國立中山大學教育研究所

碩士論文

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Master Thesis

題目表徵形式與高中二年級學生在
函數圖形的解題歷程分析之研究

A Study on Problem Representation Formats and Grade 11 Students' Problem-Solving Processes on Graph of Function

研究生：陳璿文

Hsuan-Wen Chen

指導教授：梁淑坤 博士

Dr. Shuk-Kwan S. Leung

中華民國 108 年 7 月

July 2019

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士班

研究生陳璿文（學號：M056050017）所提論文

題目表徵形式與高中二年級學生在函數圖形的解題歷程分析之研究
A study on problem representation formats and grade 11 students' problem-solving processes on graph of function

於中華民國108年6月20日經本委員會審查並舉行口試，符合碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 左太政 左太政　　委　員 梁淑坤 梁淑坤

委　員 周珮儀 周珮儀　　委　員 ______

委　員 ______　　委　員 ______

指導教授(梁淑坤) 梁淑坤 (簽名)

誌　謝

三年的碩士生活瞬間就過去了，還未欣賞過中山的山海美景，總是記得每天熬夜寫論文，直到日出我才得以休息。學生時代就要過去了，在最後這一刻，我要感謝指導教授梁淑坤博士，她常常提醒我論文的進度，也會關心我生活中的每一件事情。同時也要感謝中山大學教育所周珮儀教授，及高師大數學系左太政教授在口試時的指導，給予本論文諸多指證與寶貴意見，令我受益匪淺。

再來我要感謝梁門的大家—仁傑、科亦、璧鴻、家煌及玉雪，在我需要幫助時，大家總是會伸出援手，一起解決問題；此外，要感謝中山大學教育所的所有教授，和所辦姐姐們的協助，以及一起上課的學長姐們，從與教授和學長姐們的課堂及交談中，我有許多新的省思，承蒙大家的關照了。

最後，感謝父母支持我讀碩士，以及感謝莉婷的陪伴，讓我得以安心研究，謹以此小小的成果與他們一起分享。期望在未來的生活中，有更多志同道合的朋友們，可以彼此相互勉勵。

陳璿文　謹誌於

國立中山大學教育研究所

2019年7月

摘　要

本研究旨在透過 Schoenfeld (1985) 的數學解題歷程 6 階段（讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證），分析高二學生在不同表徵形式中（文字題、圖文題）函數圖形的解題歷程。研究者從大學學科能力測驗試題中出發，再以專家效度的方式篩選出 2 題函數圖形試題，最後經預試修定為正式試題。收集資料方面，正式樣本以便利取樣的方式選取屏東市某高二班級學生 4 位為參與者，逐一由研究者擔任晤談者進行放聲思考晤談。4 位參與者分別回答兩道題的兩種表徵形式（交叉成為四種配答），待參與者作答完畢後，研究者將放聲思考之內容轉為逐字稿，副以原案的手抄，經過信度檢核之後進行原案分析。

本研究的發現，參與者回答文字題時，大多會經歷「分析」階段；反之，參與者回答圖文題時，大多不會經歷分析階段，此外，較少參與者進行「驗證」階段。再者，有 1 位參與者回答圖文題時，忽視圖的存在，僅運用文字敘述就能擬定策略；大部分的參與者做文字題時，會先自行繪出與題目意涵相互符合之圖，再進行後續的分析等階段。

研究者針對結果得出未來研究方面的建議，選用高中不同單元

作為題材、增加不同複雜度的題目，以及加入不同成就的參與者。至於未來教學建議方面，教師應著重學生解題能力的培養與注重學生的解題歷程，此外，教師應注意圖對解題者的影響，以及注重培育學生的表徵間轉譯能力。

關鍵字：解題歷程、題目表徵形式、函數圖形、高中學生、文字題、圖文題

Abstract

This study analyzes high school students' problem-solving processes in different problem representations (Verbal, Drawn-Verbal) on graph of function using Schoenfeld's (1985) time-line representation (Read, Analyze, Explore, Plan, Implement, Verify) for analyzing a mathematical problem-solving process. The problem set from General Scholastic Ability Test included 2 test questions on graph of function with validity checked by experts, and the pre-test is revised to the official test. Four high school students in Pingtung City were participants, and they were guided to participate in thinking aloud interviews. The four participants answered two representations (Verbal, Drawn-Verbal) of the two questions (crosstab into four format combinations). After the participants finished answering the provided questions, the researcher transcribed the contents of thinking aloud into protocols and the participants' script, and completed reliability check on analyzing the protocols.

There are three research findings. First, most of the participants exhibited Analyze stage (A) when answering Verbal; conversely, most of the participants did not exhibit Analyze stage (A) when answering Drawn-Verbal. In addition, less participants exhibited Verify stage (V). Second, one participant ignored the Drawn part of Drawn-Verbal format and only used the Verbal part of the question to devise problem solving strategy. Third, most of the participants when answering a Verbal test question would first drew the graph that matched the meaning of the Verbal test question then analyzed the graph they drew in solving.

The Suggested future studies are: include test questions from different modules in high school, test questions with different complexity, or students with different levels of academic achievement. In terms of pedagogical implications and suggestions, teachers should value the effect of Drawn format on the students and emphasis on the training of students' abilities in solving problems in representation formats and translations among various formats.

Keywords: problem-solving process, problem representation formats, graph of function, high school students, Verbal, Drawn-Verbal

目錄

圖 次

表 次

第壹章 緒論

本研究欲探討的是高二學生在不同題目表徵形式下函數圖形的解題過程，其解題歷程的情形。本章共分成 5 節，分別為「研究動機」、「研究目的」、「研究問題」、「名詞釋義」與「研究限制」。詳述本研究之研究動機與目的，以及針對「不同表徵題」、「函數圖形概念」 及「解題歷程」做名詞解釋。

第一節 研究動機

近年來，國內外有關數學教學的研究，日益強調問題解決 (problem solving) 的素養能力的培養，誠如經濟合作與發展組織 (Organization for Economic Co-operation and Development) 認為素養能力的培養是終身學習者的歷程，可透過「教育引導」、「教學培養」及「學習獲得」等養成 (OECD, 2005)。而我國近年來也極力推崇核心素養課程，培養學習者適應現在及未來生活所需具備的「帶著走的能力」(教育部，2018)。因此，如何讓學生具備問題解決的能力並將其融入日常生活的情境中，乃成為現今學生與教師的共同課題。

目前而言，高中學生的升學考試多以敘述類型的題目來評量學生的問題解決能力，且考題內容較多為認知層面的問題（大考中

心，2018）。就一般而言，學生要解決一道題目必須具備語文理解與問題解決的運作歷程 (Kintsch & Greeno, 1985)。因此，問題解決的歷程大多牽涉到心理層面的數學能力，透過學生的解題步驟來探究解題的策略，並且透過這些技巧來幫助學生的解題能力 (Polya, 1945；Schoenfeld, 1985)。

以上的研究，主要是從學生的解題歷程來探討學生的能力，但在這些研究中較於強調技巧與策略的使用，忽略了數學問題的本質對學生解題中的影響，Krutetskii (1976) 提出關於數學題型的研究，認為不同類型的題目會影響問題解決的策略。另外，在問題的發展上，解決問題的策略與問題的資訊量有相關，不同的資訊量會影響學生在解題策略的判斷 (Kilpatrick, 1978)。

再者，有些研究認為數學問題的理解是數學解題的關鍵要素(Kintsch & Greeno, 1985)。研究結果發現學生之所以解題失敗，大部分的因素是沒搞懂題目，而以機械式或直覺式的方法來進行解題，忽略對題目的了解與分析 (Clement, Lochhead & Monk, 1981)。因此，如何幫助學生了解題目，適當的運用題目的各種表徵，是一個值得去探討的議題。

理解題意是在解題歷程中相當重要的部分，而題目的表徵形式常被拿來討論 (Moyer, Sowder, Threadgill-Sowder & Moyer, 1984)，

適當的題目表徵也會造成學生不同的解題方法 (Silver, Leung & Cai, 1995)。

綜合上述研究發現，素養能力的培養應強調閱讀理解與問題解決能力，在數學解題時更加注重認知與訊息處理的能力，這些方式皆可以增強數學解題策略，但在不同的題目表徵形式的呈現中，會產生不同的結果。綜合來說，文字題與圖畫題給予學生的觀點就有不同的差異，多數的研究也表示圖畫題的解題表現優於文字題。

目前解題歷程研究如林美惠（1997）、石千奇（2004）均以小學生為對象，因此，本研究將探討高中學生在不同題目表徵下的數學解題歷程。此外，在高中的課程單元中，函數圖形為基本的題目類型，在相關領域中也是很重要的角色。函數圖形也很常運用到不同表徵間的轉譯，所以本研究將藉由函數圖形的單元來探討高中學生在不同題目表徵下的數學解題歷程。希望藉由研究結果，讓教師能注重學生的解題歷程，以及注重於培養學生對於表徵間的轉譯能力，來幫助學生學習、思考及解決數學問題。

第二節 研究目的

根據前一小節的研究動機，本研究針對高二學生探討在不同表徵題中其解題過程中函數圖形概念的運用，及解題歷程之研究。本研究的目的如下：

(一) 了解高中二年級學生在函數圖形中的解題歷程。

(二) 探究高中二年級學生在不同表徵的題目之解題歷程的差別。

第三節 研究問題

根據上述的研究目的，本研究擬定之研究問題為以下兩點：

(一) 探究高中二年級學生在函數圖形中解題歷程為何？

(二) 高中二年級學生在不同表徵的題目之解題歷程有何差異？

第四節 名詞釋義

(一) 高中二年級

本研究的高中二年級學生係指 106 學年度進入高中就讀之高中生，學生在本研究進行時已經升上高二，並於高一上學期第二章已學習線性函數、二次函數。本研究的參與者在數學解題的能力上都有較高的成就，此外，本研究的參與者在口語達上也能展現良好的能力。

(二) 題目表徵

本研究中數學問題所採用的表徵形式包括兩種題型：圖文題與文字題。圖文題是指題目用文字加圖形的方式呈現；文字題則是以文字敘述來呈現。另外，圖文題與文字題的文字敘述相同，只是圖文題除文字外再加上與文意配合的圖。

(三) 函數圖形

本研究中的函數圖形，係指目前我國高中一年級上學期第二章「多項式函數」單元。本研究參考龍騰文化出版（2017 年）的數學一冊，並從我國的大考中心所公布的學科能力測驗試題進行題目的篩選，題目的內容包括線型函數與二次函數。

(四) 解題歷程

解題歷程為解題者在面對問題時，必須先提取記憶，並在工作記憶區進行有效的訊息處理，以獲得答案的認知歷程。本研究參考 Schoenfeld (1985) 的解題模式，將解題歷程的模式分為讀題、分析、探索、計畫、執行與驗證共六個階段。

(五) 放聲思考法

放聲思考法 (thinking aloud) 即是學生解題時將演算過程口頭講述 (Ericsson & Simon, 1980)。本研究運放聲思考法來記錄學生的解題歷程，並分析探討。

第五節 研究限制

本研究限制共有三個方面，包含參與者、資料蒐集及教材選擇，分別敘述如下：

(一) 參與者的部分，採取便利的樣本，研究者挑選的參與者皆在屏東市某高中就讀，參與者來自相同的班級，故研究結果只能推論到學習背景相關的學生，不適用於台灣全體高中生。

(二) 在教材選擇方面，本研究主要針對高一上學期課程中的函數圖形作探討，測驗單元與高中二年級的學生的記憶時間相隔一年，在測驗上滿足延宕效應的作用。在題目的表徵上，此單元有其獨特性，未必能推論至其它所有單元，故其它主題有待相關研究去作探討及驗證。

(三) 在資料蒐集方面，本研究採取放聲思考的方式來蒐集學生解題歷程的資料，並非所有學生對放聲思考的方式都是很熟習，雖然在測驗前進行操作訓練，但仍存在不可控制的干擾因素。

第貳章 文獻探討

本章主要針對過去的學者在數學解題歷程、表徵形式的相關研究，以及現行高中生採用的教材對照之 103 課程綱要的內容進行文獻回顧，並參考部分的研究內容來作為本研究的研究方法，進而分析學生在不同表徵形式下的解題歷程。本章主要分為三節，分別為數學解題歷程、表徵形式的相關研究、函數圖形的教材分析。

第一節 數學解題歷程

解題歷程係指解題者在面對特定目標時，必須運用所有可獲得的資訊，來完成目標的心路歷程。本節回顧過去不同學者所提出的解題歷程步驟，並加以整理，其內容包含 Polya (1945) 的解題歷程、Kilpatrick (1967) 的解題歷程以及 Schoenfeld (1985) 的解題歷程，分別敘述如下：

(一) Polya 的解題歷程

Polya (1945) 是最早就解題歷程中提出有關數學解題階段，以及每一個階段的策略推理。在其著作「How to Solve It」一書中強調解題策略的重要性，並將解題策略分為四個階段，分別為了解問題 (understanding the problem)、擬訂計畫 (devising a plan)、執行計畫

(carry out the plan)、回顧 (look back)。其四階段詳述如下：

1. 了解問題

(1) 解題者必須了解「目標是什麼？」「數據資料是什麼？」「已知條件是什麼？」「條件充足嗎？太多？太少？或是彼此有矛盾？」。

(2) 繪圖並使用適合的符號或記號。

(3) 解題者是否能把條件整理並列出？

2. 擬訂計畫

(1) 解題者如何找出數據資料與已知條件的關係，探討條件如何輔助思考。

(2) 解題者是否曾經計算過過這個題目？或是計算過一樣，但以不同類型闡述的題目？

(3) 解題者是否知道與此題關聯的題目？知道可以使用什麼定理？

(4) 注意目標！並試著思考有什麼相關的問題。

(5) 解題者過去作答的問題，能再運用它的方法或結果嗎？或者是否需要插入什麼要件，來運用這個作答過的問題？

(6) 解題者能否重述問題？把問題重新敘述一遍？

(7) 如果不能解決現在的問題，試著先從一些相關問題下手。試

試一些有關聯但比較容易解決的問題？例如，比較普遍的問題？相似或類比的問題？只思考條件的某個部分，而先暫緩其他部分，再看看離眞正的目標有多遠，還能做什麼變化？你能從條件中找到什麼關鍵點？目標或已知可以怎麼改變，來讓它們彼此更接近一些？

(8) 解題是否已經運用了所有的已知條件？考慮了與問題相關的所有必要觀念？

3. 執行計畫

檢查每一個步驟並且實行計畫。解題者能徹底確定每一個步驟都是正確的？

4. 回顧

(1) 解題者可以驗算所得的答案嗎？能否驗證過程？

(2) 解題者能否用不同的策略得到相同的答案？能否把這個結果或方法應用到別的問題上？

Polya 不僅使解題者能應用已求得的解題結果或方法於其他的數學問題，同時，強調可從不同角度檢驗解題結果。Polya 提出了四個策略，包含：類比、一般化、特殊化、與分解與重組，來幫助解題者使用相似的解題結果或方法，來解決其他數學問題。

(二) Kilpatrick 的解題歷程

Kilpatrick (1967) 以八年級學生為研究對象，探討八年級學生解非例行性文字題使用的策略，發現學生用的策略並不多。因此以 Polya 解題的四階段策略為依據，將解題歷程改編成如下述：

1. 理解問題：確認已知條件或目標；畫圖；插入符號。
2. 擬訂計畫：重新敘述問題；考慮有關聯的問題。
3. 執行計畫：利用漸進的方式；確認解題步驟。
4. 回顧：檢查答案正確性；檢查答案符合條件；驗明論證步驟；使用其他策略得到答案。

Kilpatrick 具體提出了可以幫助解題的解題策略，在理解問題方面，也鼓勵解題者在理解問題時，能透過圖形來增加對題目的了解。此外，在執行計畫時，應漸進式的回答以確認答題步驟，確實能更有效率的解題。

(三) Schoenfeld 的解題歷程

Schoenfeld (1985) 強調數學解題的研究方向需要考慮四個變項：資源(resources)、捷思(heuristics)、控制(control)及信念系統(belief system)。此四個變項簡述如下：

1. 資源：指解題者擁有有關解題的相關數學知識，而這些數學

知識包含了數學的原理原則與運算程序等知識。

2. 捷思：用來解決非標準問題的策略和技巧，即有效率解題的主要法則。

3. 控制：則是著重在解題者解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標，即有關前兩項資源與策略的選擇與執行的決定。

4. 信念：指解題者對於自己、環境、主題及數學的觀點，而解題者擁有的數學觀將會影響其解題行為。

Schoenfeld 以控制因素的觀點，在解題歷程中，將解題歷程區分成六個階段：閱讀、分析、探索、計畫、驗證與遷移。他將解題歷程分為上述的六個階段，從原案分析可以看出解一道數學問題時，花多少時間在每一個階段上，以及階段之間轉移的情形(表 2-1)。

表 2- 1 Schoenfeld 之解題階段及相關問題表

(譯自 Schoenfeld, 1985, p.297-301)

階段	相關問題
一、讀題 (reading)	R1：觀察到問題的所有條件嗎？條件是顯著的？或是不清的？ R2：正確了解目標狀態嗎？目標狀態是顯著的？或是不清的？ R3：解題者是否能評估現有知識與問題的關係？

階段	相關問題
二、分析 (analysis)	A1：選擇什麼立場？選擇是顯著的或是不清的？ A2：選擇問題的條件來採取行動嗎？ A3：根據問題的目標來採取行動嗎？ A4：條件和目標有何相關？ A5：解題者的行動(A1-A4)合理嗎？
三、探索 (exploration)	E1：是經由問題的條件引起的？或目標引起的？ E2：所採行動有方向或重點嗎？行動有目的嗎？ E3：有無監視行為？監視行為的有無對解答的結果有何影響？ E4：解題者所採取的行動是否合理？
四、計畫-執行 (planning-implementation)	PI1：是否有計畫行為？ PI2：計畫與解題有關係嗎？是否適當？是否有良好結構？ PI3：學生是否評估計畫的相關性、適當性及架構性？ PI4：執行是否依計畫有系統的進行？ PI5：是否在整體或局部層次評估執行？ PI6：評估之有無對結果的影響如何？
五、驗證 (verification)	V1：解題者是否重新檢查解答？ V2：有無確認解答？如果有的話，如何證明？ V3：有無歷程及解答的評估？對結果的信心有多少？
六、遷移 (transition) 階段間的轉移情形	T1：對解題的當前狀態有無評估？若放棄一種解題途徑，是否企圖利用其中有用的部份？ T2：有無評估先前放棄的解題途徑，對解答產生的局部與整體影響如何？所採行動適當而必要嗎？ T3：是否評估採取新途徑？或直接跳入新的方法？ T4：採用新途徑後有無評估短程及長程影響如何？

Schoenfeld (1985) 提供研究者一種呈現解題例歷程的方法，稱解題歷程分析圖，被國內外者研究者使用，如下圖所示：

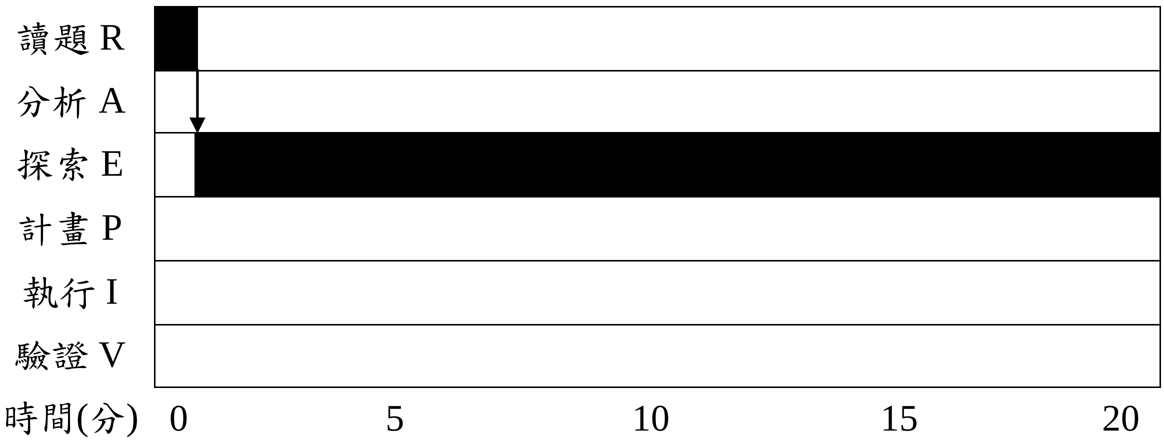


圖 2- 1　解題歷程分析圖

(譯自 Schoenfeld, 1985)

在圖中所顯示的解題歷程分析，為 Schoenfeld (1985) 所研究的原案在解題歷程上的分析。原案的參與者經過了讀題的階段後，便開始尋找答案與條件的關係，歷經十多分鐘的探索階段，最後無法找出其關係式，因此，在此一原案中參與者沒有產生答案。

綜觀上述三位學者提出的數學解題歷程可發現，Polya 與 Kilpatrick 提出的解題歷程相近，差別在於 Kilpatrick 對於四階段的解題歷程做更具體的說明。Schoenfeld 則將解題歷程細分成六個階段，若把 Schoenfeld 的解題歷程與 Polya 的解題歷程相互對應，會發現 Schoenfeld 的讀題與分析可以對應到 Polya 的了解問

題階段，Schoenfeld 的探索與計畫階段相當於 Polya 的擬訂計畫階段，Schoenfeld 的執行階段等同於 Polya 的執行計畫階段，Schoenfeld 的驗證階段則為 Polya 的驗算與回顧階段。再者 Schoenfeld 的解題歷程的理論模式與認知心理較為相關，且 Schoenfeld 的解題歷程模式較為仔細，所以為本研究採用的工具。總結上述所說，本研究經由探討、比較與歸納後，整理出下表供讀者參閱。

