學視角題前視圖作答

	視角題題目	第一次前視圖作答	第二次前視圖作答
圖示			

丙同學按照「前」、「上」、「右」、「後」、「左」視圖的順序，畫出相對應的視圖，描繪視圖的方式與上一題（視圖題）相同（執行計畫 C：182 秒）。在畫完 5 個視圖後，丙同學將方塊積木恢復原狀並檢查（回顧解答 L：34）。接著，丙同學回答第 2 小題（如何畫出），她說明自己的畫圖方式：「先拿積木，積木，然後排形狀，然後再把空位補滿，好，就這樣。」（執行計畫 C：44 秒）。研究者認為，她的意思是在拼出立體圖形後，沿著觀察的方向，她會由後至前的搬移方塊積木，再進行觀察與描繪。

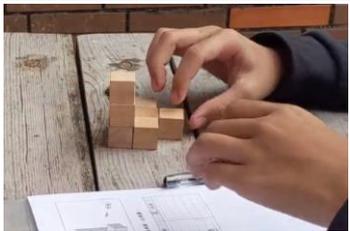
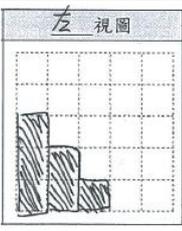
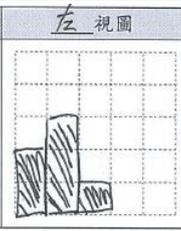
針對第 3 小題（視圖關係），丙同學先觀察此題（視角題）與上一題（視圖題）中的所有視圖，她提出 3 點發現：「視圖不一樣，前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖都不一樣。看的

方位也不一樣。積木的形狀一樣。」(執行計畫 C:219 秒) 研究者認為，乙同學此時並未察覺到這些視圖之間的關聯性。

題目一跟題目二的前、上、右、後、左視圖都不一樣
看的方位不一樣
積木的形狀一樣

回答第 4 小題 (正確與否) 時，丙同學認為自己的作答是正確的，並依序核對前、上、右、後、左視圖的正確性 (回顧解答 L:111 秒)。待檢查到左視圖時，丙同學發現一些錯誤，她先說明畫錯的可能原因為：「可能剛才在後視圖的時候，它不是在這邊嗎，啊我不是往前，然後我沒有把它往後移到原本的位置，所以最後就變成這樣，現在我把它移到這邊。」並重新繪製左視圖。(回顧解答 L:87 秒) 也就是說，在搬移與轉動方塊積木，丙同學可能會不小心遺漏部分的方塊積木，進而造成錯誤 (表 4-5)。

表 4-5 丙同學視角題左視圖作答

	拼錯的立體圖形	第一次左視圖作答	第二次左視圖作答
圖示			

待訂正完成後，丙同學馬上發現此題 (視角題) 與上一題 (視圖題) 視圖之間的關聯性：「所以它的左視圖，會是前視圖。它的後視

圖，會是左視圖。它的右視圖，會是後視圖，它的上視圖會是，會是它這個倒的。然後它的前視圖，疑，前視圖會是右視圖。」並表示其實一開始的時候就有想到這樣的可能性，但是因為左視圖的錯誤，而放棄這樣的想法：「我剛剛就有發現了，只是我再想為什麼這邊，因為他們是一樣的積木，阿為什麼這邊會沒有這樣子的，我就想會不會是這個有錯……」。(回顧解答 L：297 秒)

丙同學解視角題全程花費 1208 秒，歷經 3 次的回顧解答階段，共占 566 秒，約為整體解題過程的 1/2。第 1 次回顧解答是由於沒有注意到眼睛的方向有所改變；第 2 次是發現左視圖的繪圖錯誤；第 3 次則是在繪製正確的左視圖後，所觀察到視角題與視圖題之間的關聯性。但並無發現左、右視圖與前、後視圖之間的對稱性。解題的前半段較專心書寫，會忘記說出自己的想法，所以研究者提醒丙同學要記得邊講邊寫的次數變多，而後半段的解題過程中則有明顯說出自己的想法。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖										
1.了解問題 (U)											*
2.擬訂計畫 (P)											
3.執行計畫 (C)											
4.回顧解答 (L)											
時間 (秒)	9	21	17	43	32	102	182	34	268	500	1208

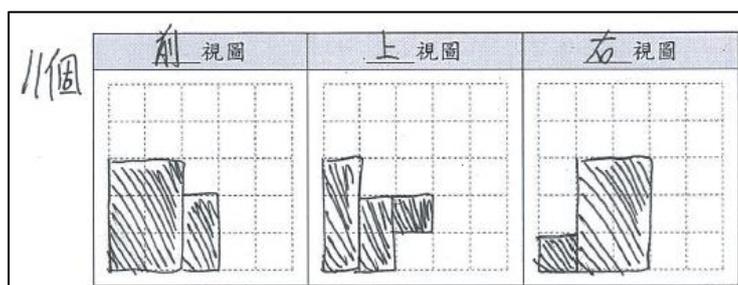
圖 4-6 丙視角題解題歷程時間序列圖

3. 隱藏題

丙同學先閱讀题目的4個小題(了解問題 U:30 秒),隨後利用方塊積木由前而後地排出立體圖形。在排最後一排積木時,丙同學發現:「後面,我不確定這個後面有沒有積木。最後一排的,這個不一定會有。」接著說明自己要依序畫出前視圖、上視圖與右視圖,同時說明:「先假設它後面沒有。」(擬訂計畫 P:123 秒)研究者認為,丙同學在這個時候已經察覺到隱藏積木的可能性。



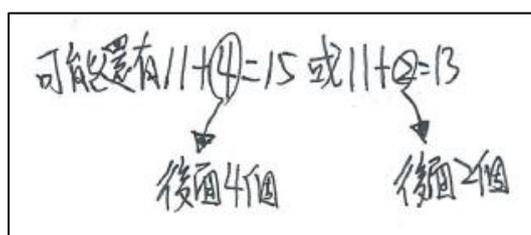
接著,丙同學開始繪製視圖,作法與前兩題(視圖題、視角題)相同。前視圖與右視圖的畫法皆是轉動立體圖形至相對應的方向,水平移動後方的積木至前方,進行觀察後,長條狀地的畫出視圖的圖形;而上視圖的觀察方式則是站起身來,眼睛由上往下俯瞰。(執行計畫 C:109 秒)。



進行第 2 小題時(計數積木)，丙同學表示：「下面的有 6 個，然後中間有 3 個，然後上面有 2 個，所以 6 加 3 加 2，11 個。」

(執行計畫 C：101 秒)。也就是說，她的作法是由底層開始一層一層往上逐層數出，再一併加總。

針對第 3 小題(其他可能)，丙同學直接回答有其他可能，並表示：「可能，還有 1 個吧，或 2 個，還有 4 個或 2 個在後面，4 個是後面這裡，因為這個上面它沒有突出來這邊，所以平的空的，或者是 2 個積木這樣。」丙同學說明這個立體圖形有可能還有 2 種隱藏的情形，第 1 種是在立體圖形的右後方隱藏了 4 個積木，第二種則是隱藏了 2 個積木(執行計畫 C：124 秒)。



最後，丙同學逐項檢查前視圖、上視圖與右視圖的正確性，並認為自己是正確的。(回顧解答 L：93 秒)

丙同學在隱藏題中，全程花費 650 秒。她在一開始利用方塊積木組合立體圖形時，就已經發現隱藏積木的可能性。雖然她列舉出可能隱藏了 2 個或 4 個積木的狀況，但她沒有察覺當在立體

圖形的右後方擺上 2 個或 4 個積木時，立體圖形的圖示則將不符合題意。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖				
1.了解問題 (U)					
2.擬訂計畫 (P)					
3.執行計畫 (C)					
4.回顧解答 (L)					
時間 (秒)	30	123	334	93	650

圖 4-7 丙隱藏題解題歷程時間序列圖

4. 拿取題

丙同學閱讀題目的 3 個小題後 (了解問題 U:21 秒)，直接利用方塊積木排出題目中的立體圖形，並說明自己要依序畫出前視圖與右視圖 (擬訂計畫 P:25 秒)。她描繪視圖的方式也與前三題 (視圖題、視角題、隱藏題) 相同 (執行計畫 C:50 秒)。在畫右視圖時，丙同學有特別說明自己的策略是：「我再把積木往前移，這樣比較，好看清楚，先畫，那個比較長的，再比較短的，好，移回來。」她表示如果將積木水平移動至前方後再進行觀察，就可以看得比較清楚。

接著，丙同學進行第 2 小題 (拿取 1 個積木)，並找出 2 個答案 (表 4-6)。她的解題方式是利用方塊積木先組出此題的立體圖形，然後嘗試拿走其中 1 個方塊積木，再比對前視圖與右視圖是否與原立體圖形相互吻合。(執行計畫 C:283 秒)。

表 4-6 丙同學拿取題之作答

	原始立題圖形	答案一	答案二
圖示			

最後，回答第 3 小題（正確與否）時，丙同學認為自己的答案是正確的，並說明自己的檢查方式是：「這三個部分……我從前視圖做檢查，前視圖到右視圖都有檢查。」（回顧解答 L：98 秒）研究者認為，丙同學的意思是因為自己都有依序重複檢查了，所以答案會是正確的。

丙同學在拿取題中，全程花費 483 秒。雖然拿取題的立體圖形較為簡單，丙同學在繪製視圖時，她也是運用同樣（水平移動後方積木）的策略進行繪圖。此外，丙同學在拿取題中有找到 2 種答案，並且也有驗證這 2 種答案的正確性。研究者推測丙同學沒有找出第 3 種答案的原因是由於她在解題時，並沒有將先各種可能性先列出，再逐項剔除，所造成的遺漏。

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
	1.了解問題 (U)	21	25	58	8	283	98
2.擬訂計畫 (P)							
3.執行計畫 (C)							
4.回顧解答 (L)							
時間 (秒)	21	25	58	8	283	98	483

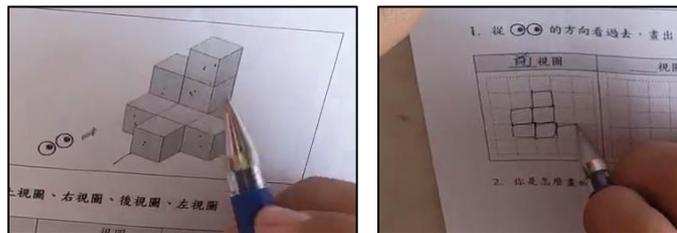
圖 4-8 丙拿取題解題歷程時間序列圖

(三) 丁同學 (高分者)

1. 視圖題

丁同學先閱讀題目中的 4 個小題 (了解問題 U: 25 秒), 接著用筆尖指著此題的圖示, 一邊說明並一邊點數要畫在前視圖中的積木個數: 「從眼睛看過去, 前視圖, 前視圖只有 1-2-3-4-5-6.....」

(擬訂計畫 P: 14 秒)。然後, 丁同學一格一格由上而下、由右而左依序畫出前視圖的圖形, 其作答區域集中於中間 3*3 的方格之中。(執行計畫 C: 14 秒)。

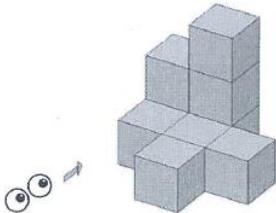
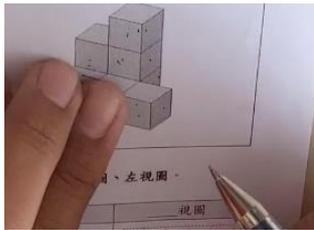
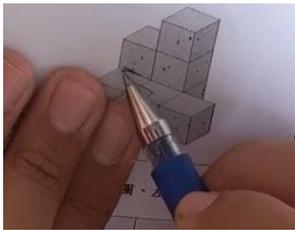


接著, 丁同學說明自己要畫右視圖: 「再來是, 再來是右, 右視圖呢, 我們先看旁邊, 1-2-3-4-5。」研究者認為, 他的意思是說右視圖要從另一個方向 (右方) 看過去。而他描繪右視圖的方式也與前視圖類似, 先點數題本上的圖示, 再依序一格一格地畫出。其作答區域坐落在中間偏左的 3*3 方格之中 (執行計畫 C: 22 秒)。

再來, 丁同學嘗試畫出後視圖 (表 4-7)。在畫後視圖之前, 他先剔除不會出現在後視圖中的積木: 「後視圖就不要管這 1 顆,

這 1 顆沒有用，然後用想，就這 3 顆阿，這 3 顆不用看……」然後說明立體圖形的圖示中，中間有 1 個積木是看不到，但卻是要畫在後視圖中的：「只要看這 1-2-3-4-5-6，中間這裡還有 1 顆……」丁同學一樣是在圖示中一邊點數，一邊依序一格一格的畫出後視圖的圖形。其作答區域坐落在中間的 3*3 方格之中(執行計畫 C：41 秒)。

表 4-7 丁同學視圖題後視圖作答流程

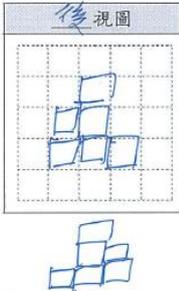
	視圖題題目	用手指遮住不用畫的三顆積木	用筆尖說明看不到但是要畫出來的積木
圖示			

完成後視圖的描繪後，丁同學繼續畫左視圖。如同後視圖的繪畫方式，他一樣是先剔除不用畫出來的積木，然後一邊點數一邊依序畫出後視圖(執行計畫 C：48 秒)。但畫到一半時，丁同學喃喃自語地說：「1-2-3，3 在這裡，然後 4 在旁邊，旁邊的話在這裡……欸，不會的問題……」於是他停下筆，並在白紙上利用方塊積木拼出立體圖形(擬訂計畫 P：12 秒)。

待拼出立體圖形後，他先水平旋轉白紙到不同角度進行觀察，並依序檢查前視圖、右視圖以及後視圖的正確性。隨後，他發現

後視圖的圖形畫反了（表 4-8），並在作答區下方畫出正確的後視圖（回顧解答 L：36 秒）。

表 4-8 丁同學視圖題後視圖修改流程

	水平旋轉 A4 白紙到觀察方向	修改後的後視圖
圖示		

修改完後視圖，丁同學繼續左視圖的作圖。其描繪的方式不再是運用點數後依序畫出，而是水平轉動白紙，將立體圖形轉到左視圖的觀察方向，把後方的積木往觀察方向水平移動後，再畫出左視圖（執行計畫 C：37 秒）。接著，他水平轉動白紙，將立體圖形轉向前視圖的觀察方向，然後把積木恢復成原本的狀態，用手指點出要畫出在上視圖中的積木並繪製上視圖（執行計畫 C：24 秒）。

