



國立中山大學教育研究所

碩士論文

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Master Thesis

診斷教學運用於國小五年級分數文字題之研究

A study on the application of diagnostic teaching in grade 5

fraction word problems

研究生：林炳宏

Bing-Hong Lin

指導教授：梁淑坤 博士

Dr. Shuk-Kwan S. Leung

中華民國 110 年 6 月

June 2021



國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士在職專班

研究生林炳宏（學號：N066150015）所提論文

診斷教學運用於國小五年級分數文字題之研究  
A study on the application of diagnostic teaching in grade 5 fraction word problems

於中華民國109年11月23日經本委員會審查並舉行口試，符合碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 周珮儀 周珮儀 委員 梁淑坤 梁淑坤

委員 蔡俊彥 蔡俊彥 委員 \_\_\_\_\_

委員 \_\_\_\_\_ 委員 \_\_\_\_\_

指導教授(梁淑坤) 梁淑坤 (簽名)

## 誌 謝

時光飛逝，碩專班生涯在此畫上句點，這段過程將化做我未來的養分，而心中的百感交集盡是道不完的感謝，回憶初踏入校園時的光景，直到近日即將離校，真是獲益良多。首先，感謝我的指導教授梁淑坤博士，不厭其煩地叮囑我論文進度，不論是因為我先備知識較為薄弱而落後同儕，或是因為工作關係而進度落後，老師總在我身旁耳提面命的指導，從沒放棄過我，同時也要感謝中山大學教育所周珮儀教授，及海科院蔡俊彥教授在口試時的建議與指導；接著，要感謝我的梁門師兄弟姊妹們——仁傑學長、東良學長、聿雯及玉雪，當我提計畫及口試的時候，總是不吝惜地給予建議與幫忙，有你們真好；最後，也要感謝中山大學教育所的所有教授及所辦的同仁，碩專班的這兩年，承蒙關照，不勝感激。

林炳宏 謹誌於

國立中山大學教育研究所

2021年6月



# 診斷教學運用於國小五年級分數文字題之研究

林炳宏

國立中山大學教育研究所

## 摘要

本研究旨在探討五年級學童在診斷數學後的具體表現及文字題運算成績之改變，本研究以現況教學過程所歸納學生分數單元相關另有概念 (alternative conception)，作為發展分數課程的依據，再融入 BDEI (Conceptual bridging-Differentiation-Exchange -Integration) (Hewson & Hewson, 1983) 與合作學習等兩種診斷教學策略於教學活動中，企圖可增進學生對於分數單元相關概念學習。研究者融入五年級分數單元。兒童診斷結果共 12 人：男生 7 人，女生 5 人進行教學設計，再經測試及專家效度形成分數診斷課程最後版(共四節)，用於探討國小五年級學生在 BDEI 與合作學習診斷教學策略中概念學習成效，更自編分數文字題來測驗做前後比較。研究結果顯示 BDEI 教學後：(1)學生在分數的約分、擴分與通分、異分母分數加減、分數乘法等問題的另有概念明顯減少；(2)學生在分數相關基本概念及題目的理解與應答均有進步(前後測成績比較)。

**關鍵詞：**診斷數學、分數文字題、課程設計

**A study on the application of diagnostic teaching in grade 5  
fraction word problems**

Bing-Hong Lin

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

**Abstract**

The aim of this study is to investigate the actual performance of fifth grade children in diagnostic teaching and their changes in scores on fraction word problems test. Through a synthesis on alternative conceptions of children from in-class teaching processes on several fraction units, the investigator used as results for development of diagnostic fraction teaching materials, also integrated BEDI (Conceptual bridging-Differentiation-Exchange-Integration) (Hewson & Hewson, 1983) and also cooperative learning. The development involved diagnosing 12 fifth grade children (7 boys and 5 girls) and expert review as validity resulting 4 lessons as final version, also developing pre-test (and post-test) to study the change in scores after diagnostics teaching. It is used to explore the

effectiveness in the BDEI and cooperative learning diagnostic teaching strategies for fifth grade students in elementary schools. It also compared test scores before and after teaching. The research results show that after diagnostic BDEI teaching: (1) The children have significantly reduced the number of alternative conceptions such as the reduction/expansion of fractions, common denominator, the addition and subtraction of fractions with different denominators, and the multiplication of fractions; (2) The comprehension and calculation abilities were improved (compared scores of pre-test and post-test results).

**Keywords: Diagnostic teaching, fraction word problems, development of curricular materials.**

# 目錄

## 第壹章 緒論

- 第一節 研究動機.....P2
- 第二節 研究目的.....P5
- 第三節 研究問題.....P5
- 第四節 名詞解釋.....P5

## 第貳章 文獻探討

- 第一節 診斷教學原理與實施.....P9
- 第二節 國小分數教材分析.....P15
- 第三節 分數錯誤分析.....P21
- 第四節 數學分數文字題的相關研究.....P28

## 第參章 研究方法與工具

- 第一節 研究現場.....P33
- 第二節 教學活動編擬.....P34
- 第三節 診斷教學課程實施及資料蒐  
集.....P38
- 第四節 預試結果與資料分析.....P43

## 第肆章 研究結果與分析

- 第一節 點心分披薩教學實況-似是而

非.....	P52
第二節 哪杯可樂多教學實況-殊途同	
歸.....	P58
第三節 到底吃多少條生乳捲教學實況-寸木岑	
樓.....	P64
第四節 你能拿到幾顆聖誕糖教學實況-溫故知	
新.....	P67
第五節 課堂實施後表現.....	P70
<b>第五章 結論與建議</b>	
第一節 結論.....	P73
第二節 建議.....	P76
參考文獻.....	P77
附件一.....	P81
附件二.....	P88
附件三.....	P90
附件四.....	P92

# 第壹章 緒論

在我國國民中小學十二年國民基本教育課程綱要中，數學學習領域課程的說明提到「數學教育應能啟迪學習動機，培養好奇心、探索力、思考力、判斷力與行動力，願意以積極的態度、持續的動力進行探索與學習；從而體驗學習的喜悅，增益自我價值感。進而激發更多生命的潛能，達到健康且均衡的全人開展（教育部，2018）。」呼應了現今 21 世紀社會中，不論在科學、技術、資訊、金融各領域或是日常生活中，對數理人才的需求日益殷切，也對數學知識及數學能力的發展也越發蓬勃，如何在不同年齡、不同能力、不同興趣或領域，皆能獲得足以結合理論與應用的數學素養，是國民數學教育的重要目標。再者，澳洲學者 Goos, Geiger 與 Dole（2012）認為應將數學知識、工具、情境、情意意向、批判取向等五個面向整合，建構出新世紀數學素養模式，此模式的觀點除了強調有關數學素養多面向、整合性的發展趨勢外，也認為具備數學素養的 21 世紀公民要能運用科技工具做為媒介，進行數學思考與行動，並且具有運用數學知能批判性地進行論證。由此可知，數學能力離不開生活外，更與現今社會發展息息相關。

在教學方面，提供每位學童啟動思考的鑰匙且激發學習內在動機的有感學習機會並陪著孩子成長，是十二年國教及國家教育政策既有的理念(教育部，2018)。然而在學童的學習過程中，每個學童的學習過程

有個別差異，學校教育在有限的時間內不一定滿足每一個學童的需求，除了教育部實施攜手計畫、補救教學計畫外，補習教育也是協助學童提升學習成效的方式之一（李敦義，2006；陳義汶，2009）。身為補習班老師的研究者，對學童的用心也不亞於學校教師，都不希望陪伴學童成長時，目睹他們的學習落後。有鑑於此，以下將探討執行診斷教學納入課堂的過程中所面臨的問題及解決方案以及學童的成效。

## 第一節 研究動機

從九年一貫中數學領域課程即強調教師在教學的過程中，應探討學童容易呈現錯誤類型為何及可能發生的原因（教育部，2003）至十二年國民基本教育素養導向教學，認為教師應將學童的錯誤視為學習歷程，診斷學童發生問題的根源，以達到提供每位學童有感的學習機會（教育部，2018）。診斷教學在數學教學歷程不論是在國內外都已廣泛被使用。以國外來說，英國學者透過遊戲設計融入數學學習的過程，目的是了解學童的等值分數概念可能發生的問題，並透過計算機來學習相關的分數概念，讓學童理解分數是數的概念（Kerslake, 1987），而 Bell (1993) 則是透過三個教學實驗，在經過診斷教學後，實驗組不論在後測或延後測的表現都比控制組還要好，而且控制組學童的正確的分數概念會隨時間而減退，反觀實驗組學童的正確分數概念會持續長久的時間。國內則有學者將診斷教學運用於相似形的實驗中，利用人形圖例設計

的活動，並配合簡化數據、改變情境等方法，使學童產生認知衝突，而達到教學效果(林福來，1990)。廖岳祥(2015)結合診斷教學與數位學習，探討國小三年級學童在分數概念之學習與學習態度是否有所差異，結果診斷教學亦有不錯成效。

從國小階段的數學課程的角度來說，分數概念在國小階段數學課程中是相當重要的概念，影響甚廣，舉凡是除法、小數、比、百分率等概念的學習都受分數概念的影響，可說是與各單元關係密不可分，因此亦在國小數學教材中佔相當大的比重，在十二年國教數學學習領域第三階段的二十四個能力指標中，有關分數的能力指標就佔七個，且國小五年級「數與量」單元中十六個單元中佔了五個單元(教育部，2017)，由此可見「分數」對於國小數學課程相當重要。由此可知，「分數」是國小階段學童數學學習過程中相當重要的概念，但學童對於「分數」概念的學習往往面臨挫折(Amato, 2005; Cramer, Wyberg, Leavitt, 2008)，並且學童執行數學任務過程中，單純只具備程序性知識(procedural knowledge)的學童，在解分數問題時的成就表現，遠低於同時具有程序性知識與概念性知識(conceptual knowledge)的學童成就表現(Pantziara & Philippou, 2011)，以往傳統教師分數教學活動著重計算規則的說明及操作而忽略學童對分數概念的了解(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Mamede & Cardoso, 2010)。此外，在研究者本身教學現場觀察下，

現行國小數學課程與分數概念的學習有關的部分，在五年級出現關於「分數」的多重表現方式(圖形、數線)與等分、單位量、等值分數等許多概念，時常造成學童在有關「分數」單元學習上的困難，尤其以分數文字題更為明顯。而有效的將文字表徵轉譯為數學語言，才能正確解題(Pólya, 1990；Mayer, 1993)，達到有效學習的目標。

學童遇到數學文字問題時，會利用已學過的數學知識將文字說明轉譯成數學語言，採取最有效的解題策略以獲取正確的答案(Kilpatrick, 1985)，解題的過程包含了理解、計畫、執行、驗證等四個階段(Pólya, 1957)，說明了學童如果要將數學文字題正確地算出答案，除了要有基本的數學知識外，也要有對解題表現及評鑑解題結果具有敏銳度，學童在面對數學問題的過程會透過調整本身的認知、行為和動機等方式來完成設定的目標(Desoete & Roeyers & Buysse, 2001)，也就是說每一次完成解題也經歷了一次自我調正學習策略。

因以上所述，108 綱要重視每一位學童的發展，研究者認為除了平日學校課程外，課後輔導也相當重要，可以因應診斷學童個別的需求，故希望在現行國小五年級課後輔導班的數學課程中，將診斷教學理論及合作教學應用於分數文字題概念及運算部分，期望使教師能夠在課堂上，對國小五年級學童在學習過程可能出現的分數文字題錯誤概念及運算的過程進行診斷，並藉由診斷的過程中學童的迷思部分提供適

當的教學策略，給學童正確的分數概念，協助學童改變分數文字題錯誤概念及運算。

## 第二節 研究目的

研究的目的是在探討：國小五年級學童分數文字題概念／運算，經過診斷教學融入現有課程內的學習成效。

## 第三節 研究問題

根據上述研究目的，本研究的待答問題如下：

- 一、當教師實踐診斷教學於現有分數相關課程時學童的具體表現為何？
- 二、實施診斷教學法後學童在分數文字題概念及運算後的表現上是否優於教學前？

## 第四節 名詞解釋

本節針對論文題目：「診斷教學運用於國小五年級分數文字題之研究」中的關鍵名詞之解釋，以便研究範圍的界定。

### 一、診斷教學

在本研究中，診斷教學過程是指利用診斷出學童對於所學單元迷思概念，接著對於迷思概念製造出認知衝突，並使學童發現自己的錯誤，最後達到調整舊有的認知的過程。診斷教學策略上使用 BDEI 概念改變法(Hewson & Hewson, 1983)與合作學習(Slavin, 1984)，首先，BDEI

概念改變法包含四個步驟，依序透過建立概念溝橋(B- conceptual bridging)引起學童學習動機，再讓學童引起認知衝突做出概念區別(D- differentiation)，接著老師引導學童討論，使學童發生概念改變，並且替換(E- exchange)成正確概念，最後進行讓學童釐清所要學習的概念，並加以整合(I- integration)。除了 BDEI 之外，合作學習法則利用小組獎勵、個人績效責任、均等的成功機會等，使學童個人和團體互相幫助及分享的過程來促進學童學習。

## 二、分數

本研究所稱之「分數」，指的是出現在國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域中(教育部,2004)所提及有關「分數」的 3 個能力指標，分別是 N-3-06(能理解等值分數、約分、擴分的意義)、N-3-07(能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題)、N-3-09(能理解分數(含小數)乘法的意義及計算方法，並解決生活中的問題)。在執行本研究中，「分數」所對應五年級上學期南一數學教科書版本的第四單元「擴分、約分和通分」、第六單元「異分母分數的加減」及補充教材。

## 三、數學文字題

研究者論文中所提及數學文字題，過去通稱為「應用問題」，是指以文字敘述的方式來描述問題情境的數學問題，提供學童一種運用計

算能力於各個情境的機會。本研究的「數學文字題」，係指依據 2003 年公布之國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要編製之審定本教科書中「異分母分數加減」及「分數乘法」單元的文字題。



## 第貳章 文獻探討

本章內容共分成四節，第一節診斷教學原理與實施，闡述診斷教學的理論基礎，並統整近年來診斷教學在數學領域發展的概述；第二節國小分數課程的學習範圍，梳理國小學童「分數」課程的學習範圍，藉由九年一貫能力指標課程地圖以及市售教材「分數」單元的分析，了解「分數」主題在現行國小數學課程裡縱向的發展與橫向的連結關係；第三節分數錯誤分析相關研究，探討「分數」學習歷程中學童常出現的錯誤類型。第四節綜述數學文字題的相關研究。最後依據文獻探討的結果，歸納本研究診斷教學運用於國小五年級分數文字題的理念及特色。

### 第一節 診斷教學原理與實施

Bell (1992)將診斷教學的理論概念視為承襲 Piaget 的認知發展理論。Piaget 認為人腦是有著同化(assimilation)與調適(accommodation)兩個作用所組成的自我協調本能。同化的過程是指當外界給予刺激時，人腦會先根據過往既有的知識去分析外界的刺激，並與原來的認知結構進行整合；而調適的過程則是既有建立的知識系統與外界給予的刺激之間產生矛盾時，就會嘗試用不同的知識系統或修改原有的知識系統再一次去解釋外界刺激。發生自我協調的關鍵在於學習者面臨外界刺激時是否產生認知衝突，意味著學習者是否發現既有知識系統中的矛盾，

並且產生修正舊概念或接受新概念的意願(黃湘武，1993)。診斷教學建立在 Piaget 的認知發展理論基礎下，利用學習者既有的知識系統出發，讓學習者在學習的過程中，找出錯誤的概念，發現矛盾並產生認知上的衝突，藉由自我協調後建立新的知識系統。以下根據診對教學的意義列出幾位學者對於設計診斷教學的活動以及診斷教學的原則的看法。

Onslow (1986) 認為在進行診斷教學前，應該要分析學童主要的迷思概念，並提出進行診斷教學的三步驟，第一步驟為開放性的活動：以具體的解題活動發現出學童的錯誤。第二步驟是對於認知衝突進行討論：經由小組或全班共同討論，利用不同學童對問題的意見交換，產生認知衝突。第三步驟利用類似習題練習：在開放性的活動與認知衝突的討論後，再給予一些相似的題型練習，鞏固學童的概念。

Bell (1992) 提出診斷教學的 9 個原則：

- 一、剛開始學習時作業的呈現，要讓學童能從過去的學習經驗中有跡可循；
- 二、選擇的作業要包含主要概念和可能的迷思概念；
- 三、設計使有錯誤的學童引起認知衝突的活動；
- 四、提供正確的回饋；
- 五、對於面臨的衝突加以討論，並建立與整合出一個新的知識系統；

- 六、在討論的課程內逐漸形成一個明確的關鍵原則；
- 七、利用問題做回饋，以強化學童的概念；
- 八、利用多元化的問題，確保不同初始概念層次的學童都有適當的挑戰課題；
- 九、在未來的學習過程中，適時利用不同的脈絡或情境重返相同的概念點，直到學童對於相同概念能產生長期記憶和可於情境轉移的能力。

由以上多位學者的文獻中可以發現，診斷教學的精神在於將學童視為學習的主體，所以診斷教學時，教師須去瞭解學童過往已經獲得哪些學習經驗？為什麼會從這個方向解題？過程中會犯了何種錯誤？會遇上那些挫折？並藉由設計教學活動，使學童發覺自己學習過程中的錯誤，進而引起學童學習的動機，接著利用設計一些相關教學活動讓學童去操作學習，最後獲得正確的學科概念。

除了以上多位學者提出的診斷教學原理外，研究者閱讀文獻過程中，發現根據診斷教學原理所設計的教学實施要領大致可分成四類：

#### 一、列舉異例及提出新奇問題法

學童學習的過程中，教師可用舉出異例(discrepant event or anomaly)等方式製造出學童在數學學習過程中遇到問題時產生概念上的衝突(conceptual conflict)，讓學童在質疑、辯證彼此的想法中檢驗或修正自