表 2- 2 數學解題歷程之相關研究比較表

<table>
<tr><th>理論提出者</th><th>階段一</th><th>階段二</th><th>階段三</th><th>階段四</th><th>階段五</th><th>階段六</th></tr>
<tr><td>Polya (1945)</td><td colspan="2">了解問題</td><td colspan="2">擬定計畫</td><td>執行
計畫</td><td>回顧</td></tr>
<tr><td>Kilpatrick
(1967)</td><td colspan="2">理解問題</td><td colspan="2">擬定計畫</td><td>執行
計畫</td><td>回顧</td></tr>
<tr><td>Schoenfeld
(1985)</td><td>讀題</td><td>分析</td><td>探索</td><td>計畫</td><td>執行</td><td>驗證</td></tr>
</table>

上述三位學者所提及的解題歷程均為單向，但在解題的過程中，時常會出現往返的解題歷程。Leung (2009) 以 Polya 的四階段解題歷程為基礎，提出解題歷程可以是雙向的。例如：當我們了解問題後進入計畫，在計畫完成後就可進入執行階段；若發現執行時缺少條件，亦可返回到計畫階段，甚至返回了解問題的階段。如下圖所示，順時針為一般的解題歷程，逆時針表示回朔各

個階段。

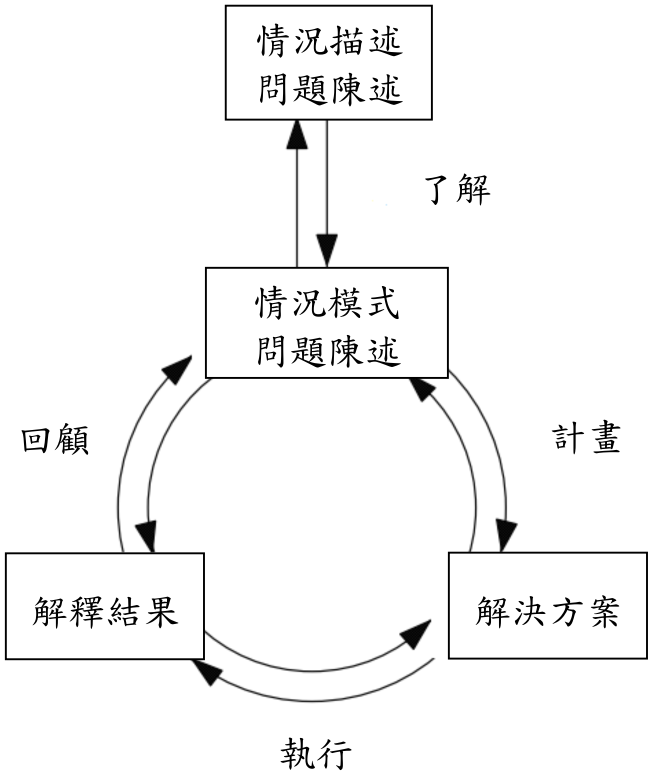


圖 2- 2　Leung 之解題基模大綱圖

（譯自 Leung, 2009, p.13）

本研究將採用 Schoenfeld (1985) 所提出的解題歷程分析圖，來分析並探討高中學生在不同表徵形式下的數學表現。並由 Leung (2009) 所提出的解題歷程架構定義「往返」一詞，即代表解題歷程中有階段與階段之間回朔的情形。

第二節 表徵形式的相關研究

表徵形式依據不同的層面有不同的解釋，其分類方法也不同，本節就表徵形式的意義、表徵形式的分類與不同表徵形式之間的差異來討論，分別敘述如下：

(一) 表徵形式的意義

「表徵」(representation) 是認知心理學研究領域中相當重要的概念，因為認知心理學研究的重點在探討人類如何將原始訊息經由表徵歷程的轉換後，將資訊儲存於記憶中，又如何於需要時取回使用（張春興，1988）。

由於每位學者所研究的觀點不同，因此對於「表徵」的定義也有所不同的見解。就問題解決的層次而論，好的表徵有助於問題解決，而不當的表徵則會妨礙問題的解決。因此問題表徵適當與否，將會影響數學問題的解題成功與否。

在心理學上，表徵指的是「將外在現實世界的事物以另一種較為抽象或符號化的形式來代表的歷程」或「訊息處理過程中，將訊息經編碼後，轉換成另一種型式，以便儲存或表達的歷程」（張春興，1988）。

在數學方面，Lesh、Post 與 Behr (1987) 以問題解決及溝通的觀

點，指出「表徵」是指心智過程模式化所使用的符號系統，如：實物情境、具體操作物、圖、書寫符號、口語符號，也就是學生心中的想法轉為外顯的外在表現。此外，Kaput (1987) 認為數學中的表徵主要為心智運作歷程及將心智活動的產物外在化。

綜上所述，表徵是指將心中的概念，用大家可以了解的方式呈現；亦即用另一種形式將事物或想法重新表現出來，具有溝通的功能。所以「表徵」除了是進行學習的重要媒介以外，更是個體在進行運思時的重要工具。在本研究中，表徵所代表的意義為傳遞題目的資訊，透過具體的形象經解題者對數學概念的了解，而進行訊息的轉化。

(二) 表徵形式的分類

Bruner (1966) 的認知發展中，認為兒童透過動作表徵、形象表徵及符號表徵等三種方式，兒童可以從過去的經驗提取保留下來的經驗模型，以認識當前的刺激或將當前的刺激收納至過去的經驗模型。其三種表徵模式簡述如下：

1. 動作表徵：只靠動作了解環境的刺激，以動作和操弄等方式來增加外在環境的認識，尤其當兒童很難藉由文字、語言與圖表進行表達時，通常需要藉由動作表徵為之。此外，教學者若能經由實際的操作活動，應能讓學生更清楚瞭解其教學內容。

2. 形象表徵：以記憶中的心向做為運思的材料，它是以經濟有效的方式管理知覺組織，將它有系統的納入過去經驗模型。例如：學生經由過去所學的一元二次方程式觀念套用在一元二次方程式圖形上，並且有系統的做取捨。

3. 符號表徵：以抽象的文字符號進行運思。例如：將未知數用x來取代運算中的未知元素。事實上，符號本身是一種人為的、抽象的、規約化的文化產物，若欲流暢的使用符號得必須先經過社會化學習。

從認知歷程的觀點中，Kaput (1987) 將數學中的表徵系統分為四類：

1. 認知與知覺的表徵 (cognitive and perceptual representation)：指個體大腦中將訊息儲存或轉換的型式，亦即為個體內在對於知識與訊息的表徵。
2. 解釋性表徵 (explanatory representation)：用以描述心理結構的模式，指自然語言或心像與其他數學符號間的聯結。
3. 數學內的表徵 (representation within mathematics)：指以數學的某一結構來呈現另一種結構特性的系統，亦即為不同數學結構之間的關聯。
4. 外在符號表徵 (external symbolic representation)：是用來表示

抽象的數學概念的物質型式，指以外在的符號物體來表徵數學概念的系統。

Kaput 表徵的分類中，前三類屬於心智活動，為「內在表徵」；第四類屬於「外在表徵」。心智活動主要是在個體腦海裡的心智運作。而外在表徵則是將心智活動，用不同的表徵方式表現出來，即指將問題的某些部份外在化，利用不同型式表現出來。

除了 Bruner 從運思的觀點及 Kaput 從認知歷程的觀點所提及的表徵，還有一些表徵形式可做為幫助數學思考的工具。Lesh、Post 和 Behr (1987) 用溝通的觀點描述了五種表徵的元素，包括實物情境 (real scripts)、具體操作物 (manipulative models)、圖 (static pictures)、書寫符號 (written symbols)、以及口語符號 (spoken language)。

Lesh 等人 (1987) 強調此表徵系統互動模式不僅五個元素都很重要，表徵之間的轉譯和同一個表徵內的轉化亦同等重要。換言之，不只是構成的五個元素為重要，元素與元素間的動態關係亦至為重要。解題者在其中一個表徵狀態下解題，若是不順利，就會轉譯成別的表徵下再次進行解題，直到順利完成。例如：解題者在書寫符號「$y=x^2$」時，也許會轉譯到圖，在這兩個表徵間往返，便產生意義，協助解題。

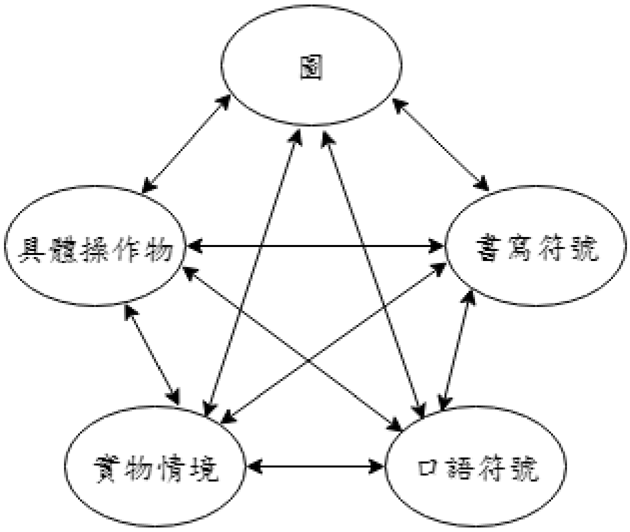


圖 2- 3　表徵系統互動模式圖（譯自 Lesh, 1987）

Moyer 等人 (1984) 則將數學問題的情境，運用圖畫式 (drawn)、文字式 (verbal) 和短語式 (telegraphic) 等三種表徵方式呈現。圖畫式問題是參照具體物繪製，以圖畫為主呈現問題的形式；文字式問題則類似應用問題的模式；短語式問題則是以文字式問題為基礎，但盡量減少冗長的文字敘述，以短語的方式呈現問題的主軸。可見同一道數學問題，能運用三種不同的方式來呈現。在本研究中，也運用了 Moyer 等人 (1984) 對數學問題的分類方法，本研究者將函數的數學問題分成圖文題與文字題，以兩種表徵方式來做解題歷程的探討。

上述各學者對表徵的看法在某些觀點上是有所不同的，Bruner 與 Kaput 認為表徵是個體內在的活動，所以當個體形成心像或符號，並不必然需要與他人溝通，而動作、圖像、與符號的表徵代表著運思的抽象程度；Lesh 所謂的表徵，以溝通為目的，運用不同表

徵之轉換能力作為判斷理解知識的證據；Moyer 則以數學問題的情境為主，去區分數學問題的面向，作為訊息轉化的依據。雖然四者的分類觀點不同，但是相同的地方為學習者必需從不同型式的表徵系統中獲得數學概念，更要能將同一數學概念在不同表徵之間自由轉譯，才表示完全理解數學概念。

(三) 不同表徵形式之間的差異

在數學的學習上，同一個數學知識或概念均可用多種不同的形式加以表徵。若能透過不同題目表徵型式的輔助，幫助學生理解問題描述，改善學生解題時的工作記憶負荷，對其解題表現將有所助益 (Chi, 1983)。由於本研究將探討圖文表徵與文字表徵對學生解題歷程的影響，因此就圖像表徵、文字表徵的差異做探討。

對概念學習而言，圖通常蘊含大量訊息與概念內容，另具描繪與事物有關的空間及視覺特性、整合與補充課文內容…等性質。換言之，圖像表徵為協助學生從教材中，快速了解及建構的有效工具。反觀，口語訊息則較難說明概念的整理架構，需用複雜與大量語法或文字方能詳盡說明。

對教學而言，雖然圖像表徵具有上述的優點，但使用之際需考量學生的認知負荷，以免使用不當造成干擾或誤導，加上目前許多教科書並非極力極度重視文本內圖像的呈現 (Schnotz & Bannert,

2003)。因此，圖像表徵的使用雖具提升教學成效的潛力，但若使用不當亦可能出現反效果。蔡興國、陳錦章和張惠博（2010）亦指出若學生對於抽象幾何概念的學習有困難，應鼓勵學生退回圖像表徵，充分瞭解情境之後，再進入抽象幾何概念。

然而，Clement、Lochhead & Monk (1981) 認為圖像表徵對於學生在形成有效的問題上是無助益的，甚至會造成學生概念抽象化的困難。因此，有學者 (Moyer et al., 1984) 認為圖像表徵在數學的學習上優點如下。

1. 減少與閱讀有關的工作記憶。

2. 幫助學生回憶類似記憶，建立適當的問題表徵。

3. 鼓勵學生投入理解題意。

4. 使不明的題意更明確，彌補文字資料的不足。

在文字符號表徵部份，Davis (1984) 提到數學概念的理解包括兩個部分，一個是能以多重的表方式徵來呈現某一個概念，一個是能夠以一套符號或系統來表徵數學的概念，並且能夠在不同表徵系統間作轉換。Brenner、Heaman 和 Zimmer (1999)認為表徵系統的轉譯方式分為兩類，一類在各個表徵系統之間的轉譯；另一類為在某一個表徵系統做轉化。其實，Davis 和 Brenner 等人的說法是一樣的，而這些內容包含了較多的訊息待處理，會增加解題者工作記憶

的負擔。

Collis (1975) 將學生對文字符號的理解分為「視文字符號為一個數字」、「視文字符號忽略不用」、「視文字符號為一個物件」、「視文字符號為一個特定的未知數」、「視文字符號為一般數」以及「視文字符號為一個變數」等六個類別。郭汾派、林光賢與林福來（1989）指出，文字符號在代數解方程式、應用題等題材上都需被使用，是重要的數學概念。

綜合這些文獻發現，學生對於文字符號會產生將文字符號當成未知數、某數或任意數的另有概念 (Clement, Lochhead & Monk, 1981)。若問題的陳述內容與學生的經驗有關係，將有助於訊息的提取，減少工作記憶負荷，幫助學生在文字題的解題表現。然而，若文字題的問題長度過長，包含了較多的訊息待處理，會增加解題者在工作記憶的負擔 (Barnett, 1979)，減慢解題速度或增強解題難度。

除此之外，Janvier (1987) 把表徵形式分成口語、表、圖及公式，並將各個表徵之間轉換的關係命名，如下表。

表 2- 3　表徵間轉化之命名表 (譯自 Janvier, 1987)

		目標表徵			
		口語	表	圖	公式
原始表徵	口語		測量	素描	建模
	表	閱讀		繪製	代入
	圖	詮釋	讀		曲線代入
	公式	察覺	計算	素描	

然而，個體讀取文字訊息時，必須從頭開始閱讀與搜尋相關資訊，然後儲存在記憶中，之後週而復始的搜尋下一個需要的資訊，直到解題所需要資訊都齊全為止。反之，在圖畫題中，通常找到第一個資訊，解題者就容易在鄰近的地方搜尋到其他的相關資訊了 (Larkin & Simon, 1987)。然而，Lesh 等人 (1987) 也發現表徵形式間的轉換有難度差別，也發現將圖片題轉譯成書寫符號，在認知上是最困難的。

在國內，郭汾派、林光賢與林福來（1989）修訂 CSMS 團隊所編製的試題進行本土的研究，研究指出，學生在文字符號單元容易出現錯誤。

而其他學位論文（吳曜溱，2009；林美惠，1997；林欣姿，2011；劉永政，2015；胡惠茹，2009；郭錦蓉，2012；蔡其霖，

2011；邱欣慧，2008）也呼應郭汾派等（1989）的發現。

綜合上述觀點，多位學者均肯定不同表徵方式在學生數學學習上的意義，學生若能適當地運用多樣化的表徵，不僅能夠增進數學概念的理解，並且可做為與他人溝通數學想法的媒介。此外，圖像表徵的使用雖具提升教學成效的潛力，但若使用不當亦可能出現反效果 (Clement, et al., 1981)。因此，在數學學習如果多提供學生運用表徵的機會，讓表徵成為數學思考能力的工具，對於學生數學概念的發展有很大的助益。

第三節 函數圖形的教材分析

（一）課程理念

由於本研究中的現行高中生採用的教材對照為 103 課程綱要，因此本研究就 103 數學課程綱要之課程目標進行討論。103 數學課程綱要之課程目標，強調普通高級中學的必修科目「數學」須培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力，意旨學習者在遇到問題時，能夠獨立的分析及思考問題，主動了解問題的癥結，並確切的解決問題。另外，學生須具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學認知與能力，學習者能透過將數學相關的能力，應用於具體的情境中，並在學習其他相關學科時能將數學融入其

中。再者，學生於學習的過程中，應能欣賞數學的內涵，並以簡馭繁的精神建構嚴謹完美的特質（教育部，2013)。

教育部普通高級中學必修科目「數學」課程綱要 (2013) 指出，學生所具備的核心能力包含演算能力、抽象化能力、推理能力、連結能力、解題能力、溝通能力、使用計算工具的能力，茲分別敘述如下：

1. 演算能力：能熟練多項式、分式、根式、指對數、三角的運算及估算。
2. 抽象化能力：能將具體世界中的概念以數學形式表徵。
3. 推理能力：能認識證明，並進行推論。
4. 連結能力：能整合數學內部知識並與具體世界連結。
5. 解題能力：能解決數學形式與生活情境中的數學問題。
6. 溝通能力：能正確、流暢地利用口語或文字表達解題想法。
7. 使用計算工具的能力：能使用計算器來處理繁瑣的計算與解決較複雜的問題。

綜合上述所提及 103 數學課程綱要的學習目標與核心能力，與 108 數學領域課程綱要所提出之基本理念和課程目標相符，均提及數學與生活情境的結合、培養學生欣賞數學中的特質、將數學的知識應用於相關領域，以及思考分析與解決問題的能力。

（二）函數圖形

函數圖形在數學中佔有相當重要的地位，在高中一年級階段，會用到多項式函數、指數函數和對數函數，來處理連續量相關的課議。另外，學生在學習函數時，會以描點的方式來進行函數圖形的建構，以建立函數與圖形的直觀連結。本研究中的函數圖形係指多項式函數圖形，銜接國中的一元一次方程式、一元二次方程式等相關概念。此外，在高一階段要了解函數的奇偶性質、極值的運算、判別式的活用，並強調圖形與函數的對應關係。

相關的「多項式函數圖形」單元學習，被安排在高中一年級課程中，詳細的課程架構表，如下：

表 2-4　高中一年級上學期課程架構表

主題	子題	內容	備註
一、數與式	1. 數與數線	1.1 數線上的有理點及其十進位表示法	
		1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係	1.2 不含非十進位的表示法
		1.3 乘法公式、分式與根式的運算	
	2. 數線上的幾何	2.1 數線上的兩點距離與分點公式	
		2.2 含絕對值的一次方程式與不等式	

主題	子題	內容	備註
二、多項式函數	1. 簡單多項式函數及其圖形	1.1一次函數 1.2二次函數 1.3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移	1.3 僅介紹 4 次（含）以下的單項函數
	2. 多項式的運算與應用	2.1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用、插值多項式函數及其應用	2.1 不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次
	3. 多項式方程式	3.1 二次方程式的根與複數系 3.2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$的意義 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理	3.1 不含複數的幾何意涵
	4. 多項式函數的圖形與多項式不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含複雜的分式不等式
三、指數、對數函數	1. 指數	1.1 指數為整數、分數與實數的指數定律	
	2. 指數函數	2.1 介紹指數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性）	
	3. 對數	3.1 對數的定義與對數定律 3.2 換底公式	3.2 換底公式不宜牽涉太過技巧性與不實用的問題
	4. 對數函數	4.1 介紹對數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性）	
	5. 指數與對數的應用	5.1 對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號 5.2 處理乘除與次方問題 5.3 等比數列與等比級數 5.4 由生活中所引發的指數、對	5.1 不含表尾差

主題	子題	內容	備註
		數方程式與不等式的應用問題	1. 不含等比數列、級數之定義，但在斟酌流暢度的考量下，可以包含等比應用問題
附錄	認識定理的敘述與證明	介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法（含$\sqrt{2}$為無理數的證明）	

在國中的課程內容中，第二冊第二章「直角坐標平面與二元一次方程式的圖形」，首先建構學生直角坐標平面的概念，再接續讓學生學習於坐標平面上描繪出二元一次方程式的圖形。以及在國中的課程內容中，第六冊第一章「二次函數」，延續函數圖形的概念，介紹一元二次方程式的性質，並與圖形特徵做連結。高中的課程內容，在第一冊第二章「多項式函數」中，以國中的一元二次方程式為基礎，先介紹函數的特性，再將國三的一元二次方程式引入高一的多項式函數，並延伸介紹多項式函數的各項性質。

透過上述之國中與高中的課程內容，在函數的學習上，課綱的設計是符合 Bruner 所提出的螺旋式課程設計，由具體到抽象、由簡單至複雜循序漸進的方式，對學生而言有不斷重複學習的機會。

近年來，國內外學者也對多項式函數提出相關研究，

張令偉（2007）整理出多項式函數包括了代數推理與數形結合，也

就是說多項式函數不應只是運算，學生也要了解函數圖形的概念，才能將多項式函數的概念融會貫通。目前而言，解多項式函數的策略有很多面向，羅迎新（2006）將多項式函數的解題策略進行分類，分為分段討論法、常數變數互換法、導數求值法、因式分解法、數形結合法與函數圖像法，在解題中若能轉換解題策略，在驗證答案時也會多一點證據。

了解學生的解題策略後，學生在多項式函數也會有幾種錯誤的類型，梁淑坤（1996）將多項式函數的錯誤類型整理，分成誤用資料、誤釋語句、不合邏輯的推論、歪曲定理或定義、未驗證答案及技術上的錯誤，從學生的錯誤類型中，得知學生可能會誤會語句的表達，且扭曲定理並做出不合理的推論。

因此，本研究探討文字題與圖文題在解題歷程的差異性，加上符合題意的圖形可否降低學生錯誤的推論，探討學生在不同表徵下的解題歷程是本研究目的。

此外，Tyler (1950) 提到制定課程時，需確認起點行為，也就是挑選能引起注意的前導知識，並組織與目標課程相關的網絡，以及循序漸進來設計往後的課程，來幫助學生的學習。本研究引據 Tyler (1950) 的課程地圖，針對函數圖形提出課程架構圖如下：

