



國立中山大學教育研究所

碩士論文

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Master Thesis

高二學生在線性規劃之解題歷程研究

A Study on Grade 11 Students' Problem Solving

Process on Linear Programming

研究生：徐家煌

Chia-Huang Hsu

指導教授：梁淑坤 博士

Dr. Shuk-Kwan S. Leung

中華民國 108 年 6 月

June 2019

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士班

研究生徐家煌（學號：M066050001）所提論文

高二學生在線性規劃之解題歷程研究

A Study on Grade 11 Students' Problem Solving Process on Linear Programming

於中華民國108年5月1日經本委員會審查並舉行口試，符合
碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 左太政 左太政 委員 梁淑坤 梁淑坤

委員 周珮儀 周珮儀 委員 _____

委員 _____ 委員 _____

指導教授(梁淑坤) 梁淑坤 (簽名)

誌 謝

時光匆匆，兩年的碩士生涯在此畫上句點，心中的酸甜苦辣化做道不盡的感謝，回憶起早上四、五點起床寫論文的時刻，或許是我還年輕，還有這股衝勁與論文奮鬥。碩班期間，感謝我的指導教授梁淑坤博士，就如同我第二個媽媽，每天督促我的論文進度，有時連作夢都會夢到梁師在我身旁耳提面命的指導，平時對於生活上的關照也是面面俱到，同時還要感謝中山大學教育所周珮儀教授，及高師大數學系左太政教授在口試時的斧正與指導；再來，要感謝我的梁門師兄弟姊妹們—仁傑學長、璿文學長、科亦學長、璧鴻及玉雪，當我提計畫及口試的時候，總是二話不說立即伸出援手，排除萬難到場加油打氣，有你們真好；此外，也要感謝中山大學教育所的所有教授及所辦的姊姊們，碩班的這兩年承蒙關照，不勝感激。最後，要謝謝父母支持我念碩士，也要謝謝我的姊姊給予協助，皆是我的精神支柱來源。

回首讀書生涯的十九年，研讀碩士班是我最充實也最快樂的求學階段，身旁有許多志同道合將來要當老師的同學們，彼此相互勉勵，我是何等的幸福。

徐家煌 謹誌於

國立中山大學教育研究所

2019年5月

高二學生在線性規劃之解題歷程研究

徐家煌

國立中山大學教育研究所

摘 要

本研究旨在透過 Schoenfeld (1985) 的數學解題歷程 6 階段（讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證），分析高二學生在線性規劃的解題歷程、解題策略以及成敗因素。本研究以專家效度的方式篩選出 3 題線性規劃試題，正式樣本以立意取樣的方式選取高雄市某高二班級學生 3 位（高、中、低），再進行放聲思考以及事後晤談。參與者作答完畢後，將放聲思考之內容轉為逐字稿，並經過信度檢核之後進行原案分析。

研究結果發現，線性規劃解題歷程經過以上的 6 階段，僅有 1 位學生於其中 1 題作答時無「驗證」階段。再者，本研究的線性規劃試題的解題策略包含平行線法與頂點法兩種，均出現在預試及正式施測收集的資料內，由於教師教學上習慣用頂點法，故參與者作答時均採用頂點法。最後，線性規劃解題成敗因素除了學科內容還有解題能力，影響成敗主要因素為學生的讀題能力、學生的計算能力以及學生的解題行為。

未來研究方面，研究者可以選用高中不同單元作為題材，以及加

入來自不同班級的學生，其可探討之內容更為豐富。

至於未來教學建議方面，教師應著重學生解題能力的培養以及注重學生的解題歷程，而非只追求結果正確；此外，教師教學不妨加入自我檢核或同儕互助，既可降低出錯率，亦可立即修正並分享想法，符合目前國家課程綱要的精神。

關鍵字：線性規劃、解題歷程、解題策略、成敗因素



A Study on Grade 11 Students' Problem Solving Process on Linear Programming

Chia-Huang Hsu

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Abstract

This study analyzes high school students' problem-solving processes, problem-solving strategies, and factors for success/failure in solving problems in linear programming (LP) using Schoenfeld's (1985) time-line representation (Read, Analyze, Explore, Plan, Implement, Verify) for analyzing a mathematical problem-solving process. The problem set included 3 test questions on linear programming with validity checked by experts. Three high school students in Kaohsiung City (high, medium and low levels) were participants, and they were guided to participate in thinking aloud and post think aloud interviews. After the participants finished answering the provided questions, the researcher transcribed the contents of thinking aloud into protocols, and completed reliability check on analyzing the protocols. There are three research findings. First, only one student did not exhibit Verification stage [V] when answering one of the questions, all other students' linear programming problem-solving processes are in accordance with the six stages of problem-solving processes given in Schoenfeld (1985). Second, two strategies (Vertex, Parallel Lines) were found in pilot study and main study. However, the use of linear programming problem-solving strategy may be influenced by the instructor. When the teachers used the vertex method in teaching, the participants also used the vertex method when answering. Third, the main factors affecting students' success or failure in solving LP problems required not only subject matter knowledge, but also students problem-solving ability, and competence in reading questions, calculation and students' problem-solving behaviors. Suggested future studies are different modules in high school or students from different classes. In terms of pedagogical implications and suggestions, teachers should focus on students' reading, analytical and planning skills, and

focus on solving processes rather than just checking the correct answers. In addition, teachers can develop students' ability to calculate and self-verify, thus reducing the error rate, and enabling students' to do self-correction process immediately or share ideas with others, which is in alignment with the spirits of the recent curriculum standards.

Keywords: linear programming, problem-solving process, problem-solving strategies, factors for success/failure

目 錄

第壹章 緒論.....	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的.....	3
第三節 待答問題.....	3
第四節 名詞解釋.....	3
第五節 研究限制.....	4
第貳章 文獻探討.....	7
第一節 解題歷程策略探討.....	7
(一) Polya (1945) 解題歷程.....	7
(二) Kilpatrick (1967) 解題歷程.....	10
(三) Schoenfeld (1985) 解題歷程.....	12
(四) Mayer (1992) 解題歷程.....	17
第二節 影響解題表現原因之探究.....	22
第三節 高二數學教材分析.....	32
(一) 課程理念.....	32
(二) 線性規劃.....	35
第參章 研究方法與設計.....	41
第一節 研究設計.....	41

第二節 研究對象	41
第三節 研究工具	42
第四節 資料蒐集與分析	44
第五節 預試及資料分析	46
(一) 運動題	46
(二) 手套題	50
(三) 代購題	53
(四) 綜合討論與比較	57
(五) 試題修正	60
第四章 研究結果與發現	61
第一節 線性規劃解題歷程分析	61
(一) 大意失荊州的小寬 (低分者)	62
(二) 過關斬將的小好 (中分者)	74
(三) 勝券在握卻功敗垂成的小珍 (高分者)	88
(四) 綜合比較與討論	101
第二節 線性規劃解題策略探討	108
(一) 運動題的解題策略	108
(二) 手套題的解題策略	109
(三) 代購題的解題策略	110

(四) 綜合討論與比較.....	111
第三節 線性規劃成敗因素探究.....	112
(一) 小寬的運動題—欲速則不達	112
(二) 小寬的代購題—馬虎失街亭	113
(三) 小珍的代購題—智者千慮必有一失.....	114
第四節 低分者、中分者、高分者解題的發現	116
(一) 計算能力	116
(二) 掌握問題的結構.....	116
(三) 工具的輔助與使用	117
(四) 計算版面的配置.....	117
第五章 結論與建議.....	119
第一節 研究結論	119
(一) 線性規劃解題歷程有 6 階段	119
(二) 線性規劃解題策略共有兩種	120
(三) 線性規劃解題成敗因素除了學科內容還有解題能力	120
第二節 未來研究與教學上的建議	122
(一) 未來研究的建議.....	122
(二) 教學上的建議.....	123
參考文獻	125

一、 中文文獻	125
二、 英文文獻	127
附錄	129
附錄一 預試試卷	129
附錄二 預試試題逐字稿	133
(一) 運動題逐字稿	133
(二) 手套題逐字稿	135
(三) 代購題逐字稿	137
附錄三 預試試題計算過程	139
(一) 放聲思考練習題	139
(二) 運動題計算過程	140
(三) 手套題計算過程	141
(四) 代購題計算過程	142
附錄四 正式施測試題	143
附錄五 正式施測試題逐字稿	147
(一) 小寬運動題逐字稿 (低分者)	147
(二) 小寬手套題逐字稿 (低分者)	148
(三) 小寬代購題逐字稿 (低分者)	150
(四) 小好運動題逐字稿 (中分者)	152

（五）小好手套題逐字稿（中分者）	154
（六）小好代購題逐字稿（中分者）	156
（七）小珍運動題逐字稿（高分者）	158
（八）小珍手套題逐字稿（高分者）	160
（九）小珍代購題逐字稿（高分者）	162
附錄六 正式施測試題計算過程.....	164
（一）小寬放聲思考練習題（低分者）	164
（二）小寬運動題計算過程（低分者）	165
（三）小寬手套題計算過程（低分者）	166
（四）小寬代購題計算過程（低分者）	167
（五）小好放聲思考練習題（中分者）	168
（六）小好運動題計算過程（中分者）	169
（七）小好手套題計算過程（中分者）	170
（八）小好代購題計算過程（中分者）	171
（九）小珍放聲思考練習題（高分者）	172
（十）小珍運動題計算過程（高分者）	173
（十一）小珍手套題計算過程（高分者）	174
（十二）小珍代購題計算過程（高分者）	175
附錄七 事後晤談札記	176

（一）小寬事後晤談札記.....	176
（二）小好事後晤談札記.....	177
（三）小珍事後晤談札記.....	178

圖 次

圖 2 - 1	解題歷程原案分析的時間架構表徵圖	15
圖 2 - 2	Schoenfeld 之解題基模大綱圖	16
圖 2 - 3	Mayer 之解題歷程與知識關係圖	19
圖 2 - 4	Leung 之解題基模大綱圖	22
圖 2 - 5	胡炳生之數學問題系統圖	30
圖 2 - 6	線性規劃課程地圖	40
圖 3 - 1	運動題解題歷程階段圖	49
圖 3 - 2	手套題解題歷程階段圖	52
圖 3 - 3	代購題解題歷程階段圖	56
圖 4 - 1	小寬運動題解題歷程階段圖	64
圖 4 - 2	小寬手套題解題歷程階段圖	68
圖 4 - 3	小寬代購題解題歷程階段圖	73
圖 4 - 4	小好運動題解題歷程階段圖	77
圖 4 - 5	小好手套題解題歷程階段圖	82
圖 4 - 6	小好代購題解題歷程階段圖	87
圖 4 - 7	小珍運動題解題歷程階段圖	91
圖 4 - 8	小珍手套題解題歷程階段圖	96
圖 4 - 9	小珍代購題解題歷程階段圖	101

表 次

表 2 - 1	Polya 的解題技巧導引表.....	9
表 2 - 2	Kilpatrick 解題歷程與策略表.....	11
表 2 - 3	Schoenfeld 之解題階段及相關問題表	13
表 2 - 4	解題歷程分析表	21
表 2 - 5	103 課綱微調後高二上學期數學學習內容架構表.....	37
表 3 - 1	線性規劃之解題歷程各階段定義對照表	45
表 4 - 1	小寬、小好、小珍答題情況表	112

第壹章 緒論

本研究欲探討的是高二學生在線性規劃解題過程中，其解題歷程的情形。第壹章共分為五節，分別為研究動機、研究目的、待答問題、名詞解釋、研究限制，詳列如下。

第一節 研究動機

過去的數學教育，往往只重視答案的正確與否，多數人追求「標準答案」，而忽略中間的計算過程。但隨著時代的變遷，國內外對於數學教育的內涵逐漸改變，現今的數學教育慢慢開始注重學生解題過程中的思考方式及計算過程。

國中升高中升學制度裡的考試題目，從以前的國中基測全選擇題的出題方式，演變成現今的國中會考含兩題非選擇題，學生除了必須知道如何算出正確答案之外，對於整個題目的架構必須非常清楚，並且能夠有組織脈絡的把計算過程完整寫下來。高中升大學的指定科目考試也包含了兩題非選擇題，分數比重占整份考卷將近四分之一，從計算過程中可展現每位考生的解題策略。在國內考試領導教學的風氣下，中學數學教師勢必要更加注重學生學習數學的思考方式及解題過程。

美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) 歷年來所公佈的數學課程評鑑標準中，把「問題解決」列為

重點之一 (NCTM, 2000)。即將上路的 108 國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域綱要當中的課程目標也強調問題解決的能力，希望能達成「培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力」，故解題被數學教育家認為是數學學習重點之一 (Kilpatrick, 1978；NCTM, 1989；Schoenfeld, 1994；Silver, 1985)。

Schoenfeld (1985) 提出影響解題的四個要素包含資源 (resources)、捷思 (heuristics)、控制 (control)、信念系統 (belief system)，將解題歷程分為讀題、分析、探索、計畫執行、驗證、轉移共 6 個階段。過去的解題歷程研究，對於高中的課程內容主要以三角、指數與對數函數、排列組合做分析，卻鮮少針對線性規劃之解題歷程作探討。而大學指定科目考試數學乙，從民國 100 年至 107 年，線性規劃是每年必考的題目；此外，研究者統計歷屆數乙指考題發現，除了 106 年數乙將線性規劃考在選填題之外，其餘每年的線性規劃均考在非選擇題，配分比重均落於 12~13 分，由此可見線性規劃在高中社會組課程中佔有相當重要的地位。

故本研究希望探討的是，高二學生在龍騰版（2017 年）第二章的學習內容—線性規劃當中，其解題歷程為何？在解題中最常運用的策略為何？以及探討解決線性規劃問題之成敗因素為何？並歸納整理後，可提供給現場的老師參考，希望能對其教學有所幫助。

第二節 研究目的

根據上述的研究動機，本研究目的的主要為探討高二學生在線性規劃問題當中的解題歷程，具體而言，提出以下 3 項主要目的：

- (一) 探討高二學生在線性規劃問題上之解題歷程。
- (二) 探討高二學生在線性規劃問題上之解題策略。
- (三) 探討高二學生在線性規劃問題上之成敗因素。

第三節 待答問題

根據上述的研究目的，本研究擬定之待答問題為以下兩點：

- (一) 高二學生在線性規劃問題上所呈現的解題歷程為何？
- (二) 高二學生在線性規劃問題上所運用的解題策略有哪些？
- (三) 高二學生在線性規劃問題上成功與失敗的因素為何？

第四節 名詞解釋

- (一) 高中二年級學生

本研究的高中二年級學生係指 106 學年度進入高中就讀之高中生，學生在本研究進行時已經升上高二，於高一上學期第二章已學習一次函數、二次不等式，以及高二上學期第二章第一節「直線方程式及其圖形」，再進行第二節「線性規劃」的學習。

(二) 線性規劃

目前我國高中二年級上學期第二章「直線與圓」單元之第二節線性規劃，學生須先學習完直線方程式後，方能接續學習線性規劃的部分。

(三) 解題歷程

解題歷程為解題者在面對問題時，無法立即得出答案，必須與過去的先備知識、原理或方法做連結，以獲得答案的心智歷程。本研究參考 Schoenfeld (1985) 的解題模式，將解題歷程的模式分為讀題 (R)、分析 (A)、探索 (E)、計畫 (P)、執行 (I)、驗證 (V) 共 6 個階段，用以呈現參與者的解題歷程。

(四) 放聲思考法

放聲思考法 (thinking aloud) 為解題者在解題的過程中，同時以口頭的方式將腦中的想法表達出來。因本研究重視整個解題歷程，故採以放聲思考法，對解題歷程做更深入的探討。

第五節 研究限制

本研究限制共有 3 個方面，包含樣本、資料蒐集及教材選取，分別敘述如下：

(一) 在樣本方面，採立意取樣，以高雄市的學生為主體，且對象取自高二學生一個班級共 41 人中的 3 人，故研究結果只能推論到

學習背景相關的學生，不適用於台灣全體高中生。

- (二) 在資料蒐集方面，本研究採取放聲思考與事後晤談的方式來蒐集學生解題歷程的資料，因放聲思考並非為所有學生所熟悉，雖有事前的訓練，但仍存在許多不可控制的干擾因素。
- (三) 在教材選取方面，本研究主要針對高二上學期課程中的線性規劃作探討，因此單元有其獨特性，未必能推論至其它所有單元，故其它主題有待相關研究去作探討及驗證。

第貳章 文獻探討

本章主要針對過去的學者在解題歷程、影響解題表現原因之探究，以及現行 99 課網的內容進行文獻回顧，並藉由部份的理論基礎作為採用的研究方法，進而分析學生的解題歷程。第貳章主要分為 3 節，分別為解題歷程策略探討、影響解題表現原因之探究、高二數學教材分析。