己的解法，以導正學童的學科的迷思概念。教學過程中，希望經由課堂中學童發生認知衝突的過程，學童可以察覺自己原有知識和正確學科知識間的差異，進而幫助學童重新建立正確的認知結構，操作的程序包含製造曝露事件、引入異例、調適期等三階段(劉曼麗，2005; Tirosh & Stavy, 1999)。第一，製造曝露事件的歷程，其重點在於教師呈現“任務(task)”給學童，要求學童對此任務說出他們的想法及想法背後的原因，在此階段老師採取中立，目的在於引導學童說出他們自己觀念的立場。第二，當學童說出並辯論某論點的正確與否後，即是教師引入異例的時刻。異例的作用在於充當誘發事件，目的在於促使學童察覺到其個人偏好之概念和真正觀察到的現象間之差異，藉著此種歷程引起學童產生認知衝突。第三，則是調適期，當認知衝突產生後，老師應鼓勵學童找尋答案來解釋異例，以便調整原先的迷思概念，並進而接受正統的科學知識。

另一個與列舉異例法(discrepant event or anomaly)有異曲同工的是提出新奇問題(novel problems)法，Niaz (1998)認為要讓學童的概念產生改變，教師可利用提出「新奇問題」讓學童來回答，在處理「新奇問題」的過程中學童會經歷推理及討論，過程中具有反思自己論點的效果，並且能引發學童發現迷思概念，造成認知衝突，使學童重建認知基模系統。

## 二、「IEMDT」(Integrated EduClick & Mathps Diagnostic Teaching)法

將資訊科技結合診斷教學，整合高互動即時回饋系統(EduClick)和數學簡報系統(math presentation system)進行診斷教學。首先利用即時回饋系統或數學簡報系統設計的試題讓學童操作，學童操作過程中掌握學童產生的學科迷思概念，並藉由題目製造認知衝突，接著以數學簡報系統進行認知調整，並建立完整數學概念，最後一步驟利用高互動即時回饋系統中提供的診斷性評量確認學童正確建立概念，研究結果顯示對於學童學習成效及動機等，都有良好表現（黃珣懿，2007；賴麗桂，2007）。

## 三、合作學習法

合作學習有別於傳統式學習或是個別式學習，是建立一種教學環境，可藉由個人和團體互相幫助及分享的過程來促進學童學習。其中刺激學習者反省與解釋、自由表達的氣氛、團體動力學的影響、免除困窘、知識是共同建構的、認知學徒制的歷程都是合作學習可以造成概念改變的因素(陳玉玲，2000)。合作學習並不是將學童分組，成員各自運作，也不是組內一位學童包辦所有工作，而是同儕間相互提供資源或是觀點，以提高個人學習效果，並達成團體的共同目標，最後分享所呈現的成果，將學童的測驗分數與他們自己過去的平均成績相比較，根據學童超出他們自己以前的成績的程度，即根據進步程度來決

定是否給予積分，這些積分彙總起來構成小組的分數。如果小組的分數達到某種標準，則可以獲得某一證書或其他獎勵。小組每隔 5-6 周改編一次，給每個學童提供一個與其他學童合作學習的機會，並給成績低的小組的成員提供一個新的機會。主要具有小組獎勵、個人績效責任、均等的成功機會等三個中心概念 (Slavin, 1984)。

#### 四、BDEI 概念改變法

Hewson 與 Hewson (1983)認為先找出學童具有的迷思概念是要改變觀念的第一步，接著利用概念改變策略進行教學，並將其運用於探討學童對於質量、體積與密度概念，產生迷思概念的原因，進而依此做課程設計的改進，讓學童獲得正確的密度相關概念。教學方式是從學童對於質量、體積與密度的迷思概念出發。首先利用生活中易見的物品於水中的浮沉現象引起學童動機，建立概念溝橋(B- conceptual bridging)，再讓學童察覺為何實心矩形小鐵塊會沉入水中而船能在水中航行，引起學童認知衝突，驅使學童做出概念區別(D- differentiation)，接著老師引導學童討論，使學童發生概念改變，並且替換(E- exchange)成正確概念，最後進行定錨的工作，讓學童知道原來物體的浮沉與密度之間的關聯，並加以整合(I- integration)，讓學童能夠釐清所學習之概念等四個教學策略依序來進行教學，故稱為 BDEI 概念改變法。

在以上四種診斷教學的實施方式中，「列舉異例(discrepant event or anomaly)及提出新奇問題(novel problems)法」的診斷教學法偏的是重教材設計，而「BDEI 概念改變法」、「IEMDT」、「合作學習法」等後三種診斷教學法著重的是教學策略或教學方法的設計。

因以上文獻所述，本研究利用診斷教學概念於分數文字提中來探討其教學成效，過程進行的診斷教學法教材的部分以學童現行教材為主，故不採用設計「異例」、「新奇問題」的方式來進行。另外由於教學場域限制情況下，本研究沒有採用「IEMDT」的資訊科技結合。最後研究者捲則使用「BDEI概念改變法」與「合作學習法」融入教學現場（如：小組討論）中，讓學童經由既有迷思概念與正確學科概念在認知結構之交互作用下產生認知衝突，引起學童在認知結構上的失衡，進而使既有迷思概念修正、改變。

## 第二節 國小分數課程的學習範圍

為配合本研究的研究目的，教材分析主要是以配合本研究的參與者的數學版本—南一版，進行分析。根據南一版分析，國小分數主題歸納如圖 2-1，灰底部分為本研究針對五年級課程的目的範圍。

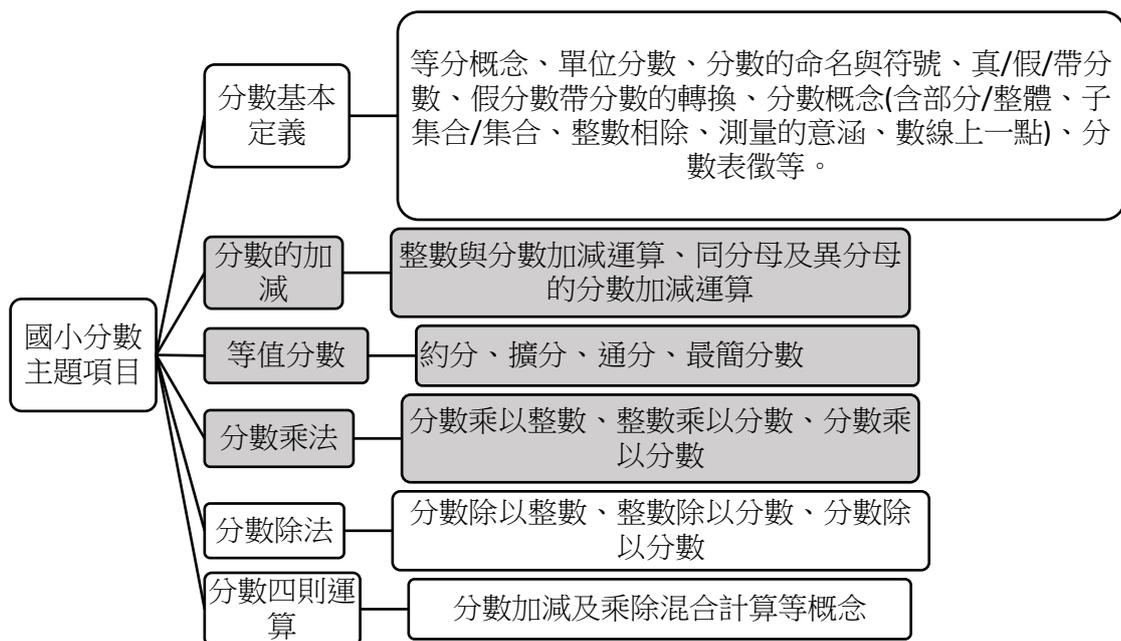


圖 2-1 國小分數主題(南一版, 2019)

各主題項目與各年級的對應關係如表 2-1。

表 2-1 各主題項目與各年級的對應關係

項目 年級	分數基本定義概念內容	分數加減運算及等值分數 概念內容	分數乘除概念與四則運算的內容
六年級			<ul style="list-style-type: none"> <li>● 整數除以分數</li> <li>● 倒數</li> <li>● 分數除以分數</li> </ul>
五年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 分數數線</li> <li>● 從測量理解整數相除的意涵</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 擴分</li> <li>● 約分</li> <li>● 通分</li> <li>● 異分母分數大小比較(透過通分)</li> <li>● 異分母分數加減法(透過通分)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 分數除以整數</li> <li>● 分數乘以分數</li> <li>● 整數乘以分數</li> <li>● 分數乘以整數</li> </ul>

四年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 從平分理解整數相除的意涵</li> <li>● 帶分數與假分數互換及大小比較</li> <li>● 帶分數</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 異分母分數大小比較(透過圖形)</li> <li>● 認識等值分數</li> <li>● 同分母帶分數加法</li> <li>● 同分母帶分數減法</li> </ul>	
三年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 長度、容量及重量的分數問題</li> <li>● 假分數</li> <li>● 真分數</li> <li>● 介紹分子、分母及分數符號</li> <li>● 分數與1的關連</li> <li>● 分數的數詞序列</li> <li>● 同分母的分數大小比較</li> <li>● 分數的離散量情境</li> <li>● 單位分數概念及大小比較</li> <li>● 等分概念</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 同分母假分數加法</li> <li>● 同分母真分數加法</li> <li>● 同分母真分數減法</li> <li>● 同分母假分數減法</li> </ul>	

數學教科書版本的分數教材在五年級上學期有二個單元，個別為上學期的第四單元「擴分、約分和通分」及第六單元「異分母分數的加減」。

第四單元是利用擴分與約分找等值分數與運用通分解決異分母分數大小比較的學習，教學目標內容包含三部分。

第四單元第一個教學目標是「理解擴分或約分的意義和應用，並利用擴分與約分來理解通分」。擴分與約分主要活動各有兩個，其一為連續量情況，以單一個物品或項目為單位分數，如：擴分為「把一張色紙平分成5等分，塗色部分是 $\frac{3}{5}$ 張，『 $\frac{3}{5}$ 』會和那些分數相等？」、約

分為「立東把一條緞帶平分乘 12 段， $\frac{8}{12}$ 條緞帶也可以說是幾條緞帶？」，另一個為離散量情況，以多個五品或項目為單位分數內容物，如：擴分為「一盒巧克力有 10 顆， $\frac{7}{5}$ 盒巧克力和十分之幾盒巧克力一樣多？」約分為「一盒蛋塔有 6 個， $\frac{10}{6}$ 盒蛋塔和三分之幾盒蛋塔一樣多？」。通分則以連續量來說明，以單一個物品或項目為單位分數內容物的比較，如：「東傑喝了 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，明達喝了 $\frac{6}{12}$ 公升的牛奶，他們喝的牛奶一樣多嗎？」。

第四單元第二部分的教學目標是「運用通分解決異分母分數的大小比較」。主要內容分為三個活動有，其一為相同單位分數平分的活動，如：「黃絲帶長 15 公尺，平分成 12 段；藍絲帶長 15 公尺，平分成 14 段，哪一種顏色的絲帶比較長？」，其二為真分數(分子不為 1)的等值分數比較大小活動，如：「有兩包糖，紅糖重 $\frac{3}{4}$ 公斤和白糖重 $\frac{5}{6}$ 公斤，哪一包糖比較重？」。第三為當整數部分即可比出大小則不用通分，如：「有三條鐵絲，分別長 $3\frac{3}{5}$ 公尺、 $4\frac{1}{4}$ 公尺和 $5\frac{7}{8}$ 公尺，請依長短順序排列出來」。

第四單元第三部分的教學目標是「能繪製並標記分數的數線。」。一開始的兩個活動是透過故事情境，請學童將問題的結果劃記在數線上，再利用觀察數線的位置辨別出兩個分數之間的大小，如：「1 盒方塊酥有 24 塊，平分給 2 人，每人可得幾塊？是幾盒方塊酥？平分給 3

人，每人可得幾塊？是幾盒方塊酥？。小文把結果排成(如圖 2 - 2)、請同學比比看，並在兩數中間用  $>$ 、 $<$  或  $=$  表示大小關係。12 盒和 13 盒，哪一個比較多？ $\frac{1}{12} \square \frac{1}{13}$ 」。後續，同分母加法共有八題題目，有給予情境的問題有 4 題，如：「1 盒冰棒有 12 枝，姊姊有  $\frac{8}{12}$  盒，妹妹有  $\frac{7}{12}$  盒，她們共有多少盒？」。同分母減法共 12 題，有情境的問題有 4 題，如：「1 盒餅乾有 10 塊，小芬拿了  $\frac{13}{10}$  盒，阿文拿了  $\frac{5}{10}$  盒，誰拿得多？多幾盒？」第三個活動以讓學童了解分數乘法概念為教學目標，內容是在生活的情境中，能解決分數型態(真分數、假分數、帶分數)的簡單整數倍問題。如：「1 串丸子有 7 顆，阿文、阿得和小蘭各拿 27 顆，他們 3 人共拿了多少串丸子？」。

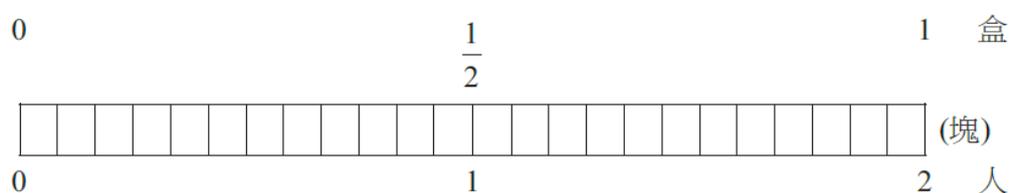


圖 2 - 2 平分示意圖

第六單元的教學目標是利用擴分、約分和通分的過程，依據題意進行異分母分數加減運算的學習，本單元教學內容包含三部分。

第六單元第一部分的教學目標是「透過通分，進行異分母分數的加法和減法」。主要活動有三個，其一為將兩異分母分數的分子與分母，同時擴大，也就是說乘以對方分母的方式通分成相同分母後，再以同分母分數的計算，如： $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$ 」。其二為將異分母以「取

最小公倍數」的方式通分後再計算，如： $\left[\frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{8}{18} - \frac{3}{18} = \frac{5}{18}\right]$ 。第三為將異分母分數約分後，再按同分母分數的加法或減法計算，如： $\left[\frac{25}{20} + \frac{21}{12} = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3\right]$ 。三個活動所得到的結果，如果是假分數，需換成帶分數或整數作答。

第六單元第二部分的教學目標是「異分母帶分數的加法和減法」。主要活動有三個，其一為先通分為同分母，再將整數和整數相加(減)，分數和分數相加(減)，如：「晨跑活動 5 分鐘後，小育跑了 $1\frac{1}{9}$ 公里，小宇跑了 $1\frac{2}{6}$ 公里，小宇比小育多跑了幾公里？把作法用算式記下來」，作法： $\left[1\frac{2}{6} - 1\frac{1}{9} = 1\frac{6}{18} - 1\frac{2}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}\right]$ 。其二為異分母分數相加時，要先通分成同分母帶分數再做計算，計算的結果若為假分數，則要進位到整數，如：「紙藤 1 捆長 96 公分，姊姊裝飾花瓶用掉 $1\frac{7}{8}$ 捆，做花籃用掉 $1\frac{5}{12}$ 捆，姊姊共用掉幾捆紙藤？」，作法： $\left[1\frac{7}{8} - 1\frac{5}{12} = 1\frac{21}{24} - 1\frac{10}{24} = 2\frac{31}{24} = 3\frac{7}{24}\right]$ 。第三為異分母的帶分數相減時，可先通分成同分母帶分數再做計算，如果被減數的分數部分不夠減時，則把被減數的整數部分借 1 換成假分數，再整數減整數，分數減分數，如：「有一些巧克力，小明吃了 $3\frac{1}{2}$ 條，小華吃了 $1\frac{3}{4}$ 條，小明比小華多吃了幾條巧克力？」，作法： $\left[3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} = 3\frac{2}{4} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{6}{4} - 1\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}\right]$ 。

第六單元第三部分的教學目標是「當兩數相除無法整除時，可用分數表示並計算」，如：「當甲數等於 $8 \div 3$ ，乙數等於 $5 \div 4$ ，甲乙兩數的

合是多少？」，作法： $8 \div 3 = \frac{8}{3}$ ， $5 \div 4 = \frac{5}{4}$ ， $\frac{8}{3} + \frac{5}{4} = \frac{32}{12} + \frac{15}{12} = \frac{47}{12} = 3\frac{11}{12}$ 」。

### 第三節 分數迷思概念相關研究

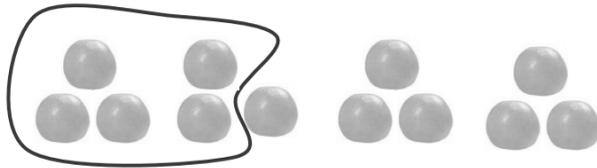
研究者根據本研究研究範圍數教材分析進行相關文獻蒐集後，將分數迷思概念類型分為「單位量」、「等值分數(含分數的比較)」、「分數的加減」、「分數的整數倍」等四個部分討論。研究者將分數的比較納入等值分數範圍的原因在於解分數的比較大小這一類型題目時，所需要的主要概念是等值分數的運算，所以解題的同時，學童會利用通分的過程將異分母的分數轉變成相同分母的等值分數後，再運用同分母分數比較大小觀念進行分數大小的判斷。而且，研究者閱讀「分數」相關文獻時，發現有大部分的研究都顯示五年級學童對於「分數」單位量具有迷思概念導致「分數」比較大小的學習上有著困難，所以研究者認為在「分數」的題目中能確實理解並找出適合單位量的能力也必須納入教學目標之中。故以下針對「單位量」、「等值分數(含分數的比較)」、「分數的加減」、「分數的整數倍」等四個部分，進行相關整理與探討。

#### 一、單位量

Figueras (1989) 研究表示兒童面對「分數」單位量的困難有「忽略給定的單位量」、「受分子控制」、「受分母控制」三種類型。

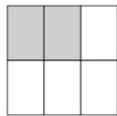
(一) 忽略給定的單位量

例如：「有四堆橘子，圖示中圈出 5 個，請問圈起來的橘子占全部的多少？」，答案應為  $\frac{5}{12}$ 。但這時學童誤以為圈起來的 5 個橘子中的兩堆的個數(6 個)為單位量，故回答  $\frac{5}{6}$ ，忽略了四堆橘子的總個數(12 個)才是單位量，該回答  $\frac{5}{12}$  才為正確答案。