丁同學繼續回答第 2 小題（如何畫出），說明自己的作法是：

「從這裡的角度看，然後再用想像的去畫。好。然後，想像的是 2 個，這 3 個，我是先，恩，就是，我是先拼起來，然後再轉。」

（執行計畫 C：112 秒）研究者認為，丁同學的意思是指前、右視圖的描繪方式是先想像後再畫出來；後、左、上是圖則是利用

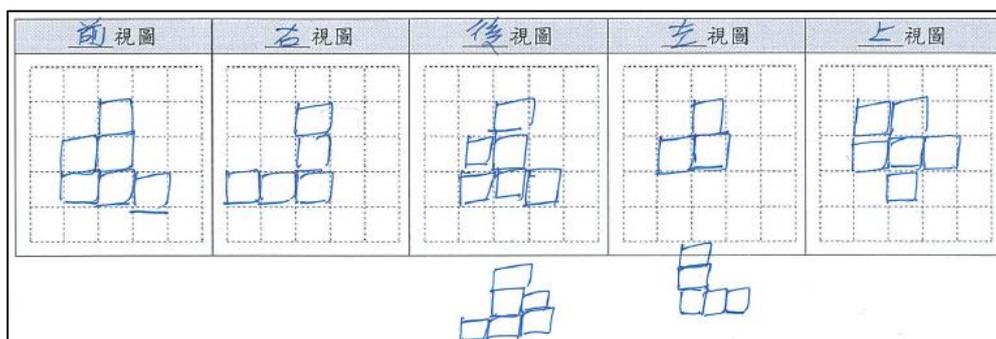
拼出的方塊積木，進行觀察後再畫出。

2. 你是怎麼畫的呢?
 (前右) 我是從前面看用多個角度想像
 (後生上) 先拼起來然後再畫

針對第 3 小題（視圖關係），丁同學除了發現前、後視圖與左、右視圖都很相似之外，還額外補充說明：「上視圖只有 1 個嘛，因為角度，因為下視圖看不見嘛……」他指出，如果看的到下視圖，則下視圖與上視圖的圖案會一樣，但方向會不同。（執行計畫 C：205 秒）

前後都很相似
 左右也很相似
 上視圖只有一個，因為看不到下視圖，如果下視圖看的到圖案會一樣，但方向不同。

回答第 4 小題時（正確與否），丁同學認為自己的作答是正確的，他表示自己有從不同的角度去觀察立體圖形：「只要你的拼圖，從不同角度看，你就是對的……」（回顧解答 L：46 秒）也就是說，丁同學覺得自己已經有按照題目的指示作答，並又再檢查一次，所以答案會是正確的。



丁同學在視圖題中，全程花費時間為 626 秒。其繪製視圖的方式有 3 種：第 1 種是觀察題目上的圖示並進行點數；第 2 種則是用想像的；第 3 種則是拼出立體圖形後進行觀察。前視圖繪製時間為 14 秒，其他 4 個視圖也能在 1 分鐘內完成繪製。而作答區域大部分集中於中間 3*3 的位置上。除了 5 個視圖之外，丁同學也有提出下視圖的可能性，並在沒有畫出下視圖的狀況下，藉由觀察左、右視圖與前、後視圖的關聯，推測出上、下視圖的可能示圖案相同但方向相反的情形。

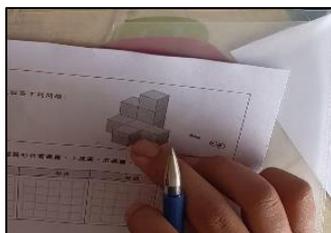
Polya 階段	解題歷程時間序列圖							
1.了解問題 (U)								
2.擬訂計畫 (P)								
3.執行計畫 (C)								
4.回顧解答 (L)								*
時間 (秒)	25	14	125	12	36	378	46	626

圖 4-9 丁視圖題解題歷程時間序列圖

2. 視角題

丁同學先閱讀題目的 4 個小題 (了解問題 U: 28 秒)，開始進行題目的第一個部分 (畫出 5 個視圖)，他直接繪製前視圖，並說明：「前視圖，就跟剛才 (視圖題) 一樣，只是方向不一樣，因為剛才是右視圖……」研究者認為，他在畫這一題 (視角題) 的視圖時，就已經察覺到此題和前一題 (視圖題) 之間的關係。

他繪製前視圖的方法就如同上一題的前視圖一般，皆是直接點數立體圖形的圖示，然後依序一格一格地畫出(執行計畫 C:31 秒)。



接著，丁同學依序畫出右、後、左視圖，在畫出這三個視圖之前，他都會先說明此題(視角題)與上一題(視圖題)中，不同視圖之間的關聯性，例如：「然後再來是右視圖，是剛才的後視圖。」其繪製的視圖方式與前視圖的繪製方式相同，皆是點數並作記號，然後依序畫出視圖(執行計畫 C:114 秒)。

再來，丁同學開始畫上視圖，畫上視圖的方法如同上述 4 個視圖，他認為：「上視圖，只要朝上的就是上視圖，所以這上面 1-2-3-4-5-6，就會 6 顆。」但他並沒有注意到上視圖的方向也會隨著前視圖的方向而有所改變(執行計畫 C:25 秒)。

丁同學繼續回答第 2 小題(如何畫出)，說明自己的畫圖方式是利用想像的：「就是頭腦想像出這個東西，然後從各個方面看，就會有那個圖形。」(執行計畫 C:61 秒)研究者認為，丁同學所使用的繪圖策略為「產生心像」後再由不同方向觀察畫出。

針對第 3 小題（視圖關係），丁同學先觀察此題（視角題）與上一題（視圖題）中的所有視圖，他提出：「圖二（視角題）的前視圖，是圖一（視圖題）的右視圖。」然後他進一步地指出：「它這樣子繞過去，所以圖剛好繞一圈。好。」（執行計畫 C：121 秒）研究者認為，丁同學除了能發現視圖之間的關聯性之外，他更能察覺到從不同視角看相同的立體圖形時，觀察方向與視圖之間的變化性。

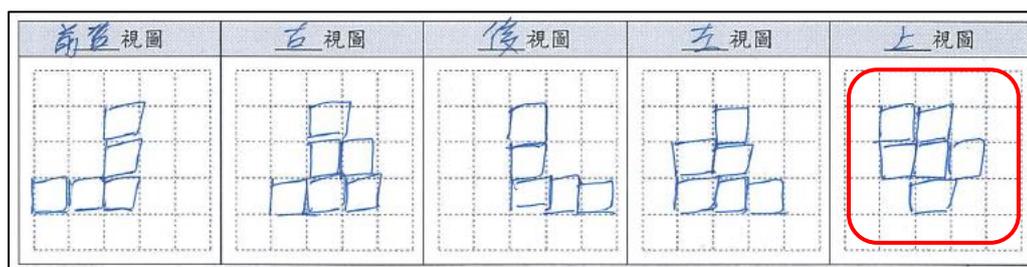
A rectangular box containing handwritten Chinese text in blue ink. The text reads: "圖二的前視圖是圖一的右視圖" on the top line and "就是圖繞一圈" on the bottom line.

回答第 4 小題時（正確與否），丁同學認為自己的作答是正確的。他除了用方塊積木拼出立體圖形進行檢查之外，也利用上一題（視圖題）的所畫出的 5 個視圖，來逐項核對此題（視角題）的答案。（回顧解答 L：133 秒）

丁同學解視角題全程花費 513 秒。了解問題階段占 28 秒，執行計畫階段占 352 秒，回顧解答階段占 133 秒，由於視角題與視圖題的題目相似，丁同學在視角題中並沒有明顯的擬定計畫的歷程。解題策略的選擇上，即使丁同學在視圖題中最後是使用方塊積木拼成立體圖形的策略才解題成功，他在視角題仍然先使用想像與點數的方式進行視圖的描繪，然後在回顧階段時才使用拼出

積木觀察的策略進行檢查。

值得注意的有 2 點，第 1 點是丁同學在進行第 3 小題（視圖關係）之前，他就已經點出視角題與視圖題的關聯性，他更進一步地說明這兩題的前、右、後、左視圖會剛好繞了一圈，只是眼睛看過去的方向不同而已。第 2 點，雖然丁同學有用 2 種方式進行檢查，但他並沒有發現上視圖的方向會隨著前視圖的方向而有所變化（下圖方框所示）。



Polya 階段	解題歷程時間序列圖			
1. 了解問題 (U)				
2. 擬訂計畫 (P)				
3. 執行計畫 (C)				
4. 回顧解答 (L)				
時間 (秒)	28	352	133	513

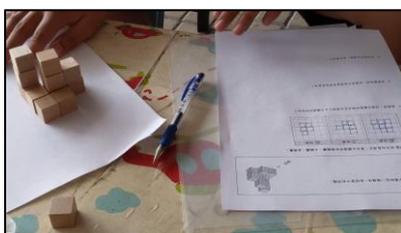
圖 4-10 丁視角題解題歷程時間序列圖

3. 隱藏題

丁同學先閱讀题目的 4 個小題（了解問題 U：32 秒），隨後僅在試卷上利用點數對照的方式，依序畫出前視圖與上視圖（執行計畫 C：53 秒）。但是，右視圖畫到一半的時候，丁同學有些不

確定，於是開始拿方塊積木拼出立體圖形，確認後，再描繪出右視圖，他表示：「確認一下（開始拼積木），是這樣子，所以右視圖是這樣看，是平行的，這樣子，然後旁邊這裡還有嘛，這樣子。」

（執行計畫 C：129 秒）。研究者認為丁同學在遇到比較複雜的視圖時，使用心像繪製視圖的策略對他而言相對困難，所以需要其他的策略輔助來畫出視圖。



接著，丁同學進行第 2 小題（計數積木），由於圖示中有些積木是被擋住的，他表示自己的數積木的策略是：「因為這裡看不到，所以可以組起來，一個一個數，1-2-3，4-5，6-7-8，9-10-11，所以會有 11 個。」也就是他先拼出立體圖形，然後再一個一個慢慢地數（執行計畫 C：52 秒）。

針對第 3 小題（拿取 1 個積木），丁同學覺得可能有其他答案：「如果從這個視角看不到的話，應該會，他應該中間這邊會藏 1 個，裡面這邊會藏 1 個，所以會有 12 個，這裡（比出藏積木的地方），藏在，就死角拉。」（執行計畫 C：52 秒）研究者認為，丁同學所說的死角，是指立體圖形的右後方處，他覺得在視線看

不到的地方可能會隱藏 1 個積木，所以總共會有 12 個。

12個
藏在視線看不到的地方。

最後，丁同學覺得自己是正確的，他說：「像這麼難的題目，就是有地方都是重疊，都會看不到東西，只要用積木拼起來，你就會看到他每一個面……」（回顧解答 L：72 秒）。研究者認為，除了解題之外，丁同學依照題目的語句敘述來判斷題目的難易度，並嘗試理解題目的要求。

丁同學在隱藏題中，全程花費 401 秒。解題的速度變快，解題歷程中也沒有明顯擬訂計畫的階段。繪畫視圖的方式一樣是先用點數後依序畫出，但在描繪比較複雜的右視圖時，丁同學會使用另外一種策略（拼積木）進行解題。另外，丁同學也能察覺在立體圖形死角（右後方），可能會額外隱藏 1 個積木。

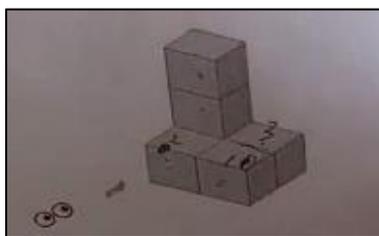
Polya 階段	解題歷程時間序列圖			
1.了解問題 (U)				*
2.擬訂計畫 (P)				
3.執行計畫 (C)				
4.回顧解答 (L)				
時間 (秒)	32	297	72	401

圖 4-11 丁隱藏題解題歷程時間序列圖

4. 拿取題

丁同學先閱讀題目的 3 個小題（了解問題 U：32 秒），隨後利用點數對照的方式，依序畫出前視圖與上視圖（執行計畫 C：35 秒）。在回答第 2 小題（拿取 1 個積木）時，丁同學先說明：「如果要拿走 1 個積木的話，我們可以先拿，先拼出來，然後再用各個角度看，會不會一模一樣……」然後他開始在白紙上利用方塊積木拼出立體圖形（擬訂計畫 P：16 秒）。

接著，丁同學依序拿走底層的積木，他說：「如果是前方看的話，我會先拿掉這個，因為從這邊看的話，畫出來的話，也會畫這個，因為這裡還有一面嘛，所以畫 1-2-3-4-5，所以會一模一樣。」研究者認為，丁同學的意思是，在他拿走 1 個積木之後，要先確認剩下的積木是否吻合題目的要求，待確定後他會在題本的圖示上做記號。在這個階段中，丁同學總共找出 3 種可能性（執行計畫 C：72 秒）。



最後，回答第 3 小題時（正確與否），丁同學認為自己是正確的，他說明自己的檢查方式是：「先拼出來它的立體圖形，然後

從，然後再用，再用各個角度思考怎麼拿掉積木……」（回顧解答 L：89 秒）也就是說，他認為自己正確的原因，是因為自己再進行一次檢查並確認。

不會的話，可以拼出圖片，然後用各個角度思考，拿出來。

丁同學在拿取題中全程花費 244 秒。也因此題的立體圖形較為簡單，丁同學在繪製前視圖與右視圖的時間，分別只有 16 秒與 19 秒，整體解題過程流暢。他在了解問題之後，丁同學直接進入執行計畫的解題階段（畫視圖）。要回答第 2 小題（拿取 1 個積木）之前，才開始擬訂計畫。這也代表丁同學已經熟悉第 1 小題（畫視圖）的題型，可以藉由積累的解題經驗直接進行解題。此外，丁同學是在正式施測時，唯一找出所有的 3 種可能的解題者。（甲同學也有找出）

Polya 階段	解題歷程時間序列圖					
1.了解問題 (U)						
2.擬訂計畫 (P)						
3.執行計畫 (C)						
4.回顧解答 (L)						*
時間 (秒)	32	35	16	72	89	244

圖 4-12 丁拿取題解題歷程時間序列圖

(四) 解題過程的綜合分析比較

根據上述之解題過程分析（預試：甲，正式測試：乙、丙、丁），底下分別針對甲、乙、丙、丁這4位同學之四個題目（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題）的解題過程進行綜合分析比較。綜合分析比較分成2個部分，第1個部分是比較視圖描繪的所花費的時間、正確性以及順序；第2個部分則是比較其三視圖任務的整體解題過程時間，以及比較其解題正確性。以下依照題目順序逐題報告綜合分析之結果，詳述如下：

1. 視圖題

(1) 視圖題—描繪視圖

表 4-9 視圖題—描繪視圖之分析表

參與者	視圖題—描繪視圖時間 (秒/錯誤)					視圖描繪順序
	前	上	右	後	左	
甲	25	18	23	26	20	前、後、右、左、上
乙	<u>73</u>	27	<u>56</u>	<u>24</u>	<u>51</u>	上、右、前、後、左
丙	55	69	69	51	36	前、上、右、後、左
丁	14	24	22	41	85	前、右、後、左、上

第一，在視圖描繪時間方面，四名參與者在視圖題中的 5 個視圖平均描繪時間約為 40.5 秒。其中，丁同學（高分者）繪製前視圖所花費的時間最短，只有 14 秒，但是他在左視圖需花費 85 秒的原因，是由於他先使用「想像」，再運用「拼出立體圖形後觀察」一共 2 種方式進行描繪。第二，在視圖描繪正確性方面，除了乙同學（低分者）因為視角落差造成前、右、後、左視圖的錯誤之外，其他 3 位同學都可以正確的畫出視圖。第三，在視圖描繪順序方面，參與者的視圖描繪順序與其解題策略有關。例如，甲同學從容易觀察的前視圖進行描繪，然後利用對稱的概念畫出後視圖，其繪製視圖的速度也相對較快；乙、丙同學是從容易觀察的方向進行繪製；而丁同學則是繞一圈依序描繪前、右、後、左視圖，再畫出上視圖。

(2) 視圖題—解三視圖任務

Polya 階段	解題歷程時間序列圖							
1.了解問題 (U)							*	
2.擬訂計畫 (P)								
3.執行計畫 (C)								
4.回顧解答 (L)								
時間 (秒)	28	8	112		4	79	18	249

甲視圖題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖					
1.了解問題 (U)						*
2.擬訂計畫 (P)						
3.執行計畫 (C)						
4.回顧解答 (L)						
時間 (秒)	45	27	161		53	286