第一節 解題歷程策略探討

解題歷程係指解題者在面對問題時，結合過去的先備知識、原理或方法做連結，最終獲得答案的心智歷程。探討學生在數學上的解題歷程，是協助老師了解學生認知發展結構的最佳方法（謝淡宜，1998）。過去國內外學者對於數學解題歷程的分類方法不盡相同，本節欲回顧過去不同學者所提出的解題歷程步驟，並加以整理，其內容包含 Polya (1945) 解題歷程、Kilpatrick (1985) 解題歷程、Schoenfeld (1985) 解題歷程以及 Mayer (1992) 解題歷程，分別敘述如下：

（一）Polya (1945) 解題歷程

Polya (1945) 在怎樣解題 (How to solve it) 一書最早提出有系統的解題歷程，書中提及解題可以分為 4 階段，包含了解問題 (understanding the problem)、擬訂計畫 (devising a plan)、執行計畫

(carry out the plan)、驗算與回顧 (look back)，其解題歷程 4 階段說明如下：

1. 了解問題 (understanding the problem)：在Polya的解題歷程中，第一階段是了解問題本身，藉由問題所給予的提示以及自我的先備知識，了解並分析已知條件，進而找到未知條件。此階段看似基本，卻非常重要，許多學生在解決問題時，一開始並未完整了解題意而影響解題的成功與否。
2. 擬定計劃 (devising a plan)：在解題的過程中，可先從自身的先備知識與舊經驗中，回想曾經是否遇過類似的問題，找出已知條件和未知條件之間的關係，最後確認是否所有的條件均使用到，如果在檢視完畢後得不到結果，就必須利用輔助工具來獲得解題想法，如：尋找規律、畫圖、建構模型、使用公式、由結果反推等，來擬定出解決問題的程序。
3. 執行計劃 (carry out the plan)：此階段相較於擬訂計畫簡單，在解題的過程中，執行擬定之計劃，採用適當的解題策略並進行解題，確認每一個步驟的正確性，直到完成解題；若未能完成，則另選擇其他較適當的策略。
4. 驗算與回顧 (look back)：此階段需檢驗所得到的結果是否合理，可藉由把結果代回情境中，或是利用不同的方法檢驗是否得到相同的

結果，同時可思考能否把這個結果或方法，應用到其他的問題上。

Polya 在不同的解題歷程中，做更細部的探討，利用許多疑問句，引導解題者進行各階段的探索，並且能讓解題者更加清楚目前身處何階段。Polya 的解題歷程與相關問題如表 2-1 所示：

表 2 - 1 Polya 的解題技巧導引表

階段	相關問題
第一 你要了解問題	了解問題 未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？ 解答能夠滿足這些條件夠嗎？已知的條件是否足夠決定未知數？太少？太多？或是彼此有矛盾？ 畫個圖。採用合適的記號或符號。 你能把條件的各個部分分開並且寫下來嗎？
第二 找出已知數和未知數的關係 如果這個關係不是很明確，你可以試試考慮類似的問題 最後，你應該能想出解題的計畫	擬定計畫 你是否看過這個題目？或是看過相同、但以不同方式表達的題目？ 你是否知道什麼相關的題目？你是否知道什麼定理可以派得上用場？ 仔細看未知數！並試著想想有什麼類似的問題，有相似或相同的未知數。 這裡有個你以前解過的問題，你能運用它嗎？你能運用它的結果？或是方法？是否需要引入什麼輔助元素，才能讓這個解決過的問題派上用場？ 你能否把問題重新敘述一遍？或是用不同的話再說一次？回到定義看看。 如果不能解決眼前的問題，試著先從一些相關問題著手。考慮一些相關但比較容易解決的問題？ 例如，比較一般化的問題？比較特殊的問題？相似或類比的問題？你能否只解決問題裡的

	的某個部分？只考慮條件的某個部分，而先忽略其他部分；再看看離真正的未知數有多遠，還可以做什麼改變？你能從已知數中找到什麼線索？未知數或已知數可以怎麼改變（必要時，同時改變二者），來讓它們彼此更接近一些？ 你是否已經使用了所有的已知數？你是否已經用了所有的條件？你是否已考慮了與問題相關的所有必要觀念？
第三 執行你的計畫	執行計畫 把你的解題計畫付諸實現，仔細地檢查每一個步驟。你能否清楚地確定每一個步驟都是正確的？你能否證明每個步驟都是正確的？
第四 檢查你得到的解答	你可以驗算所得的答案嗎？能不能檢驗你的論證過程？ 你能否用不同的方法得出相同的答案？你能否一眼就看出答案來？ 你能否把這個結果或方法，應用到別的問題上？

資料來源：蔡坤憲. (2006). 怎樣解題 (p.18-19). 原作者: *George Polya*

臺北市: 天下文化出版社.

(二) Kilpatrick (1967) 解題歷程

Kilpatrick (1967) 依據Polya的解題4階段為依據，探討八年級學生解非例行文字題的策略，並根據結果發現學生使用的策略大致上可分為圖畫、使用連續漸進法、詢問自己問題解決方法的存在性與唯一性、演繹、運用算式、嘗試錯誤、檢查答案共七大項，細分如下：

表 2 - 2 Kilpatrick 解題歷程與策略表

一、 了解問題
1. 辨認未知的資料或條件 2. 畫圖 3. 引入符號
二、 擬訂計畫
1. 複述問題 2. 考慮相關問題
三、 執行計畫
1. 使用連續漸進的方法 2. 發現結果前檢查步驟
四、 檢討
1. 檢查結果是否合理 2. 檢查結果是否合乎條件 3. 回溯論證的步驟 4. 使用其他的方法獲得結果

資料來源：Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problem in mathematics: An exploratory study* (p.46). Doctoral dissertation, Stanford University. University Microfilms International.

根據上表可以得知，Kilpatrick (1967) 並沒有改變 Polya (1945)

解題歷程 4 階段的架構，而是對每一階段的解題策略做更進一步的探討與細分，且將 Polya (1945) 解題歷程的 4 階段中的相關問題做更精簡的整理。

(三) Schoenfeld (1985) 解題歷程

Schoenfeld (1985) 強調影響數學解題需考慮 4 個變項，包含資源 (resources)、捷思 (heuristics)、控制 (control) 及信仰系統 (belief systems)。

資源指的是解題者在一開始解題時所擁有的數學相關知識，包括事實、定義、程序、技能等知識。

捷思為解決不熟悉或非標準問題之有利於解題的技巧，捷思策略可以幫助解題者清楚了解題意，並且朝正確的解題方向前進。在解題的過程中，十分重視這方面的知識，例如：簡化問題、畫表格、逆推、猜測……等。倘若一個人有豐富的解題資源，但缺乏合適的解題策略，往往遇到題目會不知道如何下手。

控制是指在解題過程中，對於「要做什麼」做出決定，即有關於前兩個變項「資源」和「捷思」策略的抉擇與執行之決定，例如：擬定計劃、選擇目標和次目標、監控、確定解法，發展、修改、或終止計劃等，除此之外，Schoenfeld認為這些與後設認知息息相關。因為其主要任務是規劃、監控與調整整個解題歷程的活動，以使解題最終能獲得正確解答，故控制在解題過程中常常位居主導的地位。

信仰系統是指解題者對於自己、環境、主題以及數學的觀點，會影響其解題行為。例如有些學生認為，出社會之後，生活上只會用到加、減、乘、除而已，沒有必要學習更艱深的數學，因此對數學存有

錯誤的觀點，進而影響其對數學的學習態度，最後呈現自我放棄的狀態。故就算擁有資源、捷思、控制3個變項，若缺乏良好的信仰系統，也容易前功盡棄，功虧一簣。

由於控制因素居於較為關鍵的地位，因此Schoenfeld特別在解題歷程中，以控制因素的觀點，將解題歷程劃分為讀題 (reading)、分析 (analysis)、探索 (exploration)、計畫-執行 (planning-implementation)、驗證 (verification)、遷移 (transition) 共六個階段，整理如下表：

表 2 - 3 Schoenfeld 之解題階段及相關問題表
(譯自 Schoenfeld, 1985, p.297-301)

階段	相關問題
一、讀題 (Reading)	R1：注意到問題所有條件嗎？條件是明顯的？或是模糊的？ R2：正確了解目標狀態嗎？目標狀態是明顯的？或是模糊的？ R3：是否評估解題者現有知識與問題的關係？
二、分析 (Analysis)	A1：選擇什麼觀點？選擇是明顯的或是不明顯的？ A2：選擇問題條件採取行動嗎？ A3：根據問題目標採取行動嗎？ A4：條件和目標有何關聯？ A5：解題者的行動(A1-A4)合理嗎？
三、探索 (Exploration)	E1：本階段是問題的條件引起的？或目標引起的？ E2：所採行動有方向或重點嗎？行動有目的嗎？ E3：有無監視行為？監視行為的有無對解答的結果有何影響？ E4：解題者所採取的行為是否合理？

四、計畫-執行 (Planning- Implementation)	PI1：是否有計畫行為？ PI2：計畫與解題有關係嗎？是否適當？ 是否有良好架構？ PI3：學生是否評估計畫的相關性、適當性及結構性？ PI4：執行是否依計畫有系統的進行？ PI5：是否在局部或整體層次評估執行？ PI6：評估之有無對結果的影響如何？
五、驗證 (Verification)	V1：解題者是否重新檢查解答？ V2：有無考驗解答？如果有的話，如何考驗？ V3：有無歷程及解答的評估？對結果的信心有多少？
六、遷移 (Transition) 階段與階段之間的連接處	T1：對解題的當前狀態有無評估？若放棄一種解題途徑，是否企圖利用其中有用的部份？ T2：有無評估先前放棄的解題途徑，對解答產生的局部與整體影響如何？所採行動適當而必要嗎？ T3：是否評估採取新途徑的短程或長程的影響？或直接跳入新的方法？ T4：採用新途徑後有無評估短程及長程影響如何？行動是否適當而必要？

Schoenfeld (1985) 提供研究者一種呈現解題歷程的方法，稱為6

階段時間序列圖，被國內外者研究者使用，如下圖所示：



圖 2 - 1 解題歷程原案分析的時間架構表徵圖

(譯自 Schoenfeld, 1992, p.356)

圖 2-1 說明參與者先進行讀題 (R)，再進入探索 (E) 階段，整個解題歷程中並沒有分析 (A)、計畫 (P)、執行 (I) 和驗證 (V) 4 個階段，就停下來不再解題。

本研究將採用以上 Schoenfeld 的 6 階段時間序列圖 (R-A-E-P-I-V)，來呈現高中學生在線性規劃應用問題當中的解題歷程。

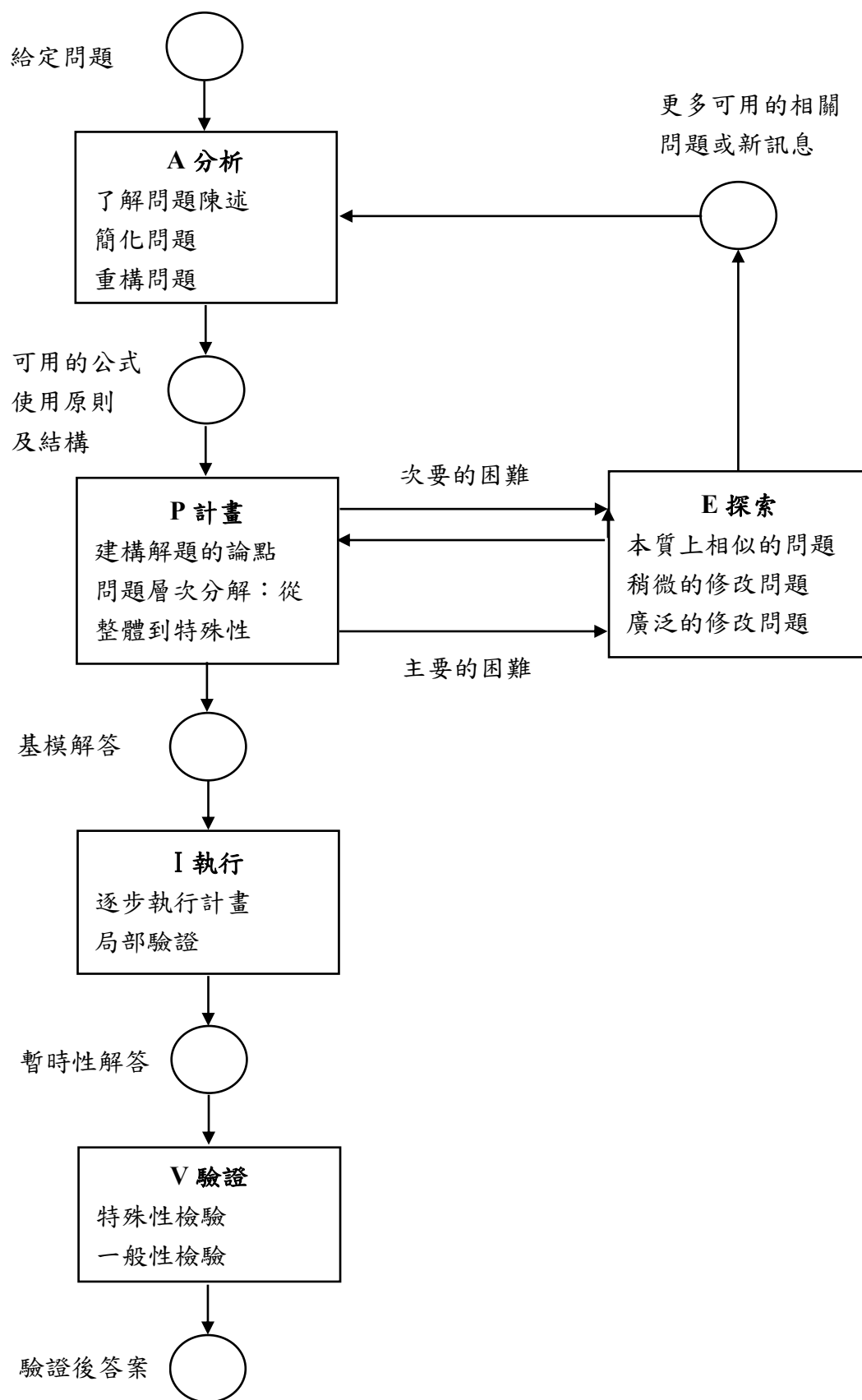


圖 2 - 2 Schoenfeld 之解題基模大綱圖
(譯自 Schoenfeld, 1985, p.110)

(四) Mayer (1992) 解題歷程

Mayer (1992) 的解題歷程是從認知心理學觀點去探討，強調解題者的心理運作過程，認為解題歷程包含「問題表徵 (problem representation)」與「問題解決 (problem solution)」共兩階段，其兩階段又個包含了兩個步驟，茲分別述如下：

1. 問題表徵：將問題的文字或圖像轉為內心的心智表徵。

(1) 問題轉譯 (problem translation)：解題者必須全盤了解題目的意思，進而將問題的陳述或詞語轉化為內心的表徵。與

Schoenfeld (1985) 的 6 階段解題歷程相比，問題轉譯相當於 Schoenfeld 的讀題階段。

(2) 問題整合 (problem integration)：解題者能區分問題的類型，進而將問題中所有的訊息統整成連貫的表徵。問題整合相當於 Schoenfeld 的分析階段。

2. 問題解決：從心裡的問題表徵到最終答案的過程。

(1) 解題計畫與監控 (problem planning and monitoring)：解題者需選用適當的策略並擬定解題計畫，並監控自己的解題行為過程。解題計畫與監控相當於 Schoenfeld 的探索與計畫階段。

(2) 解題執行 (problem execution)：解題者需要利用正確的方法，最終能正確求得答案。解題執行相當於 Schoenfeld 的執行階

段。

Mayer 強調在解題問題中，每個解題歷程階段所需要的知識不盡相同，解題者需具備五種知識類型。問題表徵階段包含了轉譯與整合，轉譯的過程中涉及語言知識和語意知識，整合的過程中需具備基模知識；問題解決階段包含了計畫監控與執行，計畫監控的過程中涉及策略知識，執行涉及程序知識，敘述如下：

1. 語言知識 (linguistic knowledge)：和語言相關的知識，如：讀懂題目的條件或是了解題意。
2. 語意知識 (semantic knowledge)：與生活相關的知識，如：一斤等於六百公克、菱形四邊等長。
3. 基模知識 (schematic knowledge)：能夠分辨出問題型態的知識，如：按照不同情境做分類、依照不同問題結構分類。
4. 策略知識 (strategic knowledge)：能使用不同方法的知識，如：訂定子目標，逐步解得答案。
5. 程序知識 (procedure knowledge)：進行數字計算的知識，如：知道如何計算 0.5×3.2 。

Mayer 的解題歷程中，文字淺顯易懂，且將解題歷程分為兩階段，各階段又分為兩個步驟，每個步驟均有其需具備的不同知識，架構清晰且具有邏輯性，可以讓讀者很清楚了解每個環節所需的知識。