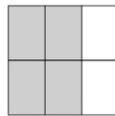


(二) 受分子控制

例如：「有等分成六塊的正方形中，著色其中的  $\frac{2}{3}$ 」，應視題目圖形要求，將  $\frac{2}{3}$  擴分為  $\frac{4}{6}$ ，再把其中的 4 塊著上顏色。但學童只考量  $\frac{2}{3}$  的分子為 2，故只塗 2 塊。



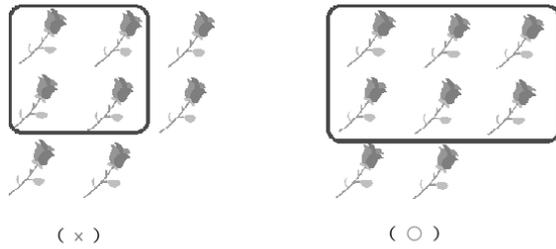
( × )

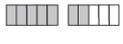


( ○ )

(三) 受分母控制

例如：「學童解決從 8 朵花中，圈出其中的  $\frac{3}{4}$ 」的分數問題時，應視題目要求，將  $\frac{3}{4}$  擴分為  $\frac{6}{8}$ ，再把其中的 6 朵花圈起來。但學童只考量  $\frac{3}{4}$  的分母為 4，故只圈了 4 朵。



從題目中找出所需單位量的能力對於分數學習是基本且相當重要，但學童對於題目中單位量的找尋並不容易，可見概念是不穩固的，導致很多時候無法清楚分辨問題所描述單位量為何，無法正確的作答(楊德清、洪素敏，2003；Cramer, Post, & delMas, 2002)。Iwasaki(2000)等學者讓 38 位三年級學童解「如果一條彩帶有 120 公分長，請拿出 14 公尺長的彩帶給我」的問題，研究的結果中有 14 位(37%)的學童只看到「14」這個數字，就直接將彩帶平分成 14 等分，而沒有考量問題描述中要求拿出的是「14 公尺」這個目標，並不是「平分成 14 等分」，由此過程可以知道學童對於單位量概念是模糊且缺乏的。詹婉華(2003)發現五年級學童的對於在「分數」問題中，找出單位量仍然很模糊，在遇到「一盒巧克力有 2 條。小明拿了 12 盒，小華拿了 12 條。請問小明和小華得到的一樣多嗎？」的問題時，只有約 45%的學童答對，超過一半的學童並沒有觀察到單位量，而只看到「12」的數字，認為小明和小華兩個人拿到一樣多。Amato (2005)的研究則認為許多學童的單位量概念在學習時有困難，例如有些學童會將「」的答案錯認為是 $\frac{7}{10}$ 而不是 $\frac{7}{5}$ ，弄錯的單位量。Amato 研究透過部分—整體圖形

(part-whole diagrams)的協助，能夠改善學童發展單位分數的概念，易有不錯成效。

## 二、等值分數(含分數的比較)

Kamii 和 Clark (1995) 認為學童解等值分數問題會受圖形思考(以圖形大小作比較)的影響。例如他們給五、六年級學童 兩張一樣大的長方形紙，然後在學童面前把兩張長方形的紙對折：一種對折成兩個長方形、一種折成兩個三角形，如圖 2-3，結果有 44%的學童說一樣大(即 a、b、c、d 等 4 塊區域面積一樣大)，38%說三角形比較大(即 c、d 兩塊其中一塊面積大於 a、b 兩塊其中一塊面積)，其他的學童很矛盾，Kamii 認為這些學童的運作思考告訴他們兩塊一樣大，但是圖形思考卻說三角形 比較大，使他們對自己的答案不確定。



圖 2-3 等面積異形體保留概念

Hannula (2003)的研究中顯示，只有約 46%的五年級學童能正確將範例圖中 $\frac{3}{4}$ 的位置塗上顏色，如圖 2-4。詹婉華(2003)發現五年級學童遇到「1 盒蘋果有 4 個，小波得到 $\frac{1}{2}$ 盒，小明得到 $\frac{1}{4}$ 盒，請問誰得到比較多的蘋果？」的比較單位量問題，其中有 16%的學童只單純考慮分子，二者分子相同所以都是拿一份，所以兩人分到的蘋果個數上也相同；

其中的 14% 的學童只注意到分母的部分，學童認為兩個分數中分母  $4 > 2$ ，所以分母為 4 的分數較大，也就是小明拿到比較多盒蘋果。洪素敏等(2007)發現國小五年級學童有著「不瞭解等值分數的意義」與「分數的求法和分數的乘法混淆」兩種關於等值分數的問題，等值分數概念影響甚廣，會關係到學童後續在分數的加、減、乘、除運算的過程，以及分數比較大小的學習表現(洪素敏、楊德清、蔡鳳秋，2007)，教學等值分數的過程中讓學童實際操作實體物(例如：積木)或其他表徵間的轉換，換而言之也就是由具體的概念到抽象符號表徵的教學過程，對學童在等值分數概念與運算過程的意義能產生更長遠的記憶及理解。

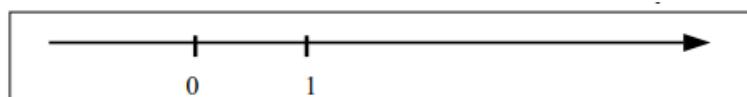


圖 2-4 著色範例圖

### 三、分數的加減

Lukhele, Murray 與 Olivier (1999) 蒐集了五、六年級學童共 95 位的資料，同分母分數的相加(例： $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$ )的問題中只有 13% 答對率，部分作答學童將式子中的分母加上分母，分子加上分子所得到的大案作答(例： $\frac{7}{8} + \frac{7}{8} = \frac{14}{16}$ )。Herman 等(2004)發現對於「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$ 」、「 $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = ?$ 」等類似問題中，六年級學童雖然能夠透過分數的運算規則計算出答案，但是無法解釋其意義與用其他表徵來表示算式。

國內學者李源順(2005)在研究中發現，國小四年級學童在進行同

分母真分數加減運算時會出現的錯誤類型有：

(一) 加法問題

1. 分母加分母與分子加分子的概念性迷思。 $(\frac{7}{8} + \frac{7}{8} = \frac{14}{16})$
2. 少部分學童只取分子相加。 $(\frac{7}{8} + \frac{7}{8} = 14)$
3. 看成小數相加。(遇到無法整除的情況)
4. 將所有數字相加。 $(\frac{7}{8} + \frac{7}{8} = 30)$

(二) 減法問題

1. 將減法問題看成加法問題。 $(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{9}{8})$
2. 使用分子減分子，分母減分母。 $(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4})$
3. 分子相減，但分母相加。 $(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{6}{12})$
4. 只取分子相減。 $(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = 6)$
5. 看成小數相減。(遇到無法整除的情況)

可見分數的加減問題在分數概念學習時是學童遇到挫折很常見的問題。

李源順、余新富與李勇諭(2006)發現四年級學童遇到相同分母的應用問題時(分數加法)的答對率高達 85%，而遇到表徵問題時的答對率僅 49%，可見分數的加減部分，問題在於學童學習過程中流於單純執行運算規則進行解題，並無法連結到外在的表徵與生活實際情況連結。

Cramer 等(2008)利用「the fraction circle model」讓四、五年級的學童透

過操作具體教具或以圖像的方式瞭解分數加、減法的概念，讓學童能以心智表徵(mental representations)的方式進行分數加、減法的運算，提升學童分數的加、減運算學習成效。

#### 四、分數的整數倍

教學過程中有部分學童在遇到分數的整數倍的問題時，會利用分子與分母同時乘以某一個整數，也就是擴分的方式處理運算過程，例如「 $\frac{7}{5} \times 6$ 」，有部分學童會以「 $\frac{7}{5} \times \frac{6}{6}$ 」表示答案，可見學童對於「分數的整數倍」以及「分數的擴分」容易產生誤用(胡蕙芬、李源順，2005；Taber, 2007)。Mack (2000)觀察4個四至六年級的學童長達兩年的時間，進行圖形表徵對於學童學習分數乘法概念是否有幫助的研究，結果顯示實驗組學童經過教學實驗後，可以透過圖形表徵清楚的說明分數乘法運算規則。胡蕙芬與李源順(2005)的研究中提到五年級學童遇到分數乘以一個整數倍的應用問題題型時，學童正確作答的答對率有68%，比遇到表徵問題時只有25%的答對率來的好，問題以可能在於學童學習過程中流於單純執行運算規則進行解題，並無法連結到外在的表徵與生活實際情況連結。

根據以上討論分析，研究者發現國小五年級學童不僅在單位量概念不穩固之外，在分數比較大小概念學習上容易只注意到分子或分母的影響，以及運用圖形表徵解決或解釋分數問題的能力較弱，是較為常

見且嚴重的問題。

#### 第四節 數學分數文字題的相關研究

在數學學習領域的有關研究裡，數學文字題，又稱應用問題，為當代數學教育探討的重要主題之一（Lewis, 1989）。文字題普遍出現在小學數學課程中，是以日常的生活事件為材料且用語文型態來描述數學問題情境（Cummins, 1991），比一般的計算題涉及更複雜的認知歷程。訓練學童去解決文字題主要目的是希望學童能將課堂上所學到的數學知識，運用以解決生活中所遭遇到的問題。

然而，在教學現場上，數學常成為「焦慮之源」，是學童最感挫折與困難的科目之一（石厚高，1997）。其中最棘手的，無非就是「文字題」的解題工作了，也因此近二、三十年來，有關數學解題能力的研究發展特別受到重視。提昇學童的數學解題能力也是被十分關注的議題之一。如前節所述，要提昇學童的解題能力，便要知道解題成敗的因素後加以修正和調整，而其中在文字題的部分，尤以加強學童閱讀理解能力為其首要任務。近年來，也有許多報導大力提倡閱讀能力的培養以提昇數學能力（陳雅玲，2004；林明志，2009），就是其中最重要的依據。

Polya（1962）從教學的層面將數學問題分為四種，如下。

- 一、例行的問題。把正在學的運算規則，拿來作機械式的應用就能解決的問題。「分數」單元例舉題目如：算算看，「 $\frac{4}{7}-\frac{5}{14}$ 」的答案是多少？
- 二、有選擇的應用題。要應用以前學過的規則或步驟才能解決，但以前學過的不只一種，所以解題者需要作一些判斷以選擇適用的規則或步驟。「分數」單元例舉題目如：1 盒牛奶糖有 24 顆，哥哥吃了  $\frac{5}{12}$  盒，妹妹吃了  $\frac{9}{18}$  盒，誰吃得比較多？
- 三、選擇一種組合。要求解題者把二個以上的學過的規則或例子組合起來才能解出來的題目。「分數」單元例舉題目如：長 10 公分的紫緞帶平分成 14 段，12 公分的綠緞帶平分成 18 段，各取 1 段，哪種顏色的緞帶比較長？
- 四、接近研究級的題目。這種題目要求解題者把二個以上的規則或例子作有創意的組合才能解題，但此種組合會有許多分支，且要求相當高層次的獨立思考，以及使用到擬真推理。「分數」單元例舉題目如：有一件衣服，甲師傅獨自一人製作要 6 天完成，乙師傅獨自一人製作要 8 天完成，丙師傅獨自一人製作要 10 天完成，三人合作 1 天，可完成衣服的幾分之幾？

由上述可知不論是國內外學者都認為解決文字題是學童不可或缺的能力，研究者教學經驗中發現，國小階段學校中的數學問題，一般

可分為算術問題 (arithmetic problem) 與文字問題 (word problem) 。其中算術問題只需要熟練數學的基本運算規則即可解題。然解答文字問題不僅要熟悉數學計算過程，亦要能閱讀题目的語意部分，理解問題的要求及文字中所提供之條件，將自然語言 (ordinary or natural language) 轉譯成算術語言 (arithmetic language) 之後，才能依照數學的運算程序獲得答案 (Mayer, 1992) 。這種數學文字題在我國的中小學裡，也稱為「應用問題」。

古明峰 (1998) 進一步指出，所謂文字題是結合數學知識與語文技巧的問題，解題者必須先閱讀過題目，再結合數學概念，按照題意進行解題的運算過程。Marshall 認為文字題最大特色在於題目中不直接陳述需要用到哪一種計算過程來解決問題，而是解題者必須能從自己的記憶中提取相關經驗，對這個問題加以判斷後以產生了解 (引自詹士宜，1992) 。Cummins (1991) 認為文字題是將日常生活中所發生的事件，以語文型態所描述出的數學問題情境，它比一般算術題涉及更複雜的認知歷程。Mayer (1987) 認為文字題是藉由文字來敘述的一種計算題型式，學童在解數學文字題時，不僅要熟悉計算的過程，同時也要能閱讀問題的語意部分，並理解問題要問什麼及所提供的條件，然後才能進行運算的工作。

數學問題有多種形式存在，學者 Moyer 等人(1984)將問題分成三

類：

(一)文字(verbal)：問題以完整敘述呈現

(二)電碼式的敘述(telegraphic)：將冗詞贅字簡短為一小段敘述

(三)圖像(drawn)：將問題中所提及的物品具象化，並有簡短說明

試圖檢視不同閱讀能力的學童，在不同形式的敘事問題中的表現是否有所不同，結果發現單純的文字題，在解題過程中比起圖像或簡潔化的敘述來的困難許多。

其中文字題是以語文的敘述方式，要求解題者結合數學概念進行運算解題的一種數學問題形式。因為文字問題的解決歷程需要運用語文理解、數學概念、計算能力，是促進高層次思考的途徑。因此，文字問題在數學課程中佔有重要的地位，亦即本研究所關注的焦點。研究者認為所謂數學文字題，過去通稱為「應用問題」，是指以語文的方式來描述問題情境的數學問題，提供學童一種運用計算能力於各個情境的機會。本研究所稱之「數學文字題」，係指依據我國教育部於 2003 年公布之國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要編製之審定本教科書中「異分母分數加減」及「分數乘法」單元的文字題。



## 第參章 研究方法

因為每個學童的心智模式不同，所有的先備知識也不完全相同，故本研究將透過行動研究方式，觀察並分析學生對於分數概念迷思澄清的過程。本章內容共分成四節，第一節研究現場，主要於介紹參與者、課程分組、使用的教學法及課程安排；第二節教學活動編擬，說明診斷教學活動如何編擬至課堂中。第三節診斷教學課程實施及資料蒐集，設計教案進行試教與評量試題進行預先測驗；第四節預試結果與資料分析，探討學童經過研究者所設計的評量試題預先測驗後，出現的錯誤類型分析，討論學童經過診斷交學校案後對於分數的迷思是否有進一步改善。最後依據這四個章節的結果，歸納本研究診斷教學運用於國小五年級分數文字題的實用及必要性。

### 第一節 研究現場

本研究選定研究者所經營的課後照顧服務中心中國小五年級學童為研究對象，個案班級一共 12 位學童，根據學童在學校的數學學科成績與教學需求將學童分為 3 組，每組 4 位學童，使得各組學童程度相當，座位編排方式如圖 3-1。在教學方法方面則利用合作學習法，小組討論、發言的教學方式，並在教學過程中會加入「BDEI 概念改變法」診斷教學策略，在學童出現錯誤概念及算式時，教學者會利用過程中產生認知衝突的情境，使學童察覺自己的錯誤，進而調整其原有認知。

課程安排方面，第四單元「擴分約分通分」的上課時數兩堂課，第六單元「異分母分數加減」的上課時數一堂課，根據參與學童學校課程有補充「分數的乘法」部分，故課程延伸「分數的乘法」一堂課。教學前，先以研究者根據學童學校內容與分數錯誤類型設計的前測試題測驗，並於教學後，以後測的結果來了解教學後成效是否優於教學前。

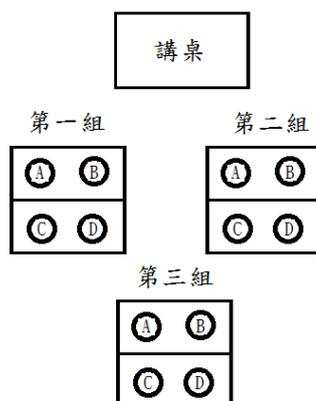


圖 3 - 1 學童座位圖

## 第二節 教學活動編擬

這個章節的教學活動依據需要達到的教學目標編擬，教學目標除了以參與學童學校上課所用的教材為基礎，來定義教學目標外，再考量學童常有的「分數」迷思概念的因素，形成下列教學目標：異分母分數的比較、加法、減法時，能正確找到單位量、進行單位轉換符合題意需求，並理解過程中運算規則的意義。其次將診斷教學原理嵌入設計的教學活動並實施，流程如圖 3 - 2。