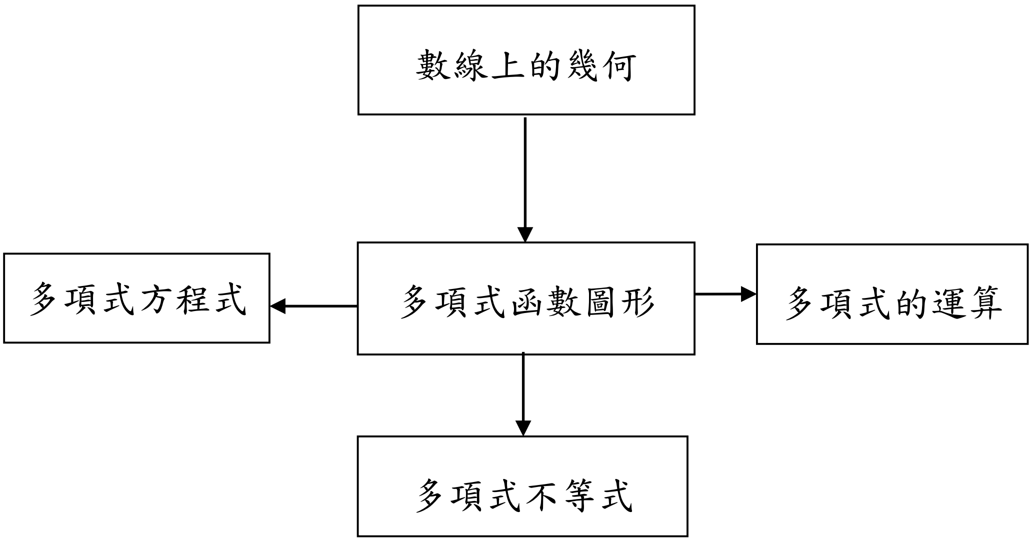


圖 2- 4　函數圖形課程地圖

第參章 研究方法

本研究主要探討學生在解決線性規劃問題之解題歷程，本章共分為 4 節，分別為研究對象、研究工具、資料蒐集與分析、預試資料分析，詳述如下。

第一節 研究對象

1. 預試研究對象

在本研究的預試中，以高二學生進行預試，故先以便利取樣選取高雄市某高中二年級學生 2 位進行預試，參與者化名為小元和小安。

2. 正式研究對象

在本研究中的正式施測，以便利取樣的方式，選取屏東市某高中二年級的 4 位學生。這 4 位學生皆來自屏東市某高中的同一個班級，這一班級都是學校成績排名較前的學生。在學生數學解題的能力上，這 4 位學生在都能展現較好的表現，此外，這 4 位學生在口語達上也能展現良好的能力。

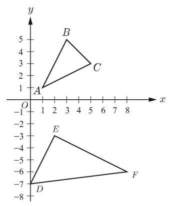
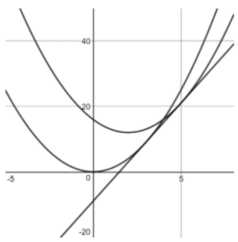
第二節 研究工具

本研究使用的工具為預試試題、放聲思考試題、紀錄放聲思考之器材、Schoenfeld 解題歷程分析圖、研究者本身，共5個，茲分別敘述如下：

1. 預試試題

本研究參考龍騰版（2017 年）數學課本，並從大考中心公布的學科能力測驗試題中挑選適合的多項式函數試題，共 2 題。研究者將此二題分別命名為斜率題、交點題。從兩題試題中，再經研究者的設計，將選取出的題目加上與題意相同的圖形，產生文字題 2 題與圖文題 2 題，題目如表 3-1。經由 3 位具備數學相關背景的研究生和 1 位指導教授，修改題目語句敘述後，進行預試。

表 3- 1　斜率題、交點題及圖文題、文字題交叉試題表

	圖文題	文字題
斜率題	設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？ 	設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？
交點題	坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a, b)為何？ 	坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a, b)為何？

預試時，每位學生會拿到 1 題圖文題與 1 題文字題，所拿到的題本試題文意相同但對應到的表徵形式不同，題本分配如表 3-2。

表 3- 2　不同表徵題本分配表

	斜率題	交點題
文字題	(學生 1)	(學生 2)
圖文題	(學生 2)	(學生 1)

除此之外，研究者在施測前亦給予 2 道練習題，即是簡單的一元二次方程式之問題，讓參與者進行放聲思考的訓練，同時讓研究者熟悉訪談的技巧。放聲思考之題目，挑選標準如下：

(1) 題目合乎邏輯且語意清晰

(2) 題目不會過於艱深

(3) 需要兩個或兩個步驟以上才能完成

2. 放聲思考試題（正式施測試題）

預試後，根據學生預試的作答反應，與 3 位研究生及 1 位教授討論後再次修改題目語句與配圖，編製成正式施測的試題。晤談之前亦事先給予放聲思考的訓練，也就是給予兩道練習題，即是簡單的一元二次方程式之問題，讓研究者能讓參與者清楚有聲解題的操作，以確保資料的準確性。

3. 紀錄放聲思考之器材

欲詳細記錄參與者完整的解題歷程，晤談過程中全程以錄音筆錄音，以便研究者將錄音檔轉譯成逐字稿，並做事後的分析與探討。

4. Schoenfeld 解題歷程分析圖

本研究參考 Schoenfeld (1985) 的解題歷程分析，將解題歷程的階段分為讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證共6個階段，用以分析蒐集之資料。

Schoenfeld (1985) 提供研究者一種呈現解題例歷程的方法，稱解題歷程分析圖，被國內外者研究者使用，如下圖所示：

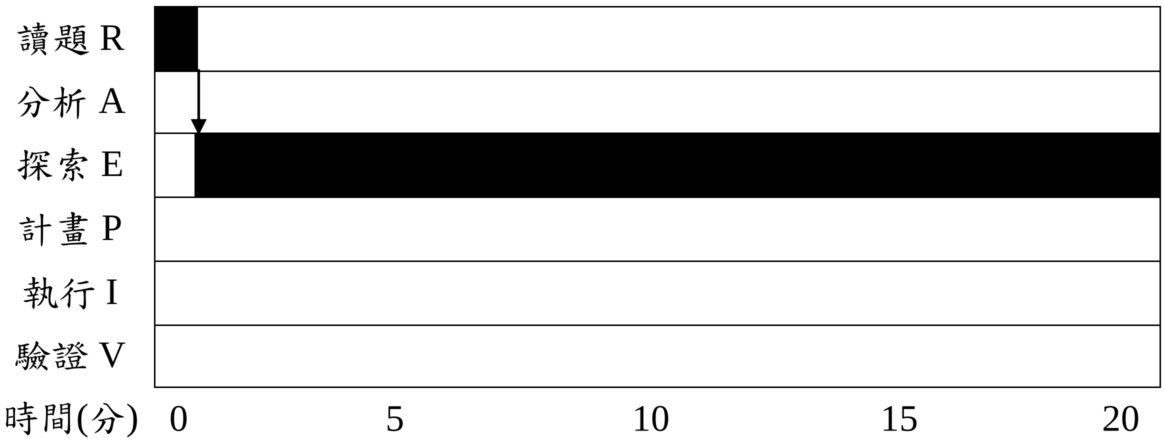


圖 3- 1　解題歷程分析的時間架構圖 (譯自 Schoenfeld, 1985)

圖 3-1 中每一階段中的大塊黑色長方形為參與者的歷程，黑色長方形的長度為解題階段花費的時間。當時間正向推進時，兩個黑色長方形間的箭頭連線，代表解題進行中的程序。以上圖為

例，此一歷程花費約一分鐘在「讀題」階段，一分鐘之後開始進行「探索」階段，並花了十多分鐘的時間進行探索，然後停下來不再進行解題。

5. 研究者本身

在質性研究中，研究者本身即是研究工具。研究者本身大學的背景為應用數學系，在大學期間修習代數及相關領域的數學知識。研究所研讀教育領域之數學教育，並已修滿研究所學分，已修習的課程中包含了解題研究、認知與數學學習研究、數學教學知識等，修習的課程對此研究幫助許多，不僅加強研究者的數學解題研究方面，也練習分析報告的寫作，還增加分析的邏輯思維。研究者亦有修習教育學程，在教育學程中也學習了許多教學技巧，這些課程能增加研究者在訪談時的技巧。同時研究者也研讀高中領域的相關課程，更能了解學生們在解題時會遇到的問題，在後續分析時，也能更清楚的明白學生的解題歷程。

第三節 資料收集與分析

本研究主要以放聲思考的方式進行資料的蒐集，並轉為逐字稿來進行分析。進行正式預試之前，為了讓參與者可以完整的表達內心的想法，嘗試以話語來敘述解題流程，研究者將先對參與者進行

兩道數學問題的放聲思考解題訓練，讓參與者能熟悉放聲思考解題，並從中獲取參與者的真實想法。

為了避免學生在有聲解題的過程中，未即時將心中的想法表達出來，在不影響資料蒐集的完整性下，研究者會立即從旁提醒參與者用話語表達，但研究者不會給予關於題目的任何提示，僅以「請大聲一點表達心中的想法」來告知參與者進行測驗。

參考 Schoenfeld (1985) 的解題歷程分析，將解題歷程階段分為讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證共 6 個階段。並依據原案資料當中學生的解題過程，歸納出學生在函數問題中的解題策略。

為了提高本研究的信度，本研究採用三角驗證 (investigator triangulation)，並邀請 3 位皆修習過解題研究的研究生，共同參與編碼並核對，以增加本研究解題歷程分析階段的信度。在預試的分析中，研究者與研究生出現不一致的編碼，經多方討論與查驗文獻，最後，與 3 位研究生及 1 位教授討論與修正後沒有不一致才進行分析。正式施測的編碼一致，不用進行修改。至於分析方面，本研究定義出學生解題過程中每個步驟分別對應到 Schoenfeld 各階段的歷程，此函數圖形之解題歷程各階段定義對照表如表 3-3。

表 3- 3　函數圖形之解題歷程各階段定義對照表

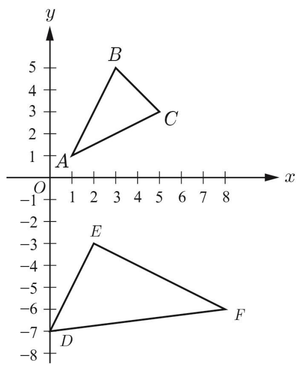
編號	學生解題過程	Schoenfeld 的解題歷程階段
1	閱讀題目	讀題
2	列出條件式	分析
3	根據題意畫圖	分析
4	辨別條件與解的關係	探索
5	評估函數圖形的對應關係	計畫
6	解方程式	執行
7	簡化數學式	執行
8	重述方程組的解並代入	驗證

第四節　預試資料分析

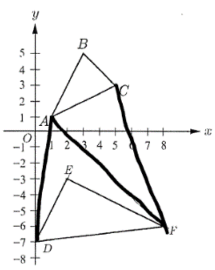
本研究者對高雄市某高中二年級小元和小安進行原案分析，並參考 Schoenfeld (1985) 提出來的數學解題歷程，把參與者之解題歷程分為六個階段，分別為讀題 (R)、分析 (A)、探索 (E)、計畫 (P)、執行 (I)、驗證 (V)，分別詳述如下。

(一) 小元：斜率圖文題、交點文字題

1. 斜率圖文題：事有蹊蹺 ☺

設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線L分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則L的斜率之最小可能值為何？ 

首先，小元率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：19 秒），就開始下一步動作。小元認為L的斜率之最小可能值，應該是最平緩（分析 A：25 秒）。因此，小元從圖中，判斷出直線L恰與兩三角形各交於一點的情況，只會出現在直線L分別通過兩三角形的其中一個頂點（探索 E1：36 秒）。



接著，小元便在圖上繪出可能的狀況，透過三角形的頂點連線來確定交點的數量，小元也發現了不是所有的頂點連線都剛好可以

滿足題目的條件(計畫 P1：59 秒)。

整理出題目的條件後，小元便開始計算兩點連線的斜率(執行 I1：40 秒)。

A(1,1)

F(8,-6)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-6-1}{8-1}=\frac{-7}{7}=-1$$

在計算完其連線斜率後，小元有一個突破性的發現：

小元：最小可能值好像還有可能是另外一個，因為最小可能值，如果絕對值越大加上負號的話結果就會越小。

此一發現讓小元有新的想法，L 的斜率之最小可能值是負數，所以其值的絕對值越大所得出的負數越小(探索 E2：13 秒)。小元立即從圖中選取符合需求的兩點連線(計畫 P2：13 秒)。並計算其斜率值(執行 I2：20 秒)。

C(5,3)

F(8,-6)

$$\frac{-6-3}{8-5}=\frac{-9}{3}=-3$$

小元將新的結果「-3」與前一答案「-1」相比，確實有比上一次算的小。除此之外，小元再一次去確認圖中兩點連線的斜率值是否還有其最小的可能性(驗證 V：18 秒)，經確認後得出其答案。

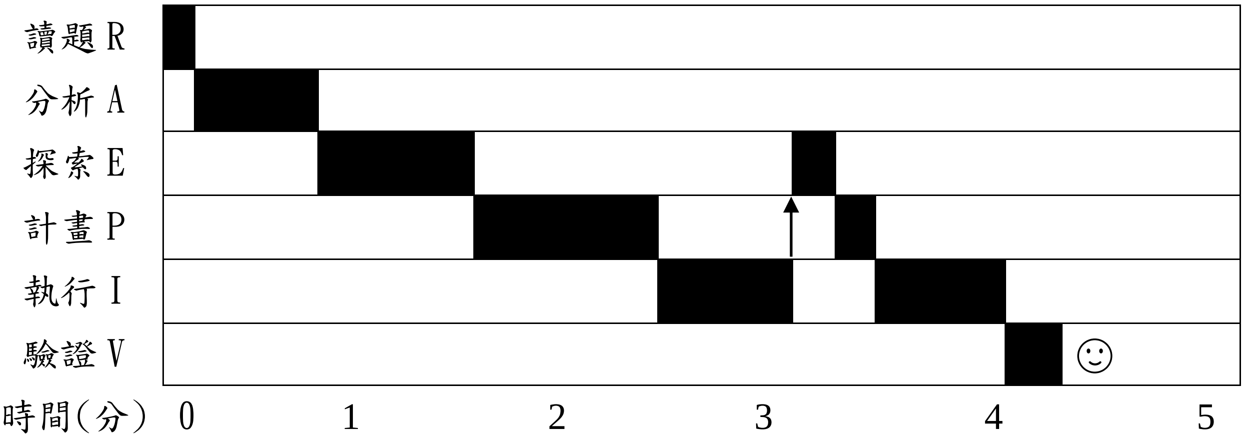


圖 3-2　小元的斜率圖文題之解題歷程分析圖

2. 交點文字題：錯誤判斷 ☹

> 坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x-2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？

小元率先進行讀題，先將題目念過一遍後(讀題 R：17 秒)，就開始下一步動作。小元看到題目的條件，題目需要求交點，小元便把條件列出來(分析 A1：20 秒)。

$y = ax+b$
$y = x^2$
$y = (x-2)^2+12$

接著，小元認為 $y = ax + b$ 和 $y = x^2$ 恰交於一點，以及 $y = ax + b$ 和 $y = (x-2)^2 + 12$ 也恰交於一點，因此，這三個方程式必會交於一點(探索 E：53 秒)。

$ax+b = x^2$
$ax+b = (x-2)^2+12$

經過運算與化簡後，最後得出 $x=4$ 和 $y=16$（執行 I1：77 秒），小元嘗試著將 $x=4$ 和 $y=16$ 代回 $y=ax+b$ ，卻發現無效。小元重新檢視題目與作圖（分析 A2：29 秒），並著手下一個步驟。

小元認為直線 $y=ax+b$ 與兩拋物線恰有一交點的情形，只會發生在拋物線的頂點（計畫 P：18 秒）。

小元：一函數通過原點，一函數通過 (2,12) ，恰交於一點的話，他們倆個都是二次函數，代表要交於一點的話，他只會交在頂點上面。

接著，小元便將 (0,0) 和 (2,12) 代入直線 $y=ax+b$（執行 I2：33 秒），最後得出答案。

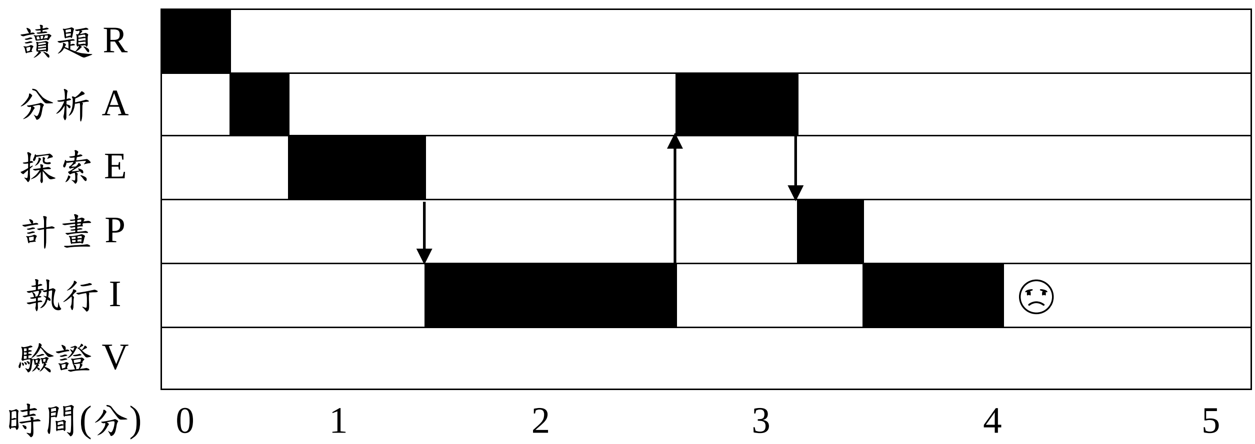


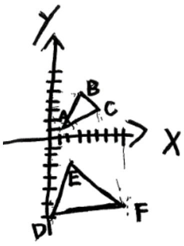
圖 3-3　小元的交點文字題之解題歷程分析圖

(二) 小安：斜率文字題、交點圖文題

1. 斜率文字題：粗枝大葉 ☹

設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線L分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則L的斜率之最小可能值為何？

首先，小安率先進行讀題，先將題目念過一遍後(讀題 R1：30 秒)，就開始下一步動作。小安就直接進行作圖的步驟(分析 A1：87 秒)。作完圖的小安，似乎忘了題目的條件，又重新閱讀了題目(讀題 R2：16 秒)。



接著，小安嘗試在空中比劃斜率的走向(分析 A2：23 秒)。然而，小安不確定題目給出的條件，又回去讀了一次題目(讀題 R3：25 秒)。小安再次在空中比劃斜率的走向，小安認為負斜率才可能是最小值，而且直線越平緩斜率越小(分析 A3：24 秒)。

小安：負的斜率的最小值(用手在空中比劃)，越平緩斜率越小。

小安從圖中找出滿足剛剛的分析結果：直線越平緩斜率越小，就是 A 和 F 的連線線段，並計算 AF 連線線段的斜率(執行 I：36

秒)。為了驗證答案就是 AF 連線線段的斜率，小安還去計算了 AD 連線線段的斜率，發現 AD 連線線段的斜率為正數，所以 AF 連線線段的斜率即為最小值(驗證 V：36 秒)。

A(01.1) D(0.-7)

$\frac{-7-1}{0-1}=8=(X)$

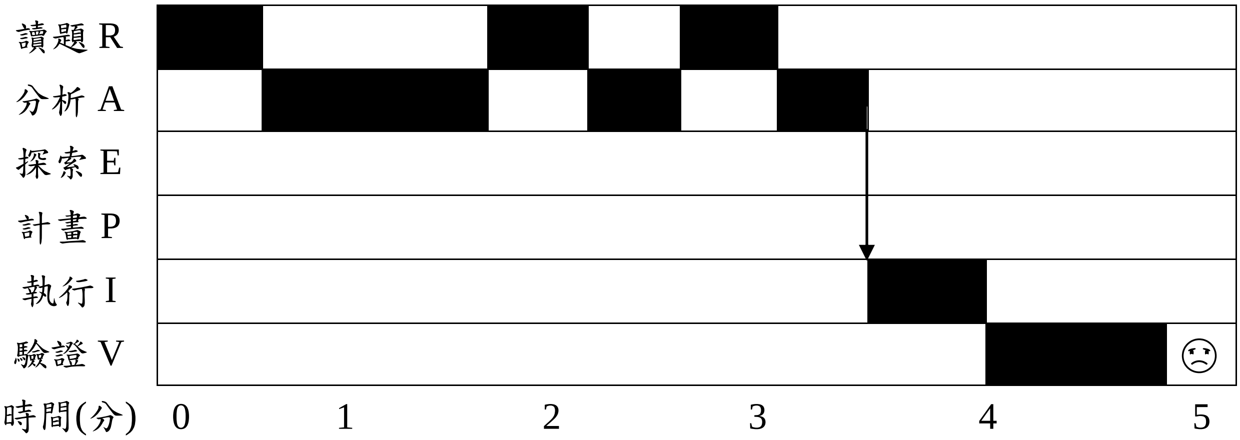
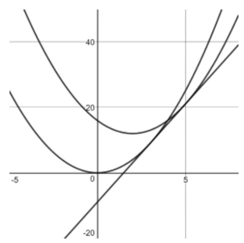


圖 3-4　小安的斜率文字題之解題歷程分析圖

2. 交點圖文題：一意孤行 ☹

坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



小安率先進行讀題，先將題目念過一遍後(讀題 R1：31 秒)，就

開始下一步動作。接著，小安在圖上標記題目的資訊(分析 A1：59 秒)，然而，小安對題目給出的條件「恰交於一點」感到疑惑。

小安：恰交於一點，所以是三條都交於一點？不對。

小安便陷入一片沉默，並一直重複的讀題(讀題 R2：136 秒)。小安突然跳脫迴圈，提出解聯立方程的想法，把 $y=x^2$ 和 $y=ax+b$ 解聯立方程式，及 $y=(x-2)^2+12$ 和 $y=ax+b$ 解聯立方程式(分析 A2：68 秒)。

$$\begin{cases} y=x^2 & -① \\ y=ax+b & -② \end{cases} \qquad \begin{cases} y=(x-2)^2+12 & -① \\ y=ax+b & -② \end{cases}$$

由① $y=x^2$ 代入 $=ax+b$ 　　　由① 代入 ②

小安經過一番的整理與化簡，最後得出了 $x=4$ 和 $y=16$，此時，小安將點 $(4,16)$ 代入 $y=ax+b$ 中，得出 $16=4a+b$ 一式。接著小安面對這樣的結果採取了暴力破解法(執行 I：306 秒)，最後得出了答案為 $(8,-16)$。