【原題】

每邊長 30 公分的正方形磁磚，每塊售價 0.72 元，若要以此磁磚撲滿一間長 7.2 公尺，寬 5.4 公尺的長方形房間，需要花多少錢？

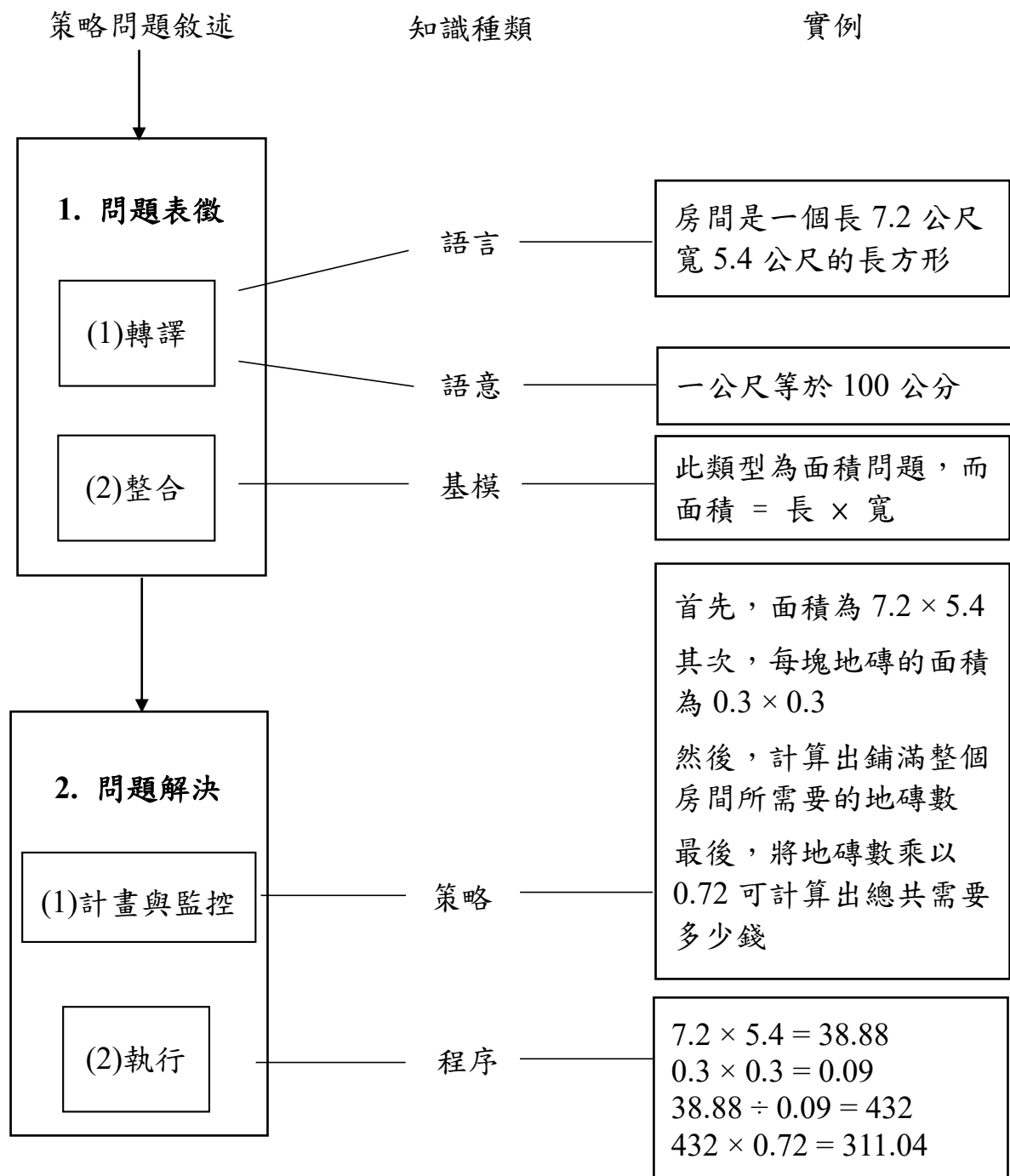


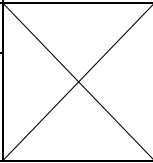
圖 2 - 3 Mayer 之解題歷程與知識關係圖

綜觀上述四位學者提出的解題歷程可發現，Polya 與 Kilpatrick 提出的解題歷程相近，差別在於 Kilpatrick 對於 4 階段的解題歷程做更進一步的細分。Schoenfeld 更是將解題歷程細分成六個階段，讀題與分析相當於 Polya 的了解問題階段，探索與計畫階段對應到的為 Polya 的擬訂計畫階段，執行階段相當於 Polya 的執行計畫階段，驗證階段同等於 Polya 的驗算與回顧階段。由於 Schoenfeld 的解題歷程，比起 Polya 與 Kilpatrick 的解題歷程較為仔細，所以為本研究採用的工具。

Mayer 提出的解題歷程與前面 3 者較為不同，其解題歷程是從認知心理學的觀點切入，強調解題者的心理運作過程。Mayer 直接將解題歷程劃分為問題表徵與問題解決兩階段，問題表徵又分為問題轉譯與問題整合共兩步驟，問題轉譯相當於 Schoenfeld 的讀題階段，問題整合相當於 Schoenfeld 的分析階段；問題解決又分為解題計畫與監控以及解題執行共兩步驟，解題計畫與監控同於 Schoenfeld 的探索與計畫階段，亦為 Polya 與 Kilpatrick 之擬訂計畫階段，解題執行相當於 Schoenfeld 的執行階段。除此之外，Mayer 也提到上述的四個步驟分別需具備不同的知識，方能順利進行解題。

最終，與前 3 位學者最大的不同是，Mayer 在解題執行的步驟之後，並沒有提到驗證或回顧。總結上述所說，本研究經由探討、比較與歸納後，整理出下表供讀者參閱。

表 2-4 解題歷程分析表

理論提出者	階段一	階段二	階段三	階段四	階段五	階段六
Polya (1945)	1. 了解問題		2. 擬定計畫		3. 執行計畫	4. 驗算與回顧
Kilpatrick (1967)	1. 了解問題		2. 擬定計畫		3. 執行計畫	4. 檢討
Schoenfeld (1985)	1. 讀題	2. 分析	3. 探索	4. 計畫	5. 執行	6. 驗證
Mayer (1992)	1. 問題表徵		2. 問題解決			
	(1) 問題轉譯	(2) 問題整合	(1) 解題計畫與監控		(2) 解題執行	

本研究採用 Schoenfeld (1985) 的解題歷程 6 階段，用以呈現參與者的解題歷程。

上述四位學者所提及的解題歷程均為單向，但在解題的過程中，往下一個階段或是回溯到前一個步驟做修正是很常見的。Leung (2009) 以 Polya 的 4 階段解題歷程為基礎，提出解題歷程可以是雙向的。例如當我們了解問題後進入擬訂計畫，在擬訂計畫的過程中如果順利，可進入執行計畫階段；若發現題意敘述尚未完全釐清，亦可回到了了解問題的階段。如下圖所示，順時針為一般的解題歷程，逆時針表示回溯各個階段。

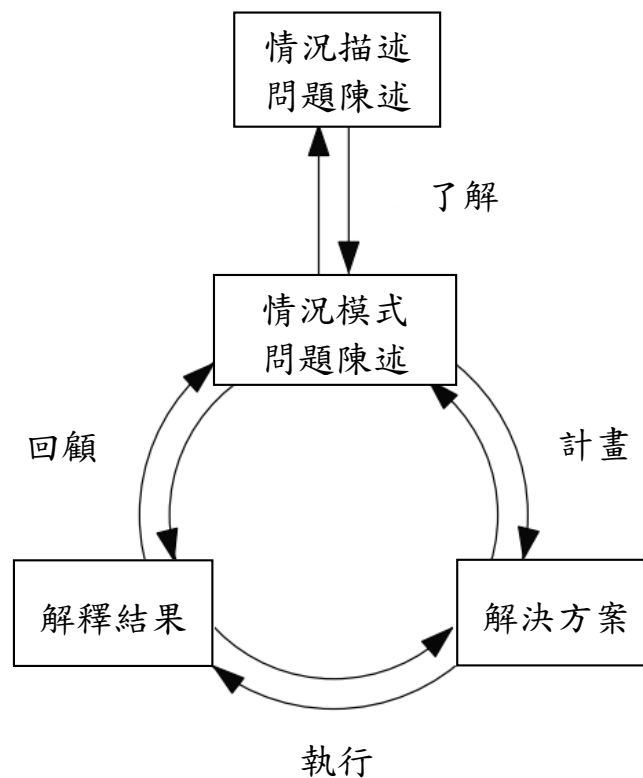


圖 2 - 4 Leung 之解題基模大綱圖
(譯自 Leung, 2009, p.13)

第二節 影響解題表現原因之探究

影響數學解題表現的因素有許多，過去國內外均有許多學者提出，本研究探討國外學者 Kilpatrick (1978)、Lester (1980) 與 Krutetskii (1963，1969，1976)，以及中國學者胡炳生 (1995)、國內學者張景媛 (1994) 所提出的影響解題之因素，彙整如下：

Kilpatrick (1978) 針對影響數學解題的變量作探討，變量的分類有很多種，在數學與科學中最常見的變量為自變量與依變量，用來預測的變量被稱為「自變量」，被預測的變量稱為「依變量」。在數學解題過程中，自變量必定包含 3 要素，分別為解題者 (subject)、數學任

務 (task)、當下情境 (situation)，以下分別針對 3 個變量進行探討。

1. 解題者變量 (Subject Variables)

解題者變量包含機體變量 (Organismic variables)、特質變量 (Trait variables)、教學歷史變量 (Instructional history variables)，分別敘述如下：

(1) 機體變量 (Organismic variables)

有機變量在數學的解題研究中，包含年齡、性別、種族以及社會階層……等來描述樣本。一般常用的是探討不同的年齡或性別對依變量的關係。

(2) 特質變量 (Trait variables)

特質包括能力（如空間視覺化能力或記憶能力）、態度、興趣、價值（如數學態度或證明定理的興趣傾向）、知覺的類型、認知的類型、自我概念、對成就的堅持、焦慮……等的變量。在解決複雜的數學問題時，需要有記憶、分類、一般化、估計、判斷、驗證等相關的能力。

(3) 教學歷史變量 (Instructional history variables)

此變量系指過去曾經遇過的問題、用過的解題技巧以及同一類型的題目……等。這些變量顯然皆與解題歷程有關，過去的解題經驗將影響解題表現。

2. 數學任務變量 (Task Variables)

(1) 脈絡變量 (Context variables)

脈絡變量為在相同的結構下，以不同的上下文來做題意的鋪陳。例如：假設有兩個數學問題，在相同的敘述中含有相同的數字，但其中一題是關於雞兔同在一個穀倉裡，另一題是在河裡的兩艘船上。多數人會覺得這兩題在數學結構上是相同的，內容起先看似合適，但為了避免有言外之意而使得數學問題有不同的解讀，最好透過上下文稍微說明。

(2) 結構變量 (Structure variables)

結構問題相較於脈絡問題更為複雜，一個數學問題能以不同的結構方式描述出來，不同的數學問題也可以依照不同的結構做分類。

(3) 形式變量 (Format variables)

形式變量為在解題的過程中，往往會受到題意條件的限制、是否給予提示或者是被要求解題的過程中邊想邊說……等，在研究中較少去操作形式變量，因為形式變量通常並非數學教育者感興趣的。

3. 情境變量 (Situation Variables)

情境變量系指參與者的生理和心理狀況，包括參與者是否自

願參加研究、是否被外在的獎勵所吸引（如金錢或分數）、參與者是獨自一人還是團體、給予的時間、是否對解題有信心、施測者的特點與行為、過去的成敗經驗……等。一般研究者不喜歡情境變量，因為情境變量難以控制且不會消失，研究者只希望個體的情境變量不要差異太大。

此外，Lester (1980) 也提出以下四個因素會影響解題：

1. 問題本身 (task variables)：即工作變項，指的是問題的型態、出題方式、內容、結構、難易度等，對於解決問題的成功與否，具有舉足輕重的地位，稍微改變語意的陳述，便會影響解題的成功與否及解題歷程。
2. 個人特徵 (subject variables)：即個人變項，指的是解題者與問題之間的關係，不同學生解同樣的題目時會有些差異。一般而言，解題者會因為認知型態、過去的數學知識、緊張程度，以及場地獨立等因素，會有不同的解題表現。
3. 解題行為 (process variables)：即過程變項，解題者會因為問題、教學方式的不同，以及先備知識的差異，在解題過程中產生不同的解題行為。
4. 環境特徵 (instruction variables)：即教學變項，解題者會運用既有的知識產生解題行為，此過程往往會受到外在環境的影響。而教

學變項正是環境特徵裡最重要的變項。

除了上述 Lester 所提出的影響解題四個因素之外，影響資優生的解題能力因素也常被探討。陳英豪 (2007) 於「影響資優生數學解題能力之重要因素探討」一文中提到有關於資優生解題的特徵，內文提及過去以俄國學者 Krutetskii (1963, 1969, 1976) 對資優生數學解題能力的研究最受重視，其研究主要描述數學資優生解不同數學問題時之心智活動的特徵。此外，Krutetskii 的研究有與解題能力和個別差異有關的主題，即探討在數學能力的架構上，象徵性能力的差異，並且探究年齡的差異對數學能力的影響。

Krutetskii (1963, 1969, 1976) 在分析數學資優生的個案研究中指出，數學資優生在解題中包含某些特質，其包含「心理特徵」和「解題特徵」，分別敘述如下：

(一)心理特徵：

1. 具有敏捷的推理和心理定向
2. 具有邏輯思維，以及有系統、有順序的思考能力
3. 具有數學抽象思考的能力，且能迅速面廣泛地組織材料
4. 具有靈活的思維
5. 能任意地從正面的思維歷程轉換到反面的思維歷程
6. 解答問題時，其有迅速且簡捷的推理能力，亦具有「壓縮」的

傾向

7. 對數學材料能夠迅速而牢固的記憶

8. 對數學作業很少感到疲勞

(二) 解題特徵

1. 能掌握問題的結構

2. 能看出並解釋量或空間的關係

3. 能有彈性的心理運作

4. 能將若干例證加以類化

5. 力求問題的澄清、簡化、經濟，並尋求解題的原則

6. 能將數學的關係，爭論的觀點及證據，結構的特色加以類化以

便記憶

在數學能力方面，Krutetskii 設計了 26 套題目，每二或三套共同決定某一數學能力因子，再以因素分析的統計方法，分析出數學能力的所有因子，包含：

1. 形式化數學題材的能力

2. 一般化數學題材的能力

3. 數學運算能力

4. 邏輯推理能力

5. 簡捷思考能力

6. 逆向思考能力
7. 彈性思考能力
8. 數學記憶能力
9. 空間概念能力

在中國亦有學者探討影響解題的因素，著名的為胡炳生（1995）在「數學解題思維方法」一書提到，認為影響數學解題的相關因素包含七項，說明如下：

1. 數學知識：數學知識是解題的基礎，而數學知識又細分為基本和較高層次兩部份。前者包含中學數學課本中的概念系統、定理系統和符號系統三大系統知識。後者涵蓋數學競賽中所涉及到的有關初等數學或介於初等與高等數學之間的數學知識。
2. 數學解題方法：教學解題方法是解題的基本手段，泛指數學解題中的所有方法，其細分為三個層次。第一層次為解題的具體方法和技巧，例如：找規律、配方法、坐標化、公式解法、幾何中添加輔助線等。第二層次為數學解題的一些通則，例如：演繹法和歸納法、直接證法和反證法。第三層次為數學解題中的思考原則和策略，例如：三角形給定三邊長（三邊長非整數）找面積，可先利用餘弦定理求出某角度的餘弦值，轉為正弦值，再代正弦的面積公式。

3. 數學思維：數學思維是解題的思想原則和策略，意指我們在解題的思維過程中應遵循的總原則和總策略。
4. 解題經驗：解題經驗包含成功的經驗和失敗的經驗，對於一個人解題能力的形成和提升都有極大的作用。
5. 符合思維的規則—邏輯：數學解題的過程是一種思維活動，思維活動若要有成效的進行，就必須符合思維的規則，即為邏輯。
6. 個人的思維品質與對數學的興趣：一個人的思維品質和數學的興趣對數學解題存在著重要的影響。思維迅速但不縝密的學生容易計算錯誤。此外，當一位學生對於數學感到排斥，便很難踏入解題的歷程中；反之，喜愛數學的學生，能很快的進入解題的世界，抽絲剝繭最終得到正解。
7. 語文知識、社會生活知識以及其他學科知識：數學問題多以文字來陳述，對於語文知識較為薄弱的學生在閱讀題目時容易出現遺漏條件或是落入不懂題意的窘境，在學習排列組合單元尤為明顯。