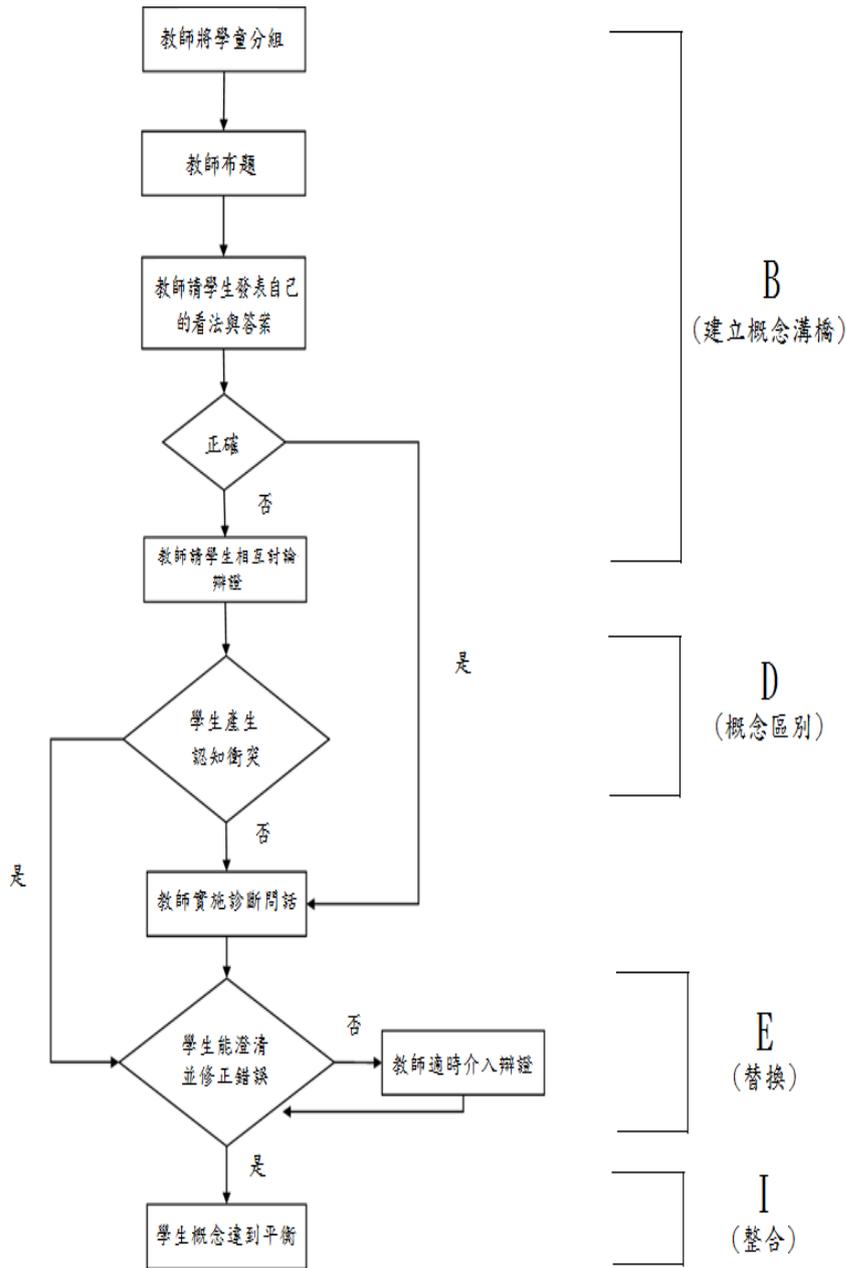


圖 3-2 實施診斷教學流程

上述教學過程中活動實施注意事項：

(一) 在教學部分

1. 當學童學習新的數學概念時，一開始先以故事導入吸引學

童注意，並且只給予一個題目或問題，使得各組學童的討論能夠專注於問題上。

2. 對於教材中內容相仿的教學活動可以同時進行教學，節省活動教學的時間。
3. 重點是學生明白新的數學概念，教材內的每一題題目不一定都要在上課中進行講解。
4. 教師可找出「教材類似題型，但卻是學童常犯分數迷思概念」的題目。教材中會將相同類型題目或觀念編撰在一起，例如：「一盒方塊酥有 24 塊， $\frac{1}{2}$ 盒和 $\frac{1}{3}$ 盒，哪一個比較多？ $\frac{1}{2}$ □ $\frac{1}{3}$ 」都是相同單位量的分數比較大小，過程中許多學童只觀察到分數符號(分組或是分母)的大小而忽略實際題目單位量的影響即作答。教師則可在課堂中藉由這一類的機會，讓教師可以利用學童迷思概念融入教材中的題型的題目進行診斷，了解學童在這個階段是否有問題產生，如：「一盒巧克力有 6 個，阿良吃了 2 個巧克力，而阿雪出了 $\frac{1}{3}$ 盒巧克力，哪一個小朋友吃的比較多？」。
5. 教師在教學過程中可以多利用語言或視覺等多重表徵(例如：畫圖)協助分數教學，並引導學童多利用多元徵表達想法的機會。

## (二) 在教師實施診斷問話部分

1. 即便學童發表的見解或解題方式是正確的，教師還是可以利用學童常出現的迷思概念來診斷學童是否確實了解，抑或是恰巧猜對。例如：學童以 $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$ 的算則解「1串丸子有7顆，阿文、阿得和小蘭各拿 $\frac{2}{7}$ 串，他們三人共拿了多少串丸子？」這個問題，雖然解法正確，但由於有研究中表示學童常犯「 $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7 \times 3}$ 」的錯誤，故教師依然可以用「為什麼整數要乘以分子，卻不乘以分母呢？」的問句來問學生，目的以診斷學童對「真分數乘以整數算則」是否確實理解概念。這種方法結合了小組討論與診斷教學法，因為現行教學法的過程在學童出現錯誤解題過程時，會提供學童相互討論、辯證的機會，但是在學童的答案正確或沒題問時，通常就結束這個題目，教師不會提供錯誤解法或範例診斷學童的概念是否清楚、正確，所以兩種方法的結合能解決這個問題。
2. 當學童解題時出現迷思，卻在學童相互討論、辯證中沒發現，導致無法產生認知衝突時，教師可利用該迷思概念提出反例來讓學童澄清錯誤的概念。如：學童在學 $\frac{N}{N} = 1$ 的等值分數時，當教師宣告「 $\frac{N}{N} = 1$ ，當分子和分母一樣大就等

於 1」。學童都沒疑問時，教師可利用「 $\frac{0}{0}$  不等於 1？」反問同學，讓學童對「分數」中的分母的範圍或可不可以為 0 的觀念更清楚。

3. 如果教師在進行診斷式提問過程後，沒辦法讓學童清楚的釐清迷思概念，則教師必須要尋求其他的診斷式提問幫助學童釐清迷思的概念，以達到教學目標。

### 第三節 診斷教學課程實施及資料蒐集

根據研究者所任教的補習班所內接觸的學童在學校使用的南一版編排的單元內容分配的上課節數，每周三各一個小時，共四堂課。分成第四單元「擴分、約分和通分」共兩節 120 分鐘，第六單元「異分母分數的加減」共一節 60 分鐘，延伸單元「整數乘以分數」共一節 60 分鐘，如表三。

表 3-1 課程實施時程表

周次	活動名稱
第 1 周	點心分披薩囉!(配合擴分、約分)
第 2 周	哪杯可樂多!(配合通分)
第 3 周	到底吃了多少條生乳捲?(配合異分母分數的加減)
第 4 周	你能拿到幾顆聖誕糖!(配合分數的乘法)

各堂課所設計的教案說明如表 3-2。(詳細版請參閱附件一~四)

表 3-2 各堂課所設計的教案說明

<p>分數單元教案設計：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 點心分披薩囉!(配合擴分、約分)</li> <li>2. 哪杯可樂多!(配合通分)</li> <li>3. 到底吃了多少條生乳捲?(配合異分母分數的加減)</li> <li>4. 你能拿到幾顆聖誕糖!(配合整數乘以分數)</li> </ol>	
<p>點心分披薩囉!</p>  <p>shutterstock.com • 227134507</p>	<p>教案概述:</p> <p>藉由學童三、四年級所學的先備知識，包含平分、分數的表示方式及同分母分數比大小為基礎，再利用課後輔導班點心素材為例子，讓學童了解擴分與約分的意義、方法及找等值分數。</p>
<p>哪杯可樂多!</p> 	<p>教案概述:</p> <p>接續上一堂課約分與擴分的概念，利用學童愛喝的飲料—可樂為題材，讓學童觀察可樂杯的刻度變化過程，進而理解通分的過程及概念，並運用至題目中。</p>
<p>到底吃了多少條生乳</p>	<p>教案概述:</p>

<p>捲？</p> 	<p>透過兩種不同口味的生乳捲的切割，來比較異分母分數的大小，並進行異分母分數的加法與減法，最後帶入數學史「埃及分數」的部分，讓學童能對異分母分數的內容更加的熟悉與了解。</p>
<p>你能拿到幾顆聖誕糖！</p> 	<p>教案概述：</p> <p>本單元為五年級下學期的課程，由於研究者教授的學童所就讀的學校在上學期分數單元中有補充分數乘法，故依並列為教授單元。利用鄰近節日活動，聖誕節分糖果為例，讓孩子理解「整數的分數倍」的問題，並用有乘號的算式摘要記錄解題活動與結果。</p>

教案設計背景如表 3-3。

表 3-3 教案設計背景

教案 診斷教學法		點心分披薩 囉(約分、擴 分與等值分 數)	哪杯可 樂多 (通分)	不同分母 怎麼加與 減(異分母 加減)	你能拿到幾 顆聖誕糖 (分數乘法)
BDEI 概念改 變法	B 概念構橋	V	V	V	V
	D 區別	V	V	V	V
	E 替換	V	V	V	V
	I 整合	V	V	V	V
合作學習法	小組獎勵	V	V	V	V
	個人績效責任		V	V	V
	均等的成功機會	V	V	V	V

以上課時間 60 分鐘作說明，上課一開始教師先按照分組請同學就座，並複習上一節課分數的概念喚起學童印象（時間 3 分鐘），接著進行單元內容教學及課本題目的解題練習（時間 15 分鐘）。然後，教師依教學單元內容設計符合單元概念之情境布題，學童分組討論（時間 20 分鐘）。老師各組間觀察，若有疑義之處，則由教師澄清概念。接著，由學童按各組上台進行分享，根據各組分享内容討論並根據容易發生分數錯誤迷思部分提問（時間 20 分鐘），最後指派回家作業（時間 2 分鐘）。

#### 一、評量試題

研究者針對本次所使用的各項評量試題之說明如下。

### (一) 前測試題

本研究為了了解診斷教學法的教學效果，因此，在教學前，需了解學童的分數概念是否相當。根據五年級學童學習的分數課程內容3個單元(約分、擴分和通分、異分母分數的加減、分數的乘法)與4個錯誤類型(單位量概念、等值分數、分數的加減、分數的整數倍)形成12種可行題目類型，根據每個類型編擬共產生15個題目，雙向細目表如表3-4。經指導教授及研究生(含有教學經驗者)討論，務求達到信度及效度。試題產生經討論並修改5次，最後版於附件五。

表 3-4 分數單元與錯誤類型雙向細目表

錯誤類型 分數單元	1. 單位量 概念	2. 等值分數 (含分數的 比較)	3. 分數的 加減	4. 分數的 整數倍	總計
I. 異分母分 數大小比 較(透過通 分)	(1.)、(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	5
II. 異分母分 數加減法 (透過通 分)	(6.)	(7.)	(8.)、(10.)	(9.)	5
III. 分數除 (乘)以整 數	(15.)	(12.)	(14.)	(11.)、(13.)	5
總計	4	3	4	4	15

註：共 15 題，所對應的題號以(題號.)表示。例如：(1.)、(2.).....

## (二) 後測試題

本研究的後測試題為根據前測試題的題型做修改，以便瞭解學童在經過教學後是否在分數的單元概念有更詳細的了解。

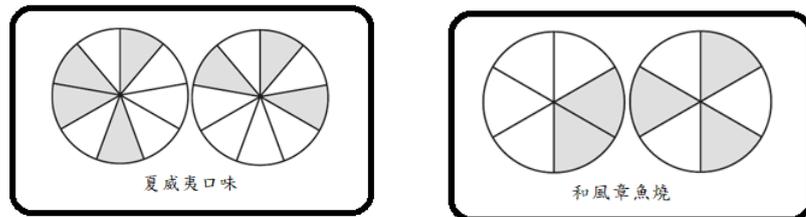
### 第四節 預試結果與資料分析

經過前測試題所得的測驗結果，學童正確題數為 9 題，錯誤題數為 6 題。錯誤的 6 題作答方式與結果分析如下。

#### 一、第 1 題

##### (一) 題目：

小明家中今天決定吃披薩，買了夏威夷與和風章魚燒兩種口味各一盒，兩種披薩送達家中時切割如下圖，全家人飽餐一頓後，兩種口味剩下的部分如下圖著色處，請問哪種口味剩下的比較多盒？



##### (二) 正確解法：

$$\text{夏威夷口味：} \frac{7}{18} = \frac{14}{36}$$

$$1 - \frac{14}{36} = \frac{22}{36}$$

$$\text{和風章魚燒：} \frac{5}{12} = \frac{15}{36}$$

$$1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36}$$

$$\frac{22}{36} > \frac{21}{36}$$

Ans: 夏威夷口味剩下的較多

(三) 第一組 B 學童作答方式及分析：

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left side, there are four simple multiplication problems:  $9 \times 2 = 18$ ,  $7 \div 18 = \frac{7}{18}$ ,  $6 \times 2 = 12$ , and  $5 \div 12 = \frac{5}{12}$ . On the right side, there are two fraction calculations:  $\frac{7}{18} = \frac{35}{90}$  and  $\frac{5}{12} = \frac{35}{84}$ . Below these, the student has written  $\frac{35}{90}$  and  $\frac{38}{84}$ , with a small square symbol between them. To the right of these fractions, the name 'A. 和風章魚燒' is written and circled in red. The fraction  $\frac{38}{84}$  is also circled in red, indicating a mistake where the student wrote 38 instead of 35 in the numerator.

第一個錯誤為筆誤的部分，誤將 $\frac{35}{84}$ 抄寫成 $\frac{38}{84}$ 。而學童將圖形部分轉換為分數符號上並未出現問題，故並未測出預期錯誤類型”單位量概念”。有趣的是，學童在運算過程中為了進行分數比大小的步驟將分子通分成相同數字時，發生了”等值分數(含分數的比較)”類型的錯誤，誤以為分母大者為較大的分數，而正確的來說當分子相同時，分母越大的分數值越小。

二、第 4 題

(一) 題目：

前金國小校慶預演分成上、下午兩階段，上午先請全校 $\frac{1}{7}$ 的學童下樓排演，接著再請全校 $\frac{4}{21}$ 的學童下樓排演，下午部分請剩下沒預演過的學童下樓排演，請問排演的人數上午較多還是下午排演的人數多？

(二) 正確解法：

$$\text{上午預演學童：}\frac{1}{7} + \frac{4}{21} = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21}$$

$$\text{下午預演學童：}1 - \frac{7}{21} = \frac{14}{21}$$

$$\frac{14}{21} > \frac{7}{21}$$

Ans 下午預演的學童人數較多

(三) 第三組 C 學童作答方式及分析：

錯誤發生在於學童並沒有看清題意，沒考量到將全部學童當作整體 1，必須將問題分成上午部分及下午部分分別計算，上午部分兩次所佔的人數比值先相加，再利用全部學童去扣除上午部分即是下午部分，再才是正確算法。學童作法並未做到分數加減，故沒有出現預期錯誤類型”分數加減”。

### 三、第 8 題

(一) 題目：

老師煮了一鍋雞湯，若老師自己喝，3 天才能喝完；如果師丈和老師一起喝，則 2 天就會喝完，師丈平均 1 天喝幾鍋雞湯？

(二) 正確解法：

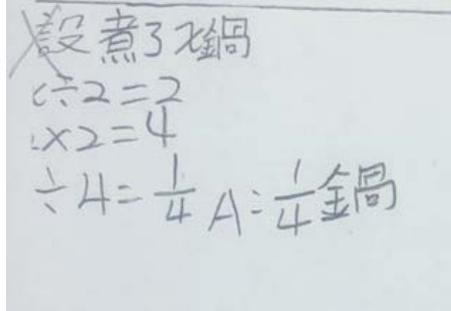
$$\text{老師單獨喝：} 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{老師與師丈一起喝：} 1 \div 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{師丈自己喝的部分：} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Ans:師丈平均 1 天喝了 $\frac{1}{6}$ 鍋雞湯

(三) 第三組 D 學童作答方式及分析：



依據學童解題算試過程判斷，學童解題時沒有了解題意即下筆，故沒有用分數加減來解題，過程中自然沒出現預期的錯誤類型”分數加減”。利用代數解題的方式也與學童學過的課程內容不符，故解題方向錯誤。

四、第 11 題

(一) 題目：

庭庭想在新家的房間鋪彩色巧拼地墊，若房間的長為 $7\frac{7}{9}$ 公尺，寬為 3 公尺，每 1 平方公尺需要 9 塊彩色巧拼地墊。鋪完整個房間需要幾塊彩色巧拼地墊？

(二) 正確解法：

$$7\frac{7}{9} * 3 = \frac{70}{9} * 3 = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$$
$$23\frac{1}{3} * 9 = \frac{70}{3} * 9 = 210$$

Ans:210 塊彩色巧拼地墊

(三) 第二組 A 學童作答方式及分析：

Handwritten student work showing a multiplication problem with a large X over it, indicating an error. The work includes the following text:

$$11. \dots \quad 9\frac{1}{3} \times 93$$

$$7\frac{7}{9} \times 3 = 30$$

$$9\frac{1}{3} \quad A: 30 \text{塊}$$

學童計算過程中發生“分數的整數倍”錯誤類型，在乘法的過程中忽略了需將被乘數  $7\frac{7}{9}$  轉化為假分數，再進行分數乘法的運算，故導致答案錯誤。連續兩個分數乘法算試均發生同樣錯誤，顯示了學童分數乘法過程尚有迷思概念。

## 五、第 13 題

(一) 題目：

開心農場中分成動物區、生態池與植物園，動物區的面積為農場總面積的  $\frac{1}{5}$ ，生態池的面積為動物區面積的 3 倍，剩下的為植物園的面積。請問哪個園區的面積較大？

承上題，已知開心農場園區總面積為 4 平方公里，試問動物區、生態池與植物園分別占多少平方公里？

(二) 正確解法：

$$\text{動物園面積} : 4 * \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{生態池面積} : 4 * \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\text{植物園面積} : 4 - \frac{4}{5} - \frac{12}{5} = \frac{20}{5} - \frac{4}{5} - \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Ans: } \frac{4}{5} \text{ 平方公里}$$

(三) 第一組 D 學童作答方式及分析：

13.  $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$      $\frac{4}{5} = 4 \div 5 = 0.8$   
 $4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$      $\frac{12}{5} = 12 \div 5 = 1.4$   
 $1.4 + 0.8 = 2.2$   
 $4 - 2.2 = 1.8$   
A:  $0.8 \text{ km}^2$   
 $1.4 \text{ km}^2$   
 $1.8 \text{ km}$

學童發生的錯誤部分在分數轉換為小數過程中錯誤，導致答案錯誤，並沒發生分數錯誤類型。

## 六、第 15 題

(一) 題目：

提倡小學童多喝開水的習慣，老師請同學兩兩一組，第一組中同學甲水壺瓶內容量可裝 500 毫升，同學乙水壺瓶內容量可裝 1500 毫升。甲同學今天裝滿兩瓶且都喝完，乙同學裝滿一瓶只喝了一半，請問第一組中誰喝的水比較多？相差多少公升？

(二) 正確解法：

$$500 + 500 = 1000$$

$$1000 \text{ 毫升} = 1 \text{ 公升}$$

$$1500 \div 2 = 750$$

$$750 \text{ 毫升} = \frac{750}{1000} \text{ 公升} = \frac{3}{4} \text{ 公升}$$

$$1 > \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ans: 甲同學多，相差 } \frac{1}{4} \text{ 公升}$$

(三) 第一組 B 學童作答方式及分析：

Handwritten student work on a piece of paper. At the top, it says "15. 1500 ÷ 2 = 750". Below this, there is a large 'X' drawn over the text "1500 + 500 = 2000". Underneath the 'X', the student has written "2000 - 750 = 1250" and "1250 - 750 = 500". At the bottom, there is a boxed-in calculation "750 ⊗ 1250" and the signature "A. 0 甲同學".