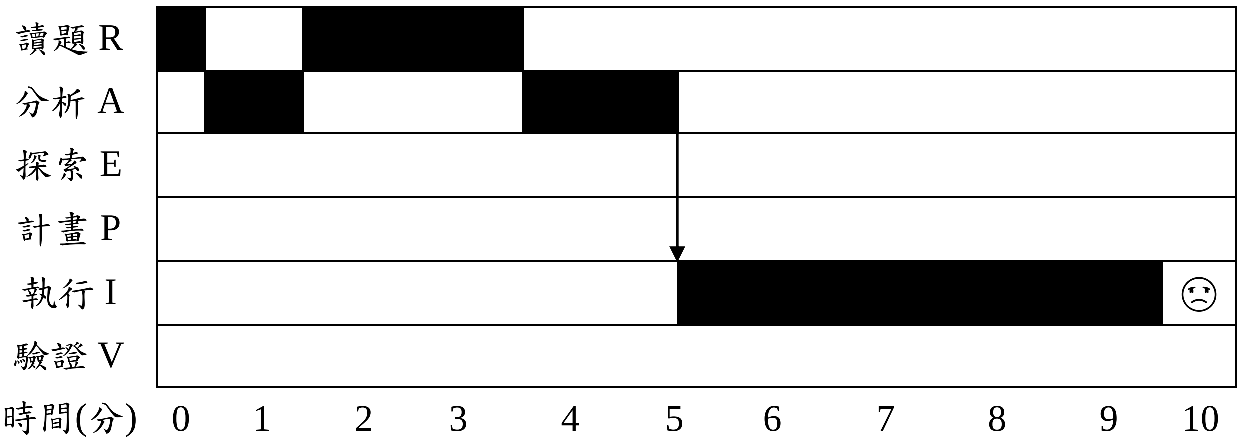


圖 3- 5　小安的交點圖文題之解題歷程分析圖

（三）綜合討論與比較

本研究主要分析圖文題與文字題的差異，所篩選出題目的類型相關性較低，第一題為斜率題、第二題為交點題，兩道題目要求解題者的解題技巧上也有很大的差異，故不討論題目順序對解題歷程的影響。

另外，由於以上兩道題是本研究者從大考中心篩選出，經大考中心的統計整理中得知，斜率題全體學生的答對率為 39%，高分組學生的答對率為 71%；交點題全體學生的答對率為 15%，高分組學生的答對率為 42%。由此可知，交點題的難度高於斜率題。在本研究中，從 Schoenfeld 解題歷程也能看出相對應的結果，也就是說，交點題比較難，然而解題歷程也比較複雜。

研究者分別對斜率圖文題和斜率文字題以及交點圖文題和交點文字題做分析，結果得知斜率圖文題、斜率文字題、交點圖文題、交點文字題，4 題分別歷時 243 秒、292 秒、600 秒、247 秒，發現交點圖文題所花費時間與本研究的假設不同，本研究假設的觀點為圖文題的解題時間會少於文字題，預試後的結果發現交點圖文題所花費的時間遠高於交點文字題。另外，只有參與者小元的斜率圖文題答案是正確的，其餘的斜率文字題、交點圖文題、交點文字題答案皆是錯誤的。

在時間上，斜率圖文題花費最多的時間為計畫階段 59+13 共 72 秒，其次為執行階段 40+20 共 60 秒。斜率文字題花費最多時間為分析階段 87+23+24 共 134 秒，其次為讀題階段 30+16+25 共 71 秒。交點圖文題時間花費最多的為執行階段共 306 秒，其次為讀題階段 31+136 共 167 秒。交點文字題時間花費最多的為執行階段 77+33 共 110 秒，其次為分析階段 20+29 共 49 秒。

本研究認為，第一題斜率題較為單純，題目架構簡單明瞭。從斜率圖文題中可以看出，參與者小元花費許多時間在分析與計畫的階段，並在執行完後，透過圖形的資訊能夠有更好的驗證方法。然而，從斜率文字題中可以看出，參與者小安花費了許多時間在讀題與分析上，研究者從旁觀察發現，小安時常檢視題目中的敘述，又因為不準確的手繪作圖，造成小安判別上的錯誤。

由於題目篩選的關係，交點題的難度較高，其解題歷程也較繁瑣，因此，這一題答對率相當地低。從交點圖文題可以看出，參與者小安花費許多時間在執行階段，研究者從旁觀察發現，小安在做困難的題目時，分析階段的時間相對執行階段少。反之，從交點文字題可以看出，參與者小元花費許多時間也是在執行階段。面對困難的題目，小元和小安皆直接根據先備知識來執行，較少將時間花費在分析的階段上，才導致失敗的解題。

綜觀上述所說，本研究認為在 Schoenfeld 解題歷程中，影響函數圖形問題解題的 3 個關鍵階段分別為讀題階段、分析階段與執行階段，茲分別敘述如下：

1. 讀題階段

從以上 4 題的解題歷程階段圖得知，讀題階段在整個解題歷程中扮演重要的角色，讀題所花費的時間越長，後續執行的階段所花費的時間則越少。學者 Chi (1983) 提到，若能透過不同題目表徵型式的輔助，幫助學生理解問題描述，改善學生解題時的工作記憶負荷，對其解題表現將有所助益。

2. 分析階段

在分析階段，學生必須要掌握圖的具體意象，以及了解題目條件的需求，方可進入探索階段。斜率文字題的部分，由於參與者小安在不準確的手繪圖形中，犯下判別的失誤。在此也呼應 Lesh 等人 (1987) 提到不同的表徵間的轉譯難度不同，尤其是圖像表徵轉換為符號表徵，便會影響解題的成功與否及解題歷程。

3. 執行階段

解決函數圖形問題的過程中，執行階段包含了解聯立方程組、熟悉判別式的運用以及解一元二次方程式，這些都牽涉到

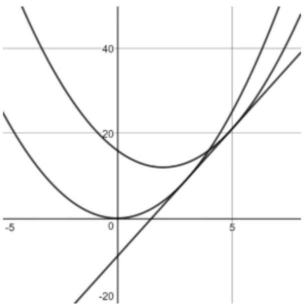
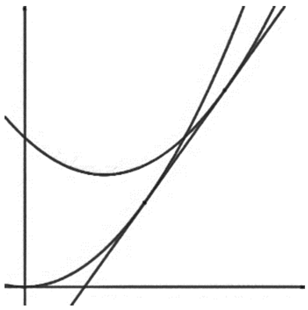
解題者本身過去所培養的計算能力。羅迎新（2006）認為在解題中若能轉換解題策略，對解題者的解題方式將有所助益。

本研究於預試階段，目的在了解試題的語句敘述是否清楚明瞭、條件是否完整，以及是否有未設想到的外在因素存在，故只將預試資料進行初步的解題歷程分析。

(四) 試題修正

經預試後，斜率圖文題、斜率文字題與交點文字題無需做修正，參與者能迅速清楚了解題意。但交點圖文題於預試階段中，參與者無法從圖示當中明確的辨認出其所代表的方程式，以及兩拋物線與直線的交點為何，導致圖形判斷的偏差。故研究者與 3 位研究生及 1 位教授共同討論之後，決定將交點圖文題中的圖示做修改，並標記題目文字敘述中的恰交與一點的情形。修改後試題如下（見表 3-4 的比較表）：

表 3- 4　試題修正之前後比較表

<table>
<tr><td colspan="3">坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=\left(x-2\right)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？</td></tr>
<tr><td>原始題目之圖形</td><td>修改後之圖形</td><td>修改內容</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>因原圖形造成參與者的判斷困難，所以僅將圖形做修改並未修改文字內容，並將題目文字敘述中的恰交與一點的情形標記在圖形上。</td></tr>
</table>

第肆章 研究結果

本研究以屏東市某高中二年級的學生為研究對象，採便利取樣選取 4 位男學生化名為：

S12（斜率文字題 G1，交點圖文題 I2）

S21（斜率圖文題 G2，交點文字題 I1）

S11（斜率文字題 G1，交點文字題 I1）

S22（斜率圖文題 G2，交點圖文題 I2）

學生化名的依據為 Student 的首位英文文字 S，序號為其拿到題目表徵的編號，研究者將文字題編碼為 1、圖文題則編碼為 2，故第一位男學生為 S12 也就代表第一題的表徵是文字題、第二題的表徵是圖文題。此外，研究者將斜率題 Gradient 取其首位英文文字 G 作為編碼，以及將交點題 Intersect 取其首位英文文字 I 作為編碼。

題目所對應的表徵類型的分配為隨機抽選，並以放聲思考與事後晤談蒐集資料並撰寫逐字稿。本章輔以正式施測試題逐字稿（附錄五）、正式施測試題計算過程（附錄六），針對 S12、S21、S11、S22 之解題歷程進行分析。

本章研究結果與發現共分為 2 節，第一節為函數圖形解題歷程分析；第二節為兩種表徵間解題歷程的差異。

第一節 函數圖形解題歷程分析

本節採用 Schoenfeld (1985) 的解題歷程，針對參與者 S12、S21、S11、S22 的解題歷程進行探討與並分析。由於每個人在不同的題目間都有其解題特色，故分別賦予形容詞說明 4 位學生在不同題目的解題歷程，茲分述如下：

S12

斜率文字題 G1：一蹴而就；交點圖文題 I2：突發奇想卻失敗。

S21

斜率圖文題 G2：事以密成；交點文字題 I1：一意孤行。

S11

斜率文字題 G1：敏銳且成功；交點文字題 I1：靈光乍現。

S22

斜率圖文題 G2：迎刃而解；交點圖文題 I2：大意失荊州。

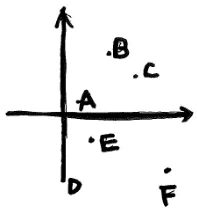
(一) S12：斜率文字題 G1、交點圖文題 I2

1. 斜率文字題 G1：一蹴而就

設 $A(1,1),B(3,5),C(5,3),D(0,-7),E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？

S12 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：29 秒），就

開始下一步動作。S12 選擇先作圖，並將點依序標至坐標平面中（分析 A：41 秒）。



緊接著，S12 判斷 L 斜率的最小值是通過 C 和 F（計畫 P：11 秒），並著手進行計算。將 C 和 F 的坐標代入斜率公式中（執行 I：23 秒），最後得出 L 斜率的最小值為 -3。

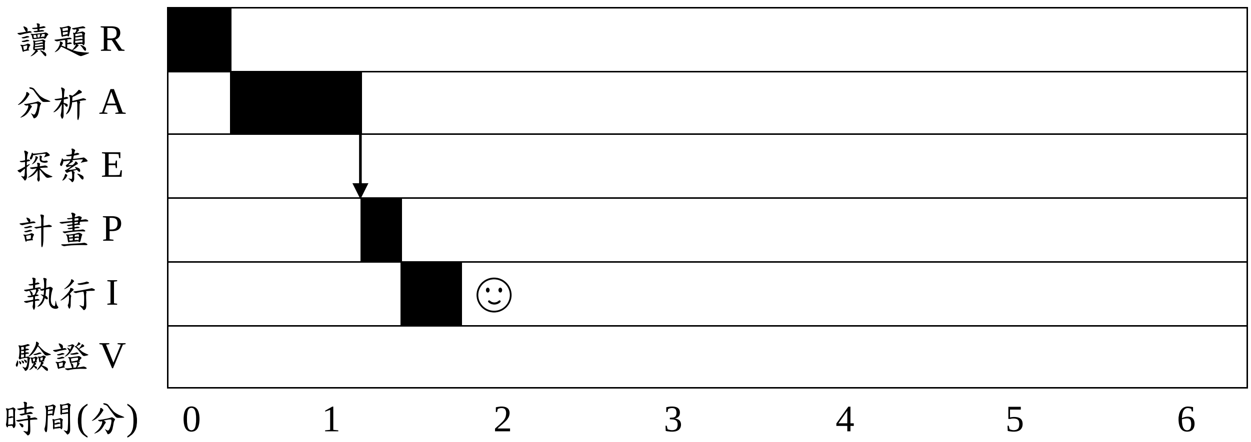
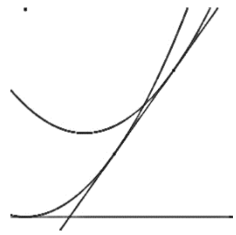


圖 4- 1　S12 的斜率文字題 G1 之解題歷程分析圖

2. 交點圖文題：突發奇想卻失敗

> 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？
>
> 

S12 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R1：35 秒），就開始下一步執行動作。S12 不管題目的條件如何，直接進行運算，並將 $y=x^2$ 代入 $y=(x-2)^2+12$，得出 $x=4$ 和 $y=16$（執行 I1：140 秒）。此時，S12 將點 (4,16) 標至圖中，但對解題進度沒有明顯的進展。

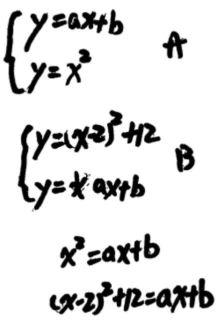
$$x^2=(x-2)^2+12$$
$$x^2=x^2-4x+4+12$$
$$-4x+16=0$$
$$\underline{x=4}$$

這時候，S12 突發奇想，把 $y=x^2$ 代入 $y=ax+b$，得 $x^2-ax-b=0$ 一式（執行 I2：71 秒）。此時，S12 又陷入一片沉思。突然間，S12 再去讀了題目，且反覆的讀了又讀（讀題 R2：58 秒）。

S12： $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數

$y=(x-2)^2+12$ 恰交於一點。都恰交於一點…

S12 經過讀題後，似乎有些許的靈感，便假設兩拋物線與 $y=ax+b$ 分別交於兩點 A、B，A 點為 $y=x^2$ 和 $y=ax+b$ 解聯立方程式，B 點為 $y=(x-2)^2+12$ 和 $y=ax+b$ 解聯立方程式（分析 A：47 秒）。經整理後，S12 面對著三個未知數，仍舊束手無策，最終放棄回答這一題。



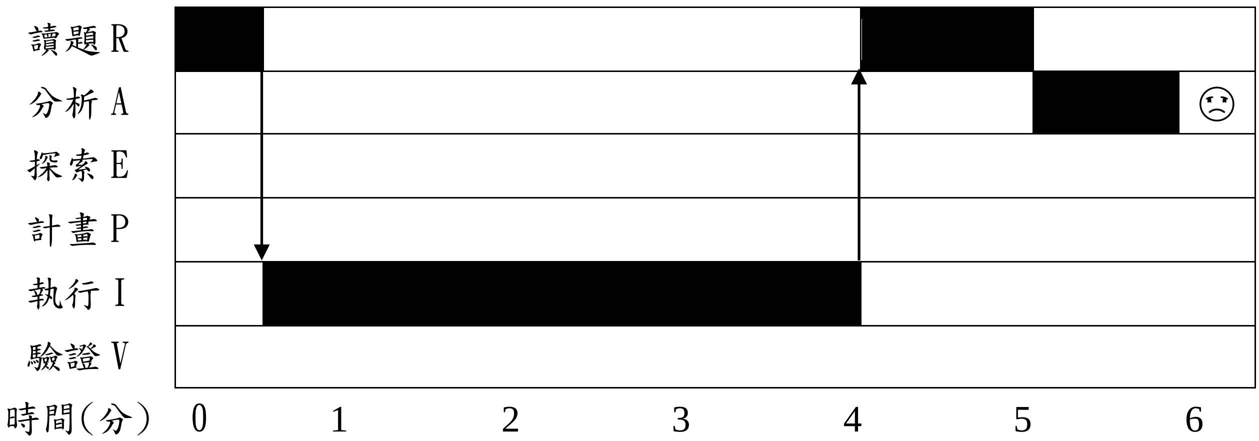
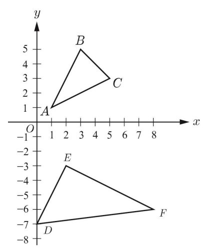


圖 4-2　S12 的交點圖文題 I2 之解題歷程分析圖

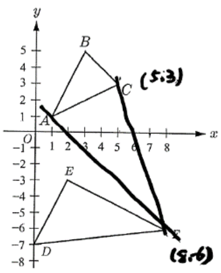
(二) S21：斜率圖文題 G2、交點文字題 I1

1. 斜率圖文題 G2：事以密成

設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



S21 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：19 秒），就開始下一步動作。S21 從圖形中，判斷出直線 L 恰與兩三角形各交於一點的情況，只會出現在直線 L 分別通過兩三角形的其中一個頂點（探索 E：54 秒）。接著，S21 便在圖上繪出可能的狀況，透過三角形的頂點連線來確定交點的數量（計畫 P：10 秒）。



S21 由斜率的性質知道，CF 線段的斜率會是最小值。把 C 和 F 座標列出來後，用斜率的定義將之算出（執行 I：53 秒)，得出答案。

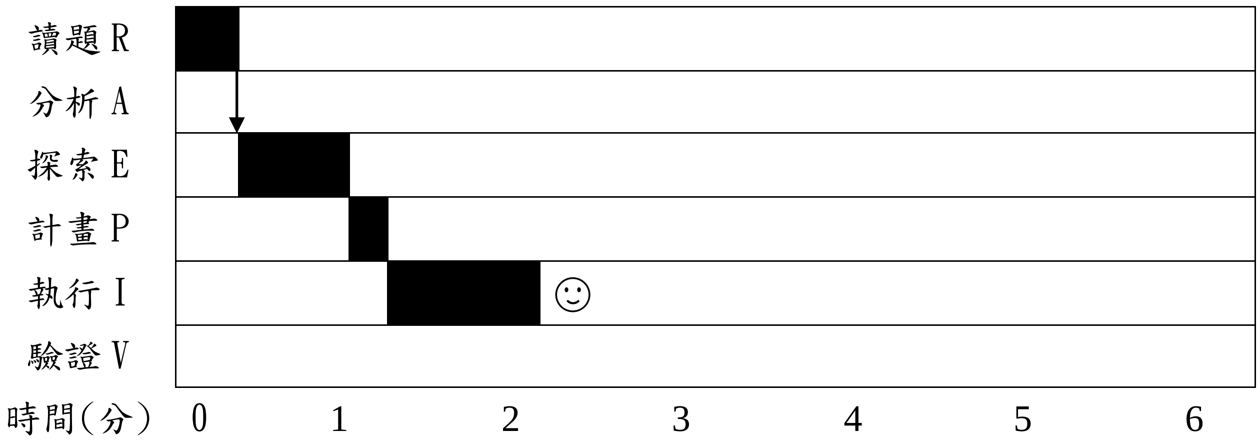


圖 4-3　S21 的斜率圖文題 G2 之解題歷程分析圖

2. 交點文字題 I1：一意孤行

> 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？

S21 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：45 秒），就開始下一步動作。S21 由題目得知 $y=ax+b$ 會過 $y=x^2$ 和 $y=(x-2)^2+12$（分析 A：24 秒），所以 S21 試圖去找出他們的交點。

緊接著，S21 把 $y=x^2$ 代入 $y=(x-2)^2+12$，得出 $x=4$ 和 $y=16$（執行 I1：111 秒）。此時，S21 將點 (4,16) 代入 $y=ax+b$ 中，得出 $16=4a+b$ 一式（執行 I2：87 秒），接著 S21 便陷入一陣沉思，這樣的結果顯然對解題進度沒有進展。

$$\begin{cases} y=(x-2)^2+12 & \text{—①} \\ y=x^2 & \text{—②} \end{cases}$$

②代①

$x^2=(x-2)^2+12$

$x^2=x^2-4x+4+12$

$4x=16$

$x=4$

得知 $y=16$

但 S21 仍想從此一觀點切入，S21 把 $y=ax+b$ 整理成 $x=\dfrac{y-b}{a}$ 的形式，並且將 $x=\dfrac{y-b}{a}$ 代入 $y=x^2$ 中，經過一連串的運算與化簡（執行 I3：77 秒）。最後面對有三個未知數的式子，S21 最終放棄了答題。

$$\begin{cases} y=ax+b \\ ax=y-b \Rightarrow x=\dfrac{y-b}{a} \end{cases}$$

$y=x^2 \Rightarrow (ax+b)^2=\left(\dfrac{y-b}{a}\right)^2$

$\therefore\ a^2x^2+2abx+b^2=\dfrac{(y-b)^2}{a^2}$

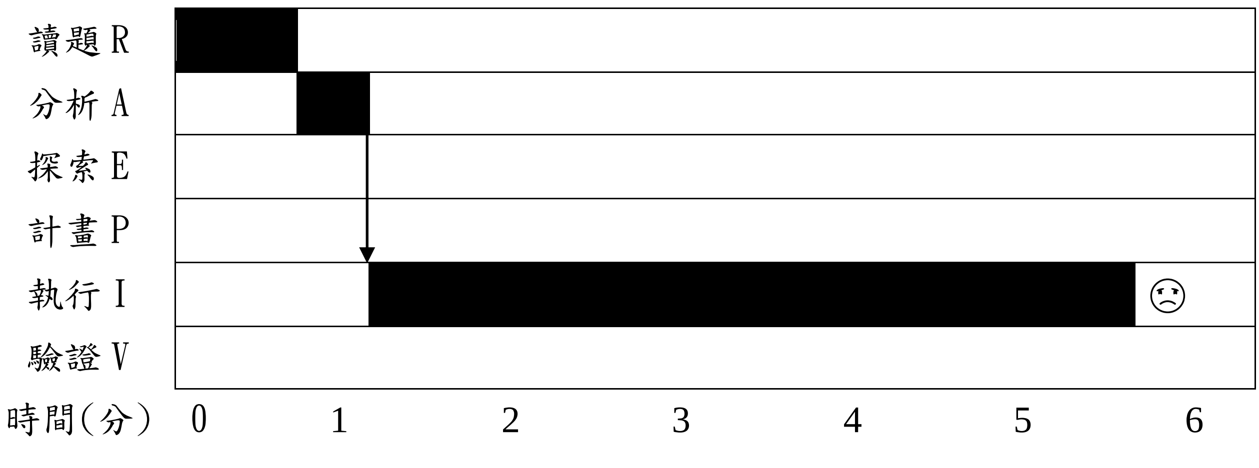


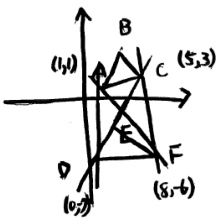
圖 4- 4　S21 的交點文字題 I1 之解題歷程分析圖

(三) S11：斜率文字題 G1、交點文字題 I1

1. 斜率文字題 G1：敏銳且成功

> 設 $A(1,1),B(3,5),C(5,3),D(0,-7),E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？