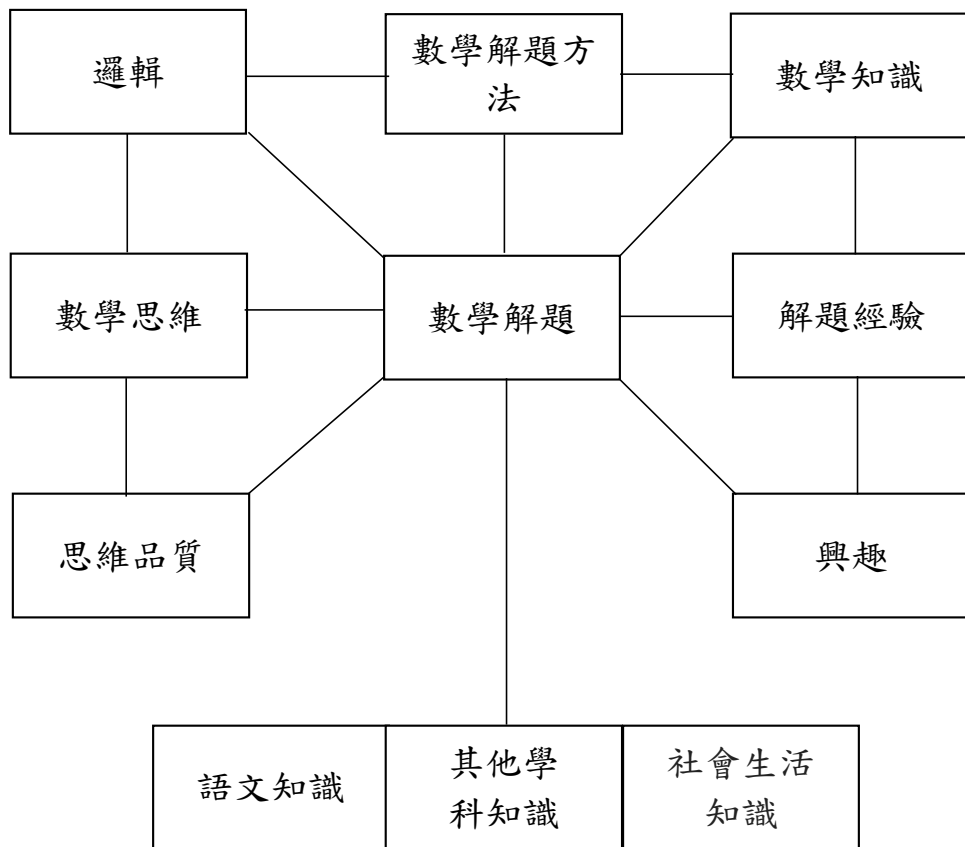


圖 2 - 5 胡炳生之數學問題系統圖

此外，在影響解題表現的因素探討中，專家與生手是學者常比較的對象。國內學者張景媛 (1994) 提到專家與生手思考模式有所不同，其差異如下：

1. 專家是以完整的概念來呈現問題情境，而生手則無法通盤理解整個情境。
2. 專家以自認為最清楚、最容易的方式來教學生，卻不一定是生手最容易理解的方式。
3. 專家思考模式中會呈現跳躍的情形，也就是能掌握問題的重點，不

會受一些無關條件的影響，而這正是生手最感困擾的地方。生手無法掌握問題的核心，不能釐清已知和未知條件之間的關係。

4. 專家希望學生越簡化式子越好，專家教學時也以自己認為最簡潔的式子來呈現，過於簡化的結果反而使學生無法了解老師的教學內容。
5. 專家能將其心中所想的觀念用符號表達出來，但生手有時所列出來的式子和自己口中說出來的意思不同，這主要是生手還不善於用數學符號來表達自己的概念。

從上述的探討我們可得知，專家之所以能比生手更容易解決數學問題，主要在於專家能完整掌握題意，並能善用該題之相關知識，在問題表徵方面也較為傑出。

綜觀 5 位學者所提出的影響數學解題表現的因素，每位學者的切入點均有所不同。Kilpatrick 以不同變量的角度去探討影響解題的因素；Lester 探討的內容著重於解題者本身與外在環境對於解題之影響；俄國學者 Krutetskii 探討的是有關於數學資優生解題過程的心理特徵和解題特徵之影響。學者胡炳生提到影響數學解題的相關因素包含數學知識、數學解題方法、數學思維、解題經驗、符合思維的規則—邏輯、個人的思維品質與對數學的興趣、語文知識與社會生活知識及其他學科知識共七項，均屬於個人的內在因素；此外，張景媛學者

從專家與生手不同的思考模式進行探究，影響專家與生手解題的原因有許多，其中，專家能完整掌握題意，並善用該題之相關知識，為解題順利與否的重要關鍵。

第三節 高二數學教材分析

（一）課程理念

99 數學課程綱要之課程目標強調普通型高級中學的必修科目「數學」須培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力，意旨學習者在遇到問題時，能獨立反覆進行思考並分析，最終能得其正解。此外，實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能也不可或缺，學習者能將所學的數學知識應用在生活中，解決生活上的問題。再者，於學習的過程中，能欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質（教育部，2009）。

教育部普通高級中學必修科目「數學」課程綱要（2013）指出，學生所具備的核心能力包含演算能力、抽象化能力、推理能力、連結能力、解題能力、溝通能力、使用計算工具的能力，茲分別敘述如下：

1. 演算能力：

學習者對於公式、函數的運算能熟練。包含高一上的分式、根式、多項式、指對數，高一下的等差等比公式、平均數、標準

差、一維與二維數據分析公式，高二上的三角、平面向量之運算，高三下的微積分，以上所列均較著重演算能力，是學好數學的基本功。

2. 抽象化能力：

學習者能將具體世界中的概念以數學形式表徵。如地球繞著太陽運行的軌跡可化為橢圓的方程式，能經由高一下學期第四章二次曲線所學之橢圓性質，進一步找出太陽與近日點、遠日點之間的距離。此核心能力的培養，有助於解決生活中許多問題。

3. 推理能力：

學習者能認識證明，並進行推論。高中常出現的證明題為高一的算幾不等式、三角不等式，高二的三角公式證明、柯西不等式，高三的二項分配期望值與標準差公式，部份公式推導過程過於複雜之證明，版本課本會附在書後的附錄，可斟酌參考。藉由「證明」，可以說服自己、說服朋友並說服敵人（洪萬生，2004）。

4. 連結能力：

學習者能整合數學內部知識並與具體世界連結。如：學習機率可以應用在發票中獎率、買樂透、抽獎等具體世界中。當一群人排隊抽獎時，若有機率的先備知識，便知道抽獎的先後順序並不會影響中獎的機率，不必與人爭先恐後排隊。

5. 解題能力：

學習者能解決數學形式與生活情境中的數學問題。高中的數學課程安排中，於高一的二次函數找極值問題、排列組合、機率，以及高二的三角測量、線性規劃、轉移矩陣，高三的機率與統計、微積分，題目設計上常與生活問題做結合，讓學生模擬將數學知識運用在生活情境中。

6. 溝通能力：

學習者能正確、流暢地利用口語或文字表達解題想法。高中課堂活動中，偶爾教師會以抽籤的方式，請同學上台解題並講解，或是表達自己的想法，過程中能提升學生的溝通能力。此外，課後同學之間的討論，亦是一種溝通能力的培養，彼此教學相長。

7. 使用計算工具的能力：

學習者能使用計算器來處理繁瑣的計算與解決較複雜的問題。一般而言當計算數字過於龐大時，高中生會使用計算器做輔助，尤其是現在幾乎每人身上都有手機，遇到高一下排列組合數字過大，計算輔以手機更是司空見慣。但少有老師會於課程中教導學生利用手機處理指對數以及三角的問題。

(二) 線性規劃

線性規劃 (linear programming) 是由過去蘇聯的經濟學家、數學家 L. V. Kantorovich 所提出，線性規劃用於解決最佳化的問題，成功運用在許多案例中，是 20 世紀中葉非常實用的科學方法。建立線性規劃模式可遵循以下四個步驟：

1. 依題意列限制式

高中課程中討論的線性規劃通常只有兩個變數 x 與 y ，變數 x 與 y 會受到數個二元一次不等式的限制，滿足這些二元一次聯立不等式所形成的圖形稱為可行解區域，故可行解區域當中的每個點 (x, y) 皆為二元一次聯立不等式的解。

2. 建立目標函數

依照題目要求列出二元一次式，目標為找尋二元一次式的最大值或最小值，一般而言，最大值與最小值會在頂點產生。「依題意列限制式」與「建立目標函數」並無先後順序關係，兩者順序可互換。

3. 圖解二元一次聯立不等式

將上述所列的限制式畫在平面上，作圖的過程中，會先畫等號的直線方程式，再考慮大於或是小於的取值範圍。例如：欲在坐標平面上畫出 $x + y > 6$ ，會先畫出 $x + y = 6$ 的直線圖形，由於不

等式方向為「 $>$ 」，故選取直線的右方即為可行解區域。

4. 找尋最大值與最小值

找尋最大值與最小值的方法有二，包含頂點法與平行線法。

一般而言，當二元一次聯不等式的解集為一封閉圖形（含邊界），目標函數的最大值與最小值均會發生在可行解區域的頂點，因此將可行解區域的所有頂點代入目標函數，即可找到目標函數的最大值與最小值，此方法稱為頂點法。

當 x 、 y 滿足某二元一次聯立不等式且目標函數 $P = ax + by$ 時，我們可以先畫出二元一次聯立不等式的可行解區域，並將直線 $ax + by = k$ 平行移動到與可行解區域相交，如此便可找出 $ax + by$ 的最大值或最小值，此方法稱為平行線法。

現行高中課程中，線性規劃置於高二上學期第二章的第二節。下表為 103 課綱微調後，第三冊之學習內容，詳細內容如下：

表 2 - 5 103 課綱微調後高二上學期數學學習內容架構表

主題	子題	內容	備註
一、三角	1. 直角三角形的邊角關係	1.1 直角三角形的邊角關係（正弦、餘弦）、平方關係、餘角關係	
	2. 廣義角與極坐標	2.1 廣義角的正弦、餘弦、正切、平方關係、補角 2.2 弧度，弧度量與角度量的互相轉換	2.1 $\cot, \sec, \csc$ 置於數學甲 I、數學 I 2.2 將弧度量融入廣義角的教學，並於其後各節中使用弧度，強化度與弧度的轉換練習。由引進弧度所延伸出的問題僅限於角度量與弧度量之轉換練習，不要延伸到弧長與扇形面積
	3. 正弦定理、餘弦定理	2.3 直角坐標與極坐標的變換 3.1 直角坐標與極坐標的變換	
	4. 差角公式	4.1 差角、和角、倍角、半角公式	4.1 不含和差化積、積化和差公式
	5. 三角測量	5.1 三角函數值表 5.2 平面與立體測量	5.1 可使用計算器求出三角函數值

主題	子題	內容	備註
二、直線與圓	1. 直線方程式及其圖形 2. 線性規劃 3. 圓與直線的關係	1.1 點斜式 1.2 兩線關係（垂直、平行、相交）、聯立方程式 2.1 二元一次不等式 2.2 線性規劃（目標函數為一次式） 3.1 圓的方程式 3.2 圓與直線的相切、相割、不相交的關係及其代數判定	3.2 不含兩圓的關係
三、平面向量	1. 平面向量的表示法 2. 平面向量的內積 3. 面積與二階行列式	1.1 幾何表示、坐標表示，加減法、係數乘法 1.2 線性組合、平面上的直線參數式 2.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式 2.2 直線的法向量、點到直線的距離、兩向量垂直的判定 3.1 面積公式與二階行列式的定義與性質、兩向量平行的判定 3.2 兩直線幾何關係的代數判定、二階克拉瑪公式	

心理學家布魯納 (J. S. Bruner) 提出螺旋式課程 (spiral curriculum) 的教學設計，將學習內容分為不同層次，教材是由具體到抽象、由簡單至複雜循序漸進，基本原理重複出現在不同階段中，難度漸漸提高，範圍逐漸擴大，最終能學習到完整的知識。國內的課程內容設計亦是如此，下文針對直線與線性規劃的部分，進一步做分析。

在國中的課程內容中，第二冊第二章「直角坐標平面與二元一次方程式的圖形」首先建構學生直角坐標平面的概念，再接續讓學生學習於坐標平面上描繪出二元一次方程式的圖形，即為一直線。高中的課程內容，在第一冊第二章「多項式函數」中，以國中的二元一次方程式為基礎，先介紹函數的概念，再將國二的二元一次方程式引入高一的一次函數，並介紹斜率的正負判別與比大小。簡略帶過後，於第三冊學習完第一章「三角」之後，第二章「直線與圓」的第一節「直線方程式及其圖形」再度出現直線，用意為將第一章「三角」的正切(tan)導入直線的斜率，並介紹直線的標準式、點斜式、斜截式、截距式。學生完整建構直線的概念後，第二節再進入線性規劃，學生須先學習二元一次不等式之作圖、取值範圍，方能進入線性規劃的應用問題，此時學生必須具備了解題意、分析條件、列出限制式與目標函數、直線作圖、判斷二元一次不等式取值範圍、驗證答案合理性等能力。

透過上述之國中與高中的課程內容，可得知在直線的學習上，是由簡單到複雜、循序漸進的學習，故螺旋式的課程教學設計，對學生而言有不斷重複學習的機會，並能從中加深、加廣。

此外，Tyler (1949) 在《課程與教學的基本原理》(The Basic Principles of Curriculum and Instruction) 一書提到，制定課程時，需選

擇能夠達成目標的學習經驗，並將過去的學習經驗加以組織，使其產生意義，更有利於教師的教學與學生的學習。本研究引據 Tyler (1949) 的課程地圖，針對線性規劃提出課程架構圖如下：

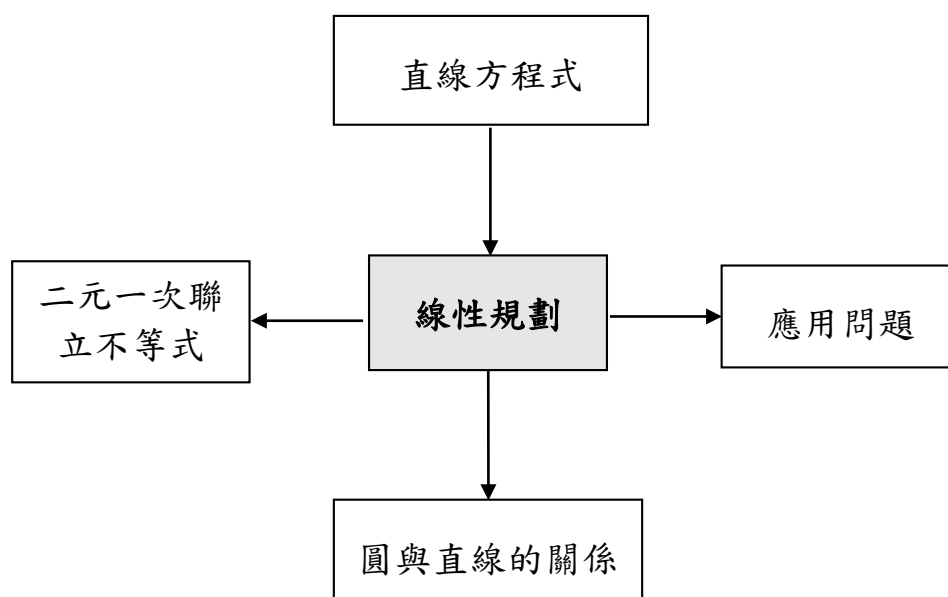


圖 2 - 6 線性規劃課程地圖

第參章 研究方法與設計

本研究主要探討學生在解決線性規劃問題之解題歷程，本章共分為 5 節，分別為研究設計、研究對象、研究工具、資料蒐集與分析及預試及資料分析，詳述如下。

第一節 研究設計

本研究採質性研究的方法，以解題時參與者的放聲思考 (thinking aloud) 以及事後晤談的方式，蒐集學生線性規劃的解題歷程，根據 Schoenfeld (1985) 提出的解題歷程，將學生的解題歷程分為讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證共 6 階段，進一步用解題歷程原案分析的時間架構表徵圖來表示其解題歷程，再探討學生的解題歷程、解題策略以及成敗因素。信效度方面，本研究採專家評量一致性來增加原案分析的信度；並採用專家效度，以 3 位具備數學相關背景知識的同儕共同審閱。

第二節 研究對象

1. 預試

由於本研究預試階段，高二學生尚未學習線性規劃，故先以便利取樣選取高雄市某高中三年級學生 1 位進行預試。

2. 正式施測

先蒐集預試資料並進行原案分析，由 3 位研究生及 1 位教授共同討論並修正預試試題後，正式施測再以立意取樣選取高雄地區某高中二年級 1 個班級，此班級共有 41 人。

本研究採用 (Kelley, 1939) 提出的分法，從最高分向下選取 27% 之人數為高分組，從最低分向上選取 27% 之人數為低分組，其餘學生均為中分組。本研究依照 107 學年度上學期第一次段考數學成績分為高、中、低三組，於各組中各選取 1 位口語表達清晰，針對高二上學期第二章直線與圓之單元，於學習線性規劃後，進行放聲思考之研究。

第三節 研究工具

本研究使用的工具為預試試題、放聲思考試題、紀錄放聲思考之器材、Schoenfeld 解題歷程以及研究者本身，共 5 個，分別敘述如下：

1. 預試試題

本研究參考龍騰版（2017 年）數學課本並挑選 106 學年度高雄市各校高二段考題之線性規劃試題，共 3 題，研究者將此 3 題分別命名為運動題、手套題、代購題，經由 3 位具備數學相關背景的研究生和 1 位指導教授，修改題目語句敘述後，進行預試。除此之外，在施測前亦選取簡單的二元一次方程式之應用問題，讓參與者