依據學童作答過程發現，錯誤類型在於”單位量概念”的預期錯誤類型，學童作答並沒有注意到題目中單位的變化(要以公升當作單位量)即作比較，故作答錯誤。

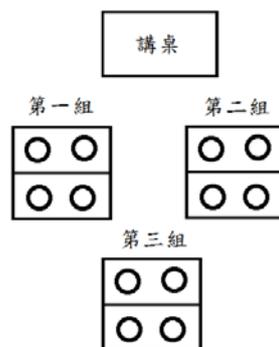
本節以教案「點心分披薩囉」為例說明，教學的過程學童參與度與實作都比較多，分組討論的過程各自達成組內分配的工作，達到合作學習的成效，上台分享的過程也讓各組間了解彼此的想法，當想法發生衝突時(例如：剪貼紙卡活動中擴大三倍時，有些組別用加法有些組別用乘法)，老師適時介入驗證(例如：帶例子說明)，學童反映對於學習的印象會更深刻。



## 第肆章 研究結果與分析

本章的研究結果有五節，概分為兩個部分。首先，第一部份為前四節，有關於教師實施診審對教學的具體表現為何，研究者將以四堂數學課的上課先後順序呈現，教學實況內容描述，包含教師上課過程、師生對答與觀念衝突錯誤等。其中斜體字部分為老師與學童對話情況，(括弧內陳述)研究者對授課老師當時反應情緒或補充說明，底線部份表示研究者發現授課老師在過程中使用了BDEI診斷教學法與合作學習的部分。接著，第二部分為研究總結，也就是第五節，於診斷教學完成之後，再探討學童於第一節課之前所實施的前測表現與第四節課之後的後測表現，對分數概念是否有進步。

有關於診斷教學實施誠如第參章第一節研究現場所述，本研究中所參與的學童為課後照顧服務中的國小五年級學童為研究對象，一共12位，分為3組，每組4位，座位編排方式如下。



每次上課的時候，數學課時間一到學童陸續進教室按照黑板上的座

位表就坐，老師稍跟學童寒暄以帶領學童至上數學課的情境，並說明當天課堂目標後，隨即進入當天的課程。

## 第一節 點心分披薩教學實況-似是而非

這堂課發生在教案一「點心分披薩囉!」，了解「擴分的意義、方法及找等值分數，再由擴分的經驗，理解如何用約分找等值分數。」其中在活動一中找出分子分母規律以及擴分求等值分數時為何分母不得成以零兩個部分令授課老師難忘。

首先，老師先布題，依照當天點心食用披薩的條件下給學童一個故事情境如下：「課輔班的小朋友最喜歡吃披薩當作點心。老師做了三個大小一樣的披薩分給小朋友們吃，老師先把第一個披薩平均分成2塊，分給小朋友甲1塊。小朋友乙見到說：『太少了，我要2塊。』老師就把第二個披薩平均切成4塊，分給小朋友乙2塊。小朋友丙更貪心，搶著說：『我要4塊，我要4塊。』於是老師又把第三個披薩平均分成8塊，分給小朋友丙4塊。」

由於先將題目抄於白板上，再經由口述帶著學童導讀，故學童在這一個部分均對題意都能順利的理解。

此時授課老師幫助學童建立溝橋。(B- conceptual bridging)

接著，老師發下活動所需要的圓形紙卡，過程中三組學童利用老師發下的圓形紙卡代替披薩做分割，學童得到故事中三位小朋友(甲、乙、

丙)所分得的份量，分別為甲分得 $\frac{1}{2}$ 個披薩、乙分得 $\frac{2}{4}$ 個披薩和丙分得 $\frac{4}{8}$ 個披薩，老師請學童觀察 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{4}$ ， $\frac{4}{8}$ 這三個分數中，分子有甚麼變化？

分母又有甚麼變化？

各組開始進行組內討論老師提出的2個問題，老師則進行組間巡視，確認學童都有分配好各自任務，例如：哪位同學負責將工作紙分成等分，哪位同學著色或是哪位同學負責總結討論變化等任務。歷時五分鐘的時間，老師觀察各組差不多完成討論，老師則開始請同學發表各組結論。以下依發表先後順序描述。

第一組：我們認為 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{4}$ ， $\frac{4}{8}$ 三個分數中分子的變化 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ，1變成2的過程是 $1+1=2$ ，2變成4的過程是 $2+2=4$ 。分母的變化 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$ ，規律是 $2+2=4$ ， $4+4=8$ 。

老師：好像有道理喔。(老師沒想到學童會看出用「加」這個規律語帶驚訝)

第三組未等老師叫到他們，迫不及待舉手發言搶著分享自己想法。

第三組：要用之前四年級學過分數的加法， $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ， $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ 。(同學搶著舉手發言)

老師：當時學的是這樣嗎？要不要再想一下呢？(老師雖然發現錯誤，但不直接說「錯」，而是希望第三組同學再想一想)

雖然第三組學童認為能找到規律，但與實際上分數加法的數學原理

不符合(分數加法過程中，分母相同時，分母不變，分子相加，即 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ )，老師發現了 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 這個謬誤，所以希望第三組同學在聆聽其他組發表過程中，再想一想自己的結論。

第二組 A 同學：「分數加法不是這樣吧」，我們這組覺得 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{4}$ ， $\frac{4}{8}$ 中分子變化的過程後一個都是前一個的兩倍，分母也一樣後面都是前面的兩倍。

第二組也注意到老師對於第三組算式的疑問，回答了當時學的分數加法算則並非如第三組所述，順勢發表了自己組別的結論。

老師：所以都是乘以 2 是嗎？(老師心感聽到期望的答案，再次詢問第二組同學)

老師擔心學童表達的意思與自己理解上有所差異，再一次的詢問確保老師與學童之間的想法一致。

第二組：對。

這時老師沒有給出「對」或「錯」的答案，並請各組同學依照自己各組找出的規律去找出下一個可能的分數。

第一組： $\frac{7}{14}$ 。

老師：可以跟我們說明一下怎麼得到 $\frac{7}{14}$ 的嗎？

原本老師預期他們這組下一個的算法如下，分子算法： $1+1=2$ ， $2+2=4$ ，接下來應該是 $4+4=8$ ；分母算法： $2+2=4$ ， $4+4=8$ ，接著應該為

$8+8=16$ ，但第一組的答案  $\frac{7}{14}$  出乎意料，故請該組說明。

第一組：分子 1 變成 2 是加 1，2 變成 4 是加 2，所以下一個應該要加 3， $4+3=7$ ，分母也是類似的算法，先是加 2，再來加 4，接著加 6， $8+6=14$ 。

老師：這個方式很有想法，連老師都沒想過呢？我們等等來驗證一下這個方法的可行性。

老師接著請二組及第三組發表。

第三組：如果按照我們找的應該是  $\frac{8}{16}$ 。因為按照規律接下來應該是  $\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ 。

第二組：我們也是  $\frac{8}{16}$ ，但是我們是用乘法。

老師：各組都很棒喔！很努力地找出了規律。我們回歸到今天課程的主題，「等值分數」指的是與原來給定分數一樣大的分數。第一組的同學答案沒有錯，但是在遇到找等值分數的題目如： $\frac{2}{6} = \frac{8}{( )}$  時，你們會怎麼想呢？

老師發現由於有些組別(第一組、第三組)推導出結論的歷程偏離了等值分數的概念，所以老師利用等值分數單元中常出現的題型作為例子，給予歷程偏離的組別作為觀念上的衝突。

此時研究者發現授課老師為了讓學童在舊有觀念上產生衝突，加以引導。(D- differentiation)

第一組：還是分子加‘1’，分母從二開始加，但這樣分子沒辦法加到‘8’，好像有那裡想錯了。

老師：第一組發現問題了嗎？同樣的題目第三組的方式會得到甚麼答案呢？(老師提醒第一組同學發表時的觀念衝突)

第三組： $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ ，然後 $\frac{4}{12} + \frac{4}{12} = \frac{8}{24}$ ，( )要填24。

老師：雖然答案是正確的，但是分數的加法不是這樣算的喔！回想一下同分母的加法，分母的部分應該不能相加，例如： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  而不是 $\frac{2}{4}$ 。

第二組的答案呢？

授課老師將讓學童對於分數加法錯誤的概念替換成正確的觀念。

(E- exchange)

第二組：( )=24，因為2變成8乘以4倍，按照我們剛剛那題找到的規律，分母也要跟分子一樣乘以4倍。

老師：非常好喔，這樣才是對的方式。(老師開心地回答同學)

根據各組分享的過程，老師給予結論，並宣告今天教學目標中擴分的概念。

最後，老師宣告「像上面這樣，把一個分數的分子和分母同乘以一個比‘1’大的整數，會得到一個和原來分數相等的分數，這種方法叫作擴分。」

最後，授課老師將擴分正確觀念與學童目前所學加以整合。(I-integration)

老師：所以今天題目若是問： $\frac{2}{6} = \frac{10}{( )}$ 時，( )應該填什麼數字呢？大

家一起回答。

全班同學：30。

出乎老師意料的，其中兩組學童又提出了其他的問題。

第一組：老師，為什麼要比‘1’大的整數？

老師：因為乘以‘1’還是同一個分數。

第三組：乘以‘0’。

老師：在四年級的課程中我們在定義分數時，曾經定義過 $\frac{N}{N} = 1$ ，這個

時候N為大於或等於‘1’的整數還記得嗎？所以如果乘以‘0’，分母就

變成‘0’了。

第一組： $\frac{0}{0}$ 的分子和分母都相同，都是零。所以不也是‘1’嗎？

老師：來，都注意到白板，大家一起來看看。(如圖4-1)，例如：24[總

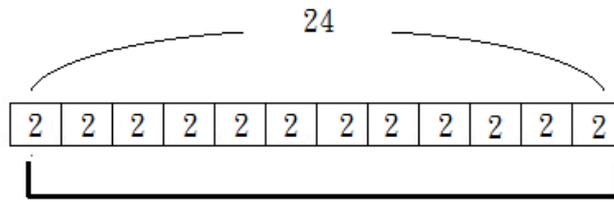
數量]÷2[等份數量]= $\frac{24}{2}=12$ [等份數]。換句話說12[等份數]乘上2[等

份數量]等於24[總數量]，如果今天[等份數]=10，[等份數量]=0，即知

[總數量]=[等份數]×0=0，因此這時[總數量]必須為零，等號兩邊的數

字就不同了，等式就不會成立。在你們這個階段的數學知識是這樣，

未來學得更多後你們可再觀察一下這個件事不是一直都不變。



共有  $\frac{24}{2} = 12$  等分

圖 4-1 舉例說明圖

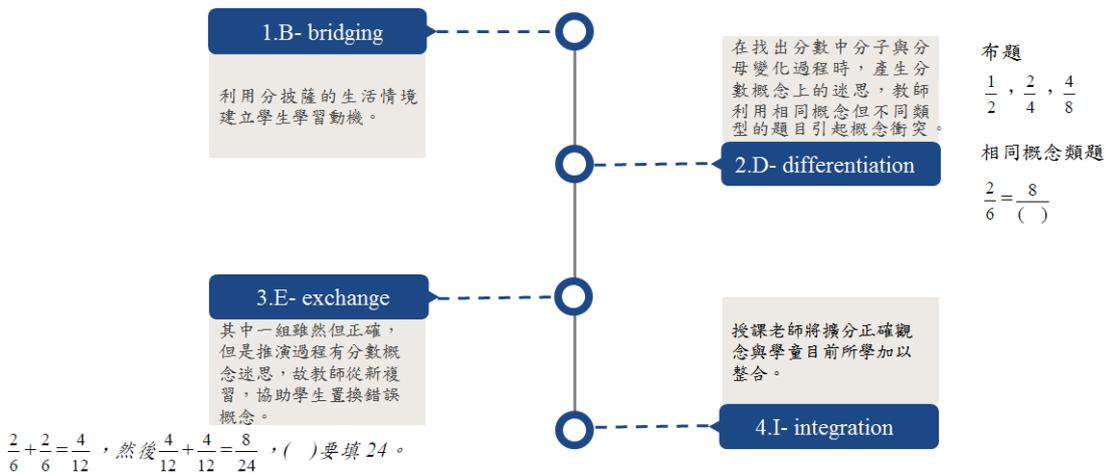


圖 4-2 教案一 BDEI 過程示意圖

## 第二節 哪杯可樂多教學實況-殊途同歸

這堂課發生在教案二「哪杯可樂多!」，過程中希望學童學習「通分的意義，並用來做異分母分數的比較」。其中，學童實作活動二剪綵帶的過程中發生了雖然表示同一段彩帶長度，但因為單位不同而有不一樣的表示方法的部分令授課老師印象深刻。

老師：各位同學，白板上有三題小練習，請小朋友寫在自己的測驗紙上抄題，並寫下題目是屬於擴分還是約分，接著完成括號處，作答時間五分鐘，過程中不能討論喔。(老師加強語氣強調不能討論，希望同

學們能憑著自己的能力作答，確保診斷過程不偏頗)

學童們低頭認真作答，老師組間巡視。題目如下。

$$(1). \text{題目一} : \frac{7}{9} = \frac{7 \times (\quad)}{9 \times 5} = \frac{(\quad)}{45}$$

$$(2). \text{題目二} : \frac{12}{30} = \frac{12 \div 6}{30 \div 6} = \frac{(\quad)}{5}$$

$$(3). \text{題目三} : \frac{2}{7} = \frac{8}{(\quad)}$$

第一組：老師，屬於擴分或約分要寫在哪邊？(第一組同學狐疑地提出疑問)

老師：注意！請大家寫在題目後方就可以了。(老師亦發現沒事先規定，隨即請同學注意)

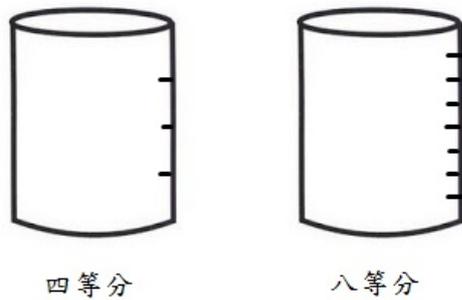
五分鐘後老師請同學交換考卷互改，老師在白板上講解並公布答案，各組改完後老師按各組收回考卷等待課後再次審閱。

老師：同學們都表現得不錯喔。為了犒賞大家，我今天請大家喝可樂。但我們不能光喝可樂，可樂杯中也有要告訴我們的數學知識。

此時授課老師帶入生活情境幫助學童建立溝橋，引起學童學習動機。

(B- conceptual bridging)

老師邊講邊將預先準備好的兩杯可樂展示給學童們看。其中，沒刻度的朝向學童，預先劃好刻度地朝向自己，如下。



第三組：喝喝看，看哪杯在嘴巴中佔的比較多就知道了阿。(第三組同學迫不及待地回答)

老師：哇！第三組無所不用其極想趕快喝到飲料阿。

第一組：老師杯子有一樣嗎？

老師：有。

第二組：那放在桌上看看哪一杯比較高就知道哪杯比較多了。

第一組：我們也是這樣覺得。

第一組立刻附和第二組的想法。

老師：沒錯。(學童有了對的想法，老師肯定地給予回答)那是二年級時你們就學過的概念，我們今天學到分數當然要用分數的方式來聊聊這個問題，請問這兩杯可樂用分數該怎麼表示？

回顧上述師生對話，兩組均有回答到老師心中預期的答案。老師接著引導學童進入今天課程，並將杯子轉向，把有刻度的那一面轉向學童。一杯為4個刻度，一杯為8個刻度。並發下預先為各組準備好的兩杯可樂，接著帶領學童一起數一數兩杯可樂分別裝到塑膠杯第幾格

的地方。(刻度 4 格的那杯可樂裝到了第 2 格的地方；刻度 8 格的那一杯裝到了第 3 格的地方)

第一組、第二組、第三組：一杯是 $\frac{2}{4}$ ，另一杯是 $\frac{3}{8}$ 。

老師：沒錯。大家對分數的表示法都很熟練了。但請記得要加上單位，應該要說 $\frac{2}{4}$ 杯與 $\frac{3}{8}$ 杯(學童回答不完全正確，老師補充說明)，那請問這兩杯可樂如何用分數的方式比較大小呢？請同學跟著我做。

教師利用麥克筆，將兩杯可樂平放於桌上相互對照，並用麥克筆將刻度四格的可樂杯對應刻度 8 格的可樂杯用虛線做上記號，分為 8 等分，為了確認學童是否了解，老師接著問下去。

老師：請問原來刻度 4 格的可樂現在可以如何用分數表示呢？

第一組： $\frac{4}{8}$ 。

第二組： $\frac{4}{8}$ 杯。

老師：很好，第二組有注意到老師剛剛的提醒。看著老師的操作，我們畫上虛線的過程其實就是擴分， $\frac{2}{4}$ 杯擴分後就會變成 $\frac{4}{8}$ 杯，擴分後 $\frac{4}{8}$ 杯與 $\frac{3}{8}$ 杯兩個分數分母相同就可以比較大小了，所以分數的比較要把兩個分數化成相同的分母之後，來比較他們的大小。相同分母稱為「公分母」。就像兩杯可樂的分母最後都變成了 8。而不是看哪個分數的分母數字大就是比較大的分數。

完成活動一比較哪杯可樂比較多後，接著老師發下金色及銀色彩帶

進入課堂活動第二階段，題目如下，並請各組同學上台展示結果，過程中第二組發生了有趣的討論。

第二組：銀色彩帶剪成一份應該是6吧?!還是一份表示 $\frac{1}{5}$ ?!