乙視圖題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖							
1.了解問題 (U)							*	
2.擬訂計畫 (P)								
3.執行計畫 (C)								
4.回顧解答 (L)								
時間 (秒)	34	26	280		28	194	186	748

丙視圖題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖								
1.了解問題 (U)								*	
2.擬訂計畫 (P)									
3.執行計畫 (C)									
4.回顧解答 (L)									
時間 (秒)	25	14	125	12	36	378		46	626

丁視圖題解題歷程時間序列圖

第一，在解題過程時間方面，由視圖題的整體解題過程得知，甲同學歷時最短，共花費 249 秒，其次是丙同學，花費 286 秒，再來是丁同學，花費 626 秒，最長的則是丙同學，花費 748 秒。

表 4-10 視圖題—解三視圖任務之分析表

參與者	解題成功	解題時間 (秒)					解題階段順序
		總共	U	P	C	L	
甲	*	249	28	12	191	18	UPCPCL
乙		286	45	27	161	53	UPCL
丙	*	748	34	26	474	214	UPCLCL
丁	*	626	25	26	503	82	UPCPCL

在了解問題階段中，乙同學（低分者）費時最長，共歷時 45 秒，丁同學（高分者）最短，歷時 25 秒。乙同學花費時間較長的原因，是由於其讀題的語速相對其他參與者來的較慢。另外，在擬訂計畫階段中，這 4 位同學皆花費不到 30 秒。其中，丙同學與丁同學解題花費時間較長的原因，是由於在作答過程時，他們都有檢查出自己的錯誤，並嘗試修正。所以在執行計畫階段以及整體解題歷程中，這 2 位同學所花費的時間都相對較多。另外，由於丙同學會逐題重複檢查視圖的正確性，其回顧解答階段最長，總共歷經 214 秒。第二，在解題正確性方面，參與者甲、丙、丁解題成功，這三位同學皆能正確地畫出 5 個視圖，並說明它們之間的關聯性。其中，甲與丁同學更能指出左、右視圖以及前、後視圖的左右對稱性。

2. 視角題

(1) 視角題—描繪視圖

表 4-11 視角題—描繪視圖之分析表

參與者	視角題—描繪視圖時間（秒／錯誤）					視圖描繪順序
	前	上	右	後	左	
甲	13	23	14	15	22	前、後、左、右、上
乙	<u>76</u>	29	<u>41</u>	<u>33</u>	<u>22</u>	前、上、左、後、右
丙	61	37	37	36	38	前、上、右、後、左
丁	31	<u>25</u>	43	44	27	前、右、後、左、上

第一，在視圖描繪時間方面，四名參與者在視角題的 5 個視圖平均描繪時間約為 33.4 秒，較上一題（視圖題）描繪視圖的速度來的快，研究者推測原因有 2 點，第 1 點是參與者們已經慢慢熟悉整體的解題方式；第 2 點則是因為此題（視角題）與上一題（視圖題）的差異之處只在於觀察的方向不同，但這兩題所要描繪的目標（立體圖形）是相同。第二，在視圖描繪正確性方面，除了乙同學（低分者）因為視角落差的關係畫出錯誤的前、右、後、左視圖，以及丁同學因為混淆上視圖的觀察方向之外，其他視圖皆能正確地畫出，而正確的視圖繪製時間大多坐落在 15~40 秒之間。第三，在視圖描繪順序方面，只有甲與乙同學在此題的視圖描繪順序有些許不同，原因是他們會從容易觀察的方向進行繪製，例如視圖題時比較容易觀察的為前、上、右視圖，而視角題中比較容易觀察的為前、上、左視圖。

(2) 視角題—解三視圖任務

Polya 階段	解題歷程時間序列圖					
1.了解問題 (U)					*	
2.擬訂計畫 (P)						
3.執行計畫 (C)						
4.回顧解答 (L)						
時間 (秒)	27	13	219		43	302

甲視角題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖									
1.了解問題 (U)										*
2.擬訂計畫 (P)										
3.執行計畫 (C)										
4.回顧解答 (L)										
時間 (秒)	31	35	31	19	148	31	296		77	718

乙視角題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖											
1.了解問題 (U)												*
2.擬訂計畫 (P)												
3.執行計畫 (C)												
4.回顧解答 (L)												
時間 (秒)	9	21	17	43	32	102	182	34	268		500	1208

丙視角題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖				
1.了解問題 (U)				*	
2.擬訂計畫 (P)					
3.執行計畫 (C)					
4.回顧解答 (L)					
時間 (秒)	28	352		133	513

丁視角題解題歷程時間序列圖

第一，在解題過程時間方面，由視角題的整體解題過程得知，甲同學歷時最短，共花費 302 秒，其次是丁同學，花費 513 秒，再來是乙同學，花費 718 秒，最長的則是丙同學，花費 1208 秒。

表 4-12 視角題—解三視圖任務之分析表

參與者	解題成功	解題時間（秒）					解題階段順序
		總共	U	P	C	L	
甲	*	302	27	13	219	43	UPCL
乙		718	31	35	475	127	UPCLCLCL
丙	*	1208	21	128	493	566	PUPCLPCLCL
丁		513	28	0	352	133	UCL

這 4 位參與者在理解問題階段的花費時間差距不大，坐落於 30 秒左右。其中，丙同學回顧解答階段最長，共計 566 秒，原因是她繪製視圖的策略，在搬移積木的過程中不小心造成錯誤，這也是為什麼她會在執行計畫與回顧解答階段中來回遷移，以及整體解題時間較長的原因。另外，丁同學（高分者）沒有明顯的擬定計畫階段，研究者推測是因為此題（視角題）與上一題（視圖題）的題目類似，所以他在看到題目之後，就直接進行執行計畫階段，同時，他此題的解題階段順序也比上一題的過程更加順暢。

第二，在解題正確性方面，只有參與者甲、丙解題成功，兩位同學都能正確的畫出視圖，以及說明視圖題與視角題中 5 個視圖的關聯性。雖然丁同學有找出視角題與視圖題中 5 個視圖的關聯性，但由於上視圖作答錯誤，故不算成功解題。

3. 隱藏題

(1) 隱藏題—描繪視圖

表 4-13 隱藏題—描繪視圖之分析表

參與者	隱藏題—描繪視圖時間 (秒/錯誤)			視圖描繪順序
	前	上	右	
甲	18	26	16	前、上、右
乙	<u>82</u>	29	<u>60</u>	
丙	28	45	36	
丁	26	27	129	

第一，在視圖描繪時間方面，隱藏題的3個視圖平均繪製時間約為43.5秒。值得注意的是，丁同學的右視圖繪製時間為129秒，會花較長的時間之原因與他選擇的策略有所關係。他在畫右視圖時先利用「點數記號」的策略進行繪製，但畫到一半的時候發現過於複雜，而改為採用「拼出立體」的策略繼續完成，所以在時間花費上相較其他視圖高出許多。第二，在視圖描繪正確性方面，除了乙同學之外，其他3位參與者都能正確地畫出3個視圖，正確的視圖繪製時間大多坐落在15~40秒之間。乙同學描繪視圖錯誤的原因，也是由於「視角落差」的描繪困難所造成的。第三，在視圖描繪順序方面，由於隱藏題只需要畫出3個視圖，這4位參與者的視圖描繪順序皆是前、上、右視圖，並沒有像視圖題與視角題一樣，因參與者所選擇的繪製視圖策略之不同，而造成的繪圖順序不同之情形。

(2) 隱藏題—解三視圖任務

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
1.了解問題 (U)							*
2.擬訂計畫 (P)							
3.執行計畫 (C)							
4.回顧解答 (L)							
時間 (秒)	31	8	60	55	98	30	282

甲隱藏題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
1.了解問題 (U)							
2.擬訂計畫 (P)							
3.執行計畫 (C)							
4.回顧解答 (L)							
時間 (秒)	35	39	82	83	226	76	541

乙隱藏題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖					
1.了解問題 (U)						
2.擬訂計畫 (P)						
3.執行計畫 (C)						
4.回顧解答 (L)						
時間 (秒)	30	123		334	93	650

丙隱藏題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖				
1.了解問題 (U)					
2.擬訂計畫 (P)					
3.執行計畫 (C)					
4.回顧解答 (L)					
時間 (秒)	32		297	72	401

丁隱藏題解題歷程時間序列圖

第一，在解題過程時間方面，由隱藏題的整體解題過程得知，甲同學歷時最短，共花費 282 秒，其次是丁同學，花費 401 秒，再來是乙同學，花費 541 秒，最長的則是丙同學，花費 650 秒。

表 4-14 隱藏題—解三視圖任務之分析表

參與者	解題成功	解題時間（秒）					解題階段順序
		總共	U	P	C	L	
甲	*	282	31	63	158	30	UPCPCL
乙		541	35	39	308	159	UPCLCL
丙		650	30	123	334	93	UPCL
丁	*	401	32	0	297	72	UCL

這 4 位參與者皆花費 30 秒左右理解問題。其中，丙同學（中分者）的解題時間最長，她花費 123 秒擬定計畫，詳細說明自己的解題流程後再進行執行計畫階段；相比之下，丁同學（高分者）則沒有明顯的擬訂計畫階段，他在了解問題之後直接進行解題。研究者認為兩者之間的差異，是來自於他們的解題習慣，丙同學面對新題目時較為謹慎，而丁同學則可以藉著做類似的題型（視圖題與視角題）累積解題經驗，並將累積的經驗運用於此題（隱藏題）之中。第二，在解題正確性方面，只有甲與丁能正確畫出 3 個視圖，並合理說明隱藏積木的可能性。乙同學因「視角落差」的困難，無法準確地畫出前視圖，所以花費較多時間進行檢驗，這也是他回顧解答階段花費時間較長的原因。丙同學雖然可以正確畫出 3 個試圖，但卻無法協調視圖的正確性。

4. 拿取題

(1) 拿取題—描繪視圖

表 4-15 拿取題—描繪視圖之分析表

參與者	隱藏題—描繪視圖時間（秒／錯誤）		視圖描繪順序
	前	右	
甲	13	15	前、右
乙	29	21	
丙	28	30	
丁	16	19	

第一，在視圖描繪時間方面，拿取題的 2 個視圖平均繪製時間約為 22.2 秒，比前三題（視圖題、視角題、隱藏題）的平均繪製時間來的短。研究者推測原因為此題（拿取題）的立體圖示較為簡單，只需要 6 個方塊積木即可組成，容易觀察繪製。第二，在視圖描繪正確性方面，這 4 位參與者皆能正確畫出前視圖與右視圖，且視圖繪製時間大約坐落於 15~30 秒之間，而且甲與丁同學（高分者）的繪製速度，明顯的比乙同學（低分者）與丙同學（中分者）的繪製速度較快。第三，在視圖描繪順序方面，由於隱藏題只需要畫出 2 個視圖，這 4 位參與者的視圖描繪順序皆是先畫前視圖再畫出右視圖，並沒有因為策略選擇而造成不同的繪製視圖順序。

(2) 拿取題一解三視圖任務

Polya 階段	解題歷程時間序列圖							
1.了解問題 (U)								
2.擬訂計畫 (P)								
3.執行計畫 (C)								
4.回顧解答 (L)								*
時間 (秒)	30	4	28	7	11	153	101	334

甲拿取題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖								
1.了解問題 (U)									
2.擬訂計畫 (P)									
3.執行計畫 (C)									
4.回顧解答 (L)									
時間 (秒)	27	11	50	56	218	128	14	42	536

乙拿取題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖							
1.了解問題 (U)								
2.擬訂計畫 (P)								
3.執行計畫 (C)								
4.回顧解答 (L)								
時間 (秒)	21	25	58	8	283	98		483

丙拿取題解題歷程時間序列圖

Polya 階段	解題歷程時間序列圖						
1.了解問題 (U)							
2.擬訂計畫 (P)							
3.執行計畫 (C)							
4.回顧解答 (L)							*
時間 (秒)	32	35	16	72	89		244

丁拿取題解題歷程時間序列圖

第一，在解題過程時間方面，由拿取題的整體解題過程得知，丁同學歷時最短，共花費 244 秒，其次是丁同學，花費 334 秒，再來是丙同學，花費 483 秒，最長的則是乙同學，花費 536 秒。

表 4-16 拿取題—解三視圖任務之分析表

參與者	解題成功	解題時間 (秒)					解題階段順序
		總共	U	P	C	L	
甲	*	334	37	15	161	101	UPCUPCL
乙		536	83	11	282	170	UPCUCLCL
丙		483	29	25	341	98	UPCUCL
丁	*	244	32	16	107	89	UCPCL

在理解題目階段，甲、丙、丁同學花費 30 秒左右理解問題，而乙同學花費的時間較其他 3 人來的長，共使用 83 秒，其中 27 秒進行閱讀題目，而剩餘的 56 秒則是利用方塊積木來理解「拿走一個積木」的這個條件所代表的意思。在執行計畫階段，丙同學共計花費 341 秒，其中有 283 秒都是在嘗試找出符合題意的可能性。第二，在解題正確性方面，只有甲與丁兩位同學可以正確的畫出 2 個視圖，並找出拿取題中的 3 種可能性。乙同學進行第 2 小題（拿取 1 個積木）時，雖然有先提出 2 種可能性（而且是正確的），但在檢查時，又因為錯誤的視圖造成誤判，也因此刪去了正確的可能性，同時也在檢查上花費不少時間，共計 170 秒，這也是他在回顧階段費時最長的原因。丙同學雖然仔細的解題，在執行階段花費 341 秒，但第 2 小題中只找到 2 種可能性。

第二節 三視圖任務之解題策略探討

本節主要由甲、乙、丙、丁這 4 位參與者的原案資料中，歸納出不同的三視圖解題策略，延續預試（甲同學）的分析結果，本結分成 3 個部分進行探討，第 1 部分主要探討描繪三視圖時，各個參與者所使用的策略；第 2 部分是歸納參與者在解 4 種不同三視圖題型（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題）時所使用的策略；第 3 部分則是策略的綜合分析比較。

（一）描繪三視圖之策略

研究者從 4 位參與者的解題過程中，歸納出下列 10 種描繪三視圖之策略（表 4-17），並區分成 2 種類型，第 1 種類型是不使用方塊積木的策略，第 2 種類型是使用方塊積木後所衍生出的策略，詳述如下：

表 4-17 描繪三視圖之策略表

描繪三視圖之策略		參與者			
		甲	乙	丙	丁
1. 單純紙筆	1. 直接觀察	V	V	V	V
	2. 產生心像	V			V
	3. 從易到難	V	V		
	4. 用對稱性	V			
	5. 翻起題本	V			
	6. 點數記號				V
2. 使用積木	1. 拼出立體		V	V	V
	2. 移動視角		V	V	
	3. 轉動立體			V	V
	4. 水平移動			V	V

1. 單純使用紙筆的策略：

(1) 直接觀察（甲、乙、丙、丁）

這4位參與者可以藉由「直接觀察」試題中的圖示，進而理解這個2D 平面圖示所代表的意義是3D 的立體圖形。

(2) 產生心像（甲、丁）

在「直接觀察」試題中的圖示之後，甲與丁（高分者）可以在腦海中產生立體圖形的心像，並按照題目的要求，在腦海中旋轉立體圖形的心像，並由題目要求的觀察方向畫出視圖。

(3) 從易到難（甲、乙）

甲與乙（低分者）在觀察試題中的圖示之後，調整自己繪製視圖的順序，從比較容易畫出來的視圖開始繪製。例如：視圖題中較容易觀察的是前、上、右視圖；而視角題中容易觀察的則是前、上、左視圖。