進行放聲思考的訓練。

放聲思考之題目，挑選標準如下：

- (1) 避免記憶性的試題
- (2) 需要兩個或兩個步驟以上方能完成
- (3) 題目合乎邏輯且語意清晰
- (4) 題目不會過於艱深

2. 放聲思考試題（正式施測試題）

預試後，根據學生的作答反應，與 3 位研究生及 1 位教授討論後再次修改題目語句，編製成正式施測的試卷。正式施測之前亦事先給予放聲思考的訓練，以確保資料的準確性。

3. 紀錄放聲思考之器材

為詳細記錄參與者完整的解題歷程，放聲思考的過程中全程以相機錄影，以便事後分析及轉成逐字稿。

4. Schoenfeld 解題歷程

國內外有諸多學者提及解題歷程，本研究參考 Schoenfeld (1985) 的解題模式，將解題歷程的模式分為讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證共 6 個階段，用以分析蒐集之資料。

5. 研究者本身

在質性研究中，研究者本身即是研究工具。研究者本身大學的

背景為工業管理與應用數學系，有 6 年的國高中教學經驗，平常工作為國高中數學的輔導、授課、國高中教材的編寫、教材詳解的校閱。研究者於碩士班研讀教育領域之科學教育，亦有修習教育學程。

第四節 資料蒐集與分析

本研究主要以放聲思考、事後晤談的方式進行資料的蒐集，並轉為逐字稿來進行分析。進行放聲思考試題之前，研究者事先訓練自己的答應技巧；此外，為了可以讓參與者表達內心真實的想法，以獲得正確的資料，先讓參與者進行數次的放聲思考訓練，使參與者能真實表達思考的解題歷程，使樣本結果更為精確。訪談過程以錄影方式全程記錄學生的解題歷程，經整理及轉為逐字稿後再做分析。

將訪談過程中學生說的話轉成逐字稿後，再參考 Schoenfeld (1985) 的解題模式，將解題歷程模式分為讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證共 6 個階段，並依據原案資料當中學生的解題過程，歸納出學生在線性規劃問題中的解題策略。

信度方面，本研究參考 Denzin 於 1978 年首度引用於社會科學中的三角交叉法 (triangulation)，三角交叉法係指研究過程中採用多種且不同形式的方法，來確保研究的一致性。三角交叉的形式包含資料的三角交叉法 (data triangulation)、方法論的三角交叉法 (methodological

triangulation)、研究者的三角交叉法 (investigator triangulation) 與理論的三角交叉法 (theory triangulation)、科際的三角交叉法 (interdisciplinary triangulation) (王文科, 王智弘, 2017)。本研究採研究者的三角交叉法, 即使用不同的研究人員分析同一對象資料。

在執行信度的三角驗證法方面, 本研究將參與者的解題歷程轉為逐字稿後, 給予初步的編碼分析, 並邀請 3 位同儕, 皆修習過解題研究, 共同參與編碼並核對, 以增加本研究解題歷程分析的信度。經由與 3 位研究生及 1 位教授討論與修正後, 本研究定義出學生解題過程中每個步驟分別對應到 Schoenfeld 各階段的歷程, 定義如下:

表 3 - 1 線性規劃之解題歷程各階段定義對照表

Schoenfeld 解題歷程階段	學生解題過程
讀題 (R)	閱讀題目
分析 (A)	條列限制式
	將題意整理成表格
探索 (E)	判斷斜率大小及範圍
	將頂點代入目標函數找尋極值
計畫 (P)	列目標函數
執行 (I)	化簡限制式
	解聯立方程組
	畫可行解區域
驗證 (V)	重述及回顧方程組的解

第五節 預試及資料分析

本研究將接受放聲思考解題觀察的同學之解題歷程，參考

Schoenfeld (1985) 提出來的數學解題歷程模式，並根據表 3-1 的線性規劃之解題歷程各階段定義對照表，將參與者之解題歷程分為 6 個階段，分別為讀題 (R)、分析 (A)、探索 (E)、計畫(P)、執行 (I)、驗證 (V)，進行原案分析。

(一) 運動題



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？



參與者先進行讀題的動作，因為題目敘述並不長，且情境單純，故讀題並未耗費太多時間。(讀題 R：50 秒)

參與者依照題意開始列出限制式，先假設每週打桌球 x 小時，游泳 y 小時。然後參與者依照價錢與時間，分成兩個部分。首先，因為題意表示希望花費不超過 300 元，且打桌球一小時需付費 30 元，游泳一小時需付費 50 元，參與者列出 $30x + 50y \leq 300$ 為第一個式子；第二個式子由於題目表示每週最多只能抽出 8 小時運動，參與者列出 $x + y \leq 8$ 。此階段主要是先將文字題題意表達為數學式，轉換的過程中需花費較多時間。(分析 A1：114 秒)

$$\begin{array}{l} \text{設每週打桌球 } x \text{ 小時} \\ \text{游泳 } y \text{ 小時} \\ \left\{ \begin{array}{l} 30x + 50y \leq 300 \\ x + y \leq 8 \end{array} \right. \end{array}$$

參與者將上述分析的限制式做化簡。(執行 I1：11 秒)

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 30x + 50y \leq 300 \\ x + y \leq 8 \end{array} \right. \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 30 \\ x + y \leq 8 \end{array} \right. \end{array}$$

原本參與者要開始將限制式畫在坐標軸上，但突然發現少了兩個限制式。因為打桌球與游泳的時數不可能為負，必會大於等於 0，故參與者補上兩條限制式，分別為 $x \geq 0$ 與 $y \geq 0$ 。(分析 A2：22 秒)

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 30 \\ x + y \leq 8 \end{array} \right. \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

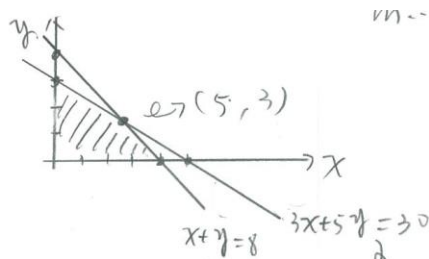
原本參與者想繼續畫圖，但赫然發現尚未列出目標函數，此動作屬於計畫階段，需計畫题目的所求。題目希望找的是如何分配兩種運動時數才可以消耗最多熱量，故參與者列出的目標函數為

$$P = 300x + 450y \text{。 (計畫 P : 42 秒)} \quad P: 300x + 450y$$

參與者開始將所有的限制式於坐標平面上表示，先將直線畫出來。第一條為 $3x + 5y \leq 30$ ，令 $x=0$ 得到 $y=6$ ，參與者在坐標平面上 $(0,6)$ 的位置點上一點； y 代 0 得到 $x=10$ ，故又在坐標平面上 $(10,0)$ 的位置點上一點，將 $(0,6)$ 與 $(10,0)$ 用尺連線可得直線

$3x + 5y = 30$ 。第二條為 $x + y \leq 8$ ，參與者先於坐標平面上點出 $(8,0)$ 與 $(0,8)$ 兩點，再用尺將兩點連起來形成 $x + y = 8$ 的直線。(執行

I2 : 66 秒)



圖形完成後，參與者迅速選取可行解區域，開始探索最大值會在哪個地方產生。一般而言，判斷最大值與最小值有兩種方法，一種為頂點法，即將所有可行解區域的頂點坐標代入，比較之後可得知最大值與最小值分別為多少；另一種為平行線法，需先判斷限制式與目標函數斜率的正負大小，確定目標函數之斜率後，經由直線的平移過程中，即可得知最大值與最小值。參與者採用平行線法，目標函數的斜

率是 $-\frac{300}{450}=-\frac{2}{3}$ ，且兩條限制式的斜率分別為 $-\frac{3}{5}$ 與 -1 ，經過比較後可知斜率 $-\frac{2}{3}$ 介於 $-\frac{3}{5}$ 與 -1 之間。這時參與者開始拿起鉛筆在圖形上來回平移，經過 10 秒鐘後，參與者確定 $3x+5y=30$ 與 $x+y=8$ 之交點處會產生最大值。(探索 E：127 秒)

參與者開始解聯立方程組， $\begin{cases} 3x+5y=30 \\ x+y=8 \end{cases}$ 求得 $x=5$ ， $y=3$ ，此時

參與者已經知道當每週打桌球 5 小時，游泳 3 小時，能消耗最多的熱量。(執行 I3：16 秒)

參與者再次說明， $x=5$ ， $y=3$ 的意思是每一週打桌球 5 小時，游泳 3 小時可以消耗最多的熱量。參與者亦把 (5,3) 代入目標函數，得到最多的熱量為 $300 \times 5 + 450 \times 3 = 2850$ 。(驗證 V：76 秒)

$$\begin{aligned} x=5, y=3, \\ \text{每週桌球 5 小時} \\ \text{游泳 3 小時} \\ \text{熱量 2850.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 300 \times 5 + 450 \times 3 &= 1500 + 1350 \\ &= 2850 \end{aligned}$$

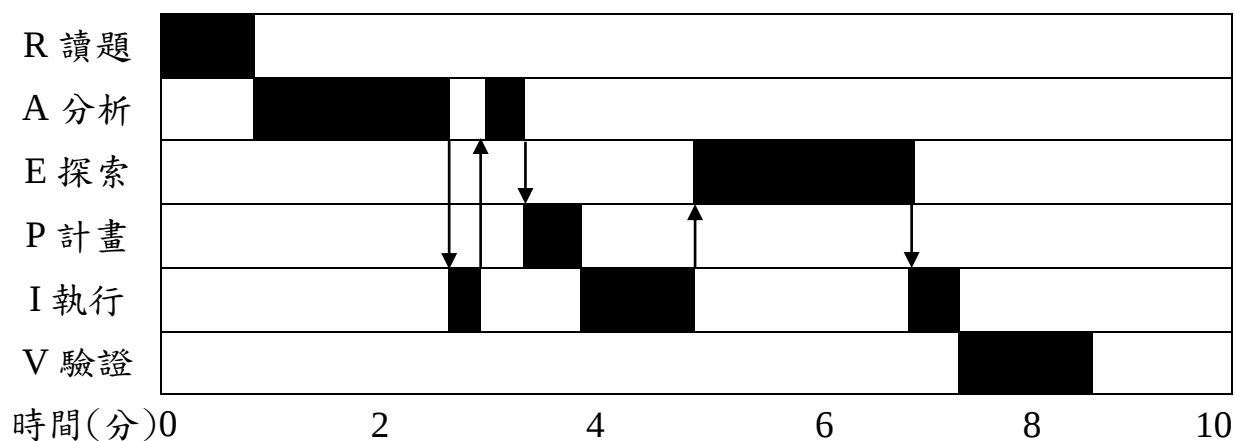


圖 3 - 1 運動題解題歷程階段圖



(二) 手套題



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

參與者先進行讀題的動作，因為意識到題目敘述較長，故大略瀏覽之後，決定先將題意做整理和分析（讀題 R1：13 秒）。參與者試著將題目的敘述轉換為表格。（分析 A1：42 秒）

	紅	白	賺	雙
甲	50	40	50	x
乙	20	40	30	y

接著，參與者再次進行讀題（讀題 R2：8 秒）。由於甲款每雙可賺 50 元，乙款每雙可賺 30 元，參與者列出目標函數 $P = 50x + 30y$ ，求其最大利潤。（計畫 P：67 秒）

$$P: 50x + 30y$$

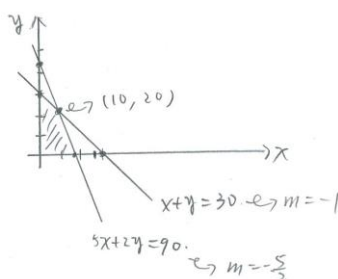
列完目標函數後，參與者開始列出限制式。首先，題意表示紅毛線總長為 900 公尺，且甲款一雙需要用到 50 公尺的紅毛線，有 x 雙；乙款一雙需要用到 20 公尺的紅毛線，有 y 雙，故列出第一條限制式

$50x + 20y \leq 900$ 。接著，白毛線總長為 1200 公尺，且甲款一雙需要用到 40 公尺的白毛線，有 x 雙；乙款一雙需要用到 40 公尺的白毛線，有 y 雙，故列出第二條限制式 $40x + 40y \leq 1200$ 。與運動題相同的是，手套的數量不可能為負數，故需要 $x \geq 0$ 與 $y \geq 0$ 。(分析 A2：46 秒)

參與者於畫圖之前，先化簡限制式，再進行繪圖。

$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \rightarrow 5x + 2y \leq 90 \\ 40x + 40y \leq 1200 \rightarrow x + y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

參與者先畫 $x + y = 30$ 這條直線，於坐標平面上點出 (30,0) 與 (0,30) 兩點位置，再用尺將兩點連起來形成 $x + y = 30$ 的直線。第二條一樣於坐標平面上點出 (18,0) 與 (0,45) 兩點，再用尺將兩點連起來形成 $5x + 2y = 90$ 的直線。(執行 I1：129 秒)



完成圖形後，由於 $5x + 2y \leq 90$ 與 $x + y \leq 30$ 兩條限制式的方向均為「小於等於」，故可行解區域為兩直線與 x 軸、 y 軸所圍之四邊形區塊。同樣參與者也是利用平行線法，知道目標函數的斜率為 $-\frac{5}{3}$ ， $x + y = 30$ 與 $5x + 2y = 90$ 的斜率分別為 -1 和 $-\frac{5}{2}$ ，可得目標函數的斜率為 $-\frac{5}{3}$ 介於 -1 和 $-\frac{5}{2}$ 之間，此時參與者拿著鉛筆在圖形上來回平移，歷

經約 10 秒後，參與者確定 $x + y = 30$ 與 $5x + 2y = 90$ 的交點代入目標函

數 $P = 50x + 30y$ 會有最大值產生。(探索 E：92 秒)

參與者開始解聯立方程組， $\begin{cases} 5x + 2y = 90 \\ x + y = 30 \end{cases}$ 求得 $x = 10$ ， $y = 20$ ，共

歷時 14 秒，此時參與者已經知道當甲款製作 10 雙，乙款製作 20

雙，有最大利潤。(執行 I：14 秒)

參與者再次說明，10 和 20 代表甲款製作 10 雙，乙款製作 20

雙，會有最大利潤。參與者亦把 (10,20) 代入目標函數，得到最大利

潤為 $50 \times 10 + 30 \times 20 = 1100$ 。(驗證 V：28 秒)

$$\begin{array}{l} \text{甲} \quad 10 \\ \text{乙} \quad 20 \end{array} \rightarrow 50 \times 10 + 30 \times 20 = 500 + 600 = 1100$$

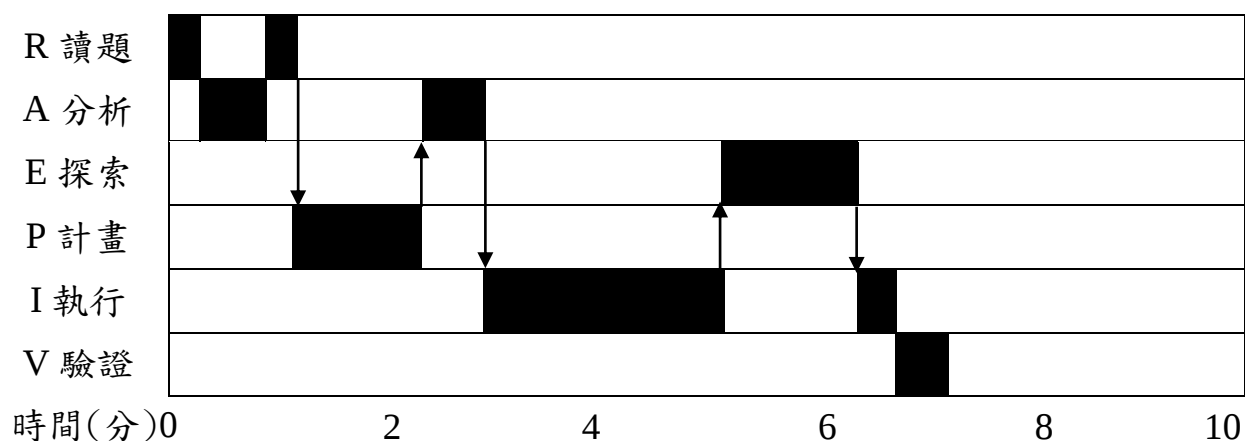


圖 3-2 手套題解題歷程階段圖 😊

(三) 代購題



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

參與者先進行讀題（讀題 R：44 秒）。根據題意，參與者開始將題意轉為不等式。首先，假設面膜要買 x 個，指甲油要買 y 個，因為題目表示指甲油至少要買 10 個，故第一個限制式為 $y \geq 10$ 。接著，題意說明代購的金錢支出控制在台幣 4000 元為上限，這時讓參與者有