S11 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：27 秒），就開始下一步動作。S11 沒多想什麼，便直接開始作圖，並將點依序標至坐標平面中（分析 A：58 秒）。



S11 直接從所畫的圖中判斷，直線有可能是 BD、BF、CE、CF 的連線（計畫 P：70 秒），並開始著手下一個步驟。S11 憑藉著他驚人的觀察力，立刻知道 CF 連線的斜率最小並計算之（執行 I：48 秒），即得出答案。

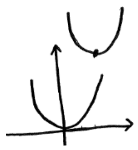
S11：用眼睛看一下，看起來 CF 連線的斜率最小，(計算 CF 連線斜率)，得出答案。

圖 4-5　S11 的斜率文字題 G1 之解題歷程分析圖

2. 交點文字題 I1：靈光乍現

坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？

S11 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：33 秒），就開始下一步分析的動作。S11 不管題目的條件為何，便直接開始作圖，畫出兩拋物線的對應關係（分析 A：73 秒）。



緊接著，S11 試圖去推進解題的進度，並把 $y=x^2$ 代入 $y=ax+b$，得 $x^2-ax-b=0$ 一式（執行 I1：29 秒）。此時，S11 靈光乍現，恰交於一點代表方程式重根，也就是說其判別式為零（探索 E：52 秒）。

S11：因為恰交於一點所以重根，所以判別式為零。

因此，S11 把 $y=(x-2)^2+12$ 也代入 $y=ax+b$ 中，經整理後，求出其判別式。並將前後兩判別式經運算，最終得出答案（執行 I2：121 秒）。

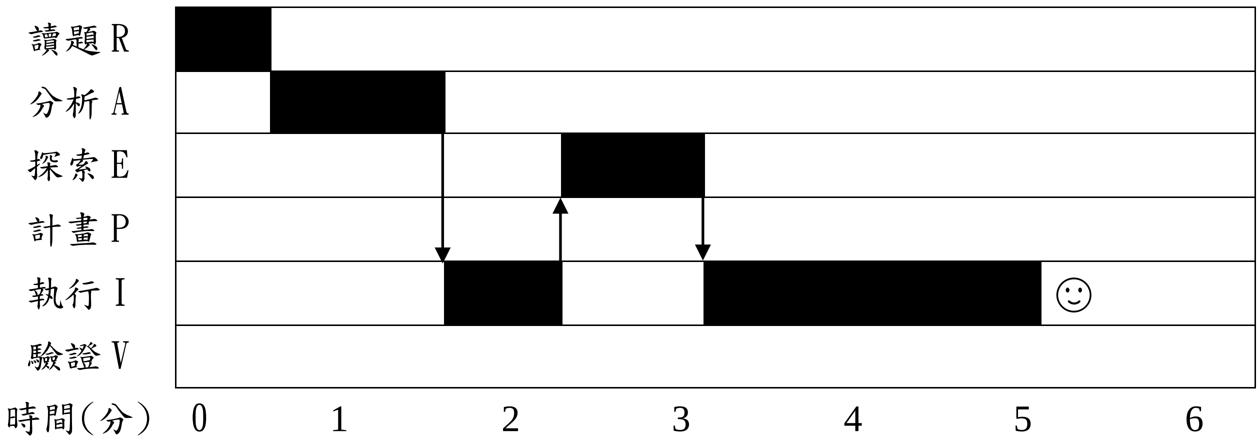
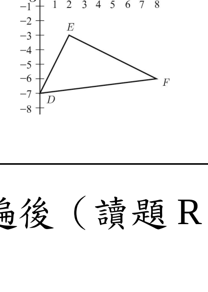


圖 4- 6　S11 的交點文字題 I1 之解題歷程分析圖

（四）S22：斜率圖文題 G2、交點圖文題 I2

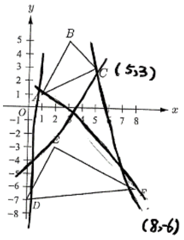
1. 斜率圖文題 G2：迎刃而解

設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



首先，S22 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：24

秒)，就開始下一步動作。緊接著，S22 認為答案只有 *AD*、*CF* 與 *CE* 的連線（計畫 P：67 秒），並開始著手計算。



S22 分別計算了 *AD*、*CF* 與 *CE* 連線的斜率，並運用斜率的特性，快速的分辨斜率的大小（執行 I：69 秒），最後得出答案。

S22：所以如果是 *AD* 的話(計算 *AD* 連線的斜率)，如果是 *CF* (計算 *CF* 連線的斜率)，然後 *CE* 是正的，所以答案是 –3。

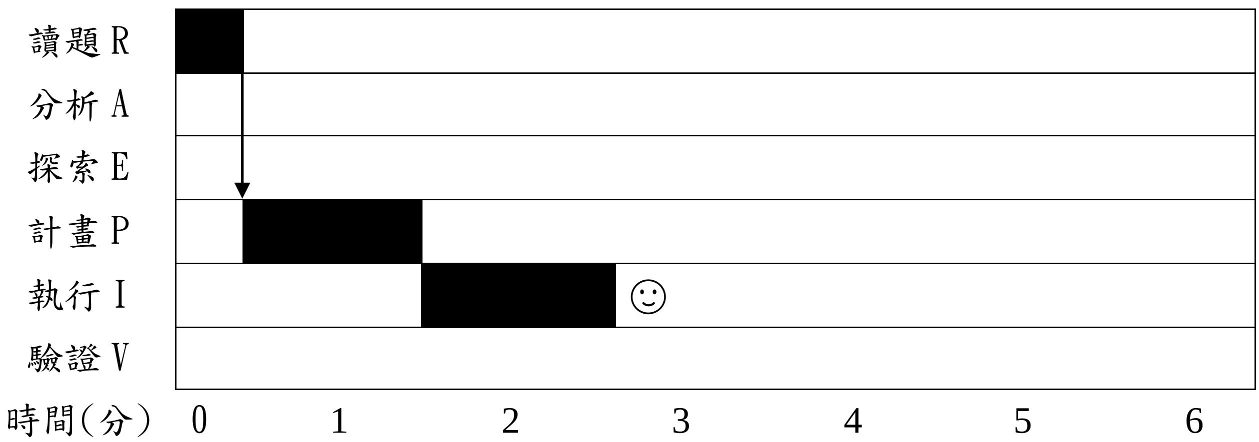
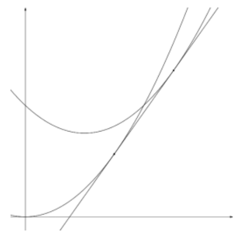


圖 4- 7　S22 的斜率圖文題 G2 之解題歷程分析圖

2. 交點圖文題 I2：大意失荊州

坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



S22 率先進行讀題，先將題目念過一遍後（讀題 R：23 秒），就開始下一步動作。S22 立即意會題目的意思，恰交於一點就代表只有一個解（分析 A：6 秒），接著，S22 認為可以運用判別式等於零的方法，來解釋相交的狀況（探索 E：25 秒）。

S22：與 $ax+b=x^2$ 有一解，與 $ax+b=(x-2)^2+12$ 有一解，所以可以用判別式等於零。

S22 便將 $y=ax+b$ 和 $y=x^2$ 恰交於一點的情形，與 $y=ax+b$ 和 $y=(x-2)^2+12$ 恰交於一點的情形，分開討論並整理（計畫 P：8 秒）。最後將整理出的兩式，經聯立方程解出答案（執行 I：139 秒）。最終的答案仍然錯了，在最後的環節中 S22 計算錯誤，又沒做最後的驗證，與正確答案擦肩而過。

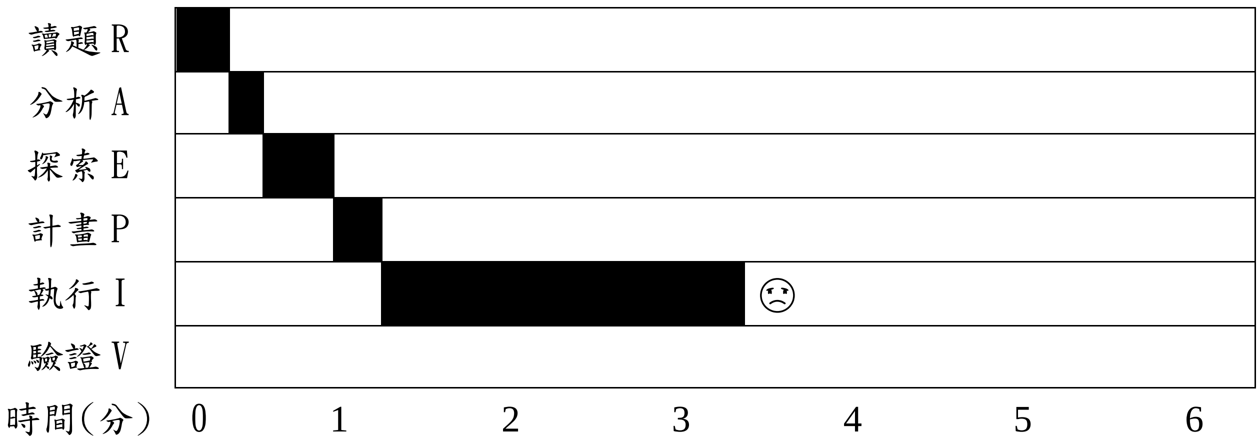


圖 4- 8　S22 的交點圖文題 I2 之解題歷程分析圖

（五）綜合比較與討論

根據上述之解題歷程分析，底下分別針對 S12、S21、S11、S22 之斜率圖文題 G2、斜率文字題 G1、交點圖文題 I2、交點文字題 I1 進行探討，詳述如下。

1. 斜率圖文題 G2 之比較

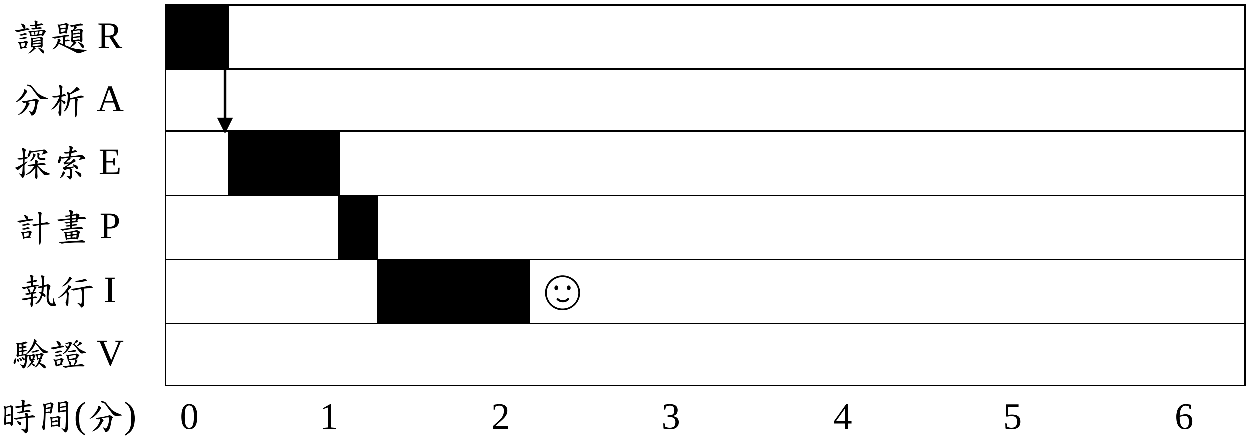


圖 4- 9　S21 的斜率圖文題 G2 之解題歷程分析圖

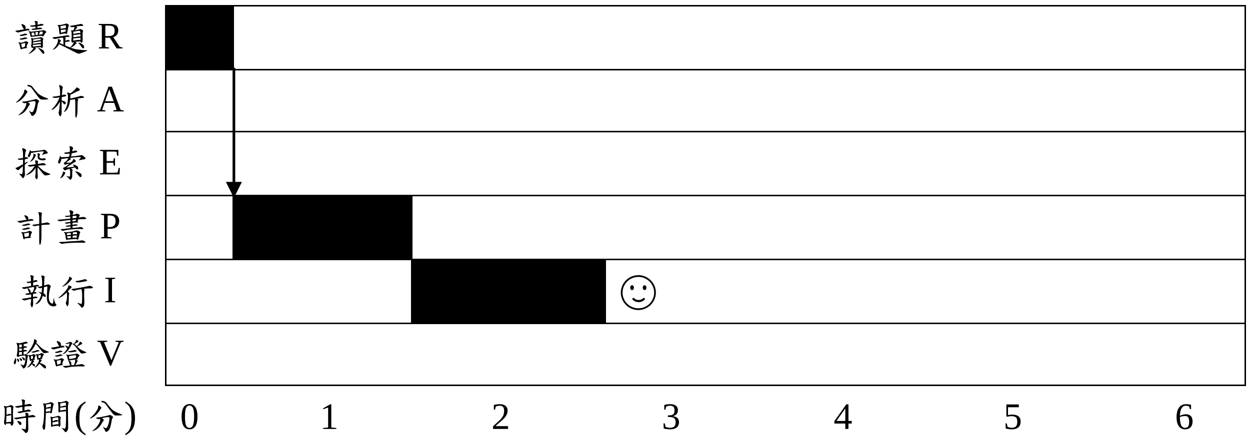


圖 4- 10　S22 的斜率圖文題 G2 之解題歷程分析圖

由以上兩人的斜率圖文題可以看出，S21 與 S22 總花費時間相差 30 秒，S21 相較於 S22 多花費 44 秒在探索階段上，但 S22 沒有進行探索階段，相對的 S22 則花了較多時間在計畫階段上，S22 比 S21 多花了 57 秒在計畫的階段上。

此外，由解題歷程分析圖中發現，兩人皆無往返的歷程，也就是兩人皆沒有在兩階段中反覆的過程，代表都順利的完成解題。主要原因是 S21 和 S22 運用圖形來減少讀題的資訊量，只有 S21 花費了 44 秒在探索階段，來更了解題目需求有解的關係。S21 和 S22 也透過現有的圖來減少計畫的時間，同時 S21 和 S22 也能透過圖來降低判斷的誤差。因此，兩人在執行階段，都可以有效且順利的完成題目的條件需求。

Larkin & Simon (1987) 提到，在圖畫題中，通常找到第一個資訊，解題者就容易在鄰近的地方搜尋到其他的相關資訊了。在圖文題中，除了文字敘述外再加上符合文字敘述的函數圖形，確實能讓解題者更容易找到所需的條件，因此，S21 和 S22 並未花費過多的時間在分析和探索的階段上。

2.　斜率文字題 G1 之比較

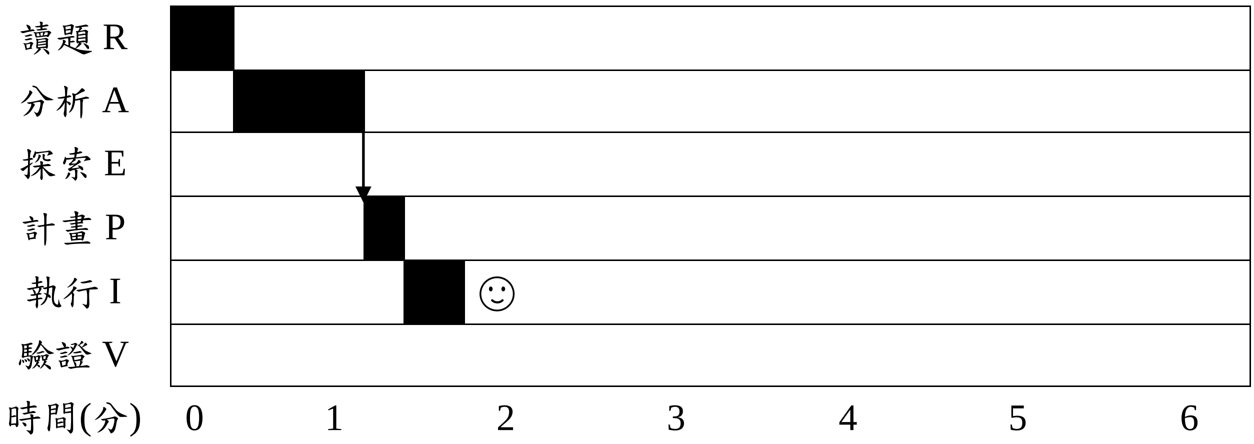


圖 4- 11　S12 的斜率文字題 G1 之解題歷程分析圖

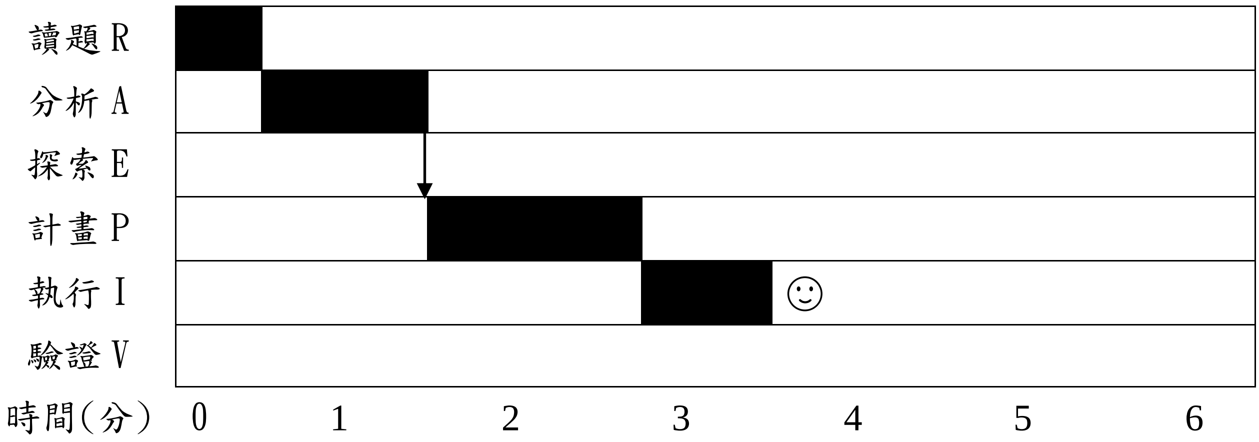


圖 4- 12　S11 的斜率文字題 G1 之解題歷程分析圖

由斜率文字題可以看出，S11 在解題總時間比 S12 多花了 103 秒，在各個階段上 S11 花費的時間皆比 S12 多，尤其在計畫與執行的階段上，在計畫階段上 S11 比 S12 多花了 59 秒，在執行階段上 S11 也比 S12 多花了 25 秒。

值得一題的是，在斜率文字題中，S12 和 S11 的解題歷程圖的歷程階段一樣，在解題歷程中也沒有往返的情形，也就代表 S12 和 S11 面對斜率文字題的策略相似。S12 和 S11 在讀題之後，皆因為無

參考圖所以花費時間在作圖上，在繪圖分析上兩人花費時間相差較小，但所繪出之函數圖形有很大的落差，S12 所繪出之函數圖形較簡潔，僅標註了座標點；S11 在作圖時，將函數圖形畫的相對較小，且描繪出兩三角形頂點的連線。在執行階段，S12 和 S11 運用所繪出的函數圖形，進行數學式子的運算，但 S11 對斜率的計算生疏，所以 S11 相較於 S12 花了較多的時間。

Janvier (1987) 提到，個體讀取文字訊息時，必須從頭開始閱讀與搜尋相關資訊，必要時轉譯成其他的表徵，之後週而復始的搜尋下一個需要的資訊，直到解題所需要資訊都齊全為止。S12 和 S11 皆在讀題之後，將文字敘述的表徵轉譯成圖像表徵，從圖像表徵得到相關資訊後，再由圖像表徵轉譯成數學式子。