(4) 用對稱性（甲）

甲同學在「直接觀察」立體圖形後，先心像的方式畫出前視圖，採用視圖的對稱性直接畫出後視圖。接著，她由容易觀察的右視圖著手進行繪製，再次利用視圖的對稱性畫出左視圖。

(5) 翻起題本（甲）

進行上視圖的繪製時，甲同學會捏著試題本的右上角，向上傾斜一些高度翻起試題本觀察。

(6) 點數記號（丁）

丁同學繪製視圖的策略相當多元。在描繪視圖題的前、右、後視圖時，他會在題本上的圖示上一邊點數並做記號，並依序對照視圖的位置。

2. 使用方塊積木的策略：

(1) 拼出立體（乙、丙、丁）

乙、丙、丁三位同學在「直接觀察」試題的圖示後，運用研究者所提供的原木積木方塊，並使用「拼出立體」的策略，建立起真實的3D立體圖形。

(2) 移動視角（乙、丙）

在「拼出立體」後，乙、丙同學會採用「移動視角」解題。這個策略又可分成2種，第1種是在描繪前、右、後、左視圖時，乙同學蹲下身子，使視角盡量與方塊積木呈平行後進行觀察後描繪。第2種是描繪上視圖時，乙、丙同學則會由前視圖的觀察方向，站起身來俯瞰整個立體積木進行觀察。

(3) 轉動立體（丙、丁）

在描繪前、右、後、左視圖時，丙同學與丁位同學會依照題目的要求，不移動自己的身體，而是轉動立體積木到欲觀察的方向後再描繪視圖。

(4) 水平移動（丙、丁）

丙、丁兩位同學會使用「水平移動」的策略。他們在利用積木拼出立體圖形之後，轉動立體積木到欲觀察的方向，然後將後方的積木，水平地由後至前搬移，如此一來可以較容易地進行觀察。

(二) 解三視圖任務之策略

除了繪製三視圖的策略之外，研究者從4位參與者的解題過程中，歸納出下列6種解三視圖任務之策略（表4-18），詳述如下：

表 4-18 解三視圖任務之策略表

解三視圖任務之策略	參與者			
	甲	乙	丙	丁
1. 比較異同	V	V	V	V
2. 列舉可能	V	V	V	V
3. 刪除可能	V	V		V
4. 使用工具		V	V	V
5. 類推關聯	V			V
6. 提出假設			V	

1. 比較異同（甲、乙、丙、丁）

這4位參與者在解視圖題與視角題的第3小題（視圖的關聯性）

時，都會使用「比較異同」的策略，逐一比較視圖之間的關係。

另外，在回顧解答階段，參與者們也會使用此策略，確認自己的答案正確性。

2. 列舉可能（甲、乙、丙、丁）

在回答多種可能性時，這4位參與者都會採用「列舉可能」的策略，逐一列出吻合題目要求的可能性，並標記編號。「列舉」策略的表示方式又可分為2類，第1類是用文字直接敘述多種可能性。第2類則是利用畫圖的方式描述多種可能性，例如甲同學在回答拿取題的第2小題（拿取1個積木）時，她會將所有的可能性畫出來。

3. 刪除可能（甲、乙、丁）

在列舉出多種可能性後，甲、乙、丁這三位同學會繼續採用「刪除可能」的策略，將不符合題目要求的可能性刪除。

4. 使用工具（乙、丙、丁）

乙、丙、丁同學則視採取「使用工具」，運用研究者所提供的方塊積木進行解題與檢驗。

5. 類推關聯（甲、丁）

在視圖題與視角題找出視圖的關聯性中，甲同學使用「類推關聯」的策略，由前、後視圖的對稱性，類推左、右視圖的對稱

性，並回答視圖之間的關係。此外，丁同學使用「類推關聯」策略，由前、後視圖與右、左是圖的對稱性，類推出有下視圖的可能性，並說明上、下是圖也會具有對稱性。

6. 提出假設（丙）

在隱藏題中，丙同學一開始就提出後方可能隱藏一些積木，並以「提出假設」的策略，先假設立體圖形後方並沒有隱藏積木，縮小題目的範圍，然後描繪出相對應的視圖，再由假設進行更進一步的解題。

（三） 策略的綜合分析比較

在策略的使用上，甲與丁（高分者）可以藉由產生立體圖形心像的方式進行解題。而乙（低分者）與丙（中分者）則需藉由方塊積木的輔助，方能成功描繪各種視圖。此外，丁同學（高分者）在面對比較困難的視圖繪製時。他能採取不同類型的策略，彈性地選擇是否要用方塊積木協助繪製三視圖。過去的研究結果顯示，專家比起生手在認知上更有條理，且知識結構較為縝密（Gobbo & Chi, 1986），本研究與過去研究結果一致。

第三節 三視圖任務之解題困難

本節主要由甲、乙、丙、丁這 4 位參與者的原案資料中，歸納出不同的三視圖解題困難，並分成 2 個部分進行探討，第 1 部分主要探討描繪三視圖時，各個參與者所遇到的解題困難；第 2 部分是歸納參與者在解 4 種不同三視圖題型（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題）時所遇到的解題困難。

（一） 描繪視圖之困難

研究者從 4 位參與者的解題過程中，歸納出下列 6 種描繪三視圖之困難（表 4-19），並區分成 2 種類型，第 1 種類型是單純使用紙筆的解題困難，第 2 種類型是使用方塊積木後所衍生出的解題困難，詳述如下：

表 4-19 描繪三視圖之解題困難表

描繪三視圖之解題困難		參與者			
		甲	乙	丙	丁
1. 單純紙筆	1. 前視錯位		V	V	
	2. 上視錯位				V
	3. 心像轉換				V
2. 運用積木	1. 視角落差		V		
	2. 積木搬移			V	
	3. 時間不足		V	V	

1. 單純使用紙筆的描繪視圖困難：

（1） 前視錯位（乙、丙）

在視角題中，乙同學與丙同學雖然有念出題目的中的引導語

句，但是還是認為前視圖就是題本圖示中的正面，導致視圖繪製的方向錯誤。由於前視圖的觀察方向會決定其他視圖的位置，當解題者混淆前視圖的觀察方向時，也無法正確描繪其他的視圖。

(2) 上視錯位（丁）

丁同學在使用「旋轉立體」的策略畫出左視圖之後，他並沒有將立體積木轉回原本的觀察方向，進而畫出偏差 90 度的上視圖。這也與數學領域課程手冊（教育部，2019）所提出的三視圖描繪之錯誤類型相互呼應，因為解題者誤解上視圖的定義，例如從立體圖形的左上方往下看，上視圖會產生 90 度的偏差。

(3) 心像轉換（丁）

採取「產生心像」策略的丁同學，在直接想像立體圖形時，會發生「心像轉換」的困難。例如他在畫後視圖時，反而會從前視圖觀察方向進行繪製，從而導致錯誤的繪圖。

2. 有使用方塊積木的描繪視圖困難：

(1) 視角落差（乙）

使用方塊積木輔助的乙同學，雖然能拼出正確的立體圖形，但是在使用「移動視角」的策略時，他無法準確地水平觀察

立體積木，導致他在描繪前、右、後、左視圖時會發生錯位的現象，也就是「視角落差」的描繪困難。

(2) 積木搬移（丙）

丙同學在四個題目（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題）之中，都是先「拼出立體」，然後「轉動立體」並「水平移動」積木進行觀察後畫出視圖。但她在搬移積木的過程之中，會有遺漏積木與擺錯積木的狀況發生，所以她必須一一檢查後更正，這也是丙同學在執行計畫階段與回顧解答階段來回遷移的原因之一。

(3) 時間不足（乙、丙）

使用方塊積木輔助解題的乙、丙兩位同學，不只在描繪三視圖的時間花費上較長，其整題解題的花費時間也相對較長。以丙同學為例，在「拼出立體」之後，因為她還需要「水平移動」積木進行觀察，所以在描繪視圖所花費的時間較高。

(二) 解三視圖任務之困難

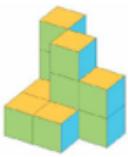
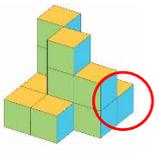
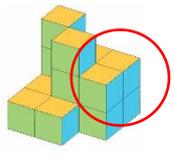
三視圖任務中，除了描繪三視圖之外，也會有不同的測驗題型，例如尋找視圖題與視角題中要尋找 5 個視圖之間的關係；隱藏題中要計數積木與找尋其他可能性；拿取題中則是要比對三視圖的變化。研究者依照題目的順序說明參與者在三視圖任務中所遇到的解題困難：

第一，在視圖題與視角題中，發生的解題困難是「因為錯誤視圖而無法察覺視圖之間的關聯性」。甲、丙、丁都能說明視圖題與視角題中視圖之間的關聯性，其中甲與丁更能指出前、後視圖與左、右視圖的對稱性。然而，乙同學雖然有利用方塊積木輔助觀察，但因為「視角落差」的關係，沒有辦法精確地畫出每個視圖。這也是他在這兩題之中，無法察覺這些視圖之關聯性的原因之一。也就是說，如果沒有辦法正確的畫出視圖，則在進行下一個階段的關聯性觀察時，則會遇到解題困難。

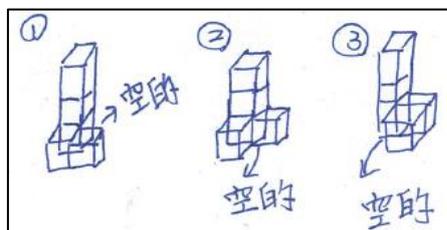
第二，在隱藏題中發生的解題困難有 2 種，第 1 種是「無法察覺隱藏積木的可能性」，乙同學並沒有查覺到任何隱藏積木的可能性，而甲、丙、丁這 3 位同學則能提出的不同的可能性並進行驗證。第 2 種是「無法協調視圖的正確性」，雖然丙同學雖然

有提出 2 種可能性(在立體圖形後方可能隱藏 2 個或 4 個積木)，但她並沒有查覺到，如果在隱藏的題立體圖形後方加入 2 個或 4 個積木之後，答案則會不符合題意 (表 4-20)。

表 4-20 丙同學隱藏題列舉之積木可能性

	隱藏題	後方加入 2 個積木	後方加入 4 個積木
圖示			

第三，在拿取題中，發生的解題困難則是「無法正確地描繪立體圖形」，雖然甲同學在於拿取題的第 2 小題(拿取一個積木)之中。她嘗試畫出 3 種可能的情形，但在繪畫過程中，沒有辦法協調立體圖形的圖案(如下圖所示)，所以畫出的立體圖形會呈現前後交錯的狀況。此外，因為視角落差所造成的錯誤視圖，使得乙同學在隱藏題中誤判，反而刪去了正確的可能性，這也如同「因為錯誤視圖而無法察覺視圖之間的關聯性」的解題困難。



第五章 結論與建議

第五章一共分成兩節，第一節為研究結論，第二節為未來研究與教學上的建議，詳見如下：

第一節 研究結論

本節依據待答問題，包含七年級學生在三視圖任務中的解題過程為何？七年級學生在三視圖任務中的解題策略分別是那些？七年級學生在三視圖任務中的解題時所遭遇的困難為何？所得到的結論如下：

(一) 三視圖任務之解題過程

本研究發現，七年級學生在三視圖任務的解題歷程中都會出現如 Polya (1945) 所提出的了解問題 (U)、擬定計畫 (P)、執行計畫 (C) 與回顧解答 (L) 共 4 個階段。了解問題為閱讀題目與釐清題意；擬訂計畫為從題目所給與條件及線索，組織自己的解題過程，包含規劃工具的使用以及解題的順序；執行計畫為藉由觀察立體圖形後畫出 5 種三視圖、察覺視圖之間的關聯、找出隱藏與拿取積木的可能性；最後，回顧解答為重述過程及檢驗答案的正確性。

在整體解題歷程中，這 4 位參與者也有不同的表現。乙同學（低分者）的解題時間雖然不是最長的，但是他的解題正確性相對較低，

也無法察覺自己的錯誤；相對來說，丙同學（中分者）的解題時間最長，是因為她會仔細檢查並且重複確認答案，這也是其解題階段明顯來回遷移的原因之一；甲與丁同學（高分者）的解題速度較快，所呈現的解題歷程階段也為順暢。值得注意的是，丁同學能從題目與題目之間累積解題經驗，所以在視角題與隱藏題中，雖然他並沒有明顯的擬訂計畫階段，但是他能運用視圖題的解題經驗直接進行解題。

（二） 三視圖任務之解題策略

本研究的所歸納出的解題策略，可以對應到 Polya 的擬訂計畫階段。研究結果顯示，乙同學（低分者）與丙同學（中分者）需要藉由工具（方塊積木）的輔助進行解題；甲同學與丁同學（高分者）則能藉由直接觀察與產生心像的策略進行解題，而且丁同學能依照題目的要求調整適合的解題策略。研究者歸納描繪三視圖之策略共有 10 種，能區分成 2 種類型。第 1 種類型是單純使用紙筆的策略，包含：「直接觀察」、「產生心像」、「從易到難」、「用對稱性」、「翻起題本」以及「點數記號」；第 2 種類型是運用方塊積木後所衍生出的策略，包含：「拼出立體」、「移動視角」、「轉動立體」以及「水平移動」。此外，解三視圖任務之策略總共有 6 種，分別是「比較異同」、「列舉可能」、「刪除可能」、「使用工具」、「類推關聯」以及「提出假設」。本研究

認為，由於這 4 位參與者皆是第一次嘗試解三視圖的相關任務，且在學校中也尚未學習三視圖課程，所以在三視圖任務的解題過程中，他們能展現多元的解題策略。

(三) 三視圖任務之解題困難

本研究所歸納出的解題困難，則可以對應到 Polya 的了解問題及執行計畫階段。研究者從 4 位參與者的解題過程中，歸納描繪三視圖之困難共有 6 種，且能區分成 2 種類型。第 1 種類型是單純使用紙筆會遇到的描繪困難，包含：「前視錯位」、「上視錯位」以及「心像轉換」；第 2 種類型是運用方塊積木後所遇到的描繪困難，包含：「視角落差」、「積木搬移」以及「時間不足」。此外，參與者在視圖題與視角題所遇到的解題困難為「因為錯誤視圖而無法察覺視圖之間的關聯性」；在隱藏題所遇到的解題困難為「無法察覺隱藏積木的可能性」以及「無法協調視圖的正確性」；在拿取題中所遇到的解題困難為「無法正確地描繪立體圖形」。研究者認為，雖然參與者們具有不同的解題能力，但在三視圖任務的解題困難與其選擇的解題策略是相互呼應的，而且解題能力較弱的參與者，往往無法察覺自己的解題錯誤，面對困難也無法運用另一種策略嘗試解題。

第二節 未來研究與教學上的建議

本節按照研究結果，給予未來研究與實務教學上兩方面之建議。

(一) 未來研究的建議

本研究針對未來研究方面，研究者提出下列四點建議，第一點是選用研究題型之選用、第二點是研究對象之選用，第三點是分析方法之選用，第四點則是了解學生在學習三視圖課程之後的影響。

1. 研究題型之選用

三視圖任務涵蓋視圖的描繪、視圖關聯性的察覺以及運用三視圖概念去解不同的延伸題型。本研究為了蒐集三視圖任務的解題策略與困難，設計4種（視圖題、視角題、隱藏題、拿取題）不同種類的三視圖任務。往後的研究可以針對各種不同題目的類型調整其難度與複雜度，觀察參與者的策略是否會隨著題目的類型、呈現的方式（紙本、積木）或是難易差別而有所不同。