些困惑，因為表格當中並沒有「代購的金錢支出」，想了約 30 秒後，終於知道原來「代購的金錢支出」就是表格當中的「成本」。一個面膜成本 50 元，買 x 個；一個指甲油成本 100 元，買 y 個，故馬上列出 $50x+100y \leq 4000$ 。重量的話，由於代購商品重量需控制在 3000 克以內，一個面膜重量 30 克，買 x 個；一個指甲油重量 100 克，買 y 個，限制式為 $30x+100y \leq 3000$ ，由於面膜個數不可能為負數，故需加上 $x \geq 0$ 的條件。(分析 A：121 秒)

$$\begin{cases} y \geq 10 \\ 50x + 100y \leq 4000 \\ 30x + 100y \leq 3000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

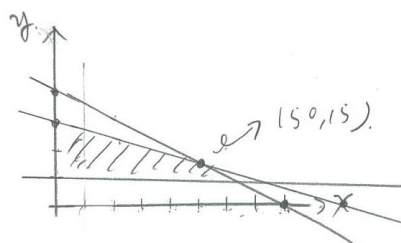
由於代購面膜每個可賺 40 元，代購指甲油每個可賺 100 元，故參與者列出目標函數為 $P = 40x + 100y$ ，求最多可以賺多少錢。(計畫 P：22 秒)

$$P: 40x + 100y$$

參與者畫完坐標軸後，先化簡限制式。

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 10y \leq 300 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

參與者先畫 $x + 2y = 80$ 這條直線，於坐標平面上點出 (80,0) 與 (0,40) 兩點位置，再用尺將兩點連起來形成 $x + 2y = 80$ 的直線。第二條一樣於坐標平面上點出 (100,0) 與 (0,30) 兩點，再用尺將兩點連起來形成 $3x + 10y = 300$ 的直線。(執行 I1：131 秒)



畫完兩條限制式後，參與者又多了一道檢查的動作，確定兩條直線均正確後，再進入下一個階段。(驗證 V1：10 秒)

因為 $y \geq 10$ ，故參與者將水平線 $y=10$ 畫上去之後，開始探索可行解區域的範圍，最後決定是由 $x+2y=80$ 、 $3x+10y=300$ 、 $y=10$ 以及 y 軸所為出來的四邊形區塊。參與者亦使用平行線法，知道目標

函數的斜率為 $-\frac{4}{10}$ ， $x+2y=80$ 與 $3x+10y=300$ 的斜率分別為 $-\frac{1}{2}$ 和

$-\frac{3}{10}$ ，參與者將 3 個斜率拿來做比較。由於分母不同，故須先通分，

$-\frac{1}{2}$ 擴分為 $-\frac{5}{10}$ ，可得 $-\frac{5}{10} < -\frac{4}{10} < -\frac{3}{10}$ ，目標函數的斜率 $-\frac{4}{10}$ 介於 $-\frac{1}{2}$

和 $-\frac{3}{10}$ 之間。判斷完斜率後，參與者拿著鉛筆在圖形上來回平移，約

歷經 12 秒後，參與者確定 $x+2y=80$ 與 $3x+10y=300$ 這兩條直線的交

點代入目標函數 $P=40x+100y$ 會有最大值產生。(探索 E：95 秒)

參與者開始解聯立方程組
$$\begin{cases} x+2y=80 \\ 3x+10y=300 \end{cases}$$
，由加減消去法求得

$x=50$ ， $y=15$ ，此時參與者已經知道當代購面膜 50 個，代購指甲油

15 個，會有最大利潤。(執行 I2：38 秒)

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 240 \\ 3x + 10y &= 300 \\ 4y &= 60 & x &= 50 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

參與再次複誦 $x=50$ ， $y=15$ ，也就是說，面膜要 50 個，指甲油

要 15 個，有最大利潤。參與者亦把 (50,15) 代入目標函數，得到最

大利潤為 $40 \times 50 + 100 \times 15 = 3500$ 。(驗證 V2：48 秒)

$$40 \times 50 + 100 \times 15 = 2000 + 1500 = 3500$$

$$x=50, y=15,$$

面膜 50 個

指甲油 15 個

P: 3500 元

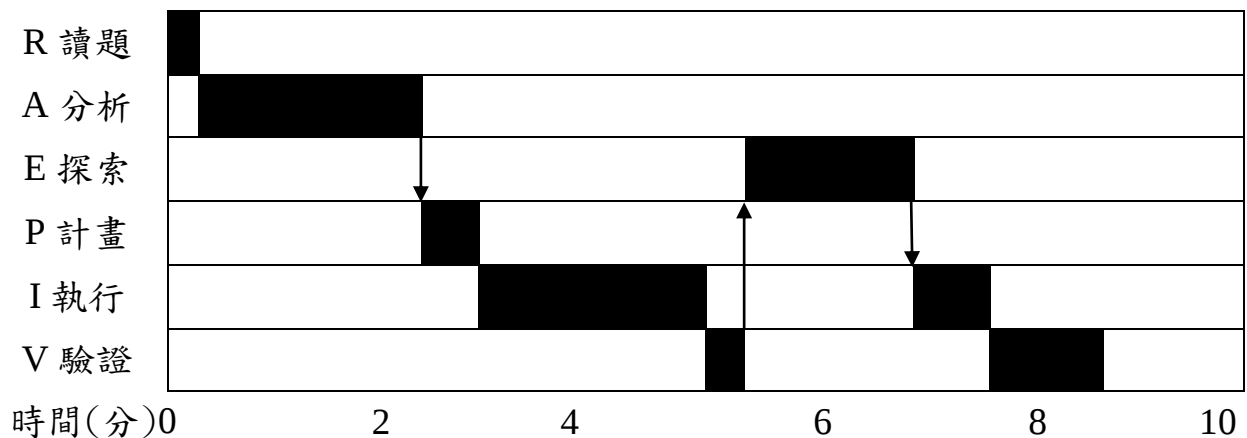


圖 3 - 3 代購題解題歷程階段圖 😊

（四）綜合討論與比較

本研究認原先認為，運動題因為情境較為單純，無太大的變化性，題意敘述也不長，參與者所花費時間最短；手套題，題意敘述較為攏長，參與者花費的時間居次；代購題因為情境較為複雜，比起運動題與手套題多一條限制式，所以在 Schoenfeld 解題歷程的分析階段、執行階段與探索階段，均需花費較多的時間，故參與者所花費的時間最長。

但研究者對於 3 題各別進行分析之後，結果得知運動題、手套題、代購題，3 題分別歷時 524 秒、439 秒、509 秒，與本研究原先設想不同。運動題花費最多時間為分析階段 114+22 共 136 秒，其次為探索階段 127 秒。手套題花費最多時間為執行階段，共花費 129 秒，其次為探索階段 92 秒。代購題時間花費最多的為執行階段 131+38 共 169 秒，其次為分析階段 121 秒。

本研究認為，第一題運動題為最簡單，且題意最單純，但耗費的時間卻位居 3 題之首，推測原因為參與者剛開始在做施測的時候，尚未完全進入狀況，故在列限制式的時候，會有遺漏的狀況，事後發現再回去補上。運動題因為擺在第一題的緣故，參與者在探索階段花費較多的時間在「找尋最大值在何處」，而手套題與代購題在探索的階段時間較為縮短。由於此題數據較簡單，參與者在執行階段花費時間

並不多。

參與者在手套題花費時間最少，本研究認為因為參與者在一開始觀察到題目敘述較長，故先將題意列表格整理，大幅縮減讀題與分析的時間。由於此題數字設計上較大，故參與者在執行階段花費較多的時間。

代購題由於題目敘述較長，參與者花的時間比第二題還多。由於在分析的階段當中，參與者不懂題意的「代購的金錢支出」，導致所花的時間多了 30 秒，也因為數據較大，在執行的階段，耗費較多的時間。與前兩題相比，參與者花在計畫的時間僅 22 秒非常少，本研究認為，參與者已完全進入狀況，能迅速掌握題目的關鍵，並列出目標函數。

綜觀上述所說，本研究認為在 Schoenfeld 解題歷程中，解決線性規劃問題的 3 個關鍵階段分別為讀題階段、執行階段與探索階段，茲分別敘述如下：

1. 讀題階段

在讀題階段，學生必須要看得懂題意的敘述，掌握題意方可進入分析階段。代購題的部分，由於參與者受困於語意轉換的泥淖當中，延長了答題時間。在此也呼應 Lester (1980) 提到影響解題的四個因素之一為問題本身，稍微改變語意的陳述，便會影響解題

的成功與否及解題歷程。

2. 執行階段

解決線性規劃問題的過程中，執行階段包含了化簡限制式、繪出可行解區域的圖形以及解聯立方程組，這些都牽涉到解題者本身過去所培養的計算能力。張景媛 (1994) 提到專家思考模式會呈現跳躍的情形，因此專家在執行的階段中，並不會耗費過多的時間。

3. 探索階段

從以上 3 題的解題歷程階段圖得知，探索階段在整個解題歷程中扮演重要的角色，參與者在探索階段所花費的時間均落於 1.5 到 2 分鐘左右。學者胡炳生 (1995) 提到，影響數學解題的因素其中之一為解題經驗，豐富的解題經驗對於一個人解題能力的形成和提升都有極大的作用。因此有豐富經驗能迅速的判斷目標函數最大值發生的頂點，將頂點代入目標函數可得極值。

本研究於預試階段，目的在了解試題的語句敘述是否清楚明瞭、條件是否完整，以及是否有未設想到的外在因素存在，故只將預試資料進行初步的解題歷程分析，不探討參與者的解題策略與成敗因素。

（五）試題修正

經預試後，運動題與手套題無需做修正，參與者能迅速清楚了解題意，但代購題於預試階段中，參與者不懂題意的「代購的金錢支出」，無法將「代購的金錢支出」與表格給的條件「成本」做連結，因此影響作答時間。故研究者與 3 位研究生及 1 位教授共同討論之後，決定將「代購的金錢支出」的後面多加上「(成本)」兩個字，讓參與者能迅速了解題意並列式。修改後試題如下：



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

第肆章 研究結果與發現

本研究以高雄市某高中二年級的學生為研究對象，採立意取樣選取 3 位學生小寬（男，低分者）、小好（女，中分者）、小珍（女，高分者）。在進入正式施測階段前，研究者先分別給予小寬、小好及小珍練習，該練習題為簡單的二元一次方程式之應用問題，用以進行放聲思考的訓練。

確認參與者口語表達能力沒問題且熟悉作答時邊寫邊說後，再給予 3 題線性規劃的應用問題，分別為運動題、手套題、代購題，並以放聲思考與事後晤談蒐集資料並撰寫逐字稿。本章輔以正式施測試題逐字稿（附錄五）、正式施測試題計算過程（附錄六）、事後晤談札記（附錄七），針對小寬、小好、小珍之解題歷程進行分析。

本章研究結果與發現共分為 3 節，第一節為線性規劃解題歷程分析；第二節為線性規劃解題策略探討；第三節為線性規劃成敗因素探究；第四節為低分者、中分者、高分者解題的發現。

第一節 線性規劃解題歷程分析

本節採用 Schoenfeld (1985) 的解題歷程，針對小寬、小好、小珍的解題歷程進行探討與並分析。由於每個人都有其解題特色，故分別賦予形容詞說明 3 位學生的解題歷程，分別為：大意失荊州的小寬；過關斬將的小好；勝券在握卻功敗垂成的小珍，詳細解題歷程如下。

(一) 大意失荊州的小寬 (低分者)

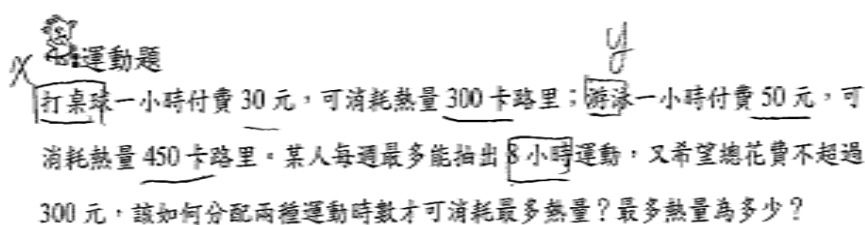
1. 運動題



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

小寬拿到運動題的一開始，先進行讀題，讀題的過程中，他亦把題目重點畫底線或框起來。(讀題 R：19 秒)



隨後，小寬依照題意開始列出限制式，先假設打桌球 x 小時，游泳 y 小時。由於題意表示花費不超過 300 元，因此小寬列出的式子為 $30x + 50y \leq 300$ 。(分析 A1：29 秒)

$$30x + 50y \leq 300$$

小寬：所以是設打桌球是 x ，游泳是 y ， $30x + 50y$ 要小於等於 300

接著，本題希望找的是如何分配兩種運動時數才可以消耗最多熱量，故小寬列出的目標函數為 $P = 300x + 450y$ 。(計畫 P：13 秒)

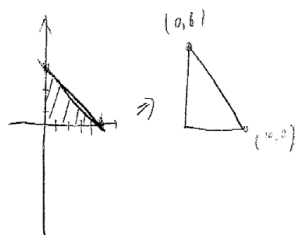
$$P: 300x + 450y$$

小寬列完目標函數後，因為時數為非負，又回到限制式補上 $x \geq 0$

與 $y \geq 0$ 。(A2: 5 秒)

$$\begin{aligned} x &\geq 0, & y &\geq 0 \\ 30x + 50y &\leq 3000 \end{aligned}$$

小寬列完限制式與目標函數後，並未將限制式先約分，直接開始在坐標平面上描繪圖形，小寬仔細的在坐標軸上標示刻度，以 2 個單位為一小格，最終描繪出 $30x + 50y = 3000$ 。小寬於坐標平面上完成繪圖後，將可行解區域拉至圖形外部，再重新繪圖，並標上頂點的坐標。(執行 I: 75 秒)



小寬將頂點逐一代入目標函數，(0,6) 代入目標函數得 1500，

(10,0) 代入目標函數得 3000，還有一個頂點 (0,0) 小寬並未帶入，

因為根據他的經驗法則，最大值不會在 (0,0) 出現。(探索 E: 17

秒)

$$\begin{aligned} 1: & 300(0) + 50(6) = 1500 \\ & 3000 \end{aligned}$$

最後，小寬再次說明，因此當打桌球 10 小時的時候，消耗最多卡路里為 3000。(驗證 V: 32 秒)

$$\begin{aligned} A: & \text{打桌球 } 10 \text{ hr} \\ & 3000 \frac{\text{卡}}{\text{hr}} \end{aligned}$$

小寬：答案是打桌球 10 個小時，然後消耗 3000 熱量卡路里

小寬在運動題中，全程僅花費 190 秒，因為小寬條列限制式的時候，忽略題目「某人每週最多能抽出 8 小時運動」這句話，小寬說：「啊～最多 8 小時這個條件沒有看到」，導致在執行 (I) 階段，少去解聯立的步驟，因此迅速得到結果。此外，描繪 $30x + 50y = 300$ 時並未先進行約分，以至於尋找截距標示坐標時，數值有點龐大，小寬表示：「我從以前就很習慣直接把坐標標上去」。再者，小寬在坐標平面上繪圖完畢後，又額外在旁邊繪製另一個圖形，而不是直接在坐標平面上作答，雖然做法上並沒有錯，但需耗費較多的時間，小寬說：「我都習慣這樣，看起來比較清楚」。最後，在探索階段小寬將頂點逐一代入目標函數， $(0,6)$ 代入得到函數值為 1500，但實為 2700，此部分為小寬計算錯誤。

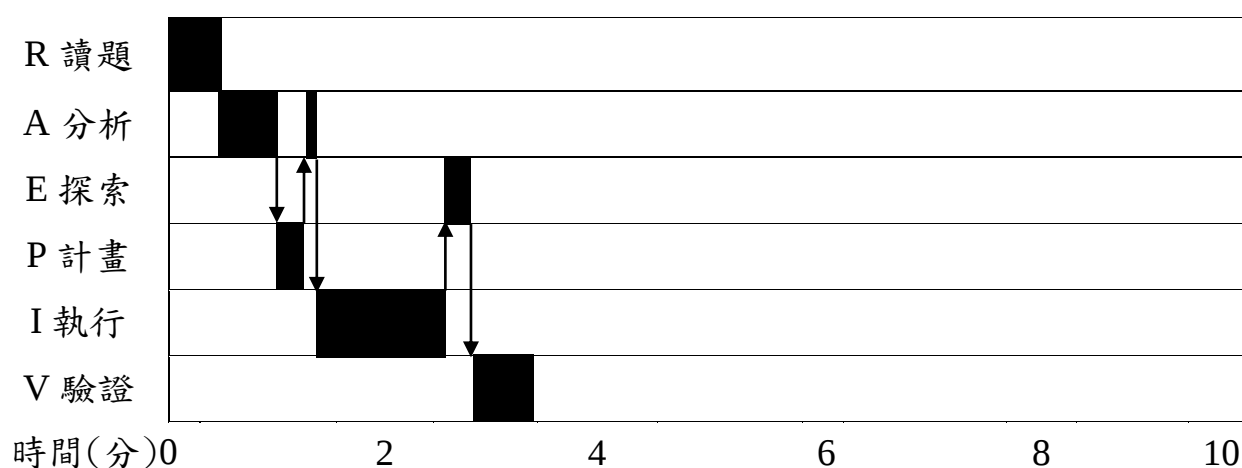


圖 4 - 1 小寬運動題解題歷程階段圖



2. 手套題



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

首先，小寬拿到題目後先讀題，邊讀題邊將題目的重點畫線或框起來。(讀題 R：35 秒)