3.　交點圖文題 I2 之比較

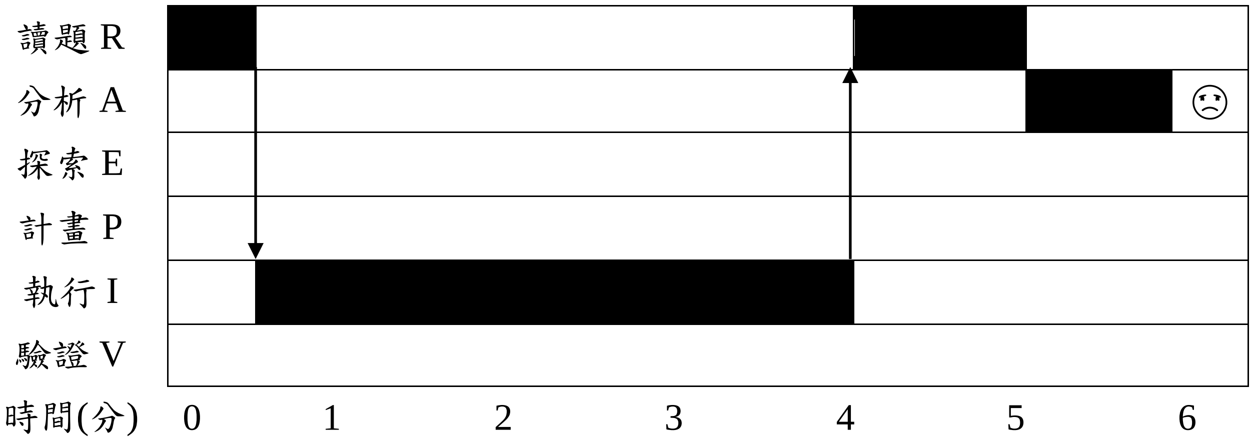


圖 4- 13　S12 的交點圖文題 I2 之解題歷程分析圖

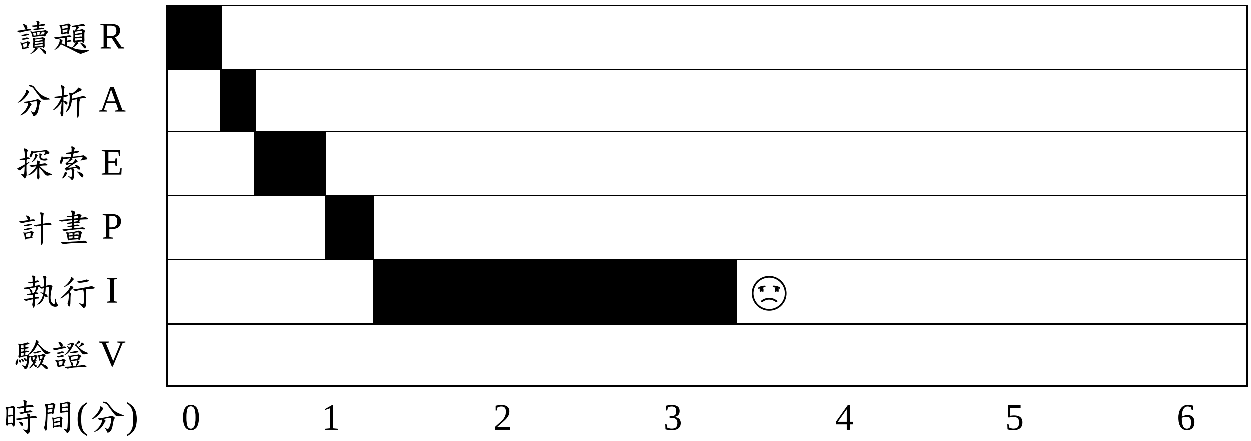


圖 4- 14　S22 的交點圖文題 I2 之解題歷程分析圖

由交點圖文題可以看出，兩人皆花費較多的時間在執行階段，S12 花費了 211 秒，S22 花費了 139 秒。從 S12 的交點圖文題之解題歷程分析圖中可以觀察到，S12 在解題時經歷了往返的過程，也就是 S12 在執行階段後又回到讀題的階段，也代表 S12 不順利的解題歷程。

此外，值得一提的是 S22 的交點圖文題，S22 的解題歷程相當順利，對於此題的解題策略也找出適合的方法。但是 S22 在解交點圖

文題時，並未運用圖來輔助解題，也就是 S22 僅用了文字敘述的表徵來完成解題。另外，S12 在解題時，也並未發現函數圖形給出的資訊，所以 S12 未完成解題。

Clement 等人 (1981) 認為圖像表徵無法對學生在形成有效的問題表徵，甚至會造成學生概念抽象化的困難。在 S12 解題時，確實發現 S12 無法從圖像表徵中得到提示，S22 也僅運用了文字敘述的表徵即完成答題。

4.　交點文字題 I1 之比較

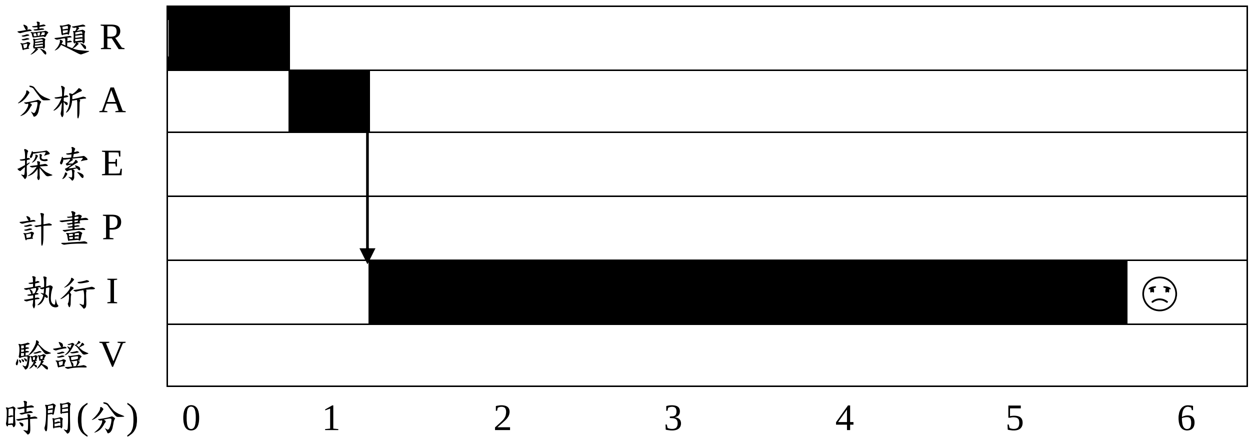


圖 4- 15 S21 的交點文字題 I1 之解題歷程分析圖

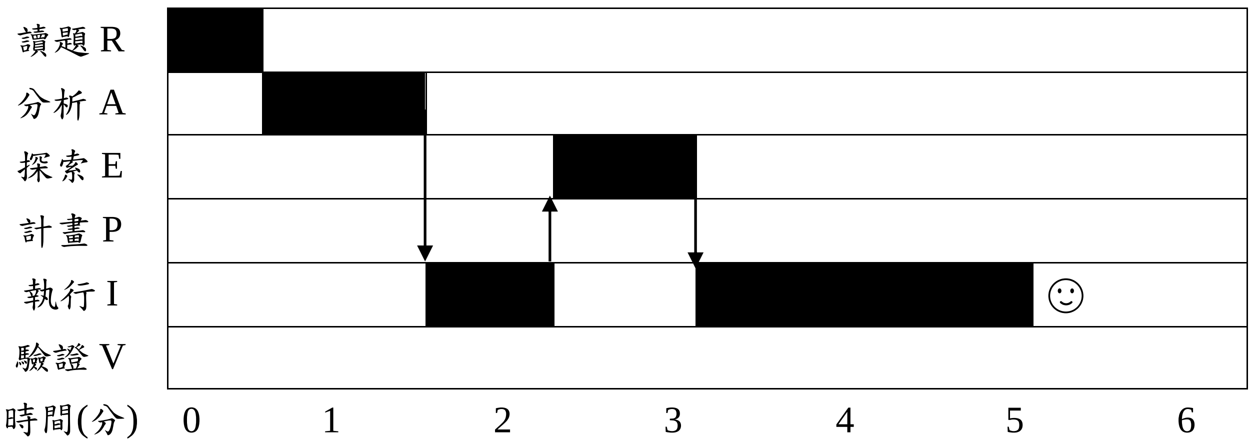


圖 4- 16 S11 的交點文字題 I1 之解題歷程分析圖

從交點文字題可以發現，S21 和 S11 花費許多的時間在執行階段，S21 花了 275 秒，S11 花了 150 秒。僅有 S11 經歷往返的過程，也就是從執行階段回到探索的階段。相同的，在交點文字題也能發現，S11 讀題之後便先進行繪圖分析。

在複雜一點的交點文字題中能發現，S21 和 S11 都僅花一些時間在分析的階段，並把大量的時間花費在執行的階段，並藉由執行所拼湊出的線索，來增加探索題目需求的機會。S21 在執行時皆無法

發現關鍵點所以一直執行，直到最後放棄答題，然而，S11 在執行時，發現新的資訊，便將新的訊息加入工作記憶區，順利的完成解題。

Schoenfeld (1985) 提到，影響解題須考慮到 4 個變項，包含資源、捷思、控制及信仰系統。在資源方面，S11 具有的先備知識較為豐富，透過執行階段中所計算出的式子，就能引起 S11 對題目的新想法，因此，先備知識的豐富程度間接地影響到解題的過程。

(六) 正確解題策略

在這斜率題 G 與交點題 I 中，若依據正確的解題策略與流程，方可解答出正確答案，以下詳述兩題的解題策略與流程。

1. 斜率題 G 之正確解題策略與流程

首先將題目念過一遍（讀題 R）。再來依照題目中的敘述作圖，或在現有的圖中標記對應的座標，並分析題目中的條件，條件為直線分別與上下倆三角形恰交於一點，則代表直線分別經過上下倆三角形的一個頂點（分析 A）。接著，答案的需求是斜率最小的直線，然而斜率最小，也就代表此斜率為負值，若其斜率值的絕對值越大代表此斜率值越小（探索 E）。

接下來，畫出符合題目需求的頂點連線段，並依據答案的需求判斷斜率最小的連線線段（計畫 P）。依照斜率公式計算直線線段的斜率（執行 I）。最後，再次確認是否為斜率最小者，以及確認計算過程是否有誤，即可確認答案（驗證 V）。

2. 交點題 I 之正確解題策略

首先將題目念過一遍（讀題 R）。再來依照題目中的敘述作圖，或在現有的圖中標記對應的座標和方程式，並分析題目中的條件，條件為直線方程式恰與倆拋物線恰有一個交點，也就是代表直線方

程式$y=ax+b$分別與$y=x^2$和$y=\left(x-2\right)^2+12$倆拋物線僅有一個解（分析 A）。從僅有一個解得出，$y=x^2=ax+b$和$y=\left(x-2\right)^2+12=ax+b$倆方程式的解皆為重根，代表其判別式等於零（探索 E）。

將所整理出之結果，分開並列點進行討論（計畫 P）。分別將兩方程式的判別式列出，再將得出的兩個二元一次方程式進行聯立解（執行 I）。最後，將答案帶回原拋物線的方程式中檢查是否滿足題目需求，以及確認計算過程是否有誤，即可確認答案（驗證 V）。

第二節 兩種表徵間解題歷程的差異

在本研究中，參考了 Moyer 等人 (1984) 數學問題情境的分類，將數學問題分成圖文題與文字題。本節分別針對斜率圖文題和斜率文字題與交點圖文題和交點文字題進行探討，也就是針對不同表徵同一題目做探討，茲分述如下。

(一) 斜率圖文題 G2 與文字題 G1 差異之比較

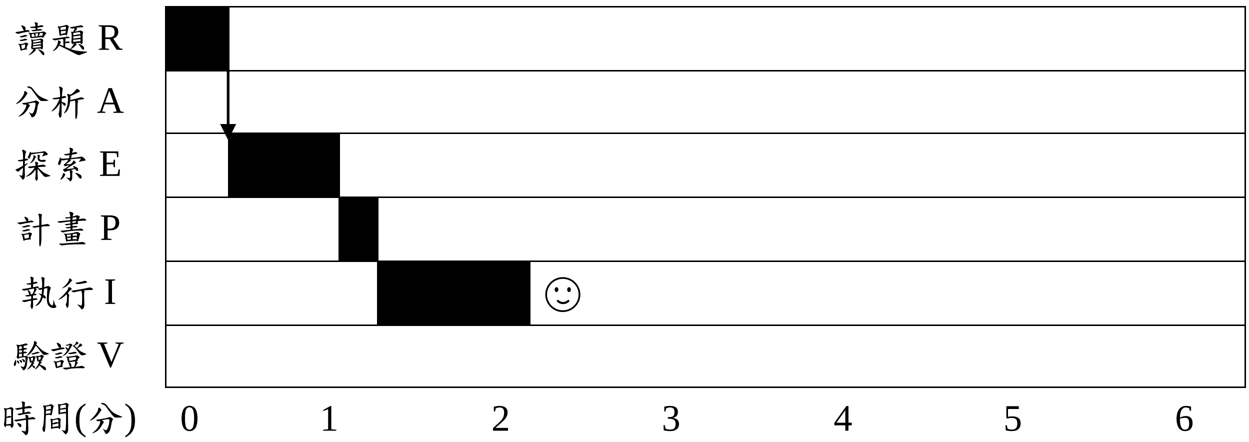


圖 4- 17 S21 的斜率圖文題 G2 之解題歷程分析圖

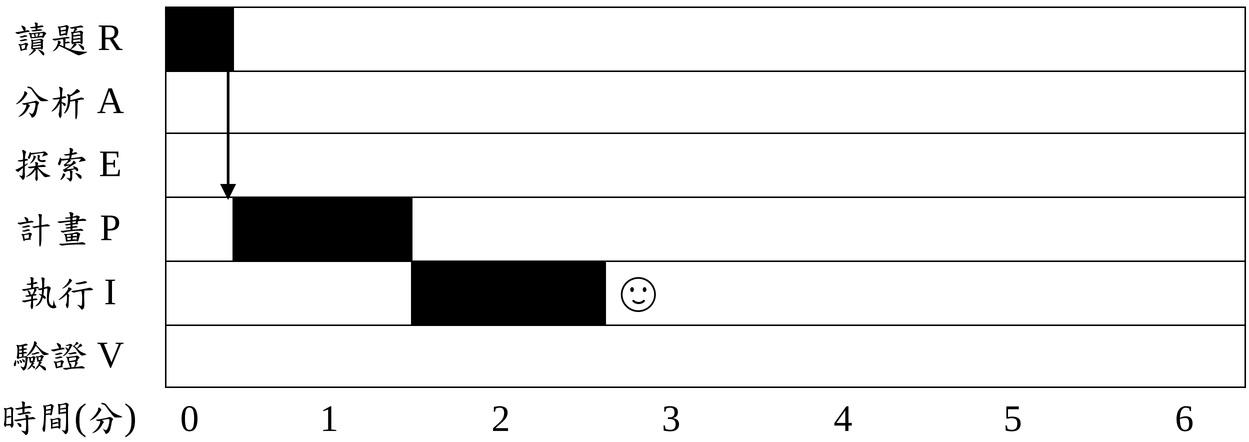


圖 4- 18 S22 的斜率圖文題 G2 之解題歷程分析圖

從斜率圖文題之比較中整理出共同的觀點，花費時間差距小，

分別是 S21 的 130 秒和 S22 的 160 秒，且 S21 和 S22 皆沒有分析的階段，主要是因為有參考的函數圖形，不需花費時間另外繪圖。

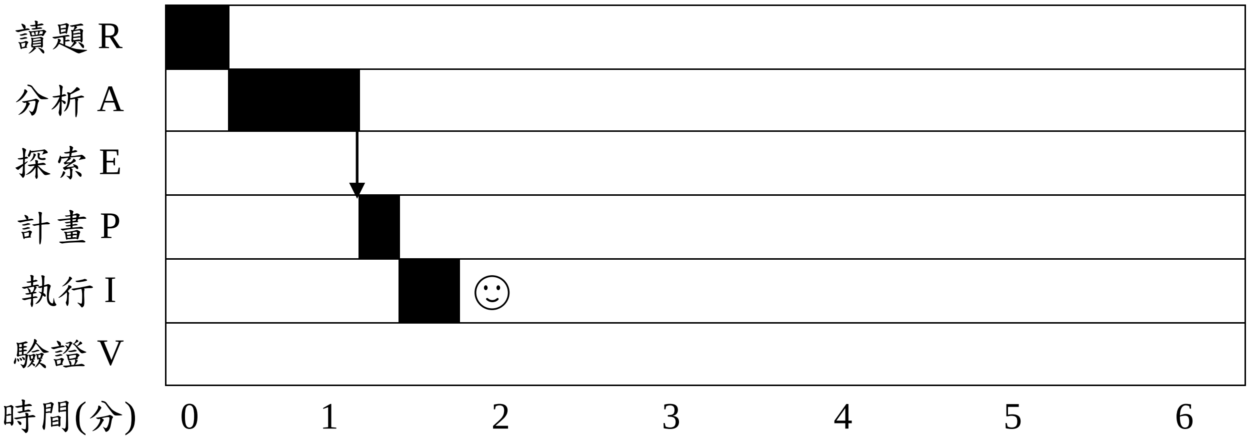


圖 4- 19 S12 的斜率文字題 G1 之解題歷程分析圖

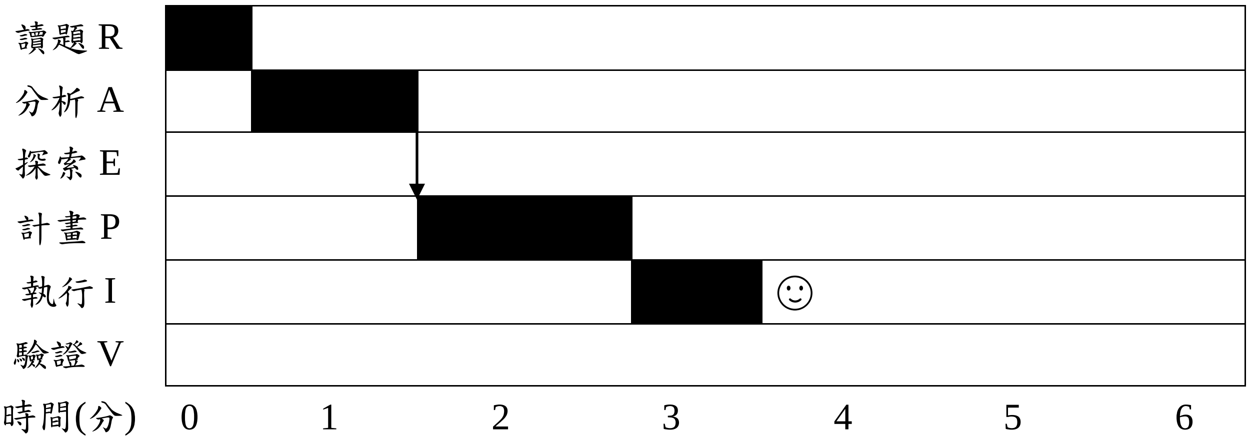


圖 4- 20 S11 的斜率文字題 G1 之解題歷程分析圖

從斜率文字題之比較中整理出共同的觀點，花費時間差距大，分別是 S12 的 104 秒和 S11 的 207 秒，且 S12 和 S11 皆有進行分析繪圖的階段，但由於對函數圖形的敏感度不同，S12 採用了簡潔的作圖方法，S11 則鉅細靡遺地將條件繪出，因此，自行繪圖的 S12 和 S11 也多了誤差這樣的不確定因素。

從解題歷程圖能看出，斜率圖文題與斜率文字題的解題歷程都很順利，最後也都得出正確的答案。在時間上，斜率圖文題與斜率文字題的花費，分別是 S21 的 130 秒和 S22 的 160 秒與 S12 的 104 秒和 S11 的 207 秒，兩人在斜率圖文題的時間相差 30 秒，但另兩人在斜率文字題的時間相差 103 秒。除此之外，其中一人的斜率文字題的解題時間僅花了 104 秒，原因是簡潔的繪圖，使解題者省略大多的時間來進行計畫的階段。值得一提的是，僅在斜率文字題中有繪圖分析的階段，在兩種題目表徵中，圖文題的圖可以起到輔助的效益。但又因為斜率題的難度較低，所以兩種不同表徵的解題歷程都很順利，並無出現往返的情形。

Moyer 等人 (1984) 提到，圖畫題對數學學習上有 4 個優點，試作斜率圖文題的 S21 和 S22 運用了圖形來減少閱讀的工作記憶，並建立了適當的數學式子。然而，試作斜率文字題的 S12 和 S11 也透過了自行的繪圖分析，來彌補了題意的不明確，使題目的需求更清楚。因此，在學習亦或在解題時，以圖輔助能起到幫助學習的功用。

Lesh 等人 (1987) 提到，表徵系統互動模式的 5 個元素，表徵之間的轉譯和同一個表徵內的轉化亦同等重要。試作斜率圖文題的 S21 和 S22 有著參考圖來輔助解題，所以僅經過一次的表徵系統間

的轉譯，即為圖轉譯為書寫符號。然而，試作斜率文字題的 S12 和 S11 並無參考圖，故 S12 和 S11 皆經過兩次以上的表徵系統間的轉譯，即為書寫符號轉譯為圖，再經圖轉譯為書寫符號，在兩次表徵系統間的轉譯下，工作記憶區的負擔也大幅提升。

(二) 交點圖文題 I2 與文字題 I1 差異之比較

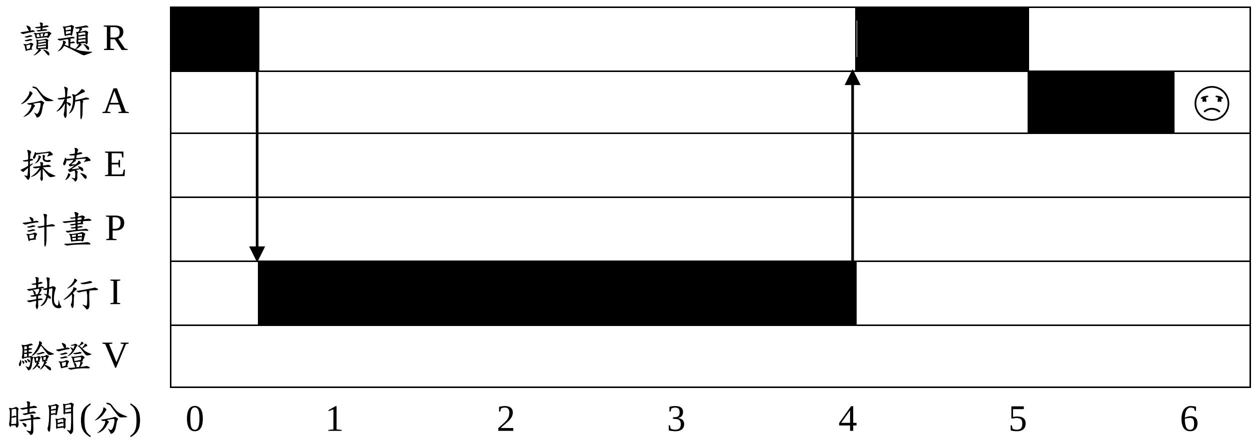


圖 4- 21 S12 的交點圖文題 I2 之解題歷程分析圖

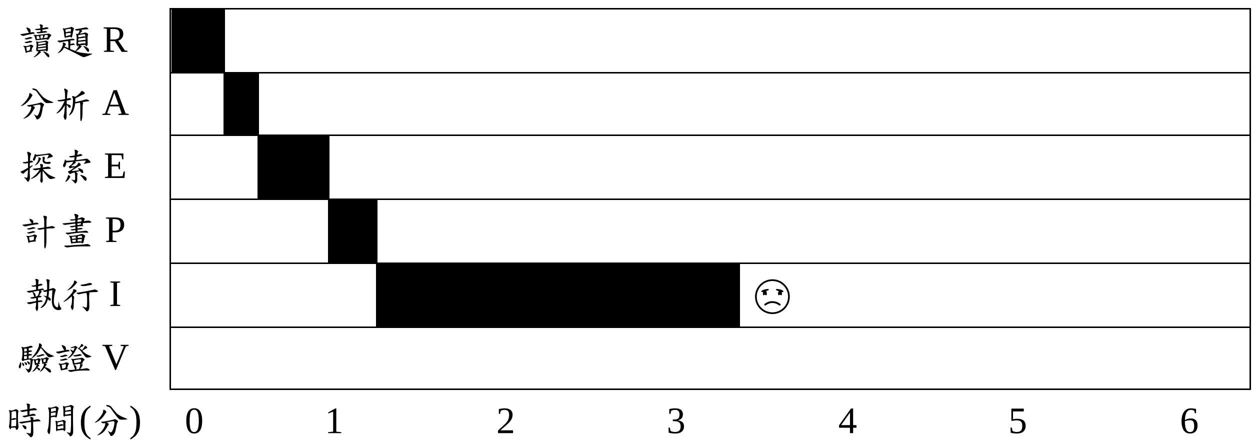


圖 4- 22 S22 的交點圖文題 I2 之解題歷程分析圖

從交點圖文題之比較中整理出共同的觀點，兩人皆花費較多的時間在執行階段，S12 花費了 211 秒，S22 花費了 139 秒。此外，

S12 在解題時經歷了往返的過程，也就是 S12 在執行階段後又回到讀題的階段。另一個有趣的點是，S22 在解題時並無運用圖來輔助解題，也就是圖的存在與否不影響到 S22 的解題。