2. 研究對象之選用

本研究因限於時間、人力之限制，樣本採立意抽樣的方式，抽取屏東市某課輔班的學生，依照 108 學年度上學期第三次段考數學成績分為低、中、高三組，並從中各選取 1 位表達較為流利的學生進行施測。但由於第三次段考的主要測驗內容為代數（一元一次方程式），並不能有效的代表參與者的幾何能力之

差異。建議往後的研究可以先進行簡單的幾何測驗，從中選取更具代表性的參與者先進行預試及後續之研究分析。

3. 分析方法之選用

由於本研究所選取的參與者為七年級的學生，且為第一次接觸三視圖題型，解題經驗較不充足，故研究者採用 Polya (1945) 的4個解題歷程階段進行分析。如往後研究採用較有解題經驗的參與者進行解題時，不妨使用 Schoenfeld 的6階段解題歷程進行研究，如此一來，能更加瞭解經驗豐富的解題者在面對三視圖任務時，其解題歷程之差異性。

4. 了解學生在學習三視圖課程之後的影響

本研究中，這4位參與者都是第一次進行三視圖任務的解題，也皆未學習三視圖課程。未來的研究可以探討三視圖課程對於不同參與者在解三視圖任務中所具有的影響，包含策略的採用、解題的速度以及解題階段的遷移。

(二) 實務教學上的建議

本研究針對實務教學方面，研究者提出下列兩點建議，第一點是教師宜仔細觀察學生在三視圖任務的解題歷程，第二點是教師宜提供多元的三視圖任務之解題策略。

1. 教師宜仔細觀察學生在三視圖任務的解題歷程

本研究中歸納許多不同三視圖任務之解題策略，從中衍伸出相對應的解題困難。尤其是三視圖的描繪，常被認為是相當直觀的問題。如果教師只注重答案的正確性，而忽略學生的解題的歷程，就無法給予適當的指導與回饋。若教師能仔細觀察學生在三視圖任務中的解題歷程，針對使用紙筆解題的同學加強正確的心像建立方式，針對使用積木的同學加強其觀察立體圖形的速度，藉著理解不同解題歷程中學生所發展出的空間能力，給予合適的指導與教學，對於七年級學生學習幾何課程之根基會有偌大的幫助。

2. 教師宜提供多元的三視圖任務之解題策略

不同參與者會因其能力、解題經驗及信念產生各種解題策略。教師在教學過程中，不妨提供各種難度、策略（紙本、積木）及指導，結合同儕協助與生活化的題型（梁淑坤，2012），讓學生能從不同策略中學習各種觀念，選取適合方式進行解題。

參考文獻

中文部分

左台益、梁勇能 (2001)。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。師大學報，46(1, 2)，1-20。

林慧美 (2011)。國小六年級學童在空間定位能力上表現之探究—以立體三視圖為例 (未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學，臺北市。

洪碧霞、蕭嘉偉、林素微 (2009)。PISA 數學素養認知成份分析對補救教學的意涵。課程與教學，13(1)，47-66。

徐家煌 (2019)。高二學生在線性規劃之解題歷程研究 (未出版之碩士論文)。國立中山大學，高雄市。

徐偉民、董修齊 (2012)。國小幾何教材內容之比較：以臺灣與芬蘭為例。當代教育研究季刊，20(3)，39-86。

國家教育研究院 (2017)。素養導向學數學教材。新北市：國家教育研究院。

康鳳梅、簡慶郎、詹秉鈞、蔡榮吉 (2002)。高工學生空間能力指標與量表建構之研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (編號：NSC91-2516-s-003-007)，未出版。

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型

高級中等學校數學領域。臺北市：教育部。

教育部（2019）。**數學課程領域手冊**。臺北市：教育部。

莊月嬌、張英傑（2006）。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。國立臺北教育大學學報，19(1)，33-66。

許佳齡（2008）。學習障礙學生之數學解題策略探討。特教園丁，6534，12-16。

陳榮華、陳心怡（2007）。魏氏兒童智力量表第四版。臺北市，中國行為科學社。

陳韻如（2017）。探究台灣五至八年級學生積木方塊三視圖的表現。（未出版之博士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

陳韻如、楊凱琳、林福來（2018）。國小高年級學生在立方積木三視圖的推理表現。臺灣數學教育期刊，5(1)，1-34。

梁淑坤（2012）。數學學習低落學生補救教學之策略。教育研究月刊，221，25-36。

經濟部工業局（2018）。3D 列印產業發展推動計畫。取自
<https://www.moeaidb.gov.tw>

鄭寰文、洪秀珍、周惠綺、梁淑坤（2012）。國中數學教科書分析—以 99 學年部編版為例。台灣數學教師電子期刊，(32)，15-32。

英文部分

- Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge University Press.
- Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods*. New York: McGraw-Hill
- Dewey, J. (1997). *How we think*. Courier Corporation.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
- Gardner, H. (1992). *Multiple intelligences* (Vol. 5, p. 56). Minnesota Center for Arts Education.
- Gobbo, C., & Chi, M. (1986). How knowledge is structured and used by expert and novice children. *Cognitive development*, 1(3), 221-237.
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479-1498.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial Ability: A Review and Reanalysis of the Correlational Literature* (No. TR-8). Stanford Univ Calif School of Education.
- Mayer, R. E. (1992). A series of books in psychology. *Thinking, problem solving, cognition (2nd ed.)*. W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
doi:10.1037/0033-2909.86.5.889
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin*, 39, 31-43.
- Oliviera, T (2004). Dynamic spatial ability: an exploratory analysis and a confirmatory study. *International Journal of Aviation Psychology*, 14(1), 19-38.
- Piaget, J. and B. Inhelder (1967). *A Child's Conception of Space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: Norton (Original work published 1948)200
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. Princeton, New Jersey.

- Rohmah, M., & Sutiarmo, S. (2018). Analysis problem solving in mathematical using theory Newman. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 671-681.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 9-34.
- Shea, D. L., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2001). Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: A 20-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 604.
- Spearman, C. (1904). 'General intelligence,' objectively determined and measured. *The American Journal of Psychology*, 15(2), 201–293. doi:10.2307/1412107
- Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. University of Chicago Press: Chicago.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Fla: Academic Press.
- White, A. L. (2005). Active mathematics in classrooms: Finding out why children make mistakes—and then doing something to help them. *Square one*, 15(4), 15-19.
- Yilmaz, H. B. (2017). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1(2), 83-96.

附錄

附錄一 有聲解題練習題目

有聲解題

同學你好，老師有些題目給你解題，這個過程約20分鐘，「有聲解題」就是當你解題時，一邊寫一邊把**說**出心中的想法，這樣，老師就知道你在**想**什麼。

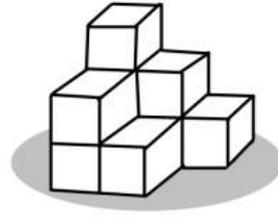


我們來練習看看，你的有聲解題老師聽到後可否明白。我們一起放輕鬆。下面有練習題，請用有聲解題：「一邊寫一邊**說**出心中的想法。」

有聲解題練習題

數積木題

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：

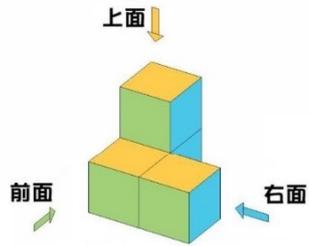


1. 數數看，這邊總共有幾塊小正方體的積木呢？
2. 你是怎麼數的呢？
3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

有聲解題練習題

2*2*2 視圖題

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 畫畫看，當你從不同方向看這一塊積木時，你看到了什麼圖案？

前視圖	上視圖	右視圖	後視圖	左視圖
<div style="border: 1px dashed gray; width: 100%; height: 100%;"></div>	<div style="border: 1px dashed gray; width: 100%; height: 100%;"></div>	<div style="border: 1px dashed gray; width: 100%; height: 100%;"></div>	<div style="border: 1px dashed gray; width: 100%; height: 100%;"></div>	<div style="border: 1px dashed gray; width: 100%; height: 100%;"></div>

2. 你是怎麼畫的呢？

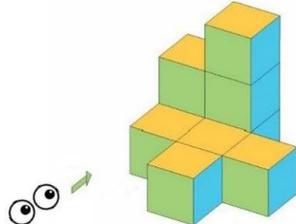
3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

附錄二 三視圖試題題目

(一) 題目一 (視圖題)

題目一

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

| _____ 視圖 |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | | | |

2. 你是怎麼畫的呢？

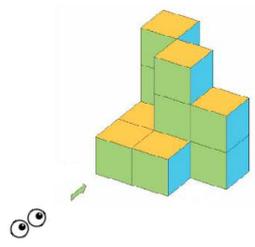
3. 從**五個視圖**之中，你發現了什麼？

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

(三) 題目三 (隱藏題)

題目三

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。

___ 視圖	___ 視圖	___ 視圖

2. 數數看，這個立體圖形總共是由幾個小立方體積木所組成？

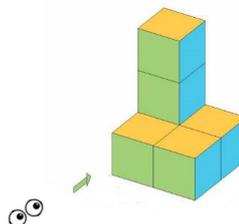
3. 在數積木時，你覺得可能還會有其他答案嗎？

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

(四) 題目四 (拿取題)

題目四

同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，
請回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。

____ 視圖	____ 視圖

2. 如果拿走 1 個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形。

3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

附錄三 預試資料原案分析

(一) 甲—題目一逐字稿

原案 (甲-1)	備註(編號)
好那我們就開始來做測試囉。	研究者說明
(28 秒)	U1
題目一，同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題。	
一，從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。二，你是怎麼畫的呢。三，從五個視圖之中，你發現了什麼。四、你認為你正確嗎，為什麼。	
(8 秒)	P1
好，我要先做，第一題的前視。	
(17 秒)	C1
我要由，他的這個邊，然後，去畫我的前視圖。	
(8 秒)	C2
好，然後我要，塗色。	
(26 秒)	C3
然後，我要畫，後視圖，然後後視圖，他就是跟，前視圖是，相反的，就是圖的就是，左右相反。	
(23 秒)	C4
好，然後我要畫，右視圖，然後右視圖是從，這個方向去看，然後我也要照著他的邊，然後，去畫。	
(20 秒)	C5
然後，我要，現在要畫，他的左視圖，是從，這個方向，然後也是，跟右視圖是，那個方向相反。	
(18 秒)	C6
然後我要畫，最後一個，是，上視圖，是從這個方向去看。然後也是照著他的邊，然後去，描繪他。好了。	
(4 秒)	P2
然後，我是，我可以寫在上面嗎。	
可以。	研究者回應
(22 秒)	C7
就，我還要講嗎，好，我是照他的邊然後去描繪。	
(57 秒)	C8
好，然後，第三題，我發現了，前視圖跟後視圖他是會，他的方向是會相反，然後右視圖跟左視圖也是。	
(18 秒)	L1

<p>然後，我認為我是正確的，因為，我有認真想。 好了。</p> <p>共歷時 249 秒</p>	
---	--

(二) 甲—題目二逐字稿

原案 (甲-2)	備註(編號)
<p>OK 來，那我們進入到第二題。好，那一樣。</p> <p>(27 秒)</p> <p>題目二，同學，請先看旁邊的這一塊積木並回答下列問題。一，從眼睛的方向看過去畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。二，你是怎麼畫的呢。三，從題目一跟題目二之中，你發現了什麼。四，你認為你正確嗎，為什麼。</p> <p>(13 秒)</p> <p>好，好我要做，第一題的，前視圖，前視圖的方向改變了，跟題目一不一樣，他改到，題目一的右視圖的位置。</p> <p>(13 秒)</p> <p>所以我從，我也是照邊畫。</p> <p>(15 秒)</p> <p>然後我要畫他的，後視圖，後視圖也是跟前視圖的方向是相反的。</p> <p>(22 秒)</p> <p>然後，我要畫他的，左視圖，因為左邊是從這個方向看，所以比較，快，然後畫得出來。</p> <p>(14 秒)</p> <p>然後畫右視圖，跟左視圖的圖也是相反。</p> <p>(23 秒)</p> <p>然後我要畫，上視圖，從這個方向，然後往，這邊去看。</p> <p>(25 秒)</p> <p>好，然後我要做第二題，我，我也是照邊畫。</p> <p>(132 秒)</p> <p>然後，從，題目一跟題目二之中，我發現了，題目一的，題目一的前視圖跟後視圖會，會等於，題目二的左視圖跟右視圖。然後，題目一的，右視圖跟左視圖會等於題目二的前視圖跟後視圖。</p> <p>(43 秒)</p> <p>我認為我是正確的，因為我有把，題目一跟題目二，兩個連在</p>	<p>研究者說明 U1</p> <p>P1</p> <p>C1</p> <p>C2</p> <p>C3</p> <p>C4</p> <p>C5</p> <p>C6</p> <p>C7</p> <p>L1</p>

一起，然後去想。好，好了。

共歷時 302 秒。

(三) 甲—題目三逐字稿

原案 (甲-3)	備註(編號)
好，OK，那你可以準備開始題目三。	研究者說明
(31 秒)	U1
題目三，同學請先看旁邊的這一塊積木並回答下列問題。一，從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。二，數數看，這個立體圖形總共是由幾個小立方體積木所組成。三，在數積木時，你覺得還會有其他答案嗎。四，你認為你正確嗎，為什麼。	
(8 秒)	P1
好，我要先做第一題的前視圖	
(18 秒)	C1
然後，我也是要由他的邊，然後去，描繪，然後，我要先來畫	
(26 秒)	C2
好，然後要畫，恩，上視圖，然後要，這個位置，然後，往這個位置，就是這樣子。然後我要來畫。	
(16 秒)	C3
好，然後我要畫的，右視圖的，這個方向，然後畫。	
(55 秒)	P2
好，然後，我現在要，做第二題，恩，第一層的話，是由，一二三四五，六，六個，阿因為他這邊被遮住了，所以你不能確定說，那裡有沒有，所以我們要是，第一層我們要用兩個數表示，然後，第二層的話，一二三，就是三個，因為，如果他後面有多出來的話他這邊還要再畫兩個。然後，第三層有，有兩個，好。	
(25 秒)	C4
好，第一個答案的話，應該，會有，會有十一個，阿第二個話，就是，十二個，所以這題其實會有，兩個答案，好。	
(73 秒)	C5
然後，恩，來做第三題，我覺得還會有其他答案，因為，他這邊被遮住了，所以你不能真的去確定說他是有還是沒有的，所以他還，可能還會有其他的答案。	
(30 秒)	L1

好，然後第四題，我認為我正確，因為我有假設兩種，方，法，去算他。好。等一下喔，好了。	
共歷時 282 秒。	

(四) 甲—題目四逐字稿

原案 (甲-4)	備註(編號)
那我們進入到第四題。	研究者說明
(30 秒)	U1
題目四，同學，旁邊的立體圖形是由六個方塊積木所堆成，請回答下列問題。一、從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。二、如果拿走一個積木後發現這個立體圖形的前視圖、右視圖皆不變，請找出所有的可能情形。三、你認為你正確嗎，為什麼呢。	
(4 秒)	P1
我要來做，第一題的前視圖。	
(13 秒)	C1
然後我也是，由他的邊，然後，作描繪。	
(15 秒)	C2
然後做右視圖，從這個方向去畫。	
(7 秒)	U2
好了，然後，第二題，所以我現在可以用這個嗎？	
你認為呢？	研究者回應
(11 秒)	P2
所以我可以用畫的，好，那就用，我先講解，然後再，把它畫出來。	
如果要用積木的話也可以，畫的或積木都可以。	研究者回應
(53 秒)	C3
好，那，如果把，這一個去，去掉的話，他的前視圖還是會是長這樣子，然後他的右視圖，也是一樣，所以我先假設第一種。	
好，這樣子，那這邊就是，這邊是，這邊是空的	
(53 秒)	C4
然後我要假設，第二個，如果把這個拿掉，也是一樣，因為，他後還是還有一個，然後如果從右視圖的話，這邊還是有一個，所以前視圖和右視圖是不會變的。好，然後這裡變成是，這個是空的。	