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

接下來，小寬再依題意所說，每雙甲款式使用紅色毛線 50 公尺，乙款式使用紅色毛線 20 公尺，紅色毛線僅有 900 公尺，因此小寬列出第一條限制式為 $50x + 20y \leq 900$ 。每雙甲款式使用白色毛線 40 公尺，乙款式使用白色毛線 40 公尺，白色毛線僅有 1200 公尺，故小寬列出第二條限制式為 $40x + 40y \leq 1200$ 。(分析 A1：45 秒)

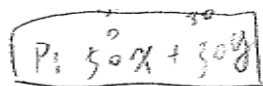
$$\begin{aligned} L1: & 50x + 20y = 900 \\ L2: & 40x + 40y = 1200 \end{aligned}$$

小寬：所以是 $50x$ 加.....，再看一下..... $20y$ 吧！應該是.....可以

小於等於 900，然後 $40x + 40y$ 可以小於等於 1200

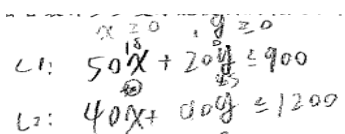
甲款每雙可賺 50 元，乙款每雙可賺 30 元，小寬列出目標函數為

$P = 50x + 30y$ 。(計畫 P：12 秒)



小寬列完目標函數後，因為手套數目為非負，又回到限制式補上

$x \geq 0$ 與 $y \geq 0$ 。(分析 A2：5 秒)

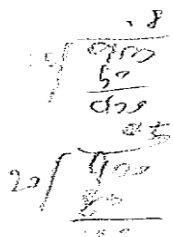


小寬完成目標函數與限制式後，小寬開始於坐標平面上繪製限制

式。與運動題相同的是，小寬並未先化簡限制式，所以描繪直線與兩

軸交點時，數字有點大，故小寬輔助直式的除法尋找 x 截距與 y 截

距，並以 10 個單位為一小格，於 x 軸與 y 軸上標示刻度。

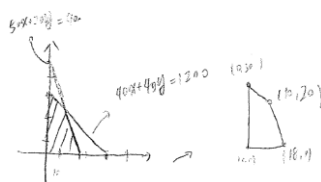


接著，小寬於坐標平面上點出 (18,0) 與 (0,45) 兩點位置，再

將兩點連線畫出 $50x + 20y = 900$ ；在坐標平面上標示出 (30,0) 與

(0,30) 兩點，將兩點連線得直線 $40x + 40y = 1200$ 。小寬畫完可行解區

域後，又將可行解區域拉至圖形外部，重新繪圖，並標上頂點坐標。



他再由 $\begin{cases} 50x + 20y = 900 \\ 40x + 40y = 1200 \end{cases}$ 解聯立得 $x=10$ ， $y=20$ ，故靠近右上方的

的頂點為 $(10,20)$ 。(執行 I：223 秒)

$$\begin{aligned} 50x + 20y &= 900 \\ 40x + 40y &= 1200 \\ 60x &= 600 & 20y &= 600 \\ x &= 10 & y &= 20 \end{aligned}$$

小寬將可行解區域之頂點逐一代入目標函數， $(18,0)$ 代入目標函數為 900； $(10,20)$ 代入目標函數為 1100； $(0,30)$ 代入目標函數為 900，因而得到目標函數的最大值為 1100。(探索 E：28 秒)

$$P = \begin{array}{r} 900 \\ 500 + 600 = 1100 \\ \hline 900 \end{array}$$

小寬：呃……等一下，所以是 900 跟 50，500 加 600 等於 1100，然後是 900

最後，小寬再次複誦，當甲款手套 10 雙，乙款手套 20 雙，有最大利潤為 1100 元。(驗證 V：47 秒)

$$\begin{aligned} A: & \text{甲: 10 雙 乙: 20 雙} \\ & \text{Max 利潤: 1100 元} \end{aligned}$$

小寬：喔，甲款做 10 雙啦，然後乙款做 20 雙，然後最大利潤是 1100，嘿!!!

小寬在手套題的解題過程均正確，共歷時 395 秒。但同樣於執行 (I) 階段，因為沒有先約分，導致找尋 x 截距與 y 截距時花費較多的時間；小寬於坐標平面作圖完畢後，亦將可行解區域重新繪

製，因此延長了執行階段的時間。

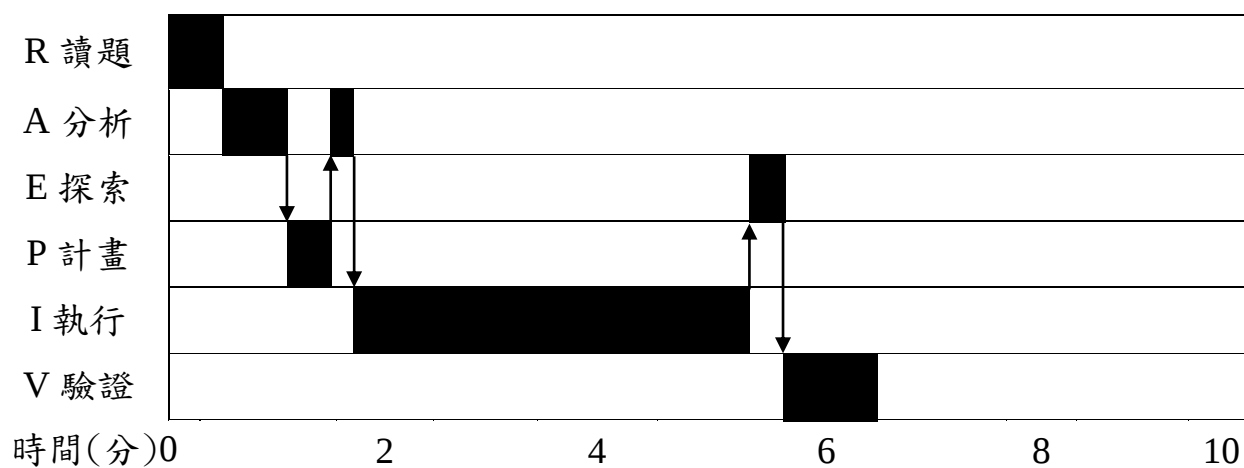


圖 4 - 2 小寬手套題解題歷程階段圖



3. 代購題



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

首先，小寬先進行讀題，邊讀題邊將題目的重點畫線或框起來。

（讀題 R：25 秒）

代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

小寬完成讀題後，先假設指甲油代購 x 個，面膜代購 y 個，由於指甲油的成本是 100 元，面膜的成本為 50 元，題目表示代購的金錢支出控制在台幣 4000 元以內，故小寬列出的第一條限制式為

$100x + 50(4000 - 100x)$ ；代購重量需控制在 3000 克以內，所以小寬列出的第二個限制式為 $100x + 30(3000 - 100x)$ 。(分析 A1：125 秒)

小寬：所以……先設面膜跟指甲油是 x 和 y

然後……指甲油的成本是……

設指甲油為 x ，指甲油的成本是 $100x$ ，那面膜的成本是 50

乘……50 乘……

思考一下，4000 元是上限……

4000 減 $100x$ ，然後重量的話是 $100x$ 加面膜的是 3000 減 $100x$

後來小寬發現式子怪怪的，小寬似乎覺得與之前寫過的題目不同，因此小寬將原本寫得式子擦掉，重新進行讀題。(讀題 R2：54 秒)

小寬：這樣好像不太對……

我可以想一下這題要怎麼做嗎？

小寬重新讀題後，寫下的兩個限制式分別為 $50x + 100y \leq 4000$ 與 $30x + 100y \leq 3000$ 。(分析 A2：28 秒)

$$\begin{array}{l} 100x + 50y \leq 4000 \\ 100x + 30y \leq 3000 \end{array}$$

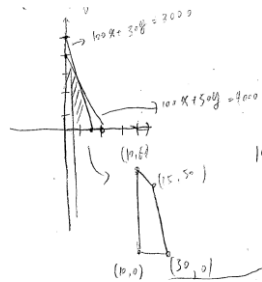
由於代購面膜每個可賺 40 元，代購指甲油每個可賺 100 元，小寬寫下的目標函數為 $P = 100x + 40y$ 。(計畫 P：16 秒)

$$P: 100x + 40y$$

列完目標函數後，由於代購的指甲油至少要買 10 個且面膜數量為非負，故又回到限制式的地方補上 $x \geq 10$ 與 $y \geq 0$ 。(分析 A3：16 秒)

$$x \geq 10, y \geq 0$$

小寬完成目標函數與限制式後，於坐標平面上描繪限制式，小寬以 20 個單位為一格，在兩坐標軸上標示出刻度。於坐標平面上點出 (40,0) 與 (0,80) 兩點位置，再將兩點連得 $100x + 50y = 4000$ 的直線；於坐標平面上點出 (30,0) 與 (0,100) 兩點，再將兩點連起來形成 $100x + 30y = 3000$ 的直線；還有 $x = 10$ 為一條鉛直線，3 條限制式畫完後，圖形為一個四邊形。小寬接著將可行解區域的圖形拉至外部重新繪製，並將四邊形的四個頂點分別標示上去。



令 $x = 10$ 代入 $100x + 50y = 4000$ 得到 $y = 60$ ，故其四邊形中左上方頂點為 (10,60)；左下方為 (10,0)；右下方為 (30,0)；右上方的頂點

須由 $\begin{cases} 100x + 50y = 4000 \\ 100x + 30y = 3000 \end{cases}$ 解聯立，得 $x = 15$ ， $y = 50$ ，所以坐標為

(15,50)。(執行 I：255 秒)

$$\begin{aligned} 20y &= 1000 \\ y &= 50 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1000 + 50y &= 4000 \\ 50y &= 3000 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

小寬將可行解區域內之頂點逐一代入目標函數，(10,60) 代入目標函數為 3400；(15,50) 代入目標函數為 3000；(30,0) 代入目標函數為 3000，因此得到最大值為 3400。(探索 E：45 秒)

$$P: \begin{cases} 1000 + 3400 = 3400 \\ 1500 + 1500 = 3000 \\ 3000 \end{cases}$$

小寬再次說明代購 10 個指甲油以及 60 個面膜，會有最大利潤為 3400。(驗證 V：40 秒)

$$\begin{aligned} &10 \text{ 指甲油} \\ A: &60 \text{ 面膜} \\ &3400 \text{ 元} \end{aligned}$$

小寬：所以答案是 10 個指甲油然後 60 個面膜，然後利潤會是 3400，看一下.....應該是沒錯

小寬大致上能完整寫下計算過程，共歷時 600 秒。與他人不一樣的是，因為題目先提到面膜，再提到指甲油，所以一般人都習慣假設面膜代購 x 個，指甲油代購 y 個，但小寬剛好相反，假設面膜代購 y 個，指甲油代購 x 個，但不影響最終答案。此外，在分析 (A1) 階段的時候，由於題目較長，小寬嘗試著列式，列完式子後，又覺得怪怪的，因此再次回到讀題階段，重新再把題目看過一次。Leung (2009)

以 Polya 的 4 階段解題歷程為基礎，提出解題歷程可以是雙向的，因此小寬可回朔到讀題階段再次了解題意；之後在第 2 次的分析 (A2) 階段，就很順利的列出目標函數與限制式。與運動題、手套題相同的是，小寬於坐標平面上繪製完可行解區域後，又將圖形拉至外部重新繪製，並標上頂點，且過程中並沒有將限制式先約分，運算過程中數字較為龐大。可惜的是，小寬在探索階段將頂點逐一代入的過程中，原目標函數為 $P = 100x + 40y$ ，但小寬代 (15,50) 的時候，誤將限制式 $100x + 30y = 3000$ 看成目標函數，得到的函數值為 3000，實為 3500，因此小寬最終並未得到正解。

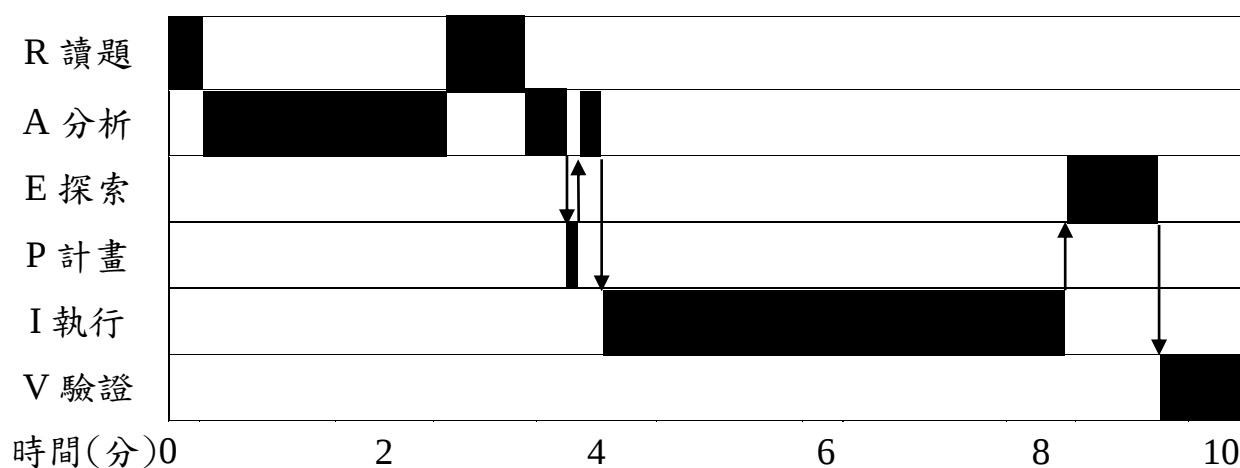


圖 4 - 3 小寬代購題解題歷程階段圖 😞

(二) 過關斬將的小好 (中分者)

1. 運動題



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

一開始，小好先進行讀題，邊讀題邊將題目的重點畫底線或圈起來。(讀題 R：24 秒)



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

接著，小好設桌球要花 x 小時，游泳花 y 小時，題意表示打桌球一小時須付費 30 元，游泳一小時須付費 50 元，而且每週最多能抽出 8 小時運動，所以第一條方程式為 $30x + 50y \leq 8$ ，列完式子後，小好赫然發現不對勁，因為 $30x + 50y$ 指的是花費，花費不超過 300 元，所以小好立刻修正式子為 $30x + 50y \leq 300$ ；其次，由於每週最多能抽出 8 小時運動，所以第二個式子為 $x + y \leq 8$ 。(分析 A：43 秒)

$$\begin{cases} 30x + 50y \leq 300 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

小好：不對！不對！小於等於 300 塊

列完限制式後，題意表示打桌球每小時可以消耗熱量 300 卡路里，游泳每小時可以消耗熱量 450 卡路里，故小好列出其目標函數為 $P = 300x + 450y$ 。(計畫 P：13 秒)

$$P = 300x + 450y$$

條件齊全後，小好開始繪製可行解區域的圖形範圍，小好按照國中直線方程式找截距的方式，先令方程式 $30x + 50y = 300$ 的 $x = 0$ ，得到 $y = 6$ ；令 $y = 0$ ，得到 $x = 10$ 。再令方程式 $x + y = 8$ 的 $x = 0$ 得到 $y = 8$ ；令 $y = 0$ 得到 $x = 8$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 10 \\ 6 & 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{array} \right.$$

小好以 2 單位為 1 個刻度，先在坐標軸上標示好，再於 x 軸上標示出 $(0, 6)$ ，標示完畢後，小好馬上發現， $(0, 6)$ 應該位於 y 軸上，因此迅速作修正，並把 $(10, 0)$ 描繪在 x 軸上，兩點連線得到 $30x + 50y = 300$ 。

小好：啊！不對……

$(0, 6)$ 在這裡， $(10, 0)$ 在這裡

所以會有一條方程式在這裡……

接著，小好於圖形上標示出 $(0, 8)$ 以及 $(8, 0)$ ，兩點連線即為 $x + y = 8$ ，並於 $30x + 50y = 300$ 、 $x + y = 8$ 、 x 軸、 y 軸所圍成的可行

解區域內畫上斜線。圖形畫完後，小好由 $\begin{cases} 3x + 5y = 30 \\ x + y = 8 \end{cases}$ 解聯立得到兩

條直線的交點為 $(5, 3)$ ，並於圖上標示坐標 $(5, 3)$ 。(執行 I：122 秒)

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 30 \\ \begin{cases} 3x + 5y &= 30 \\ 3x + 3y &= 24 \end{cases} \\ 2y &= 6, y = 3, x = 5 \end{aligned}$$