組內同學自己討論著，老師組間巡視時見狀介入提問。

老師：你們討論的基礎是一樣的嗎?要不要回想老師剛剛前一個活動時說要注意的單位部份呢?(老師見同學討論意見分歧時，介入說明)

此時授課老師發現學童產生表示方法上觀念衝突(D-differentiation)，介入討論替換成正確概念。(E-exchange)

第二組：對啦，講的是一樣的東西。銀色彩帶6公分和 $\frac{1}{5}$ 段一樣長啦。

課程結束前，老師發下測驗紙，紙上出了三題題目請同學十分鐘完成，如下圖。

1. 有兩杯一樣多的牛奶，美美喝了 $\frac{3}{4}$ 杯，  
玉珊喝了 $\frac{5}{6}$ 杯，誰喝得比較多?
2. 比較 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{6}{7}$ 的大小。
3. 有兩籃一樣多的雞蛋，媽媽早上做早餐  
用去 $\frac{2}{5}$ 籃，下午做點心用去了 $\frac{2}{7}$ 籃，上  
午還是下午用得比較多?

十分鐘後，老師請同學交換改，並在黑板上講解求解過程，第二組同學突然發問。

第二組：為什麼(上述的題目中)有的有單位，有的沒有?

老師：問得很好喔(老師見同學主動提問，正向鼓勵)，我們要看題目中題意的描述，如果沒給單位我們會將1 當做總量來看，不會刻意加上單位。但如果題目中有給單位，我們則需要加上單位才能來做比較，記不記得剛剛在回答問題時有一組說是 $\frac{4}{8}$ ，而另一組說是 $\frac{4}{8}$ 杯呢？

第一組：難怪剛剛活動時，我們回答沒加上單位老師說第二組才是對的。

老師：是的。做題目要提醒自己注意單位的重要性，以免做了錯誤的比較。

最後，授課老師將通分與分數單位的正確觀念與學童目前所學加以整合。(I- integration)

由此可知，學童明白通分比大小的意義，以及比大小時要注意單位是否相同，才不容易發生錯誤。

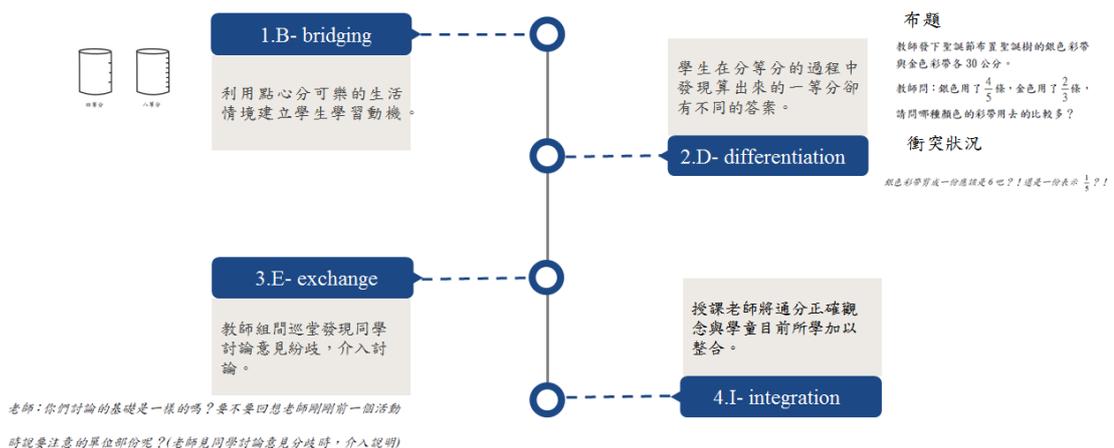


圖 4-3 教案二 BDEI 過程示意圖

### 第三節 到底吃多少條生乳捲教學實況-寸木岑樓

這堂課發生在教案三「到底吃了多少條生乳捲」，過程中希望學童能在「具體情境中，透過通分，解決異分母分數的加法與減法問題」。其中，課堂演練第二題平分繩子的部份發生了沒考慮題意所給的單位可能發生謬誤的情況讓學童爭論不休的情況讓老師非常有感。

首先，老師簡略的複習了上一節課所教授的異分母比大小課程內容。接著依照今天課後托育班點心吃生乳捲的條件給學童一個情境，布題如下：我們今天要來看看每個認點心吃的生乳捲是多少條。老師帶了兩條大小與長度都一樣的生乳捲分給小朋友們當作點心，老師先把第一條奶油口味的生乳捲平均分成4塊，接著老師又把第二條草莓口味生乳捲平均分成3塊，今天的點心每個人兩種口味各一塊，請小朋友算一算每個人今天點心吃了多少條生乳捲呢？

由於老師先將題目抄於白板上，再經由口述帶著學童導讀，故學童在這一個部分均對題意都能順利的理解。

此時授課老師帶入生活情境幫助學童建立溝橋，引起學童學習動機。

(B- conceptual bridging)

老師：請同學將以下問題寫在自己的測驗紙上。時間十分鐘。

老師進行組間巡視。

老師：分母不同時，利用先前學過通分與分數加減的概念想一想。

十分鐘後老師白板上解說，學童狀況良好並無問題產生。

老師：同學表現很好喔，所以異分母的加減法要先通分化為同分母，再做計算。

看似順利的課程在老師的課堂演練第二題出現了小插曲。題目如下：

把 7 公尺長的紅繩平分成 5 段，把 5 公尺長的藍繩平分成 3 段。  
哪一條比較長？紅繩子與藍繩子共長多少？紅繩子與藍繩子相差多少公尺？

第二組：藍繩比較長。兩條繩子共  $\frac{8}{15}$  條。兩條繩子相差  $\frac{2}{15}$  條。

老師：請第二組上來分享一下你們如何得到答案的過程。

老師似乎發現第二組的錯誤請第二組上來完整地寫下他們找出答案過程。

第二組：紅繩分成 5 段，每段  $\frac{1}{5}$  條，藍繩平分成 3 段，每段  $\frac{1}{3}$  條。 $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ ，  
所以藍繩比較長。

第一組：我們也是藍繩比較長但是算法不一樣。

老師：請第一組上來分享一下你們如何得到答案的過程。

兩組同學都寫完自己的作法後老師請同學看看兩個做法哪一個正確或是兩種都正確。

第一組：我們正確吧。他們應該用  $7 \div 5 = \frac{7}{5}$  才對吧，不是  $\frac{1}{5}$ 。

第二組：分成 5 段，每段是  $\frac{1}{5}$  沒錯啊！

老師發現兩組同學自見相左，介入了討論。

老師：其實兩組的說法在分數計算上都沒錯喔！因為你們的基準單位不一樣，第二組用的是「段」，而第一組用的單位是「公尺」，但是就老師出的這個題目的題意來說，第一組才是對的方式。

此時授課老師發現學童產生單位比較上觀念衝突(D-differentiation)，介入討論替換成正確概念。(E-exchange)

研究者認為這時老師使用「基準單位」回答學童，對於學童來說是一個抽象的概念，可改為用「單位」描述即可。

第二組：為甚麼？

第二組不太服氣的說著，老師見狀接著繼續說明。

老師：你們算的 $\frac{1}{5}$ 單位是「段」，但是這題題目中的兩條繩子並不一樣長，所以不能拿「段」來相互比較，你們想想一間教室的一半的面積和一座操場的一半的面積，雖然都是一半的面積，但是會一樣大嗎？

第一組、第二組、第三組：不會，操場大啊。

老師：你們看看這題的題意，題目問的是共多長，所以應該要拿長度，也就是「公尺」來算，而不是「段」來算，因為兩條繩子不一樣長，所以切分成「段」時，每「段」也不同長度，就如同剛剛操場的例子，無法運算。所以要換成共同的單位公尺來算，因為大家認知中的1公尺都一樣長，用「公尺」比較適當。

最後，授課老師將分數比較時該以題意中給的單位作為比較基準的

## 正確觀念與學童目前所學加以整合。(I- integration)

由此可知，學童明白異分母分數間的加減除了要轉換成同分母以外，還要注意單位是否相同的概念。接著老師在確認各組都同意與了解此概念後，即繼續授課。

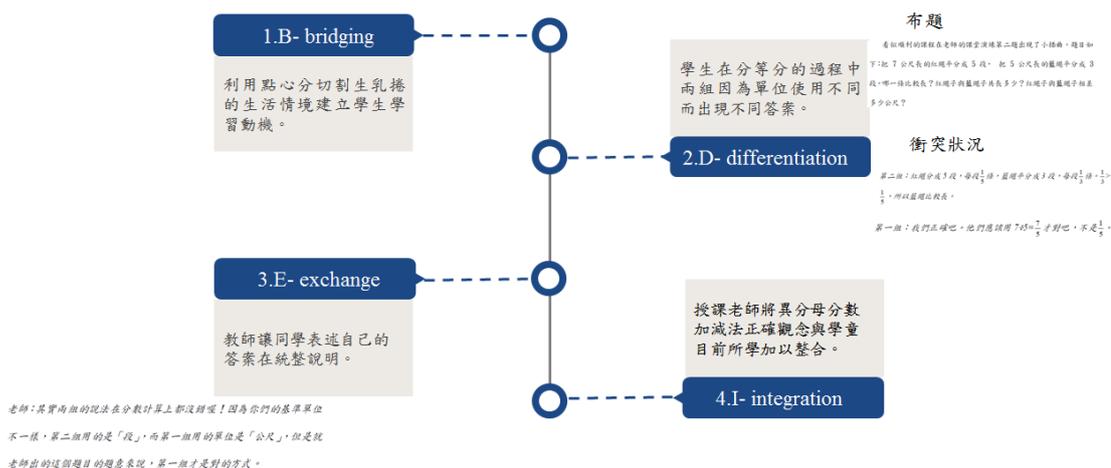


圖4-4 教案三BDEI過程示意圖

### 第四節 你能拿到幾顆聖誕糖教學實況-溫故知新

這堂課發生在教案三「你能拿到幾顆聖誕糖」，希望學童能解決「整數的分數倍的問題，並用有乘號的算式摘要記錄解題活動與結果」，此部分應於六年級課程，由於研究對象學校課程先修補充，故研究者亦納入教學。一如往常，老師簡略的複習了上一節課所教授的異分母分數的加法與減法課程內容後，即進入今天的課程。先利用聖誕糖故事的情境引起學童動機，順利的課程在布題 2 時，第一組同學上台發表發生了分數乘法與擴分發生混淆的部分，是令授課老師覺得相當有趣的情況。(B- conceptual bridging)

第一組： $15 \times \frac{1}{3} = \frac{15}{45}$  輛。

此時學童分數乘法與等值分數上產生觀念衝突。(D- differentiation)

第二組：他們寫錯了吧，怎麼有可能是分數輛腳踏車。

在第一組發表完後，第二組同學這麼說著。

老師：的確。實際情況是無法有分數輛的車，同學在解題後要想一想有沒有符合實際生活情境，不是單純地用數學式子算出答案。其他兩組能說說看算式還有什麼問題嗎？

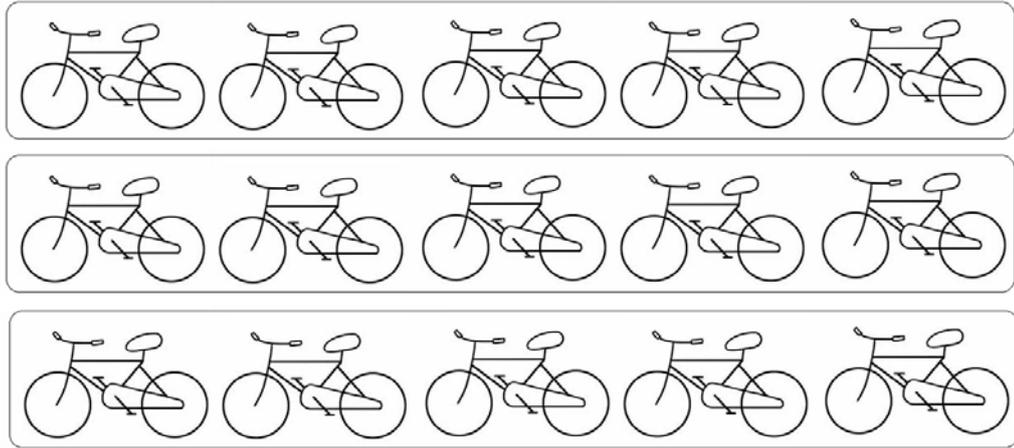
雖然是觀念錯誤，但並未如老師預期的提到第一組使用的是擴分，老師繼續提問，第二組隨即回答。

第二組：他們算出來的答案是等值分數。

老師：沒錯。在分數乘法學習上很容易跟擴分混淆，但只要願意用布題1的圖解法就能很快的檢查自己是否有算錯了。請沒畫圖的作圖一次，老師過去你們那組看看對不對。

授課老師介入討論替換成正確概念。(E- exchange)

老師進入組堅巡視，看看各組的作圖情況，圖解如下。



第二組：真的不一樣耶。

老師看到同學發現自己算的答案與作圖不相同時接著說明。

老師：整數乘以分數的過程中，整數乘的是分子，觀念可以回想一下，乘法是連加法的速算，同分母分數在加法時，分母會相加嗎？

第一組、第二組、第三組：不會。

老師：很好。再來一個簡單的區分法則，第一組同學，分數的擴用會用在哪些部分？或什麼情況？

第一組：分數比大小，還有……。

老師：還有……。

第二組同學發現第一組猶豫不決，接話幫忙回答。

第二組：還有異分母分數的加減法。

老師：對。擴用大部分都運用在這兩個部分的解題策略。布題2有沒有要進行分數比大小或是異分母分數的加減法呢？第一組同學。

第一組：沒有。

最後，授課老師分數乘法與鄧質分數的正確觀念與學童目前所學加

以整合。(I- integration)

由此可知，學童對於分數乘法的概念已經理解，也知道使用的時機，不再與分數的擴分混淆，觀念釐清後同學在後續練習題都順利應答。

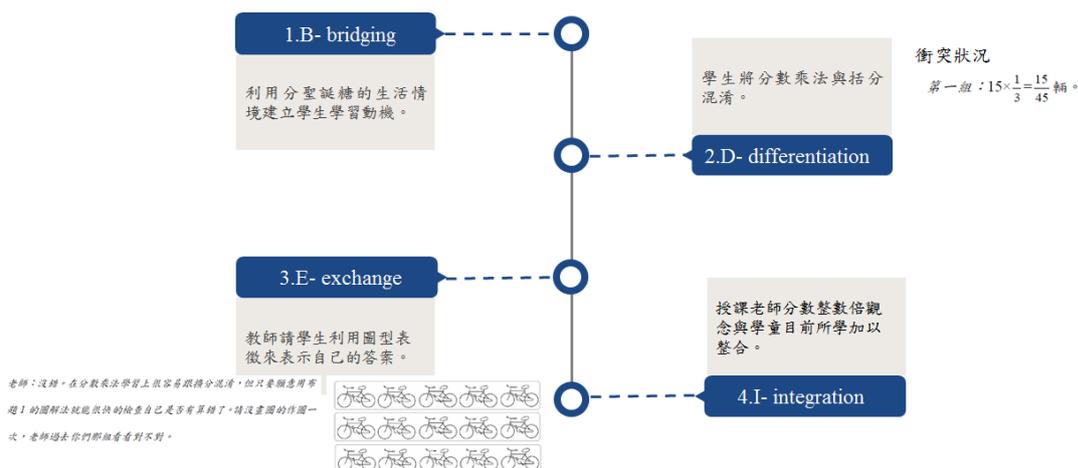


圖 4-5 教案四 BDEI 過程示意圖

## 第五節 課堂實施後表現

研究者觀察以上四節，學童在教師利用診斷教學 BDEI 策略與合作學習法結合的四個教案教學過程中，克服了學習「分數」單元的迷思。其中，教師結合點心活動的布題，使學童能引起興趣；學童分組發表的過程中，不同的發表內容引起觀念衝突；再藉由老師的引導及與各組間的辯證做出了概念區別；最後老師根據辯證後的結果，結合正確的「分數」數學原理，整合學童正確的「分數概念」。

後測試題的持續考驗之下，研究者認為個案已能克服「分數」單元概念的迷思，並能將「等值分數」、「擴分」、「約分」、「異分母分數加

減」、「分數乘法」等觀念正確地在生活情境中運用，因此，學童對於「分數」單元的理解進步許多。

表 4-1 教案與教學過程中融入 BDEI 與合作學習

教案 教學策略	點心分披薩 教 -似是而非	哪杯可樂多 -殊途同歸	到底吃多少條 生乳捲 -寸木岑樓	你能拿到幾顆聖誕 糖 -溫故知新
B	v	v	v	v
D	v	v	v	v
E	v	v	v	v
I	v	v	v	v
C	v	v	v	v
建立概念溝橋(B- conceptual bridging)：引起學童動機 概念區別(D- differentiation)：產生衝突，區別概念 替換(E- exchange)：替換成正確概念 整合(I- integration)：定錨，整合正確概念 合作學習(C- Cooperative Learning)				



## 第五章 結論與建議

本章節的主要目的是將第四章的資料分析及研究結果作一有系統的整理並進行探討。第一節結論是從研究結果中歸納出主要的結論並加以討論；第二節建議中提出跟實務有關的建議與未來研究的方向。

### 第一節 結論

學童成績表現上，診斷教學與合作學習的課程雖然只進行四堂課，但由後測的測驗結果說明了學童在五年級分數文字題的概念及計算上均有進步，顯示診斷教學具有良好的教學成效。並觀察 12 位學童於診斷教學後，分數單元的學校平時考成績均有 95 分以上，顯示診斷教學與合作學習的結合除了能提升學童對於「分數」迷思概念的釐清與正確概念的理解外，也能使學童關於「分數」運算過程的熟練度提升與在校成績的進步。再者，在教學過程中，上課時教師可依據教案內容或學生反應，適時的執行診斷教學的策略，實施可行的教學策略，有利於幫忙學童釐清分數概念及運算迷思，再藉由觀察學童的概念正確與否。根據研究過程中所得以下幾個教師操作診斷教學該注意的地方：

- 一、 教師可透過整併相同概念的教材題目節省教學時間，將這些節省下來的時間用在學童討論過程中迷思概念的澄清與分數概念的鞏固。
- 二、 小組討論式教學，過程會在學童出現正確答案或算則時，討論