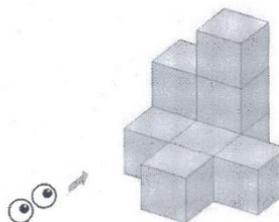
<p>(47 秒)</p> <p>然後，第三個的話，是這個，因為，他也是如果從前視，前面的方向去看的話，這邊，他這邊下面還有一顆，阿如果沒有的話，他就不可能懸空，所以下面一定要有一個方塊，所以把這個拿掉，前視圖不變，然後右視圖也不會變。好，然後，這裡是空的。</p>	C5
<p>(3 秒)</p> <p>然後，基本上就這樣。</p>	L1
<p>(98 秒)</p> <p>然後第三題，恩，我認為我正確，因為，因為我，就是，去想如果把下面四個都拿走的話，會是長什麼樣子，阿如果是，後面這個拿走的話就不可能，因為他，這個上面不可能會懸空，所以我認為是正確的。好。</p>	L2
<p>共歷時 334 秒。</p>	

附錄四 預試作答

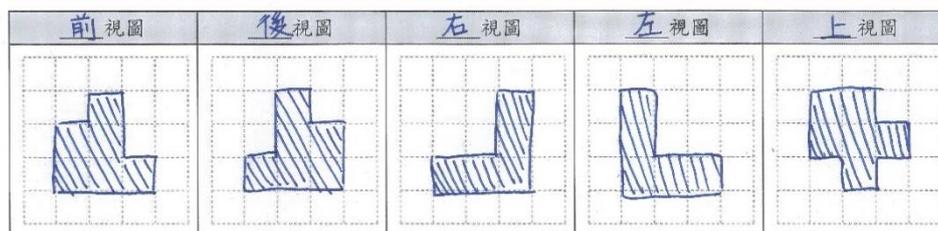
(一) 甲—題目一

題目一

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。



2. 你是怎麼畫的呢？

我是照邊去描繪

3. 從五個視圖之中，你發現了什麼？

前視圖和後視圖的圖形相反
右……左……圖形相反

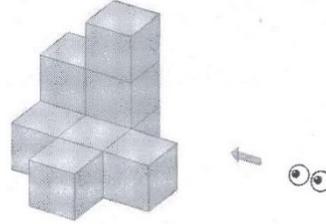
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

因為我有認真想

(二) 甲一題目二

題目二

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

前視圖	後視圖	左視圖	右視圖	上視圖

2. 你是怎麼畫的呢？

我是照邊描繪

3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？

題目一的前視圖和後視圖等題目二之左視圖和右視圖
 題目一之右視圖和左視圖於
 等於題目二之前視圖和後視圖

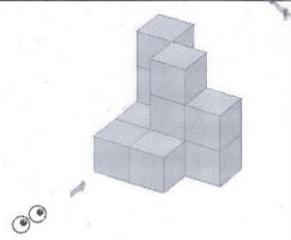
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

我把題目一和題目二作連結，然後去想

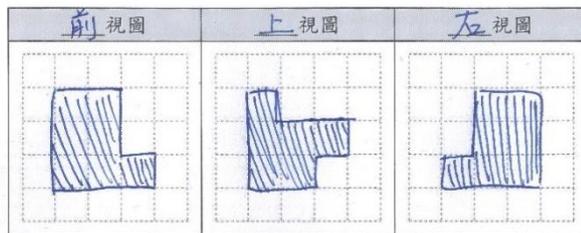
(三) 甲一題目三

題目三

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 \odot 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。



2. 數數看，這個立體圖形總共是由幾個小立方體積木所組成？

$\odot = 6, 7$ 1. $6+3+2=11$

$\ominus = 3$ 2. $7+3+2=12$

$\omin� = 2$ A: 11個, 12個

3. 在數積木時，你覺得可能還會有其他答案嗎？

還會有，因為第一層有部份位置被擋到，所以不能確定它的有無。

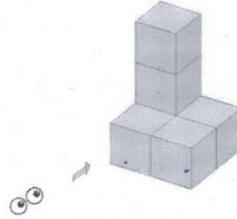
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

有，因為我假設2種方法算

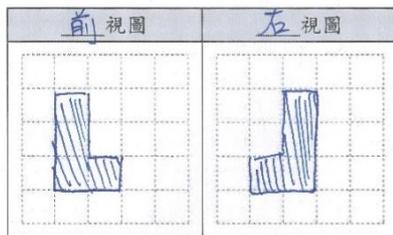
(四) 甲一題目四

題目四

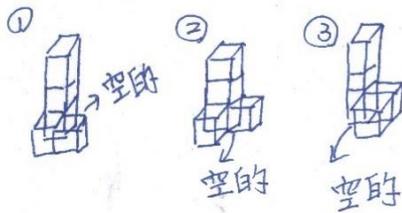
同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，請回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。



2. 如果拿走 1 個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形。



3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

正確，因為我認^為為後面左邊那塊積木，不可能沒有，因為上面的那 2 塊不會懸空。

附錄五 正式施測資料原案分析

(一) 乙 (低分者) 一題目一逐字稿

原案 (乙-1)	備註(編號)
(45 秒) 同學請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題。從右方看，從眼睛的方向看過去話出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。你是怎麼話的呢，從五個視圖之中你發現了什麼，你認為你正確嗎，為什麼呢？	U1
(27 秒) 先寫上視圖，先拼。(開始拼積木)。	P1
(28 秒) 恩，上視圖 (站起來)，整個往上看，上面這一個，旁邊這個，這一個，中間。	C1
(56 秒) 然後再寫右視圖，(站起來離開座位，到積木的右方，蹲下到與積木平行的位置)，右邊看右邊有三個，一二三，然後第二排一個，這樣，往下拉，然後上面這一個。	C2
(73 秒) 然後，前視圖還沒寫完，我先寫前視圖。(站回積木的前方)一，然後後面兩個 (蹲下到水平位置看積木)，對，然後旁邊，旁邊三個，然後上面。	C3
(24 秒) 後視圖 (站到積木後方)，一二三，然後後面。	C4
(51 秒) 然後左視圖 (站到積木左方)，一二，一二三，然後一二 (視角調整到與積木水平的位置上)。	C5
(18 秒) 是怎麼畫的呢？用方塊，用方塊拼的。	C6
(31 秒) 從五個視圖中你發現了什麼？每個角度看都不同。	C7
(53 秒) 你認為正確嗎，為什麼？正確，為什麼喔，拼完圖後再用積木的視角看，好了。	L1
共歷時 286 秒	

(二) 乙 (低分者) 一題目二逐字稿

原案 (乙-2)	備註(編號)
(31 秒) 同學請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題。一，從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。二，你是怎麼畫的呢？三，從題目一跟題目二之中你發現了什麼？你認為你正確嗎，為什麼呢？	U1
(35 秒) 第一，先寫前視 (拼積木，低頭到與積木水平視角)	P1
(31 秒) 一二三，第一個，第二個，一二。(站起來蹲下看)。	C1
(2 秒) 老師這邊要先暫停一下，他是從眼睛的方向看過去。	研究者回應
(17 秒) 唉叻威，怎麼變這邊，我寫錯了，他眼睛在這邊。(換一張試卷)	L1
(45 秒) 前視圖 (站到積木右邊)，一，三，三個，一二三，右邊三個，然後中間，中間突出一個，對。	C2
(29 秒) 然後上視圖 (確認積木，從上方看)，一二，一二三，一。	C3
(41 秒) 然後右視，(轉換方向，蹲下到水平視角)，一二，兩個，這應該是，一，一二。	C4
(33 秒) 然後後視，(轉換方向，低頭到水平視角)，一二，一二三，一二。	C5
(30 秒) 然後左視，(轉換方向，低頭到水平視角)，我發現問題。老師可以改嗎，因為左右寫錯，因為他說右，右邊在這邊。	L2
(1 秒) 那你改這邊。	研究者回應
(12 秒) 好，改左。	C6
(22 秒) 右 (轉換方向，低頭到水平視角)，兩個，一二，一三一。	C7
(35 秒)	

<p>你是怎麼畫的呢，看積木，看方塊，從題目的視角看。我會站起來。站起來從題目視角看。</p>	C8
<p>(227 秒)</p> <p>從題目一跟題目二你發現了什麼，上視圖這樣，然後右視圖，右視，會不會，前視，也恩，就，每個積木的位置都不一樣，從每個視角看都長不一樣。欸，上視，右視，一個一對，也不一樣。欸，一個視角對一個視角發現長的不一樣。</p>	C9
<p>(77 秒)</p> <p>你認為你正確嗎，為什麼，認為正確，為什麼，因我會在，從不同視角看。</p>	L3
<p>共歷時 718 秒</p>	

(三) 乙 (低分者) 一題目三逐字稿

原案 (乙-3)	備註(編號)
<p>(35 秒)</p> <p>同學請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題。從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。數數看這個立體圖形總共是由幾個小立體，方體積木組成的，在數積木時你覺得可能還有其他答案嗎，你認為你正確嗎，為什麼。(39 秒)</p>	U1
<p>先從前視圖，然後先拼，前面兩個，中間三個，上面一個。然後第三排一個，一個。</p>	P1
<p>(82 秒)</p> <p>前視圖看過去，前面的(站起來蹲下到水平視角)，一二，一二，三四，後面的，這邊一個，上面兩個，這個三個。然後最後面兩個。對阿，後面三個，欸，可是前面。這一個沒辦法，因為它上面兩個，阿然後這格畫這邊的話，因為我要把這個畫出來，然後如果畫在這邊的話他們不是平的。</p>	C1
<p>(3 秒)</p> <p>那怎麼辦？如果不能畫的話？</p>	研究者回應
<p>(80 秒)</p> <p>恩，把他往下移，這邊再畫一個，可是這樣就變，一二三，一二三，一二三個積木，然後一二三，這樣就怪怪的。兩個，一二三，這兩個在後面...</p>	L1
<p>(8 秒)</p> <p>那你把這邊圈起來，這邊是你不會畫的。那其他的視圖你能不能畫？</p>	研究者回應

(29 秒) 上視圖，往上看，第一排兩個，然後第二排一個，這裡，這裡。	C2
(60 秒) 然後右視圖（站到積木的右邊），右視圖（蹲下到水平視角），一二三，一二，然後一二三，恩。	C3
(115 秒) 數數看這個立體圖形總是幾個小立體方塊組成，一二三四五六七八九十一，我先算第一排，第一排有兩個，第二排，第一個有一個，阿第二排他有兩，他有三個，然後第三個這裡有兩個，然後最後一排有兩個。第一排有兩個，第二排有一二三四五六，有六個，第三排有三個，好了，總共有九，十一，十一個。	C4
(14 秒) 在數積木時你覺得可能有其他答案嗎，其他答案，恩，不會。	C5
(76 秒) 你正確嗎，為什麼，等一下，正確，為什麼呢，拼完圖形後，再從圖案視角，好。	L2
共歷時 541 秒	

(四) 乙（低分者）一題目四逐字稿

原案（乙-4）	備註(編號)
(27 秒) 同學旁邊的立體圖形是由六個方塊積木所堆成的，請回答下列問題，從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。如果拿走一個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看找出所有的可能情形，你認為正確嗎，為什麼。	U1
(11 秒) 要先拼，一二三四。	P1
(29 秒) 前視，前視圖（站起來，蹲下到水平視角位置看），前視圖，第一個，第二個，然後二三。	C1
(21 秒) 然後右視圖（站起來轉動到積木右側，蹲下到水平位置），然後一二，一二。	C2
(56 秒) 如果拿走一個積木後，發現這個立體圖形的前視圖、右視圖皆不變。試試看找出所有可能的情形，拿掉一個。拿掉一個，一	U2

右視圖、後視圖、左視圖，你是怎麼畫的呢？從五個視圖之中，你發現了什麼？你認為你正確嗎，為什麼？	
(26 秒)	P1
唉，我在排積木，我用積木排那個圖形。好了。	
(55 秒)	C1
前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。OK。前視圖，前視圖，前視圖（移動積木），大概是這樣，然後。好了。	
(69 秒)	C2
我在，那個，把位置排好。上視圖，阿，恩（將積木恢復原樣，身體站體來看）。我在看積木，我在看上視圖的積木。越來越奇怪，好。	
(69 秒)	C3
右視圖（先轉動積木方向），好了，（然後移動積木），我把積木往前移，然後方便看。右視圖。好了。好。	
(51 秒)	C4
我要畫後視圖，我先旋轉積木，好。我先畫中間的，因為這個比較長。好了。	
(36 秒)	C5
左視圖，我先旋轉，旋轉然後把空位補滿，從那個比較長的那個開始畫，然後再畫比較短的。好了。	
(28 秒)	L1
我把他那個，恢復。疑，怎麼少一個，還是我做錯了，好沒有拉，他只是跑去這邊。	
(106 秒)	C6
你是怎麼畫的呢？恩，我把空位補滿，我先拿積木，然後把空位補滿，不是啦，那個，排出形狀，然後把空位補滿，就是把積木往前移。好了。就是，先畫長，再畫比較短的。好。	
(53 秒)	C7
從五個視圖之中你發現了什麼，就形狀一直變阿。然後咧，沒有拉。	
(35 秒)	C8
你認為你正確嗎，正確阿，因為我都有檢查，有，我都我檢查。現在要做檢查。說到做到。	
(13 秒)	L2
（開始檢查前視圖），好，對。	
(26 秒)	L3
（開始檢查上視圖），有，我畫在，哎呀帥，這邊錯惹。	
(6 秒)	研究者回應

好那老師給你另一張圖，你把它畫在上視圖的地方。 (36 秒) 在檢查的時候，我看到，錯誤。好。確定。	L4
(37 秒) 右視圖（開始檢查右視圖）。把這個轉一下，也是先轉。好。對阿。	L5
(47 秒) 後視圖（開始檢查後視圖）。把它旋轉，怎麼一個不見了，好了。有。我在看紙上有幾個積木，對積木。	L6
(21 秒) 檢查左視圖（開始檢查後視圖）。好，對阿。都對。	L7
共歷時 748 秒	

(六) 丙（中分者）—題目二逐字稿

原案（丙-2）	備註(編號)
(9 秒) 等一下喔（先排積木）。	P1
(21 秒) 從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖，你是怎麼畫的呢？從題目一和題目二之中，你發現了什麼？你認為你正確嗎，為什麼呢？	U1
(17 秒) 我要開始畫，前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。	P2
(29 秒) 好，前視圖（把積木往前補）。	C1
(4 秒) 要記得說出自己的想法。	研究者回應
(10 秒) 然後，然後是什麼。	C2
(2 秒) 這邊老師要先暫停一下，他說從哪裡看過去？	研究者回應
(30 秒) 第一題是從前視圖．．．從眼睛，他的眼睛怎樣．．．喔！	L1
(4 秒) 你知道老師為什麼要暫停一下嗎？	研究者回應
(35 秒) 我又畫錯了，眼睛的方向是．．．往哪裡看，側面喔．．．（開	P3