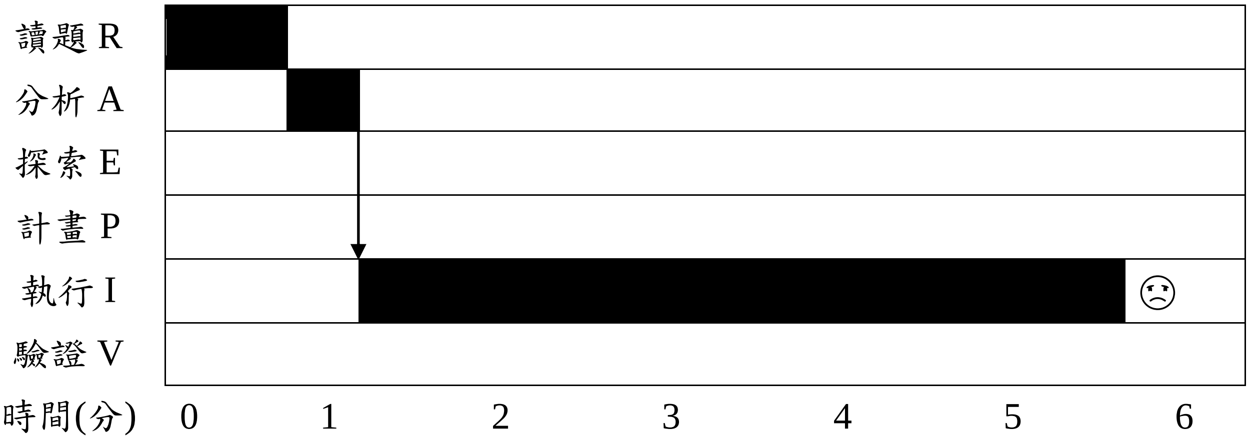


圖 4- 23　S21 的交點文字題 I1 之解題歷程分析圖

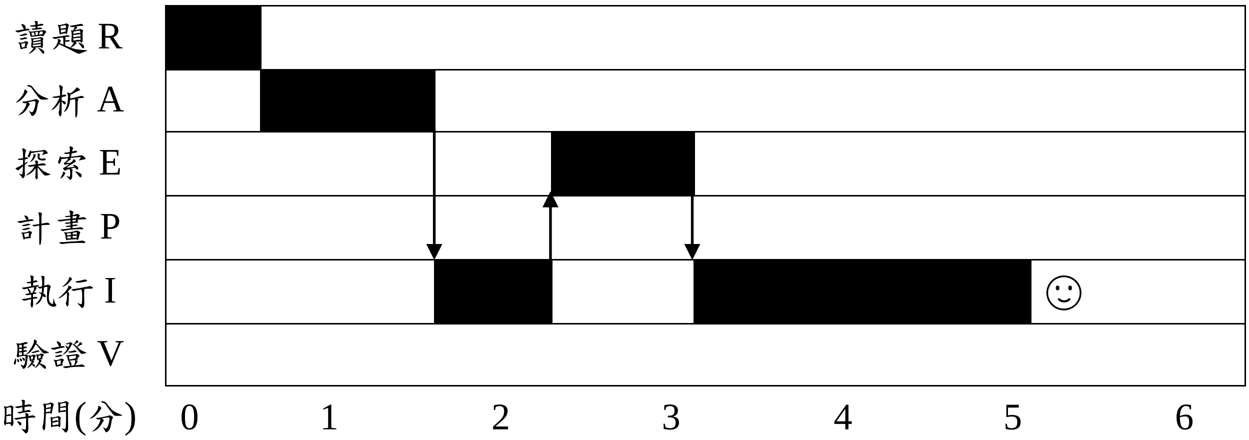


圖 4- 24　S11 的交點文字題 I1 之解題歷程分析圖

從交點文字題之比較中整理出共同的觀點，S21 和 S11 花費許多的時間在執行階段，S21 花了 275 秒，S11 花了 150 秒。僅有 S11 經歷往返的過程，也就是從執行階段回到探索的階段。在交點文字題發現，S11 讀題之後便先進行繪圖分析，但 S21 並無繪圖僅列出條件式。

從解題歷程圖可以看出，4 位參與者皆花費大部分的時間在執行階段，交點圖文題與交點文字題的在執行階段上的花費，分別是 S12 的 211 秒和 S22 的 139 秒與 S21 的 275 秒和 S11 的 150 秒。在解題的成敗上，僅有 S11 做出正確解答，S22 運用了適合的解題策略，但在最後關頭 S22 運算失誤，造成 S22 做出了錯誤的答案；另外，S12 和 S21 皆放棄答題。

值得一提的是，試作交點圖文題的 S22 並無參考圖的資訊，S22 藉著豐富的先備知識，並運用良好的解題策略來解題；試作交點文字題的 S11 也是藉著豐富的先備知識，透過執行階段中所運算出的資訊，來推演出題目的關鍵需求。此外，試作交點圖文題的 S12 和 S22 並未運用圖的優勢來解題，主要是因為交點題的複雜度較高，圖的輔助作用較小。

由於交點題難度較高，解題的流程也相對複雜，在這樣子的情形下，本研究者觀察到參與者在面對複雜的難題時，在讀題完之後，先會進行少許的分析，再來進入長時間的執行階段。倘若解題者在執行的階段中察覺異常狀態，可能會使參與者往返其解題歷程，就如同 S12 和 S11 在解題時，皆有從執行階段回到讀題或探索的階段。倘若解題者未發現其中的關鍵，則會一直進行解題，直到放棄或拼湊出一個解答，就如同 S21 在解題時，持續在執行階段中

摸索題目的需求，直到放棄達題。

Schoenfeld (1985) 提到，影響解題須考慮到 4 個變項，包含資源、捷思、控制及信仰系統。在資源的運用上，試作交點圖文題的 S22 和試作交點文字題的 S11 都展現良好的表現；在捷思上，試作交點圖文題的 S22 也運用良好的解題策略，來分析與探索題目的條件。因此，在解題中，有效的利用資源與捷思策略能夠解決不熟悉的題目。

另外，Clement 等人 (1981) 提到，圖示法會造成學生概念抽象化的困難。從試作交點圖文題的 S12 之解題歷程，確實發現圖對解題者的幫助有限，也就是說在複雜的題型，圖較難彌補題意的不足。

在解題歷程的過程中，Leung (2009) 提出解題歷程可以是雙向的。從試作交點圖文題的 S12 和試作交點文字題的 S11 中，可以發現兩人皆在解題過程中出現了往返，試作交點圖文題的 S12 是因為執行中發現不合理的未知數，因而跳回讀題階段重新審視題目的需求；試作交點文字題的 S11 是從執行的階段發現線索，因而跳回探索的階段重新構思。因此，在解題的歷程中，並非單向的過程，重新審視題目也可以得到更多的線索。

第伍章 結論與建議

本章將就研究目的和結果，闡述參與者解題中的歷程。本章共計兩節，第一節提出本研究的結論，第二節則為建議，詳見如下。

第一節 結論

本節依據研究問題，包含探究高中二年級學生在函數圖形中解題歷程為何？高中二年級學生在不同表徵的題目之解題歷程有何差異？所得到的結論如下。

(一) 函數圖形解題歷程的階段

本研究發現，高二學生在函數圖形的解題歷程中大多會出現如 Schoenfeld (1985) 所提出的 6 個階段中的前 5 個：讀題、分析、探索、計畫、執行。讀題為閱讀題目；分析為將題目的條件條列出，或將題意繪出參考圖形；探索為辨別條件與解的關係；計畫為評估函數圖形的對應關係；執行包含化簡數學式、解方程式。圖文題有參考圖來輔助，故參與者較少進行分析階段；文字題無參考圖，故參與者皆會進行分析階段。斜率圖文題與斜率文字題的解題歷程較為順暢，交點圖文題與交點文字題的解題歷程階段較多，因此，與過去的研究中圖文題能改善解題的發現不一致。

(二) 圖文題和文字題對學生解題歷程階段的影響

研究結果顯示，參與者試作圖文題時，可能會忽略參考圖並靠著文字敘述擬定策略；參與者試作文字題時，在讀題完後，參與者會依據題目之意涵繪製符合題意的參考圖，來完成後續的分析與探索。此外，良好的題目設計，能使圖像表徵達到輔助的作用，進而減少工作記憶上的負擔，幫助學生建立適當的問題表徵，以及彌補文字資料的不足。

第二節 建議

本節主要根據研究結果，給予未來研究與教學上兩方面的建議。

(一) 未來研究上的建議

本研究針未來研究方面，提出以下 3 點建議，包含選用不同題材、增加不同難易度的題目、增加研究對象。

1. 選用不同題材

 本研究探討的是不同表徵下在函數圖形的解題歷程，除了函數圖形之外，題目變化並不多，往後的研究可針對情境化以及需要多步驟之題目作探討。

2. 增加不同複雜度的題目

本研究發現，複雜度可能會影響題目表徵形式的解題歷程，如：參與者試作難且複雜的交點題時，其解題歷程大多不順利，且容易失敗。未來研究可從不同的解題複雜度或難易度，來探討題目表徵形式的解題歷程。

3. 增加不同成就的研究對象

本研究因限於時間、人力之限制，樣本僅採用數學解題能力較高之學生，建議在為來的研究中，可以增加不同成就的研究對象，若是中、低能力對象未能解答較複雜的題目或是無法呈現 Schoenfeld 六階段，研究者不妨使用 Polya (1945) 的解題歷程來分析，其結果更具代表性。

(二) 教學上的建議

本研究針對實務教學方面，提出以下 3 點建議，包含著教師宜著重於學生數學解題的過程，教師宜注意圖形對解題的影響，以及教師應培養學生對於表徵間的轉譯能力。

1. 教師宜著重於學生解題能力的培養以及注重學生的解題歷程

本研究發現，解題者遇到不熟悉的題目，讀題後會簡單的分析，再來進入執行階段，較不會有分析、探索、計畫階段。因此，教師在建立觀念時，應有承先啟後的組織架構，強化學生

在分析與探索的思維，並提醒學生要完成驗證與回顧的階段。

2. 教師宜注意圖對解題者的影響

本研究發現，良好的圖文題設計能夠改善解題歷程，不適合的圖文題對解題者沒有幫助，教師得設計良好的圖像表徵來幫助學生學習。此外，透過教師教學應指導學生辨別有效的圖，以避免錯誤的圖干擾。

3. 教師應培養學生對於表徵間的轉譯能力

本研究發現，表徵間的轉譯能力十分的重要，除了將文字符號轉譯成圖，亦或者將圖轉譯成數學式子。在函數圖形單元中，表徵間的轉譯能力影響學生學習與解題，教師應加強學生在表徵間的轉譯。除此之外，表徵間的轉譯能力也達到 108 課綱所提及的溝通互動之基本理念，與他人溝通並解決問題之外，也能避免學生一直作答失敗。

參考文獻

一、中文文獻

大學入學考試中心（2018）。107 學年度指定科目考試數學甲考科試題分析。取自 https://tinyurl.com/y6tv6yrl。

石千奇（2004）。**國小六學童在數學實作評量中的小組解題歷程分析**（未出版之碩士論文）。國立中山大學，高雄市。

吳曜溱（2009）。**國一學生對一元一次方程式不同表徵題型列式表現之研究**（未出版之碩士論文）。國立台南大學，台南市。

林欣姿（2011）。**不同題目表徵呈現的時間計算題型對國小五年級學童解題的影響**（未出版之碩士論文）。國立台南大學，台南市。

林美惠（1997）。**題目表徵型式與國小二年級學生加減法解題之相關研究**（未出版之碩士論文）。國立嘉義師範學院，嘉義市。

邱欣慧（2008）。**國二學生在兩種表徵題中商高定理概念及解題歷程之研究**（未出版之碩士論文）。國立中山大學，高雄市。

胡惠茹（2009）。**不同二次函數表徵問題對國三學生解題影響之探究**（未出版之碩士論文）。國立台南大學，台南市。

張令偉（2007）。二次函數综合問題例谈。**教育实践与研究，5**。

張春興（1988）。知之歷程與教之歷程：認知心理學的發展及其在

教育上的應用。**行政院國家科學委員會認知與學習研討會專集論文。**

教育部（2013）。**修正普通高級中學必修科目 [數學] 課程綱要。**台北市：教育部。

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要—總綱。**臺北：作者。

梁淑坤（1996）。研究與教學合一：以分析「一元二次方程式」的錯誤為一個例子。**嘉義師院學報，10**，455-472。

郭汾派、林光賢、林福來（1989）。國中生文字符號概念的發展。**國科會專題研究計畫報告**，NSC : 77-0111。

郭錦蓉（2012）。**不同直線方程式表徵問題對七年級學生解題影響之探究**（未出版之碩士論文）。國立台南大學，台南市。

劉永政（2015）。**兩種不同表徵對於國二學生數學解題之探討—以「一元二次方程式」為例**（未出版之碩士論文）。國立中山大學，高雄市。

蔡其霖（2011）。**不同題目表徵呈現的二元一次方程式題型對國中二年級學生的解題表現影響**（未出版之碩士論文）。國立台南大學，台南市。

蔡興國、陳錦章、張惠博（2010）。高中學生解題歷程之力圖表徵與

列式關係之研究。**科學教育學刊，18**(2)，155-175。

羅迎新（2006）。一道二次函數題六種解法探析。**湖南工業大學學報(社會科學版)，11**(5)，105-106。

二、英文文獻

Barnett, J. (1979). The study of syntax variables. *Task variables in mathematical problem solving*, 23-68.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-National Comparison of Representational Competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (5), 541-547.

Bruner, J. S. (1966). *Tower a theory of instruction.* Cambridge, MA: Harward University.

Chi, M. T. (1983). Knowledge-derived categorization in young children. *The acquisition of symbolic skills* (pp. 327-334). Springer, Boston, MA.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286-290.

Collis, K. F. (1975). *A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: A Piagetian Viewpoint.* Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The Cognitive Science approach to mathematics education.* Greenwood Publishing Group.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review*, *87*(3), 215.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, *27*, 32.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 19,* 26.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study* (Unpublished doctoral dissertation). Stanford University, Stanford, California.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. *Mathematical problem solving* (pp. 7-20). Columbus, OH: ERIC.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological review*, *92*(1), 109.

Krutetskii, V., A. (1976), *The Psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive science*, *11*(1), 65-100.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leung, S. S. (1996). Problem posing as assessment: Reflections and Reconstructions. *The Mathematics Educator, 1*(2), 159-171. Singapore.

Leung, S. S. (2009). Research efforts on probing students' conceptions in mathematics and reality: Structuring problems, solving problems, and justifying solutions. In Lieven Verschaffel, Brian Greer, Wim Van Dooren, & Swapna Mukhopadhyay (Eds.). *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 213-225). Netherlands: Sense.

Moyer, J. C., Sowder, L., Threadgill-Sowder, J., & Moyer, M. B. (1984). Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 342-351.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2005). *The definition and selection of key competencies*. Paris, France: Author

Polya, G. (1945). *How to solve it* (2nd edition, 1957). Princeton: Princeton University Press.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and instruction, 13*(2), 141-156.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Silver, E. A., Leung, S. S., & Cai, J. (1995). Generating multiple solutions for a problem: A comparison of the responses of US and Japanese students. *Educational Studies in Mathematics*, *28*(1), 35-54.

Tyler, R. W. (1950). *Basic Principles of Curriculum and Instruction.* Chicago: University of Chicago Press.

附錄

附錄一 預試試卷

放聲思考練習題

1. 試求出方程式$(\mathrm{x}-2)^2+5(x-2)-14=0$的解為 a、b，且$\mathrm{a}>\mathrm{b}$，則$\mathrm{a}=$？

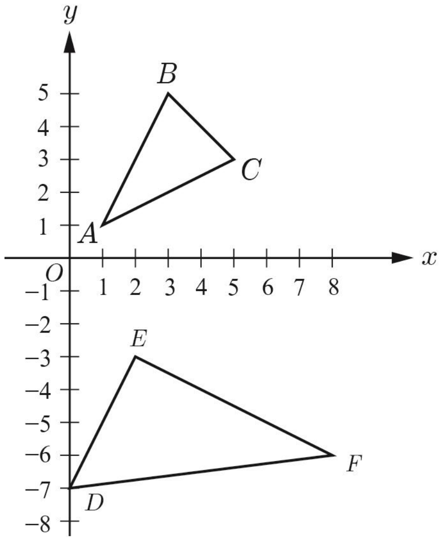
2. 有一個等式如下：

$$\mathrm{y}=-5x^2+40x-77$$

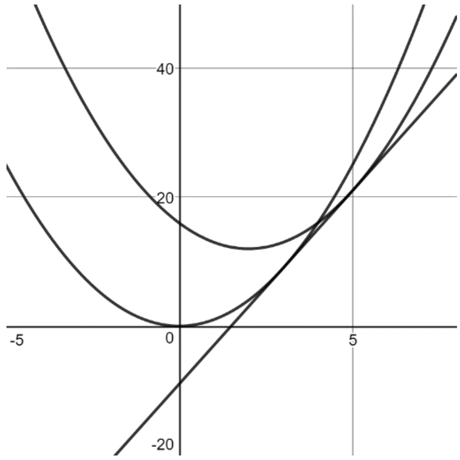
請找出這個拋物線的頂點坐標。

預試試題

1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



2. 坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a, b)為何？



附錄二 預試試題逐字稿

(一) 小元斜率圖文題逐字稿

原案	備註 (編號)
0015 (19s) 設 *A*(1,1), *B*(3,5), *C*(5,3), *D*(0,-7), *E*(2,-3) 及 *F*(8,-6)為坐標平面上的六個點。若直線 *L* 分別與三角形 *ABC* 及三角形 *DEF* 恰有一個交點，則 *L* 的斜率之最小可能值為何？	讀題(R)
0034 (25s) *A*(1,1), *B*(3,5) 最小… *DEF* 恰有一個交點所以 L 的斜率可能多少，最小斜率…代表他要很靠近 x 軸。	分析(A)
0059 (36s) 所以這個圖看起來…等一下！若把這兩點連起來，恰有一個交點，恰有一個交點的話，那就只能連在他的頂點上才會有一個交點，要不然都會超過一個交點	探索(E1)
0135 (59s) 所以他…嗯？怎麼感覺好像 *BE* 不太可能，好像只能 *AD* 跟 *CF* 而已，不然感覺怎麼連都是怪怪的，所以不是 *AD* 就是 *CF*，如果連 *BE* 的話上面會有兩個交點，連 *BD* 也是，*BF* 也是上面會有兩個交點，如果是 AD 則各有一個交點，AE 也是會有兩個交點，AF 也行，然後 CD 兩個交點，CE 也是兩個交點，CF 好像可以。	計畫(P1)
0234 (40s) 直接看這個圖，斜率最小的應該是 AF 這兩個點。 A 點是(1,1)F 點是(8,-6)，然後直接算斜率就行了， (計算 AF 斜率)	執行(I1)
0314 (13s) 最小可能值好像還有可能是另外一個，因為最小可能值，負號如果越大的話就會越小	探索(E2)

原案	備註 (編號)
0327 (13s) 這個 CF 好像就更小，因為它的絕對值比較大，加上負號就變更小，來求一下 CF 的斜率好了，覺得 CF 好像更符合題意 0340 (20s) (計算 CF 斜率) 0400 (18s) -3 比-1 來得小，那應該是這個，因為 AD 的斜率應該是正值，所以應該會比他們都還大，所以這應該是最小的斜率了！ 0418 共 243s	計畫(P2) 執行(I2) 驗證(V)

(二) 小元交點文字題逐字稿

原案	備註 (編號)
0003 (17s) 坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a, b) 為何？	讀題(R)
0020 (20s) 要求交點就用…先把他列出來好了。(列條件式中)	分析(A1)
0040 (53s) 圖形恰交於一點，代表直線與這個有交點，與那個也有交點，代表他們有一個地方會相等。 他們都會有一個交點，所以他們三個函數都會有一個交點，嗯…應該是	探索(E)
0133 (77s) (計算一元二次式)，計算出 $x = 4, y = 16$。 將之代回去仍解不出 a,b，因為只有一個點是解不出兩個未知數。 所以(4,16)兩函數會有交點，但是…	執行(I1)
0250 (29s) (將 $y = x^2$ 畫出)	分析(A2)
0319 (18s) 一函數通過原點，一函數通過(2,12)，恰交於一點的話，他們倆個都是二次函數，代表要交於一點的話，他只會交在頂點上面	計畫(P)
0337 (33s) 那代表 $y = ax + b$ 應該會通過(0,0)，b 應該等於 0，然後他又跟 $y = (x - 2)^2 + 12$ 交於一點而已，應該也是交於他的頂點，所以他的頂點應該是(2,12)，所以 $y = ax + b$ 也會通過(2,12)，所以答案為 $a = 6, b = 0$。 0410 共 247 秒	執行(I2)