就告一段落，而加上診斷教學後，教師則會利用問句的方式診斷學童的概念是否有釐清，鞏固學童對於所學概念有的確實的了解。

- 三、 教師應在學生討論的過程中，利用進一步的問題適時的介入，引起學童認知衝突、澄清相關概念。例如：第一組的同學答案沒有錯，但是在遇到找等值分數的題目如： $\frac{2}{6} = \frac{8}{( )}$ 時，你們會怎麼想呢？老師發現由於有些組別(第一組、第三組)推導出結論的歷程偏離了等值分數的概念，所以老師利用等值分數單元中常出現的題型作為例子，給予歷程偏離的組別作為觀念上的衝突。老師：你們討論的基礎是一樣的嗎？要不要回想老師剛剛前一個活動時說要注意的單位部份呢？發現學童產生觀念衝突後介入討論，教師可透過診斷式問句讓學童比較看起來相似但實際上數學意義卻不同的概念及算則的意義。例如：教師提問「如果兩個分數的分母不一樣的時候，可以直接相加嗎？」，以協助學童分辨與比較「同分母分數加法與異分母分數加法」以及「擴分與分數乘法」的異同，產生一個有關「分數」的知識結構。教師亦可利用診斷問句的方式，給予不同的情境，讓學童對於所建立新的概念產生長久和可轉移的了解。例如：教師提問「為什麼這個情況下才可以直接分子相加？」、「如果兩個分數的分母不一樣的時候，可以直接相加嗎？」以鞏固學童對於「分數」概念產生長時間的了解。

四、 透過這次教學過程，教師會以診斷式問話，製造學童在上課過程中試著使用多元表徵(圖形、數線)進行解題的機會，讓學童明白分數問題的表徵可以非常多樣化，例如：以圓餅圖或是數線等不同表徵的方式將不同的分數比較大小，讓學童對分數迷思概念有所澄清與正確概念有較深入的理解，並有能力以具象化的方式解決分數問題。這個結果呼應了 Mamede 與 Nunes (2008) 以及 Panaoura 等 (2009)兒童在多重表徵的學習環境下可以發展出較好的分數概念的研究發現。

五、 學童面臨分數比較大小問題時，注意力通常只放在分數數字的大小，反而忽略題目中單位量也是該注意的重要訊息(楊德清、洪素敏，2003；詹婉華，2003；Cramer et al., 2002; Iwasaki & Hashimoto, 2000)。在教學過程中，教師給予學童不同的佈題，多次利用提問讓學童討論，藉由討論過程強化學童對於單位量概念的理解與對於單位量概念的思考。

根據教學過程的結論歸納，驗證分組教學並結合一系列結合診斷教學活動的教案與教學活動，過程中製造學童認知衝突、教師適時介入、學童相互討論、思考、反省，並在過程充分分享解題策略、釐清迷思概念，學童分數概念及運算的能力藉由此方式學習後發現，分數單元學童在校的平時考試成績與後測結果都發現有相當的進步。

## 第二節 建議

本研究除了驗證了診斷教學關於五年級學童分數文字題有良好教學成效外，研究者利用診斷教學概念融入自行設計的數學教案的活動中，透過合作學習及診斷教學教案的配合成效卓著。建議未來研究如下：教案設計者於進行教案編寫時，應該先充分瞭解學童過程中可能產生的迷思概念，這樣的方式能在課程中安排適量的活動，並結由這些活動引起學童認知衝突，並且可以在教案中提供教師參考範例與可施行的診斷式問句供參考，協助教師藉由診斷的提問再次確認學童常犯的迷思概念是否確實了解。再者，從研究結果得知，教師要具備適當的診斷教學知識、技能以及對學童數學知識的瞭解，才能完整且確實的落實診斷教學。課後托育班或是師資培育機構的職前或在職進修課程，可考慮納入診斷教學知識、技能以及學童數學知識的課程內容，以推廣與落實診斷教學概念於數學教室中，相信對建立學童正確的數學概念具有所助益。最後，未來可針對合作學習結合診斷教學法於其他數學概念的教學成效，進行更深入的教學研究。

# 參考文獻

## 中文文獻

- 林福來(1990)。比例概念深層結構的了解Ⅱ：高中生複比與非線性比的  
了(NSC-79-0111-S-003-13A)。臺北市：行政院國家科學委員會。
- 林福來、黃敏晃、呂玉琴（1996）。分數啟蒙的學習與教學之發展性研  
究。科學教育學刊，4（2），161-196
- 李敦義（2006）。補習有助於升學嗎？——分析補習、多元入學與教育  
取得間的關係。教育與心理研究，29（3），489-516
- 李源順（2005）。同分母真分數加減運算的教學建議。台灣數位教師電  
子期刊，000（003），0002-0026。
- 廖岳祥(2015)。應用診斷數位教學於國小分數學習 成效之改善。人文  
社會學報 民國 104 年，11（2），105-131。
- 賴麗桂（2007）。資訊融入國小三年級學童分數診斷教學之研究（未出  
版碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市
- 黃湘武(1993)：皮亞傑理論在科學教育上的應用研究。西方社會科學理  
論的移植與應用，杜祖貽編，遠流出版社，53-62 頁。
- 黃珣懿（2007）。資訊融入國小四年級面積診斷教學之研究（未出版碩  
士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：作者。

教育部(2018)。國民中小學十二年國民基本教育課程綱-數學學習領域。

台北：教育部。

陳義汶(2009)。國中生學校數學成績與數學補習及數學態度之相關研

究。國民教育學報，6，131-161。

楊德清、洪素敏(2003)。比較分數大小—從具體、半具體至抽象符號

表徵之教學行動研究。南師學報：數理與科學類，37(2)，75-103。

詹婉華(2003)。國小高年級學童分數概念之探究。未出版之碩士論文，

國立台北師範學院數理教育研究所，臺北市。

## 英文文獻

Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent(Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.49-56). Melbourne, Australia: PME.

“Auditing the Numeracy Demands of the Australian Curriculum”, by M. Goos, V. Geiger, & S. Dole, 2012, In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), Mathematics education: Expanding horizons: Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia , p. 315.

Bell, A. W. (1992). Abstrat form lectures:Diagnostic teaching. In C. Gaulin, B. R.Hodgson, D. H. Wheeler, & J. C. Egsgard(Eds.), The 7th International Congress onMathematical Education (p. 342). Quebec,Canada: Les Presses De Université Laval.

Bell, A. W. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. Educational Studies in Mathematics, 24(1), 115-137.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D.(2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions.Educational

- Studies in Mathematics, 64(3),293-316.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.
- Desoete, A., Roeyers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, 34(5), 435-447.
- Figueras, O. (1989). *Two Different View of Fraction: Fractionating and Operating*. Proceedings of the 13th Conference of International Group for PME.
- Hewson, M. G., & Hewson, P. W. (1983). Effect of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 20(8), 731-743.
- Iwasaki, H., & Hashimoto, M. (2000). Cognitive change of fraction concepts in third graders: Analysis from the view of operational schema. *International Journal of Curriculum Development and Practice*, 2(1), 1-10.
- Kerslake, D. (1987). *Fraction: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, England: NFER-NELSON.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In Silver, E.A.(Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*.(pp.1-15). Hillsdale, N.J. : Erlbaum Associates.
- Mayer, R. E. (1987) *Educational psychology: A cognitive approach*. Boston: Little, Brown and Company.
- Mayer, R. E. (1993). Understanding individual differences in mathematical problem-solving: Toward a research agenda. *Learning Disability Quarterly*, 16, 2-5.
- Mamede, E. & Cardoso, P. (2010). Insights on students (mis) understanding of fractions. In: M. M. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 257-264)*. Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Mamede, E., & Nunes, T. (2008). Building on children's informal

knowledge in the teaching of fractions. In F. Olimpia, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345-352). Morelia, Mexico: PME.

Onslow, B.: (1986). *Overcoming Conceptual Obstacles Concerning Rates*.

Shell Centre, University of Nottingham.

Pólya, G. (1957). *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*, ed. London: Penguin.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). Affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 273-280). Thessaloniki, Greece: PME.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). The intuitive rules theory and in-service teacher education. In F.-L. Lin (Ed.), *Proceedings of the 1999 International Conference on Mathematics Teacher Education* (pp. 205-225). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

# 附件一 點心分披薩

主題名稱	點心分披薩囉!	教學時間	60 分鐘/節
單元名稱	南一 單元四		
授課班級	課後托育班五年級		
教學資源	工作紙(一)、 工作紙(二)、 紙卡 1-1 、紙卡 1-2、剪刀、膠水		
先備知識	<ol style="list-style-type: none"> <li>【3 上 第 8 單元】 平分、單位分數、幾分之幾、分數的累加</li> <li>【3 下 第 7 單元】 分數(單位分數)大小比較、分數加、減法</li> <li>【4 上 第 6 單元】 真分數、假分數與其互換、分數表示整數相除</li> <li>【4 下 第 2 單元】 同分母分數大小比較、加、減法與整數倍應用</li> </ol>		
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> <li>了解擴分的意義、方法及找等值分數。</li> <li>由擴分的經驗，理解如何用約分找等值分數。</li> </ol>		
行為目標	教學內容與流程	教學資源	教學評量
由平分圓形披薩引起動機。  生活情境中，「平分」的問題。	<p><b>一、分組、布題、提問：</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><b>分組：</b>將同學分組進行數學活動，每三人一組，一共分為四組。</li> <li><b>布題：</b>教師口頭講述「點心分披薩」的故事「課輔班的小朋友最喜歡吃披薩當作點心。老師做了三個大小一樣的披薩分給小朋友們吃，老師先把第一個披薩平均分成 2 塊，分給小朋友甲 1 塊。小朋友乙見到說：『太少了，我要兩塊。』老師就把第二個披薩平均切成四塊，分給小朋友乙兩塊。小朋友丙更貪心，搶著說：『我要四塊，我要四塊。』於是老師又把第三個披薩平均分成 8 塊，分給小朋友丙 4 塊。」</li> <li><b>教師提問：</b> 「教師引導學生思考每次分披薩後，小朋友得披薩的份量並討論：小朋友甲拿了 1 塊，他拿了整個披薩的幾分之幾？」 「小朋友乙拿了 2 塊，他拿了整個披薩的幾分之幾？」 「小朋友丙拿了 4 塊，他拿了整個披薩的幾分之幾？」 「哪個小朋友分得的披薩最多？」 「三個小朋友分得的披薩同樣多，那麼表</li> </ol>	口述與板書	<p>教師確認學生仔細聆聽</p> <p>教師引導學生思考、共同討論並說出各是拿了幾分之幾？誰分的比較多？為什麼？</p>

	<p>示他們所分出來的分數有甚麼關係？」</p> <p><b>二、著色圓形紙卡：</b></p> <p>1. 教師發下工作紙(一)及圓形紙卡(如紙卡 1-1)，請各組將 3 張圓形紙透過摺紙的方式摺出二等分、四等分、八等分，並找出這三個分數 (<math>\frac{1}{2}</math>, <math>\frac{2}{4}</math>, <math>\frac{4}{8}</math>) 的關係。</p> <p>2. 學生從觀察 <math>\frac{1}{2}</math>, <math>\frac{2}{4}</math>, <math>\frac{4}{8}</math> 這三個分數中，分子有甚麼變化？分母又有甚麼變化？</p> <p>3. 「除了 <math>\frac{2}{4}</math>, <math>\frac{4}{8}</math> 外，還有沒有與 <math>\frac{1}{2}</math> 相同數值的分數？請列舉一些與 <math>\frac{1}{2}</math> 相同數值的分數。」</p> <p>4. 教師說出擴分：像上面這樣，把一個分數的分子和分母同乘以一個比 1 大的整數，會得到一個和原來分數相等的分數，這種方法叫作擴分。</p> <p><b>三、剪貼長條紙卡：</b></p> <p>1. 教師發下工作紙(二)及 3 條相同長度長方形紙卡 (如紙卡 1-2)。</p> <p>2. 「如果依照虛線把紙條剪開，其中一份佔整條紙條的多少？」</p> <p>3. 在紙條上填色，要塗上多少部分來表示 <math>\frac{1}{3}</math>。假如把 <math>\frac{1}{3}</math> 的分母「3」擴大兩倍，分子「1」同時要怎樣改變，分數的數值才不會改變？那麼擴分後的分數是多少？</p>	<p>工作紙、剪刀與膠水</p>	<p>老師確認學生能說出一樣多，並能說出是等值分數。</p> <p>老師確認學生能將圓形紙摺出二等分、四等分、八等分，並能說出 <math>\frac{1}{2}</math>, <math>\frac{2}{4}</math>, <math>\frac{4}{8}</math> 相等。並能說出分子變成 2 倍、4 倍，分母也跟著變成 2 倍、4 倍</p> <p>老師確認學生能說出 <math>\frac{1}{2}</math> 其他的等值分數。</p> <p>老師確認學生能說出指其中一份紙條占了整條紙條的 <math>\frac{1}{3}</math>。說出分子</p>
--	--	------------------	--

	<p>4. 假如把 <math>\frac{1}{3}</math> 的分子擴大四倍，分母同時要怎樣改變，分數的值才不會改變？那麼擴分後的分數是多少？</p> <p>5. <math>\frac{1}{3}</math> 和 <math>\frac{7}{21}</math> 是否相等？<math>\frac{1}{3}</math> 與 <math>\frac{7}{21}</math> 比較，分母和分子同時擴大了多少倍？</p> <p>6. 除了 <math>\frac{2}{6}</math>、<math>\frac{4}{12}</math> 和 <math>\frac{7}{21}</math> 以外，還有沒有與 <math>\frac{1}{3}</math> 相同數值的分數？請列舉一些與 <math>\frac{1}{3}</math> 相同數值的分數。</p> <p><b>四、 延伸活動：</b></p> <p>1. 教師請小朋友拿出先前各組所做的工作紙。帶領小朋友從 <math>\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{4} \rightarrow \frac{4}{8}</math> 與 <math>\frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{6} \rightarrow \frac{4}{12} \rightarrow \frac{7}{21}</math> 審視變化過程，反推 <math>\frac{4}{8} \rightarrow \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1}{2}</math> 與 <math>\frac{7}{21} \rightarrow \frac{4}{12} \rightarrow \frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{3}</math>。</p> <p>2. 教師宣告：像上面這樣，把一個分數的分子和分母同除以一個比 1 大的整數，會得到一個和原來分數相等的分數，這種方法叫作約分。</p> <p>3. 教師宣告：利用擴分與約分得到等值分數的過程稱為通分，為下堂課做引言。</p>	<p>要擴大兩倍，分數為 <math>\frac{2}{6}</math>。</p> <p>老師確認學生說出 <math>\frac{4}{12}</math>。</p>
--	--	---

工作紙(一)

### 誰的披薩比較多

1. 請利用摺紙的方式把圓對摺，分別把圓分成  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{4}{8}$ ，再將其黏貼於表格中。

紙卡黏貼處	分數
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{2}{4}$
	$\frac{4}{8}$

2.  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{4}{8}$  這三個分是有什麼關係？請把他們的關係寫在以下的方格內。

--

工作紙(二)

剪貼紙條

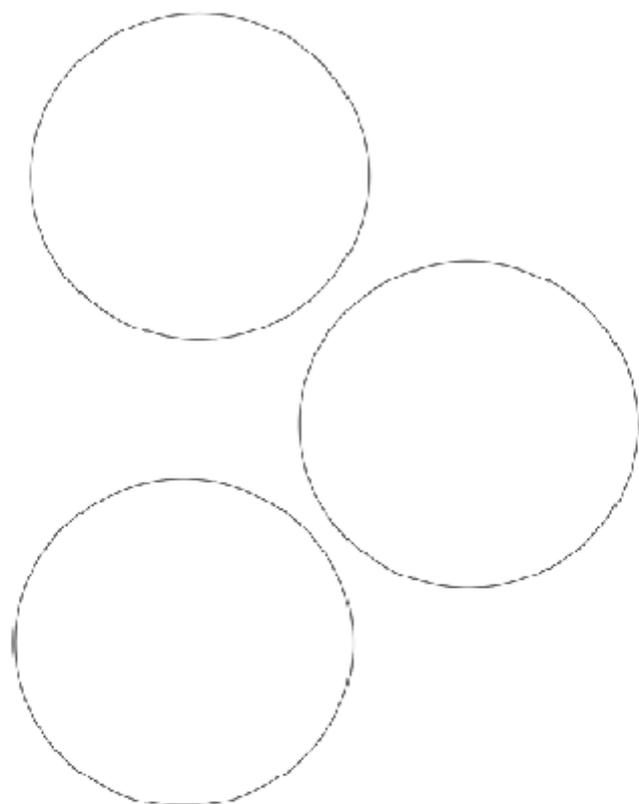
1. 利用摺紙的方法，分別把每張紙條分成若干等份，然後把摺痕和紙條其中的部分填上顏色，而著色部分要與表格右邊的分數配合，最後把紙條貼在表格的左邊。