始擺放積木，並旋轉視角) 這樣看嗎? (3 秒) 你覺得呢?	研究者回應
(60 秒) 眼睛的方向往這裡看，所以畫出來，先畫．．．前視圖。(換一張紙，按順序寫前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。)	P4
(32 秒) 前視圖恩．．．好，就是也是一樣把空位補滿，往前移。(復原積木)	C3
(37 秒) 再來做上視圖(身體站起來看)。好。	C4
(2 秒) 要記得邊寫邊說喔。	研究者回應
(37 秒) 然後右視圖(轉動積木、確認積木)，好，把空位補滿，然後先找長的開始畫，再來短的，再來最短的，好。	C5
(36 秒) 再來畫後視圖(轉動積木)，好(確認積木)，好把空位補滿(移動積木)，先從長的開始畫，然後再畫短的。	C6
(38 秒) 然後左視圖(恢復積木原樣，然後旋轉)，把空位補滿(移動積木)，先從長的開始，然後再來短的，好。	C7
(34 秒) 然後我要，把那個積木排成原本，好了。	L2
(44 秒) 是怎麼畫的呢?也是一樣，先拿積木，積木，然後排形狀，然後再把空位補滿，好，就這樣。	C8
(63 秒) 從題目一題目二之中你發現了什麼(開始觀察題目一跟題目二)。	C9
(5 秒) 再想什麼呢?	研究者回應
(156 秒) (回答第三題)恩．．．再想什麼，就是位置不一樣，就是題目二的前視圖跟題目一的前視圖不一樣，然後上視圖、右視圖、後視圖，全部都不一樣。就是．．．題目一跟題目二的那什麼．．．視圖不一樣，前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖都不	C10

<p>一樣。看的方位也不一樣。積木的形狀一樣。好。</p> <p>(111 秒)</p> <p>正確（回答第四題），因為都檢查過。我要檢查了，前視圖，位置補滿，已經轉過來了，因為它的眼睛在這邊，我就把他轉過來，往前移（移動積木），對了（恢復積木），然後上視圖（站起來看），對了。然後右視圖（轉動積木），把空位補滿，三個長的，然後，一個，好。然後後視圖（恢復積木，轉動積木），好（往前補），對了。</p>	L3
<p>(54 秒)</p> <p>然後左視圖（恢復積木，轉動積木，往前補），恩（重新又檢查一次），錯了，可能剛才在後視圖的時候，它不是在這邊嗎，啊我不是往前，然後我沒有把它往後移到原本的位置，所以最後就變成這樣，現在我把它移到這邊。</p>	L4
<p>(5 秒)</p> <p>那你可以幫老師做正確的作答在這邊嗎？</p>	研究者回應
<p>(33 秒)</p> <p>可以，所以左視圖是，這邊三個，然後一個。</p>	L5
<p>(62 秒)</p> <p>所以，這裡有一個不一樣的地方（回到第三題），所以它的左視圖，會是前視圖。它的後視圖，會是左視圖。它的右視圖，會是後視圖，它的上視圖會是，會是它這個倒的。然後它的前視圖，疑，前視圖會是右視圖。</p>	L6
<p>(235 秒)</p> <p>我發現（回到第四題），左視圖是，是，左視圖是，前視圖。我剛剛就有發現了，只是我再想為什麼這邊，因為他們是一樣的積木，阿為什麼這邊會沒有這樣子的，我就想會不會是這個有錯，因為我那個時候就發現全部都有跟這個一樣，但是這邊完全沒有跟這個一樣的。發現，題目二的左視圖是題目一的前視圖。題目二的後視圖，後視圖是，題目一的左視圖。然後題目二的右視圖，右視圖，是題目一的，的後視圖。然後題目二的上視圖，倒過來，是題目一的上視圖倒過來。然後題目二前視圖，前視圖是題目一的右視圖。好了。</p> <p>共歷時 1208 秒</p>	L5

(七) 丙（中分者）一題目三逐字稿

原案（丙-3）	備註(編號)
(30 秒) 從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視	U1

<p>圖。數數看，這個立體圖形是由幾個小立方體積木所組成？在數積木時，你覺得可能還有其他答案嗎？你認為你正確嗎，為什麼呢？</p>	
<p>(25 秒)</p>	P1
<p>好，我先拿積木（開始組立體圖形）</p>	
<p>(2 秒)</p>	研究者回應
<p>要記得說出來</p>	
<p>(89 秒)</p>	P2
<p>我先，我先排第一排，第一排是兩個積木，然後第二排是三個上面，兩個，上面一個，後面，我不確定這個後面有沒有積木。最後一排的，這個不一定會有。還可能是這樣放（多一個），或者是這樣放（多兩個），沒有超出來，因為它沒有圖案。好。先寫前視圖，上視圖，右視圖，老師我要先把這個拿走嗎？</p>	
<p>(7 秒)</p>	
<p>你覺得呢？</p>	研究者回應
<p>(28 秒)</p>	
<p>先假設它後面沒有，先做前視，我先把積木往前補滿，這樣比較好看它前面，是有兩排，然後在兩個小的。好。</p>	C1
<p>(45 秒)</p>	
<p>把積木，放回原本的位置。好了。上視圖（身體站起來），上視圖是，先畫三個，然後兩個，恩，一個。</p>	C2
<p>(36 秒)</p>	
<p>右視圖（先旋轉積木），先把積木往前補滿，然後，然後一個。好了。</p>	C3
<p>(101 秒)</p>	
<p>（將積木復原，並轉成前視圖的方位）好了。數數看，這個立體圖形是由幾個小立方體積木所組成？底下有一、二、三、四、五、六，第二層有三個，第三層有兩個。六加三九，九加二，總共十一個。（開始動筆寫），下面的有六個，然後中間有三個，然後上面有兩個，所以六加三加二，十一個。好。</p>	C4
<p>(124 秒)</p>	
<p>在數積木時，你覺得可能還有其他答案嗎？可能，還有一個吧，或兩個，還有四個或兩個在後面，四個是後面這裡，因為這個上面它沒有突出來這邊，所以平的空的，或者是兩個積木這樣。恩，有，我要怎麼寫呢．．．原本算 11 個，可能還有 15，11+4，或 11+2，13 個，好了。4 代表另外 4 個，後面 4 個。2，後面兩個。好了。</p>	C5
<p>(93 秒)</p>	

<p>你認為你正確嗎？正確，因為我都有檢察。好。我要檢查，前面，把積木全都補滿，好。(恢復積木)然後上視圖(身體站起來)，這邊三個兩個一個，好了。(旋轉積木)，我在把積木往前補滿，這邊三個，一個，好，都檢查完了。</p> <p>共歷時 650 秒</p>	L1
---	----

(八) 丙 (中分者) — 題目四逐字稿

原案 (丙-4)	備註(編號)
<p>(21 秒)</p> <p>從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。如果拿走一個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形，你認為你正確嗎，為什麼呢？</p>	U1
<p>(25 秒)</p> <p>我先排積木，恩。先前視圖，然後右視圖。</p>	P1
<p>(28 秒)</p> <p>前視圖，先往前移，先三個，然後一個。</p>	C1
<p>(30 秒)</p> <p>右視圖(轉動積木)，我再把積木往前移，這樣比較，好看清楚，先畫，那個比較長的，再比較短的，好，移回來。</p>	C2
<p>(7 秒)</p> <p>然後如果拿走一個積木後，發現這個立體圖形的前視圖，這樣拿走嗎？</p>	U2
<p>(1 秒)</p> <p>你覺得呢？</p>	研究者回應
<p>(283 秒)</p> <p>這樣拿走就變成兩個，恩，這邊會有三個，好，這兩個乾脆不要，恩(開始排出另外一組立體圖形)，可以拿掉這個，前視圖沒有改變，右視圖轉過來，這邊也是三個阿，這邊也是一個阿，所以沒有變，第一種。這邊兩個，三個，恩，只能少這個嗎，阿這邊也可以拿掉，這邊拿掉後，這邊也是三個，往前看也是可以這樣看，然後右視圖，也是這樣一二三，旁邊也一個，第二種。恩，沒有了吧，我找出了兩種可能。</p>	C3
<p>(98 秒)</p> <p>恩(檢查排出來的兩種可能)，這三個部分，這個一個，我檢查，我從前視圖開始檢查，還有，我從前視圖做檢查，前視圖到右視圖都有檢查。</p>	L1

共歷時 483 秒

(九) 丁 (高分者) 一題目一逐字稿

原案 (丁-1)	備註(編號)
(25 秒) 題目一，同學請看旁邊這一個木積塊，一塊積木，並回答下列問題，從眼睛的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。你是怎麼畫的呢？從五個視圖之中，你有發現什麼呢，你認為你正確嗎，為什麼呢？	U1
(14 秒) 從眼睛看過去，前視圖，前視圖只有一二三四五六，從前方看過去，就一二三四五六，	P1
(14 秒) (開始動筆畫) 一，二，三，(在圖上比) 四五六，四，五，六。這是前視圖。	C1
(22 秒) 再來是，再來是右，右視圖呢，我們先看旁邊，一二三四五。(開始動筆畫) 一，二，三，四，五。	C2
(41 秒) 再來是後視圖，後視圖就不要管這一顆，這一顆沒有用，然後用想，就這三顆阿，這三顆不用看，只要看這一二三四五六，中間這裡還有一顆，然後，因為從這邊有六，一二三四五六，有六面，一，二，三，四，五，六，六在這裡，這裡，好。	C3
(48 秒) 然後再看左視圖，左視圖在旁邊，所以這，這邊都不用管了，所以只要看一二三四，有四面，一，二，三，三在這裡，然後四在旁邊，旁邊的話在這裡...	C4
(12 秒) 欸，不會的問題 (開始排積木)，好。	P2
(36 秒) 前面的話，前面這個對了。然後再來是右，右視圖也對了。然後後視圖，後視圖也對了。只是，只是這顆畫反了，是這樣子，然後，是這樣子。	L1
(37 秒) 左視圖，一二三四，哦，所以是這樣子喔，這樣，然後這樣子，旁邊兩顆，這樣子。上面還有這一顆喔，所以上面還要加一顆喔，所以會有三顆喔，然後旁邊這兩顆。	C5

(24 秒) 上視圖，上面是從上面看嘛（轉動 A4 紙），所以會有一二三四五六，六顆。	C6
(112 秒) 我是，從，從，從那個，從這裡的角度看，然後再用想像的去畫。好。然後，想像的是兩個，這三個，我是先，恩，就是，我是先拼起來，然後再轉。好。	C7
(205 秒) 從五個視圖中，你發現了什麼？我發現他們長的不一樣，只是位置不一樣而已。就是別的視角看，都是別的，那個，別的就是方向都不一樣。像這兩個，和這兩個是類似的。還有右視圖跟左視圖。然後，上視圖喔，上視圖跟這些都不一樣，所以我這個都是用，用，用猜測的都是一樣，可是因為上視圖，因為沒有下視圖，下面嘛。上視圖只有一個嘛，因為角度，因為下視圖看不見嘛，所以不一樣。好。	C8
(46 秒) 恩，你認為你正確嗎，為什麼？我認為我是正確的，因為只要，只要你的拼圖，從不同角度，你就是對的。好。	L2
共歷時 626 秒	

(十) 丁（高分者）一題目二逐字稿

原案（丁-2）	備註(編號)
(28 秒) 同學，請看，請先看旁邊的這塊積木，並回答下列問題。從眼睛右方的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖和左視圖。你是怎麼畫的呢？從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？請問你正確嗎，為什麼？	U1
(31 秒) 好，我們先從前視圖看，這裡，前視圖，就跟剛才一樣，只是方向不一樣，因為剛才是右視圖，所以我們從這裡看，所以會有一二三四，一二三四五，五面（開始畫）。好，長這樣子。	C1
(43 秒) 然後再來是右視圖，是剛才的後視圖。右視圖的話，不用看這三顆，從，從上面開始，一面兩面三面四面五面六面，然後就是，這邊還有一格，所以是（開始畫），從這這裡看，所以是這樣子，然後這裡還一顆嘛，是左邊的。	C2
(44 秒)	C3

<p>然後再來是右邊看，左邊是後視圖，後視圖的話，這三顆不用看，這三顆，然後只要看一二三，然後裡面還有一顆，四五，只有五顆，所以是（開始畫）長這樣，這樣。然後再右邊看，這裡，這裡。然後旁邊這裡還有一顆嘛，所以會變這樣子，這樣子這個相反。</p> <p>(27 秒)</p>	C4
<p>然後再來是左視圖，左視圖就是最前面這裡，所以只要看這一二三四五六，這六面就好。</p> <p>(25 秒)</p>	C5
<p>然後再從上面看，上視圖，只要朝上的就是上視圖，所以這上面一二三四五六，就會六顆。好。</p> <p>(61 秒)</p>	C6
<p>我怎麼畫的，就是，各個角度都會有各個圖案，然後，就是只要你，頭腦有那個圖，就是頭腦想像出這個東西，然後從各個方面看，就會有那個圖形。好。</p> <p>(121 秒)</p>	C6
<p>從題目一跟題目二之中，你發現了什麼，題目一的前視圖，是這邊，題目二的前視圖，是從右邊看出來，所以是這邊，所以是前視圖。圖二的前視圖，是圖一的右視圖。只有方向不一樣，圖二是從這邊，往右邊看過去，阿圖一是從這邊看，繞過去，只是那個，只是它，它位置不一樣，它在這裡，他在這邊，所以它變第一個，阿所以它，它這樣子繞過去，所以圖剛好繞一圈。好。</p> <p>(133 秒)</p> <p>然後你認為你正確的嘛，為什麼？我認為我是正確的，就，就是，就是做出來的時候，確認嘛，確認會不會一模一樣（開始拼積木）。然後做完了，再從一邊一邊看，他是從右視圖，所以是從這裡開始，因為剛才第一，第一個題目的意思是前面這個，阿現在題目二是從右邊，對，從這裡，這是前視圖阿。右視圖對，然後後視圖是這樣子對，然後左視圖的畫對，然後上視圖，從上面開始看，對。好。</p> <p>共歷時 513 秒</p>	L1

(十一) 丁（高分者）－題目三逐字稿

原案（丁-3）	備註(編號)
<p>(32 秒)</p> <p>同學，先請看旁邊這一塊積木，並回答下列問題，從眼睛的方向看過去，前面，畫出立體圖形的前視圖，上視圖和右視圖。</p>	U1

<p>數數看，這個立體圖形總共是由小立方體積木所組成，在數積木時，你覺得可能會有其他答案嘛，你認為你正確嗎，為什麼？ (26 秒)</p>	
<p>我先從前視圖開始看，只會看到這一二三四五六七八，八面，這裡。 (27 秒)</p>	C1
<p>然後再從上視圖開始看，上視圖的話，只會看到一二三四五六，六面，這樣。 (129 秒)</p>	C2
<p>然後再從右視圖，旁邊這裡開始看，右邊的話，因為這裡會有三顆嘛，所以旁邊一定會有三顆這裡，一二，先畫出這三顆，然後再畫出，這一二三，三面，這旁邊嘛，這樣子，一二三，一二三，欸，等一下，確認一下，(開始拼積木)，是這樣子，所以右視圖是這樣看，是平行的，這樣子，然後旁邊這裡還有嘛，這樣子。 (52 秒)</p>	C3
<p>然後，數數看這個立體圖形，是由幾個小立方體，積木可以組成。因為這裡看不到，所以可以組起來，一個一個數，一二三，四五，六七八，九十十一，所以會有十一個。 (63 秒)</p>	C4
<p>然後再，積木數時，可能會有其他答案，會有總共，如果從這個視角看不到的話，應該會，他應該中間這邊會藏一個，裡面這邊會藏一個，所以會有十二個，這裡(比出藏積木的地方)，藏在，就死角拉。 (72 秒)</p>	C5
<p>我認為是正確的(轉動積木方向)，像這麼難的題目，就是有地方都是重疊，都會看不到東西，只要用積木拼起來，你就會看到他每一個面，有幾個，然後一個一個數。好了。 共歷時 401 秒</p>	L1