(三) 小安斜率文字題逐字稿

原案	備註 (編號)
0018 (30s) 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？	讀題(R1)
0048 (87s) 先畫圖吧!(在紙上作圖)	分析(A1)
0215 (16s) 直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點。	讀題(R2)
0231 (23s) 最小值…最小值的話，是負的，這樣走的話。	分析(A2)
0254 (25s) 與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點？	讀題(R3)
0319 (24s) 負的斜率的最小值(用手在空中比劃)，越平緩斜率越小。	分析(A3)
0346 (36s) (計算 AF 斜率)	
0422 (48s) 代代看 AD (計算 AD 斜率)。喔！是正的。那 AD 就不是答案。 AE 也不可能，那… 那答案就是 AF 了。	執行(I) 驗證(V)
0510	
共 292 秒	

(四) 小安交點圖文題逐字稿

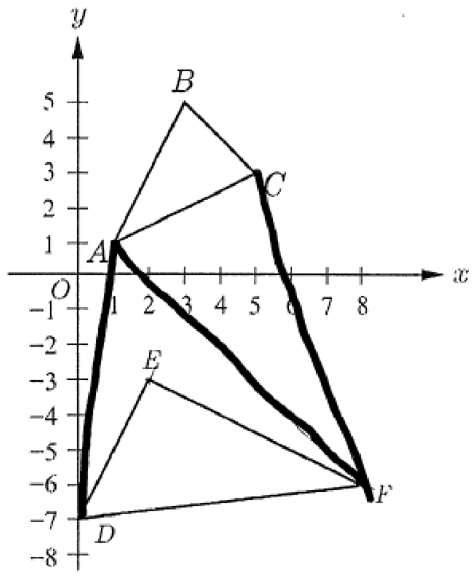
原案	備註 (編號)
0004 (31s) 坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a, b) 為何？	讀題(R1)
0035 (59s) 直線 $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ …$y = x^2$ 的話應該是這條，$y = (x - 2)^2 + 12$，$x = 2$ 的時候 $y = 12$ 應該是這條(在圖形上標記) 恰交於一點，所以是三條都交於一點？不對。	分析(A1)
0134 (136s) $y = ax + b$ 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點。 亦與…他跟 $y = x^2$ 的圖形交於一點，也跟 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形交於一點。然後(a, b)為何？	讀題(R2)
0350 (68s) 交於一點喔？所以要解聯立？	分析(A2)
0458 (306s) (計算二次函數分別與直線的交點) (代入解倆二次函數交點)得知交點為(4, 16) 將(4, 16)代入直線方程式。不對耶！有三個未知數。 亂猜代入應該會知道(暴力破解)，答案為(8, -16)	執行(I)
1004 共 600 秒	

附錄三 預試試題計算過程

(一) 小元斜率圖文題計算過程

正式預試試題

1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



A(1,1)

F(8,-6)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-6-1}{8-1}=\frac{-7}{7}=-1$$

C(5,3)

F(8,-6)

$$\frac{-6-3}{8-5}=\frac{-9}{3}=-3$$

$-3<-1$

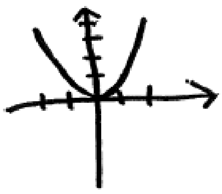
(二) 小元交點文字題計算過程

2. 坐標平面上，若直線 $y = ax + b$（其中 a, b 為實數）與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x-2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 (a, b) 為何？

$y = ax + b$

$y = x^2$

$y = (x-2)^2 + 12$



$ax + b = x^2$

$ax + b = (x-2)^2 + 12$

$x^2 = (x-2)^2 + 12$

$\Rightarrow \cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + 12$

$\Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$

$y = x^2 \Rightarrow y = 16$

$b = 0$

$2a + b = 12$

$a = 6$

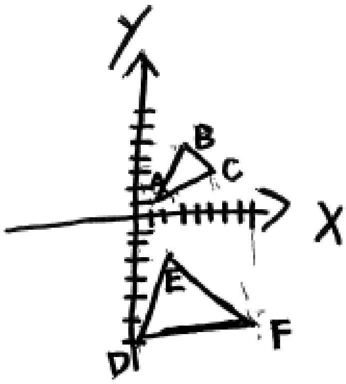
$(6, 0)$

(三) 小安斜率文字題計算過程

正式預試試題

1. 設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？

A(1,1) F(8,-6)



$$\frac{-6-1}{8-1} = \frac{-7}{7}$$

$$= -1$$

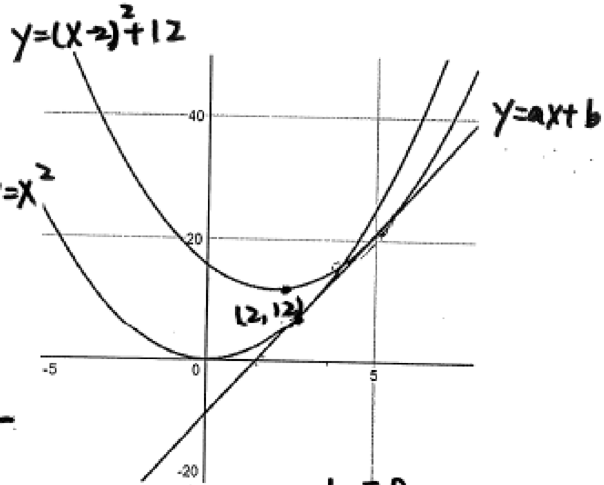
A(0,1,1) D(0,-7)

$$\frac{-7-1}{0-1} = 8 = (X)$$

A: -1

(四) 小安交點圖文題計算過程

2. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



$$\begin{cases} y=x^2 & —① \\ y=ax+b & —② \end{cases}$$

由① $y=x^2$ 代入 $=ax+b$

$x^2=ax+b$

$x^2-ax-b=0$

$x(x-a)-b=0$

$$\begin{cases} y=(x-2)^2+12 & —① \\ y=ax+b & —② \end{cases}$$

由① 代入 ②

$(x-2)^2+12=ax+b$

$x^2-4x+4+12=ax+b$

$x^2-4x-ax-b+16=0$

$x(x-4-a)-b+16=0$

$x(x-a)=b$ 代入

$x(x-4-a)-x(x-a)+16=0$

$\cancel{x^2}-4x-\cancel{ax}-\cancel{x^2}+\cancel{ax}+16=0$

$-4x=-16 \quad x=4, y=16$

$16-4a-b=0$

$4(4-a)-b=0$

$(4-2)^2+12=4a+b$

$4+12=4a+b$

$4a+b=16$

$\cancel{a=3, b=4}$

$a=8, b=-16$

$y=3x+4$

$x^2=3x+4$

$x^2-3x-4=0$

$\cancel{(x-4)(x+1)=0}$

$y=8x-16$

$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$x-4$

$a=8, b=-16$

$A=(a,b)=(8,-1$

121
144
169
18 16
$(x-3)^2$
x^2-6x+9
24 −9
32

附錄四　正式施測試題

有聲練習題

1. 試求出方程式$(\mathrm{x}-2)^2+5(x-2)-14=0$的解為 a、b，且$\mathrm{a}>\mathrm{b}$，則$\mathrm{a}=$？

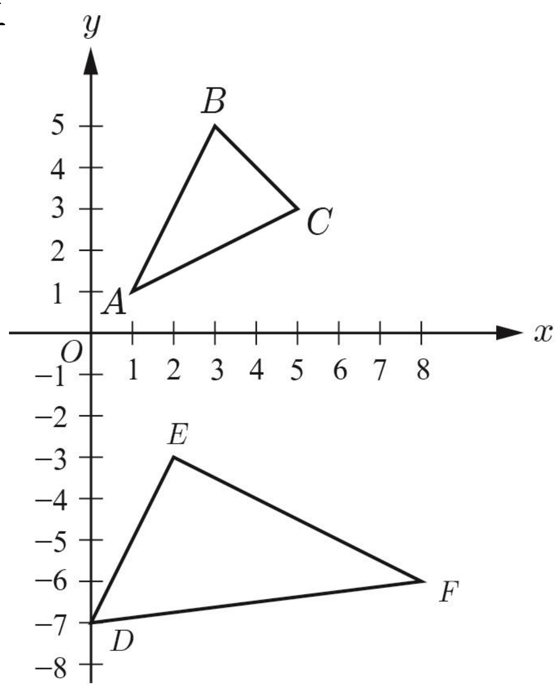
2. 有一個等式如下：

$$\mathrm{y}=-5x^2+40x-77$$

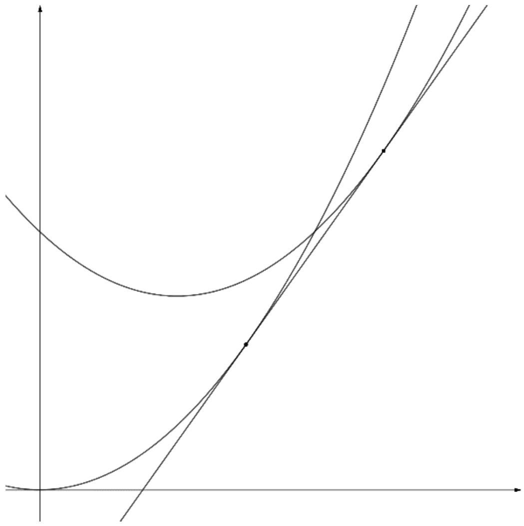
請找出這個拋物線的頂點坐標。

正式試題

1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值



2. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



附錄五　正式施測試題逐字稿

(一) S12 斜率文字題逐字稿

原案	備註 (編號)
0000 (29s) 設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？	讀題(R)
0029 (41s) 先畫圖，標出 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$。	分析(A)
0110 (11s) L 的最小值是通過 C 和 F 。	計畫(P)
0121 (23s) (計算 CF 連線斜率)得出答案	執行(I)
0144	
共 104 秒	

(二) S12 交點圖文題逐字稿

原案	備註(編號)
0149 (35s) 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=\left(x-2\right)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？	讀題(R)
0224 (140s) 先把 $y=x^2$ 代入 $y=\left(x-2\right)^2+12$，得出 $x=4$， $y=4a+b$，和 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點(在圖形標記 $y=x^2$ 和 $y=\left(x-2\right)^2+12$)， 得 $y=16$，代入前式得 $16=4a+b$，交點為 (4,16)，有點卡住了！	執行(I1)
0444 (71s) 將 $y=x^2$ 代入 $y=ax+b$，得 $x^2-ax-b=0$…	執行(I2)
0555 (58s) $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=\left(x-2\right)^2+12$ 恰交於一點。都恰交於一點…	讀題(R1)
0653 (47s) 假設交於 A、B 點，A 點為 $y=x^2$ 和 $y=ax+b$ 解聯立，B 點為 $y=\left(x-2\right)^2+12$ 和 $y=ax+b$ 解聯立…	分析(A)
0740 共 351 秒	

(三) S21 斜率圖文題逐字稿

原案	備註 (編號)
0007 (19s) 設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？	讀題(R)
0026 (44s) 以我的思考方向來做，由題目所述，若直線 L 分別與兩個三角形恰有一個交點，我就先從兩個三角形的各頂點中連出有可能的線段	探索(E)
0110(10s) (在圖形中畫出可能的連線段)	計畫(P)
0120 (53s) 由斜率的定義知，CF 線段的斜率會是最小值。先列出座標，把 C 和 F 座標列出來後，用斜率的定義將之算出，得出答案。	執行(I)
0217	
共 130 秒	

(四) S21 交點文字題逐字稿

原案	備註(編號)
0221 (45s) 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？	讀題(R)
0306 (24s) 由題目得知，我會想要…因為 $y=ax+b$ 會過 $y=x^2$ 和 $y=(x-2)^2+12$，所以我會試著去找出他們的交點	分析(A)
0330 (111s) 把 $y=x^2$ 代入 $y=(x-2)^2+12$，得出 $x=4$，$y=16$，交點為 (4,16)，會剛好經過 $y=x^2$ 和 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形	執行(I1)
0521 (87s) 接下來我會把求得的 (4,16) 代入 $y=ax+b$ 中，得出 $16=4a+b\ldots$	執行(I2)
0648 (77s) 將 $y=ax+b$ 整理成 $x=\dfrac{y-b}{a}$，並將其代入 $y=x^2$ 中，整理後…	執行(I3)
0805 共 344 秒	

(五) S11 斜率文字題逐字稿

原案	備註 (編號)
0013 (27s) 設 $A(1,1),B(3,5),C(5,3),D(0,-7),E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？	讀題(R)
0040 (58s) 直接畫出來...(在紙上作圖，並標上座標)	分析(A)
0142 (70s) 就畫圖嘛，三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，所以有可能是 BD、BF、CE、CF，這畫的有點糟。	計畫(P)
0252 (48s) 用眼睛看一下，看起來 CF 連線的斜率最小，(計算 CF 連線斜率)，得出答案。	執行(I)
0340 共 207 秒	

(六) S11 交點文字題逐字稿

原案	備註(編號)
0353 (33s) 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？	讀題(R)
0426 (73s) 一樣先畫圖，畫出兩拋物線	分析(A)
0539 (29s) 試著把 $y=x^2$ 代入 $y=ax+b$ 整理	執行(I1)
0608 (52s) 因為恰交於一點所以重根，所以判別式為零	探索(E)
0700 (121s) 也把 $y=(x-2)^2+12$ 代入 $y=ax+b$ ，整理後並計算其判別式 將兩判別式做聯立，得出答案。	執行(I2)
0901 共 308 秒	

(七) S22 斜率圖文題逐字稿

原案	備註 (編號)
0000 (24s) 設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？	讀題(R)
0024 (67s) 因為恰有一個...如果各有一個的話可能是，在 AD 線段上的線或是 CF 上或者是 CE。	計劃(P)
0131 (69s) 所以如果是 AD 的話(計算 AD 連線的斜率)，如果是 CF (計算 CF 連線的斜率)，然後 CE 是正的。答案是 -3。	執行(I)
0240	
共 160 秒	

(八) S22 交點圖文題逐字稿

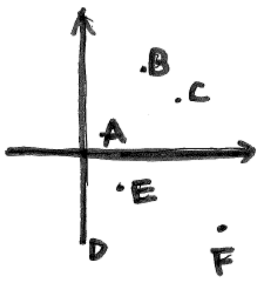
原案	備註(編號)
0254 (23s) 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ 與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？	讀題(R)
0317 (6s) 如果是交於一個點就是只有一個解。	分析(A)
0323 (25s) 與 $ax+b=x^2$ 有一解，與 $ax+b=(x-2)^2+12$ 有一解，所以可以用判別式等於零。	探索(E)
0348 (8s) 列出 $ax+b=x^2$ 與 $ax+b=(x-2)^2+12$，並分開討論。	計畫(P)
0356 (139s) (移項並分別列出判別式) (將第一式的解代入第二式，求出答案)	執行(I)
0615	
共 201 秒	

附錄六　正式施測試題計算過程

(一)　S12 斜率文字題計算過程

正式試題

1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？

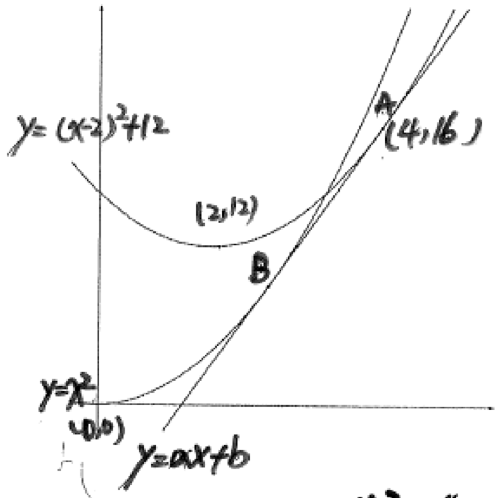


$$\frac{-6-3}{8-5}=\frac{-9}{3}=-3$$

∴ m_L最小值$=-3$

(二) S12 交點圖文題計算過程

2. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



$x^2=(x-2)^2+12$

$x^2=x^2-4x+4+12$

$-4x+16=0$

$\underline{x=4}$

$\underline{y=4a+b}$

$16=4a+b$

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=ax+b \end{cases}$

$x^2=ax+b$

$\underline{x^2-ax-b=0}$

$x=t$

$y=\underline{at+b}$

$\underline{a>0}$

~~4a+16²≠~~

$\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases}$ A

$\begin{cases} y=(x-2)^2+12 \\ y=\cancel{x}\,ax+b \end{cases}$ B

$x^2=ax+b$

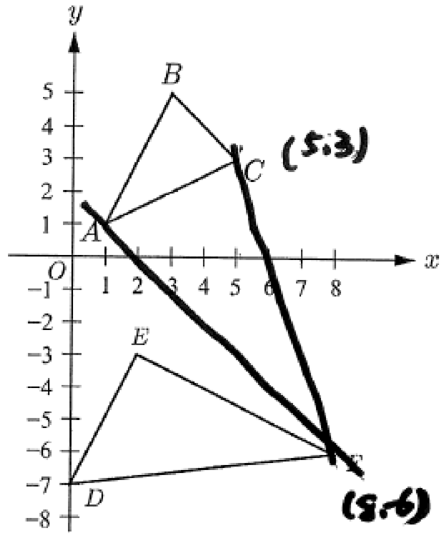
$(x-2)^2+12=ax+b$

(三) S21 斜率圖文題計算過程

正式試題

1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。

   若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



Pf

斜率 $\frac{-6-3}{8-5} = \frac{-9}{3} = -3$ min

(四) S21 交點文字題計算過程

2. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？

$$\begin{cases} y=(x-2)^2+12 & -① \\ y=x^2 & -② \end{cases}$$

②代①

$x^2=(x-2)^2+12$

$x^2=x^2-4x+4+12$

$4x=16$

$x=4$

得知 $y=16$

$(4,16)$

$y=ax+b$

~~16=4x+b~~

$16=4a+b$ $-①$

$$\begin{cases} y=ax+b \\ ax=y-b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \end{cases}$$

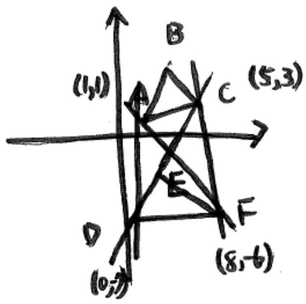
$y=x^2 \Rightarrow (ax+b)^2=\left(\frac{y-b}{a}\right)^2$

$\therefore\ a^2x^2+2abx+b^2=\frac{(y-b)^2}{a^2}$

(五) S11 斜率文字題計算過程

正式試題

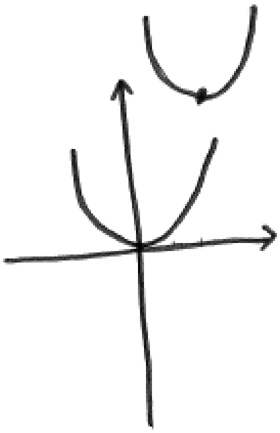
1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



$\frac{-9}{3}=-3$

(六) S11 交點文字題計算過程

2. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



$y=ax+b$ 代入 $y=x^2$

$ax+b=x^2$

$x^2-ax-b=0$

$a^2-4\times1\times(-b)=0$

$a^2+4b=0$

$ax+b=x^2-4x+4+12$

$x^2+(-4-a)x+16-b=0$

$a^2+8a+16-4\times1\times(16-b)=0$

$a^2+8a+16-64+4b=0$

$a^2+4b+8a=48$

$8a=48$

$a=6$

$36+4b=0$

$b=-9$

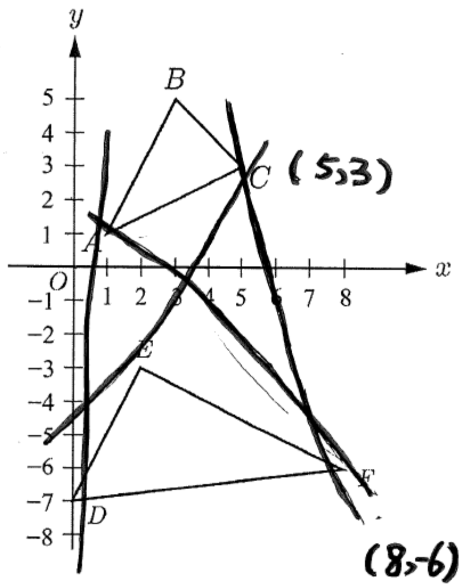
$(6,-9)$

(七) S22 斜率圖文題計算過程

正式試題

1. 設 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,3)$, $D(0,-7)$, $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。

   若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？



$\overline{AD}$: $m = \dfrac{1-(-7)}{1} = 8$

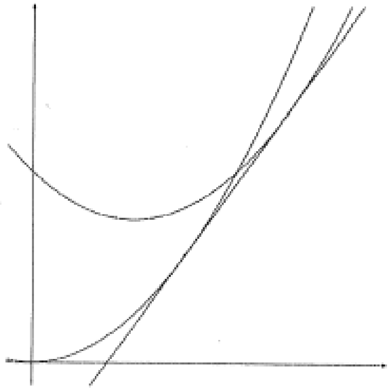
$\overline{CF}$: $m = \dfrac{9}{-3} = -3$

$\overline{CE}$: ∠F

-3

(八) S22 交點圖文題計算過程

2. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 (a,b) 為何？



(1) $ax+b=x^2$

$\Rightarrow x^2-ax-b=0$

$d=a^2+4b=0$

(2) $ax+b=(x-2)^2+12$

$\Rightarrow (x-2)^2+12-ax-b=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+12-ax-b=0$

$\Rightarrow x^2-(4+a)x+(16-b)=0$

$d=(4+a)^2-4(16-b)=0$

$\Rightarrow 16+8a+a^2-64\overset{-a^2}{\overset{\parallel}{+4b}}=0$

$\Rightarrow 16+8a+\cancel{a^2}-64-\cancel{a^2}=0$

$\Rightarrow 8a=-48 \Rightarrow a=-6,\ b=-a^2=-36$

$\therefore (a,b)=(-6,-36)$