紙條	分數
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{6}$
	$\frac{4}{12}$

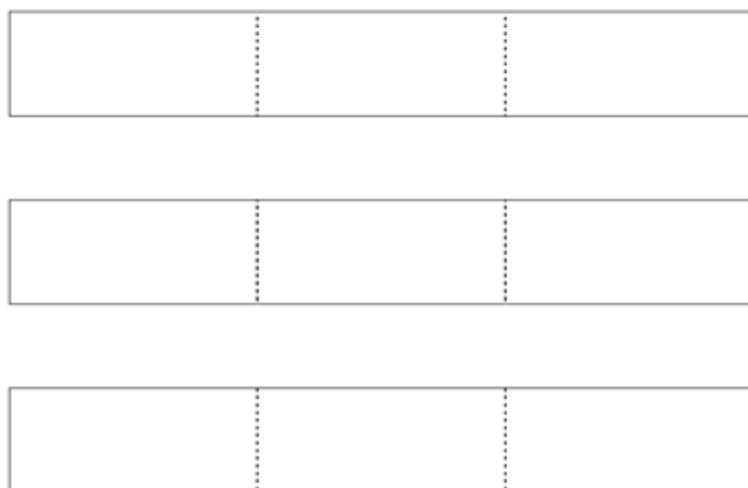
2. 你發現了甚麼？請把結果寫在以下的方格內。

--

紙卡1-1



紙卡1-2



## 附件二 哪杯可樂多

主題名稱	哪杯可樂多!	教學時間	60 分鐘/節
單元名稱	南一 單元四		
授課班級	課後托育班五年級		
教學資源	1.刻度塑膠杯 2.四開圖畫紙 3.金銀彩帶 4.可樂		
先備知識	5. 【5上 第 1 單元】 因數、公因數及倍數、公倍數		
教學目標	3. 學習通分的意義，並用來做異分母分數的比較。		
行為目標	教學內容與流程	教學資源	教學評量
前一堂課內容回顧	<p><b>五、 課前回顧、延伸與提問：</b></p> <p>4. <b>課前回顧：</b></p> <p>好，小朋友們，我們在上一堂課已經學過了擴分還有約分。還記得上一堂課我們說利用約分和擴分得到等值分數的過程叫做什麼嗎？現在要教的通分跟他們有很大的關係。我們先來複習一下，這裡有三題小練習，請小朋友寫在測驗紙上寫下題目是屬於擴分還是約分，並完成括號處。</p> <p>(1). 題目一：擴分 <math>\frac{7}{9} = \frac{7 \times (\quad)}{9 \times 5} = \frac{(\quad)}{45}</math></p> <p>(2). 題目二：約分 <math>\frac{12}{30} = \frac{12 \div 6}{30 \div 6} = \frac{(\quad)}{5}</math></p> <p>(3). 題目三：擴分 <math>\frac{2}{7} = \frac{8}{(\quad)}</math></p>	口述與板書	<p>老師確認學生仔細聆聽，並能說出通分。</p> <p>老師確認學生完成括號內容，並能寫下題型一與題型三為擴分，題型二為約分。</p>
生活情境中，「異分母比大小」的問題。	<p>5. <b>延伸：教師實作「哪杯可樂多」</b></p> <p>(1). 教師講述概念：通分就是運用「擴分」還有「約分」的方法，把兩個分數化成相同的分母之後，來比較他們的大小。相同分母稱為「公分母」。</p> <p>(2). 教師展示手上現在有兩個一樣大的杯子，他們都裝了稍等要請大家喝的可樂，請問同學們哪邊的可樂量比較多呢？</p> <p>(3). 教師將手中杯子轉向露出有刻度的一面，一杯為四個刻度，一杯為八個刻度。並發下預先為各組準備好</p>	塑膠杯、可樂	<p>老師確認學生能說出杯內可樂高度較高的量比</p>

	<p>的兩杯可樂，接著帶領學一起數一下兩杯可樂分別裝到第幾格的地方。(刻度四格的那杯可樂裝到了第二格的地方；刻度八格的那一杯裝到了第三格的地方)。</p> <p>6. 提問： 「所以兩杯可樂除了用高度比較量的多與少外，請問可以用分數的方式來表示它們之間的大小關係嗎？不一樣的分數要怎麼比大小呢？」 「『通』的意思簡單的來說就是把他們變成一樣。請問同學要怎麼做呢？」</p> <p>7. 教師發下麥克筆，請同學將兩杯可樂平放於桌上相互對照，並用麥克筆將刻度四格的可樂杯對應刻度八格的可樂杯用虛線做上記號，分為八等分。</p> <p>8. 教師說出分數如何比大小：<math>\frac{2}{4}</math> 擴分後就會變成 <math>\frac{4}{8}</math>，這樣就能比大小了。小朋友在四年級學分數的時候有提到，兩分數同分母時分子越大的分數越大，而不是看誰的分母比較大。</p> <p>六、 彩帶布置：</p> <p>1. 教師發下聖誕節布置聖誕樹的銀色彩帶與金色彩帶各 30 公分。</p> <p>2. 教師問：銀色用了 <math>\frac{4}{5}</math> 條，金色用了 <math>\frac{2}{3}</math> 條，請問哪種顏色的彩帶用去的比較多？</p> <p>3. 各組將自己的結果黏貼在圖畫紙上做比較，並上台分享。</p>	<p>較多。</p> <p>老師確認學生能說出分別裝了 <math>\frac{2}{4}</math> 杯，另一杯裝了 <math>\frac{3}{8}</math> 杯可樂。</p> <p>老師確認學生用麥克筆在塑膠杯做上記號。</p> <p>老師確認學生能藉由將兩杯可樂分成相同等分時如何比大小。</p> <p>金銀彩帶、尺、剪刀、四開圖畫紙</p>
--	---	---

	<p>七、 演練題目：</p> <p>1. 有兩杯一樣多的牛奶，美美喝了<math>\frac{3}{4}</math>杯，玉珊喝了<math>\frac{5}{6}</math>杯，誰喝得比較多？</p> <p>2. 比較<math>\frac{3}{4}</math>和<math>\frac{6}{7}</math>的大小。</p> <p>3. 有兩籃一樣多的雞蛋，媽媽早上做早餐用去<math>\frac{2}{5}</math>籃，下午做點心用去了<math>\frac{2}{7}</math>籃，上午還是下午用得比較多？</p>		
--	---	--	--

## 附件三 到底吃了多少條生乳捲

主題名稱	到底吃了多少條生乳捲	教學時間	60 分鐘/節
單元名稱	南一 單元六		
授課班級	課後托育班五年級		
教學資源	1. 投影機 2. 測驗紙 3. 生乳捲		
先備知識	6. 【5上 第 4 單元】 擴分、約分、通分、異分母的比較		
教學目標	4. 能在具體情境中，透過通分，解決異分母分數的加法問題。 5. 能在具體情境中，透過通分，解決異分母分數的減法問題。 6. 異分母分數的加、減應用。		
行為目標	教學內容與流程	教學資源	教學評量
前一堂課 內容回顧	<b>八、 課前回顧：</b> 9. <b>複習：</b> 複習前一節通分與異分母分數比大小的內容。 <b>九、 布題與提問：</b> 1. <b>布題：</b> 教師口頭講述「到底吃了多少條生乳捲」的內容，「我們今天要來看看每個認點心吃的生乳捲是多少條。老師帶了兩條大小與長度都一樣的生乳捲分給小朋友們當作點心，老師先把第一條奶油口味的生乳捲平均分成 4 塊，接著老師又把第二條草莓口味生乳捲平均分成 3 塊，今天的點心每個人兩種口味各一塊，請小朋友算一算每個人今天點心吃了多少條生乳捲呢？」 2. <b>提問：</b> 「怎麼列式並算出結果？」 「學會了異分母的加法，那減法會不會類推呢？試做 $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ 」	口述 與板 書	老師確認學生仔細聆聽。
生活情境 中，「異分 母分數加 減」的問 題。	3. 教師說出異分母分數計算規則：在做不同分母的分數加減計算時，要先通分化為同分母，再做計算。  <b>十、 課堂演練：</b> 1. 黑繩子長 $\frac{1}{2}$ 公尺，紅繩子長 $\frac{1}{4}$ 公尺。 (1). 哪一條比較長？	測驗 紙	老師確認學生在測驗紙上寫下自己的作法。
			老師確

<p>能理解古埃及人使用埃及分數的原因，試著拆解埃及分數的使用</p>	<p>(2). 黑繩子與紅繩子共長多少？</p> <p>(3). 黑繩子與紅繩子相差多少公尺？ (學生上台發表自己的作法。)</p> <p>2. 把 7 公尺長的紅繩平分成 5 段，把 5 公尺長的藍繩平分成 3 段。</p> <p>(1). 哪一條比較長？</p> <p>(2). 紅繩子與藍繩子共長多少？</p> <p>(3). 紅繩子與紅繩子相差多少？ (學生上台發表自己的作法。)</p> <p><b>十一、 埃及分數的表示法：</b></p> <p>7. 影片動畫 <a href="https://www.youtube.com/watch?v=NhhNdePm3i8">https://www.youtube.com/watch?v=NhhNdePm3i8</a>。</p> <p>8. 分組討論並記錄影片中以埃及分數來表示 <math>\frac{3}{8}</math> 的方 式有哪些？</p> <p>9. 可以討論一下是不是所有的真分數都可以以埃及 分數方式來表示？</p>	<p>認學生在測驗紙上寫下自己的作法。</p> <p>老師確認學生能藉由埃及分數表示法練習異分母分數的加減。</p>
-------------------------------------	--	--

## 附件四 你能拿到幾顆聖誕糖

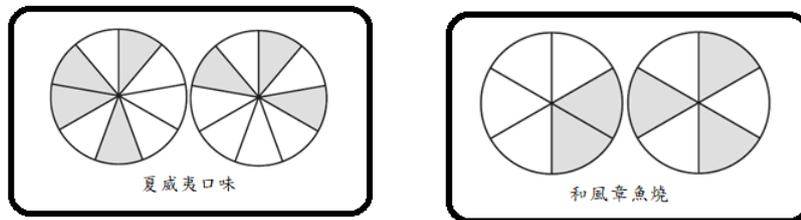
主題名稱	你能拿到幾顆聖誕糖!	教學時間	60 分鐘/節
單元名稱	分數的乘法(先修)		
授課班級	課後托育班五年級		
教學資源	1.糖 2.測驗紙		
先備知識	1. 具備處理整數的整數倍經驗。 2. 在「單位分數所指示的內容物為多個個物」的情境下，具備處理分數做數問題的經驗。		
教學目標	7. 解決「整數的分數倍」的問題，並用有乘號的算式摘要記錄解題活動與結果。		
行為目標	教學內容與流程	教學資源	教學評量
前一堂課內容回顧	<p><b>十二、 課前回顧：</b></p> <p><b>10. 課前回顧：</b></p> <p>好，小朋友們，我們在前幾堂課已經學過了異分母分數的加減與神祕的埃及分數。還記得上一堂課我們說教過的方式嗎？我們先來複習一下，這裡有三題小練習，請小朋友寫在測驗紙上你的答案。</p> <p>(4). 金彩帶長 <math>\frac{1}{2}</math> 公尺，銀彩帶長 <math>\frac{1}{4}</math> 公尺。</p> <p style="padding-left: 2em;">i. 哪一條比較長？</p> <p style="padding-left: 2em;">ii. 金彩帶與銀彩帶共長多少？</p> <p style="padding-left: 2em;">iii. 金彩帶與銀彩帶相差多少？</p> <p>(5). 把 7 公尺長的綠彩帶平分成 5 段，把 5 公尺長的紅彩帶平分成 3 段。</p> <p style="padding-left: 2em;">i. 哪一條比較長？</p> <p style="padding-left: 2em;">ii. 綠彩帶與紅彩帶共長多少？</p> <p style="padding-left: 2em;">iii. 綠彩帶與紅彩帶相差多少？</p> <p>(6). 試著用埃及分數表示方式舉例出一個真分數。</p> <p><b>十三、 布題</b></p>	<p>口述與板書</p> <p>測驗紙</p>	<p>老師確認仔聆聽，並能說出通分。</p> <p>老師請學生完成黑板上的習題並能上台分享。</p>

<p>生活情境中，「單位分數所指示的內容物為多個個物」的情境下，經驗「整數的分數倍」意義的語言。</p> <p>在「單位分數所指示的內容物為整數個物」的情境下，解決「被乘數是整數，乘數是單位分數或真分數，積是整數」的問題，並用有乘號的算式摘要記錄解題過</p>	<p>1. 教師布題 1-實作「你能拿到多少顆聖誕糖」： 即將要聖誕節了，按慣例每年都會發給小朋友們聖誕糖，我們今天就用聖誕糖來分分看，學習基本的分數乘以整數的概念，老師在每組桌上都放有一包聖誕糖，每包裡頭有20顆，請每組的小朋友拿<math>2\frac{1}{5}</math>包聖誕糖給老師，數數看有多少顆？</p> <p>2. 布題 1 提問： 「小朋友可以試著用自己組別的糖果分分看並且試著畫圖，說說看你怎麼知道，<math>2\frac{1}{5}</math>包有幾顆糖果？」 「你的算式記了什麼？」 「幾包糖果有40顆？也就是算了幾個20？是20的幾倍？」 「幾包糖果有4枝？（<math>\frac{1}{5}</math>包）」 「44顆糖果是幾個20？是20的幾倍？」 「20顆糖果的<math>2\frac{1}{5}</math>倍是44顆糖果，用一個有乘號的算式把問題和結果記下來。」</p> <p>3. 教師布題 2： 舊市議會站旁有一個 U-bike 的租借與歸還站，一共有 15 個位置可供民眾使用，現在停滿了其中的<math>\frac{1}{3}</math>請問現場目前有幾輛 U-bike 腳踏車可供民眾租借？</p> <p>4. 布題 2 提問： 「用你畫的圖，說說看你怎麼知道的？」 「現場位置的幾分之幾有5輛？（現場位置的<math>\frac{1}{3}</math>）」 「也就是算了幾分之幾的現場位置？」 「是現場位置的幾倍？」 「『現場位置的<math>\frac{1}{3}</math>倍是5輛U-bike腳踏</p>	<p>聖誕糖、測驗紙</p>	<p>老師確認學生能畫圖解決問題。能算出44顆。老師確認能運用算式記錄解題過程，並討論及判斷做法是否合理。</p> <p>老師確認能說明乘法算式的意義。</p> <p>老師確認能畫圖解決問題。能算出5輛。老師確認能運用算</p>
--	---	----------------	--

<p>程。</p>	<p>車』，用一個有乘號的算式把問題和結果記下來。」</p> <p><b>十四、 演練題目：</b></p> <p>1. 花園裡有48朵花，其中的<math>\frac{5}{12}</math>是紅色的，花園裡有幾朵紅花？</p> <p>2. 1盒鉛筆有有30枝，<math>1\frac{5}{6}</math>盒鉛筆有幾枝？</p>	<p>式記錄解題過程，並討論及判斷做法是否合理。</p> <p>老師確認能說明乘法算式的意義。</p>
-----------	---	---

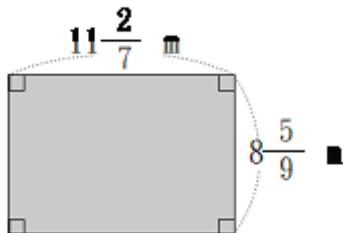
## 附件五 前測試題

1. 小明家中今天決定吃披薩，買了夏威夷與和風章魚燒兩種口味各一盒，兩種披薩送達家中時切割如下圖，全家人飽餐一頓後，兩種口味剩下的部分如下圖著色處，請問哪種口味剩下的比較多盒？



2. 身為學藝股長的阿成想要布置布告欄，欲將紅彩帶每 75 公分做成一朵玫瑰花，綠彩帶每 15 公分做成葉片，此時安安找到了綠彩帶 5 公尺與紅彩帶 7 公尺，請問做出最多朵花與最多片完整葉子後，哪種顏色彩帶剩下比較多網？多幾網？
3. 梁老師買了 1 籃新鮮雞蛋準備做糖心蛋，上午用了了  $\frac{2}{5}$  籃，下午又用了  $\frac{2}{10}$  籃，請問梁老師上午做的比較多還是下午做的比較多？
4. 前金國小校慶預演分成上、下午兩階段，上午先請  $\frac{1}{7}$  的學生下樓排演，接著再請  $\frac{4}{21}$  的學生下樓排演，下午部分請剩下的學生下樓排演，請問排演的人數上午較多還是下午排演的人數多？

5. 小明家中裝潢，爸爸帶小明至特力屋賣場添購粉刷房間的油漆，結束後共買了每桶 $\frac{4}{15}$ 公升的藍色油漆 20 桶，每桶 $\frac{8}{9}$ 公升的白色油漆 4 桶，請問哪種顏色的油漆數量較多？
6. 小明每一分鐘跑了 300 公尺，小華每一分鐘跑了 270 公尺，兩人相約參加高雄國際參加馬拉松休閒組 5 公里的賽程，請問兩人完賽後一共花了多少時間？
7. 老師將一包 3 公斤腰果平分給甲、乙、丙三個學生。三個人都怕吃太多，於是甲將自己的腰果倒 $\frac{1}{3}$ 公斤給乙，乙將自己的腰果倒 $\frac{1}{2}$ 公斤給丙，丙將自己的腰果倒 $\frac{3}{5}$ 公斤給甲。請問最後誰吃到的腰果最多？
8. 老師煮了一鍋雞湯，若老師自己喝，3 天才能喝完；如果師丈和老師一起喝，則 2 天就會喝完，師丈平均 1 天喝幾鍋雞湯？
9. 學生甲欲蓋一個牧場，如下圖矩形，而老師的牧場周長是學生甲的兩倍請問老師所建造的牧場周長有多長？



10. 班上參加了學校聖誕節布置大賽，布置內容如果由學藝玉雪獨立做 6 天可完成，換成班長東良獨立做 15 天可完成，假使由衛生股長炳宏獨立做 20 天可完成。梁老師建議由三人合力，一天後請問還剩下全部布置內容的幾分之幾？
11. 庭庭想在新家的房間鋪彩色巧拼地墊，若房間的長為  $7\frac{7}{9}$  公尺，寬為 3 公尺，每 1 平方公尺需要 9 塊彩色巧拼地墊。鋪完整個房間需要幾塊彩色巧拼地墊？
12. 開心農場中分成動物區、生態池與植物園，動物區的面積為農場總面積的  $\frac{1}{5}$ ，生態池的面積為動物區面積的 3 倍，剩下的為植物園的面積。請問哪個園區的面積較大？
13. 承上題，已知開心農場園區總面積為 4 平方公里，試問動物區、生態池與植物園分別占多少平方公里？
14. 老師決定帶著研究生去日本旅遊。為了當地購物方便，老師先來銀行兌換日幣。當天的匯率為 1 元新臺幣可換  $3\frac{3}{7}$  元的日幣，隔了一天匯率並動為 1 元新臺幣可換  $3\frac{7}{10}$  元的日幣。若老師兩天各準備了 7 千元的新臺幣要換成日幣，老師可以換到多少元日幣？

15. 提倡小學生多喝開水的習慣，老師請同學兩兩一組，第一組中同學甲水壺瓶內容量可裝 500 毫升，同學乙水壺瓶內容量可裝 1500 毫升。甲同學今天裝了兩瓶且都喝完，乙同學裝滿一瓶只喝了一半，請問第一組中誰喝的水比較多？相差多少公升？