(十二) 丁(高分者)一題目四逐字稿

原案(丁-4)	備註(編號)
<p>(32 秒) 同學，旁邊的立體圖形，是由六塊積木所堆成，請回答下列問題。從眼睛前方的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖和右視圖。如果拿走一個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視</p>	U1

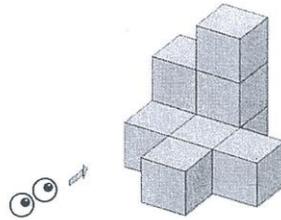
<p>圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形。你認為你正確嗎，為什麼？</p>	
<p>(16 秒) 所以我們先看前視圖，前視圖直接看前面，這一二三四，這四塊而已。這樣子。</p>	C1
<p>(19 秒) 然後再看右視圖，右視圖是這裡，所以看到一二三四，右邊，所以這個，方向不一樣，這個變到旁邊這裡。</p>	C2
<p>(16 秒) 然後，如果要拿走一個積木的話，我們可以先拿，先拼出來，然後再用各個角度看，會不會一模一樣（開始在 A4 紙上拼積木）。</p>	P2
<p>(20 秒) 如果是前方看的話，我會先拿掉這個，因為從這邊看的話，畫出來的話，也會畫這個，因為這裡還有一面嘛，所以畫一二三四五，所以會一模一樣。</p>	C3
<p>(17 秒) 然後第二種的話，我會先，我會先拿掉這個，因為裡面還有這裡這一顆阿。</p>	C4
<p>(35 秒) 然後第三個畫，旁邊這裡，因為只要這裡看過去一樣，阿這裡，因為這邊，因為這裡也有，所以會有一二三四。恩，沒有了。</p>	C5
<p>(89 秒) 你認為你正確嗎，為什麼，我認為正確的，因為，嘖，阿，就是如果，如果這個看不懂，不會怎麼拿走積木的話，我會先就是，先拼出來它的立體圖形，然後從，然後再用，再用各個角度思考怎麼拿掉積木，然後就拼出來了。（開始書寫第三題）好。</p>	L1
<p>共歷時 244 秒</p>	

附錄六 正式施測作答

(一) 乙 (低分者) - 題目一

題目一

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

上視圖	右視圖	前視圖	後視圖	左視圖

2. 你是怎麼畫的呢? *用木塊拼的*

3. 從五個視圖之中，你發現了什麼? *每個角度看都不一樣。*

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢? *正確，拼完以後，再用題目的視角看。*

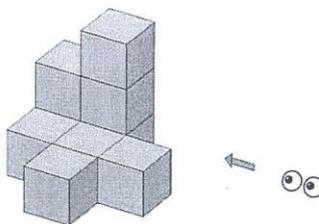
(二) 乙 (低分者) - 題目二

1. 第一次作答 (前視錯位)

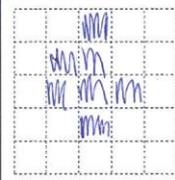
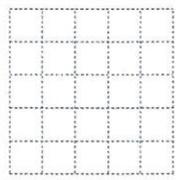
①

題目二

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從  的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

前視圖	上視圖	右視圖	後視圖	左視圖
				

2. 你是怎麼畫的呢？

3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？

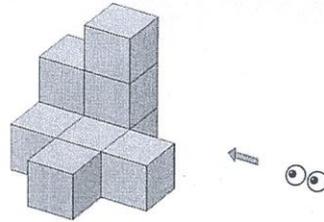
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

2. 第二次作答

②

題目二

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

前視圖	上視圖	左視圖	後視圖	右視圖

2. 你是怎麼畫的呢？看方塊，從題目的視角看的，我會站起來

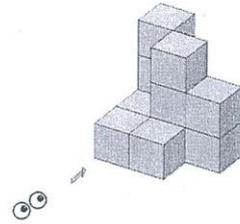
3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？
 ① 從每個視角看都不一樣
 ② 一個視角對一個視角，發長的不一樣

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？正確，拼完以後再從題目的視角看。

(三) 乙 (低分者) 一題目三

題目三

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從  的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。

前視圖	上視圖	右視圖

2. 數數看，這個立體圖形總共是由幾個小立方體積木所組成？

第一排有兩個
 第二排有六個 共有七個
 第三排有三個

3. 在數積木時，你覺得可能還會有其他答案嗎？不會

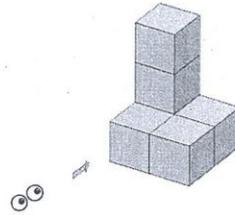
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？正確，拼完圖形後再從題目解看。

(四) 乙 (低分者) 一題目四

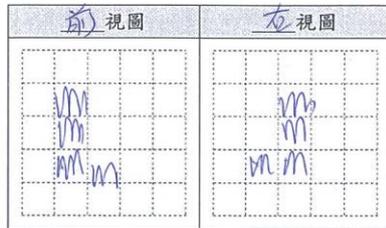
1. 作答

題目四

同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，請回答下列問題：



1. 從 (●●) 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。



2. 如果拿走 1 個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形。

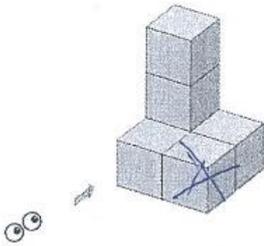
沒有

3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？正確，有用方塊式過和從前，右側看。

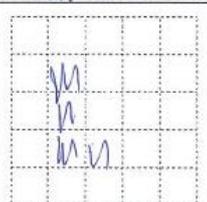
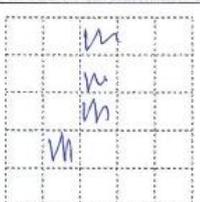
2. 可能性檢查

題目四

同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，請回答下列問題：

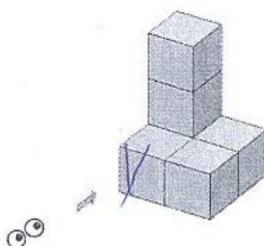


1. 從   的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。

前視圖	右視圖
	

題目四

同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，請回答下列問題：



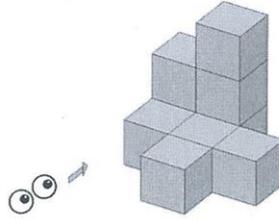
1. 從   的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。

前視圖	右視圖
	

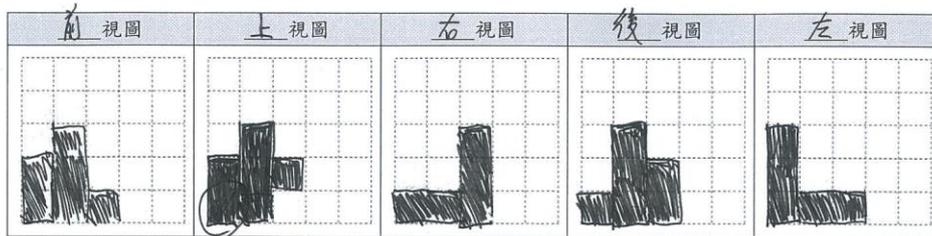
(五) 丙 (中分者) 一題目一

題目一

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。



2. 你是怎麼畫的呢？

拿積木，排成形狀，把空位補滿
先畫長再短

3. 從五個視圖之中，你發現了什麼？

形狀一真變

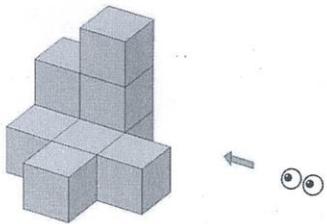
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

正確，因為我都有檢查

(六) 丙 (中分者) 一題目二

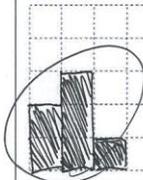
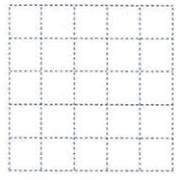
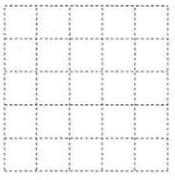
1. 第一次作答 (前視錯位)

題目二



同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：

1. 從  的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

前視圖	上視圖	右視圖	後視圖	左視圖
				

2. 你是怎麼畫的呢？

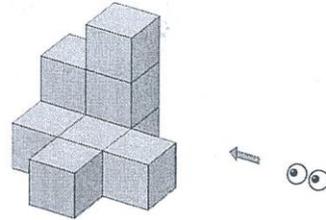
3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

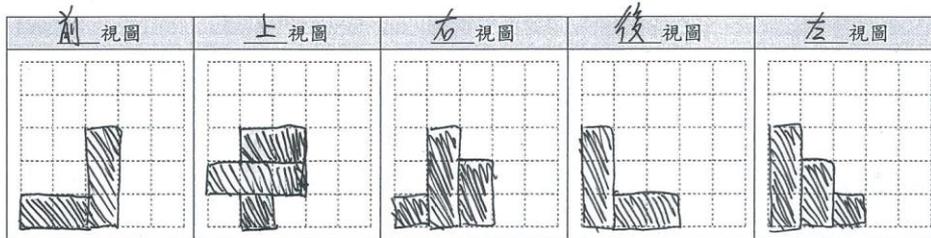
2. 第二次作答

題目二

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。



2. 你是怎麼畫的呢？

先拿積木，排成形狀，把空位補滿

3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？

是題目一跟題目二的前、上、右、後、左視圖都不一樣

看的方位不一樣

積木的形狀一樣

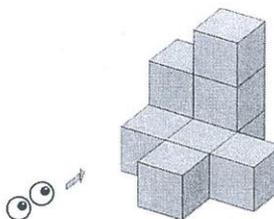
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

正確，因為前觀察，發現^②左視圖是^①前視圖，^③後視圖是^④左視圖，^⑤右視圖是^⑥後視圖，^⑦上視圖是^⑧上視圖
倒過來，^②前視圖是^①右視圖。

3. 檢查後訂正上視圖

題目一

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

視圖	上視圖	視圖	視圖	視圖

2. 你是怎麼畫的呢？

3. 從五個視圖之中，你發現了什麼？

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

(七) 丙 (中分者) 一題目三

題目三

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：

1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。

11個

前視圖	上視圖	右視圖

2. 數數看，這個立體圖形總共是由幾個小立方體積木所組成？

下面：6個
中間：3個
上面：2個
 $6+3+2=11$

3. 在數積木時，你覺得可能還會有其他答案嗎？

可能還有 $11+4=15$ 或 $11+2=13$
 後面4個 後面2個

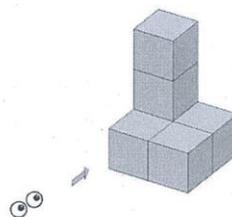
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

正確，因為我有檢查

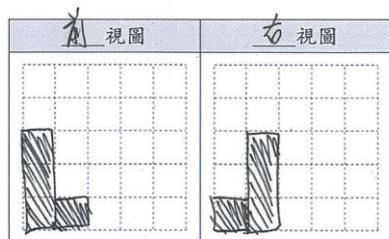
(八) 丙 (中分者) 一題目四

題目四

同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，請回答下列問題：



1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。



2. 如果拿走 1 個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形。

我找出了兩種，我用積木去排出形狀。

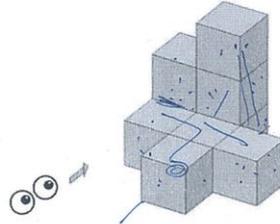
3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

正確，因為我從前視圖到右視圖都有檢查。

(九) 丁 (高分者) 一題目一

題目一

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

前視圖	右視圖	後視圖	左視圖	上視圖

2. 你是怎麼畫的呢?
 (前右) 我是從前面看正用各個角度想像。
 (後左) 先拼起來然後看。



3. 從五個視圖之中，你發現了什麼？

前後都很相似
 左右也很相似
 上視圖只有一個，因為看不到視圖，如果上視圖看的到圖案會一樣，但方向不同。

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

從拼圖看各個角度都是對的。

(十) 丁 (高分者) 一題目二

題目二

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：

1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖、後視圖、左視圖。

前視圖	右視圖	後視圖	左視圖	上視圖

2. 你是怎麼畫的呢？
用空間想像出圖案就能畫出來了。

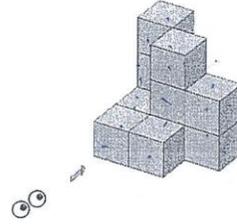
3. 從題目一跟題目二之中，你發現了什麼？
中二的前視圖是左視圖
就是圖樣一圖

4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？
做完了之後再用拼出圖然後一面面看就OK了。

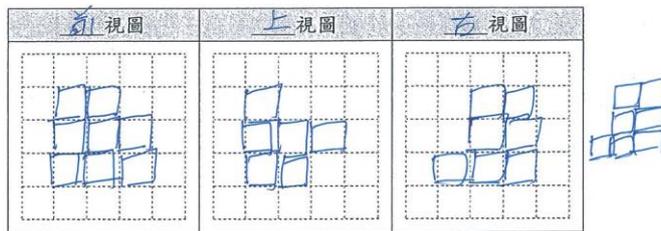
(十一) 丁 (高分者) 一題目三

題目三

同學，請先看旁邊的這一塊積木，並回答下列問題：



1. 從 $\odot\odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、上視圖、右視圖。



2. 數數看，這個立體圖形總共是由幾個小立方體積木所組成？

我用積木一個一個數的，
有 11 個

3. 在數積木時，你覺得可能還會有其他答案嗎？

12 個
藏在視線看不到的地方。

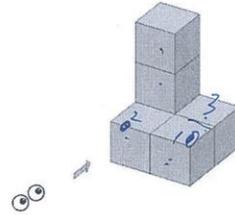
4. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

題目可能沒有看清楚，可以用積木的
來確認。

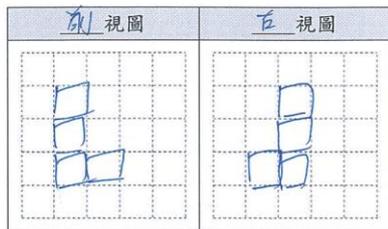
(十二) 丁 (高分者) 一 題目四

題目四

同學，旁邊的立體圖形是由 6 個方塊積木所堆成，請回答下列問題：



1. 從 $\odot \odot$ 的方向看過去，畫出立體圖形的前視圖、右視圖。



2. 如果拿走 1 個積木後，發現這個立體圖形的前視圖與右視圖皆不變，試試看，找出所有的可能情形。

總共有 3 種

3. 你認為你正確嗎，為什麼呢？

不懂的話，可以拼出圖片，然後用各個角度思考，拿出來。

附錄七 事後晤談資料

事後晤談逐字稿（乙）

研：這個的前視圖，你從哪裡開始畫？

乙：前視圖，我是先畫這個底部，

研：所以原本先畫底部這兩個。好。

乙：然後，因為它這一格，這個比較後面。

研：這個比較後面所以先畫這一個。

乙：然後往上移，阿然後因為它上面還有一格，要跟他平行。

研：等一下，我先確認一下。所以照理來說這邊還需要畫出一個。

乙：對。

研：好，那題目三，你再幫老師畫一次前視圖好不好，按照順序跟老師講。

乙：按照順序，好．．．



（繪圖順序如圖所示，由數字 1 到 8 依序描繪。）

研：那後面這邊要不要畫？

乙：應該不會，因為這個角度是空的。

研：好，所以前視圖應該這個樣子。

乙：對。