完成圖形的繪製後，小好將 $(0, 6)$ 、 $(5, 3)$ 、 $(8, 0)$ 代入目標函數當中，以表格呈現，可得到當 $(x, y) = (0, 6)$ 時，目標函數 $P = 2700$ ；當 $(x, y) = (5, 3)$ 時，目標函數 $P = 2850$ ；當 $(x, y) = (8, 0)$ 時，目標函數 $P = 2400$ ，所以小好得知在 $x = 5$ ， $y = 3$ 時，能消耗最多熱量 2850

卡路里。(探索 E：52 秒)

(x, y)	$(0, 6)$	$(5, 3)$	$(8, 0)$
P	2700	2850	2400

$$\begin{array}{r} 1500 \\ 1350 \\ \hline 2850 \end{array}$$

最後於驗證階段，小好複誦剛剛得知的結果，並清楚寫上當打桌球 5 小時，游泳 3 小時，能消耗最多的熱量 2850 卡路里。(驗證 V：28 秒)

桌 5 小時
游 3 小時
最多 2850 卡

小好：所以得到，得到桌球要打 5 個小時，游泳要花 3 個小時，會得到最多熱量 2850 卡路里

小妤按部就班的把運動題完成，計算完畢後得到正確的結果，全程共歷時 282 秒。小妤在一開始列限制式 $30x + 50y \leq 300$ 以及描繪直線 $30x + 50y = 300$ 的時候，均有出現小錯誤，但小妤都能及時反應並做修正，所幸沒有影響最後的結果。

然而美中不足的是，小妤繪製可行解區域的時候，得到的區域為四邊形，但小妤只標示出 3 個頂點，並未標示 $(0,0)$ ，小妤表示：「喔，對！我忘了」；代目標函數的時候，小妤也沒有把 $(0,0)$ 代入，小妤表示：「啊~因為之前做題目的時候，最大值都不會在 $(0,0)$ ，因為代進去都是 0，所以我就沒有寫了，但最後結果還是對的」，因為小妤過去做過很多類似的題目，經驗法則告訴她，通常在 $(0,0)$ 的位置不會出現最大值，故在解題的過程完全忽略 $(0,0)$ 這個頂點，最終亦不影響結果。

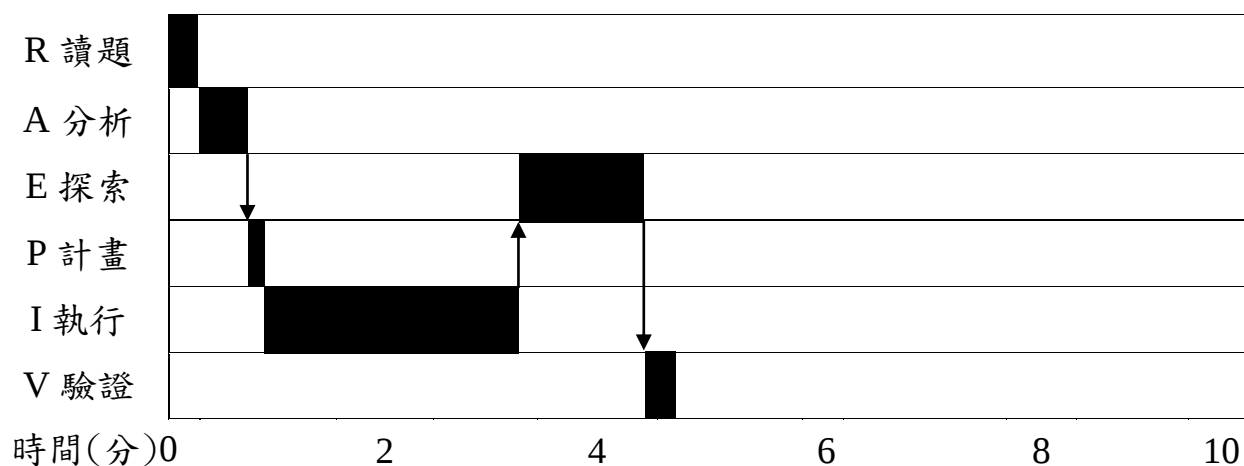


圖 4 - 4 小妤運動題解題歷程階段圖



2. 手套題



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

由於手套題比運動題的題意敘述較長，小好花較多的時間進行讀題，讀題的過程中，小好亦把題目重點畫底線或圈起來。（讀題 R：47 秒）



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

由於題目已經假設好甲款手套製作 x 雙，乙款手套製作 y 雙，且每雙甲款手套需使用紅色毛線 50 公尺，每雙乙款手套需使用紅色毛線 20 公尺，共有紅色毛線 900 公尺，故小好列出第一條限制式為 $50x + 20y \leq 900$ ；每雙甲款手套需使用白色毛線 40 公尺，每雙乙款手套需使用白色毛線 40 公尺，共有白色毛線 1200 公尺，故小好列出第

二條限制式為 $40x + 40y \leq 1200$ 。(分析 A: 31)

$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \\ 40x + 40y \leq 1200 \end{cases}$$

每雙甲款手套可賺 50 元，每雙乙款手套可賺 30 元，小好列出的
最大利潤目標函數為 $P = 50x + 30y$ 。(計畫 P: 12 秒) $P = 50x + 30y$

列完限制式與目標函數後，由於限制式的係數很大，因此小好先
把 $50x + 20y \leq 900$ 左右兩邊同除以 10，得到 $5x + 2y \leq 90$ ；把
 $40x + 40y \leq 1200$ 左右兩邊同除以 20，得到 $2x + 2y \leq 600$ （並未約成最
簡）。

同運動題的方法，小好畫直線時，習慣先列出 x 截距與 y 截距，
令方程式 $5x + 2y = 90$ 的 $x = 0$ ，得到 $y = 45$ ；令 $y = 0$ ，得到 $x = 18$ 。再
令方程式 $2x + 2y = 600$ 的 $x = 0$ ，得到 $y = 300$ ，令 $y = 0$ ，得到
 $x = 300$ 。當小好開始要將點坐標畫在坐標平面上的時候，突然發現
300 這個數字很大，頓時發現在上一個步驟 $40x + 40y \leq 1200$ 左右兩邊
同除以 20 的地方化簡錯誤，應該是 $2x + 2y \leq 60$ ，並修改 $2x + 2y = 60$
與 x 軸、 y 軸交的點坐標為 $(0, 30)$ 、 $(30, 0)$ 。

$$5x + 2y = 90$$

$$2x + 2y = 60$$

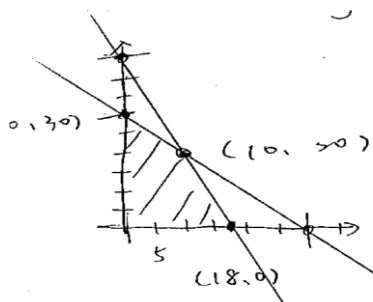
$$\begin{array}{r|l} 0 & 18 \\ 45 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 30 \\ 30 & 0 \end{array}$$

小好：等等……我看看……（發現化簡錯誤回去做修正）

所以不對，這裡是 60，所以這裡是 30 跟 30

小好以 5 單位為 1 個刻度，先在坐標軸上標示好，再於 y 軸上標示出 $(0,45)$ ，於 x 軸上標示 $(18,0)$ ，兩點連線得到 $5x + 2y = 90$ 。接著，小好於圖形上標示出 $(0,30)$ 以及 $(30,0)$ ，兩點連線即為 $2x + 2y = 60$ ，並於 $5x + 2y = 90$ 、 $2x + 2y = 60$ 、 x 軸、 y 軸所圍成的可行解區域內畫上斜線。



接著，小好由 $\begin{cases} 5x + 2y = 90 \\ 2x + 2y = 60 \end{cases}$ 解聯立得到 $x = 10$ ，代回 $2x + 2y = 60$ ，

得到 $y = 4$ 。隨後，小好立刻發現計算錯誤， y 應該等於 20，而不是 4，並立即做修正，於圖上標示坐標 $(10, 20)$ 。(執行 I：186 秒)

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 90 \\ 2x + 2y &= 60 \\ \hline 3x &= 30 \\ x &= 10 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

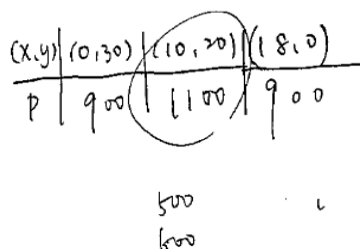
小好：找出交點是..... $3x = 30$ ， $x = 10$ ， y 會等於.....

這裡是 20.....，這裡 40， y 會等於 4

不對！ y 會等於 20，所以這個交點是 $(10, 20)$

完成圖形的繪製後，小好將 $(0, 30)$ 、 $(10, 20)$ 、 $(18, 0)$ 代入目標函數當中，以表格呈現，可得到當 $(x, y) = (0, 30)$ 時，目標函數

$P=900$ ；當 $(x,y)=(10,20)$ 時，目標函數 $P=1100$ ；當 $(x,y)=(18,0)$ 時，目標函數 $P=900$ ，所以小好得知在 $x=10$ ， $y=20$ 時，有最大利潤 1100 元。(探索 E：33 秒)



最後於驗證階段，小好複誦剛剛得知的結果，並清楚寫上當甲款手套有 10 雙，乙款手套有 20 雙，有最大利潤 1100 元。(驗證 V：20 秒)

$$\begin{aligned} \text{甲} &= 10 \text{ 雙} \\ \text{乙} &= 20 \text{ 雙} \\ \text{最大} &: 1100 \text{ 元} \end{aligned}$$

小好：所以是甲款要 10 雙，跟乙款要 20 雙，有最大利潤 1100

小好在手套題的表現上四平八穩，全程歷時 329 秒。雖然小好在執行 (I) 階段約分計算錯誤，解聯立的過程當中有小小的失誤，但小好都能及時發現並做修正，不影響最終的答案。與運動題相同的是，小好並未把可行解區域的頂點坐標 $(0,0)$ 標示出來，亦是從過去的經驗法則得知在坐標 $(0,0)$ 的地方不會有最大值。此外，小好在約分 $40x + 40y \leq 1200$ 時，並未想到可先將不等式左右兩邊同時除以 40，得到更精簡的不等式，導致後面計算過程出錯，幸好小好即時修正，最終結果正確。

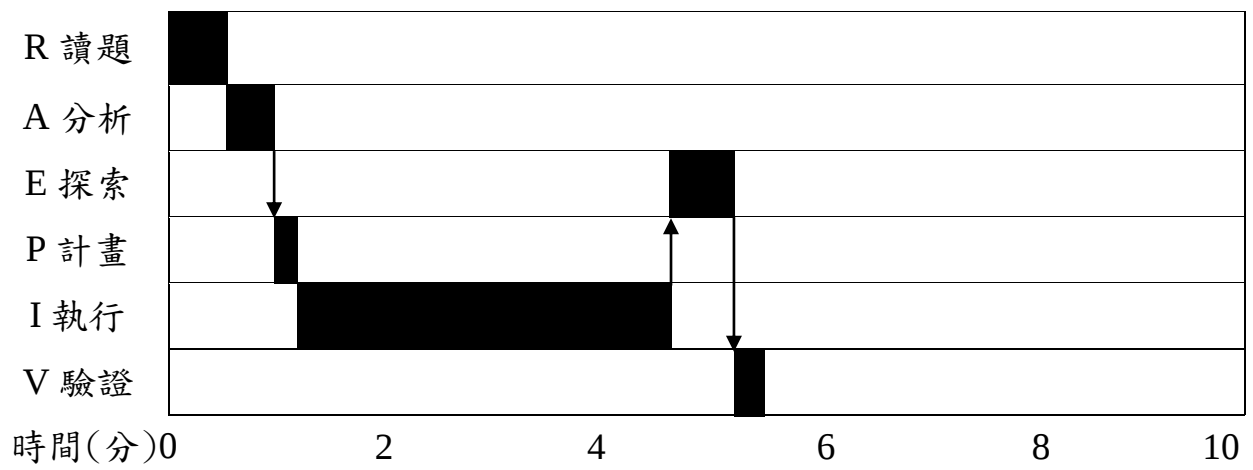


圖 4 - 5 小好手套題解題歷程階段圖 😊

3. 代購題



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

小好先進行讀題，讀題的過程中，小好亦把題目重點畫底線或圈起來。（讀題 R：31 秒）



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

..

接著，小好假設面膜要代購 x 個，指甲油要代購 y 個，題意表示代購的金錢支出在台幣 4000 元以內，故小好列出的第一個限制式為 $50x + 100y \leq 4000$ ；又代購商品的總重量要控制在 3000 克以內，因此小好列出第二個限制式為 $30x + 100y \leq 3000$ ；題目提到指甲油至少要買 10 個，所以小好又多寫上 $y \geq 10$ 。(分析 A：63 秒)

$$\begin{cases} 50x + 100y \leq 4000 \\ 30x + 100y \leq 3000 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

由於代購一個面膜利潤 40 元，代購一個指甲油利潤 100 元，小好列出利潤的目標函數為 $P = 40x + 100y$ 。(計畫 P：8 秒)

$$P = 40x + 100y$$

列完限制式與目標函數後，小好先將限制式 $50x + 100y \leq 4000$ 與 $30x + 100y \leq 3000$ 進行約分，簡化為 $5x + 10y = 400$ （並未約成最簡）

與 $3x + 10y = 300$ 。

$$\begin{cases} 5x + 10y = 400 \\ 3x + 10y = 300 \end{cases}$$

小好先令方程式 $5x + 10y = 400$ 的 $x = 0$ ，得到 $y = 40$ ；令 $y = 0$ ，得到 $x = 80$ 。再令方程式 $3x + 10y = 300$ 的 $x = 0$ ，得到 $y = 30$ ；令

$y = 0$ ，得到 $x = 100$ 。

$$\begin{array}{r|l} 0 & 80 \\ 40 & 0 \\ \hline 0 & 100 \\ 30 & 0 \end{array}$$

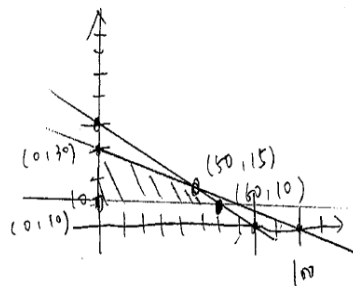
隨後，小好開始繪製圖形，原本小好以 20 個單位為 1 刻度，但後來發現刻度太大，點坐標不好標示與區分，所以擦掉原先的圖形，改成以 10 個單位為 1 刻度行繪製。

小好：令一格是 20，可以得到.....9、10、11

所以這裡是 100

3、4、5、6、7、8，所以一格是 10

小好於 y 軸上標示 $(0,40)$ ，在 x 軸上標示出 $(80,0)$ ，兩點連線得到 $5x+10y=400$ 。接著，小好於圖形上標示出 $(0,30)$ 以及 $(100,0)$ ，兩點連線即為 $3x+10y=300$ ，並畫上 $y=4$ 的水平線，交 y 軸於 $(0,10)$ 。最後於 $5x+10y=400$ 、 $3x+10y=300$ 、 y 軸、 $y=10$ 軸所圍成的可行解區域內畫上斜線。



接著，小好由 $\begin{cases} 5x+10y=400 \\ 3x+10y=300 \end{cases}$ 解聯立得到 $x=50$ ，代回

$3x+10y=300$ ，得到 $y=15$ ，並於圖上標示出 $(50,15)$ ； $y=10$ 代入

$5x+10y=400$ ，得到 $x=60$ ，並於圖上標示出 $(60,10)$ 。(執行 I：186

秒)

$$\begin{array}{l} 5x+10y=400 \\ 3x+10y=300 \\ \hline 2x=100, x=50 \\ y=15 \end{array}$$

完成圖形的繪製後，小好將 $(0,30)$ 、 $(0,10)$ 、 $(50,15)$ 、 $(60,10)$

代入目標函數，以表格呈現，可得到當 $(x,y)=(0,30)$ 時，目標函數

$P=3000$ ；當 $(x,y)=(0,10)$ 時，目標函數 $P=1000$ ；當

$(x, y) = (50, 15)$ 時，目標函數 $P = 3500$ ；當 $(x, y) = (60, 10)$ 時，目標函數 $P = 3400$ ，所以小好得知在 $x = 50$ ， $y = 15$ 時，有最大利潤 3500

元。(探索 E：51 秒)

(x, y)	$(0, 30)$	$(0, 10)$	$(50, 15)$	$(60, 10)$
P	3500	3000	3500	3400

最後於驗證階段，小好複誦剛剛得知的結果，當面膜代購 50

個，指甲油代購 15 個，有最大利潤 3500 元。(驗證 V：20 秒)

面 = 50
指 = 15
最大 = 3500 元

小好：所以代購指甲油……

不對！是面膜 50 個，指甲油 15 個，會得到最大利潤是 3500 元

由於代購題比起前面的運動題、手套題之題意敘述較長，限制式也多了一條，小好在作答的過程中花費較多的時間，共歷時 359 秒。

小好在執行 (I) 階段並沒有將限制式 $50x + 100y \leq 4000$ 化成最簡式

$x + 2y = 80$ ，而是很直覺的將不等式左右同除以 10，得到

$5x + 10y = 400$ ，雖然如此，但不影響答案。此次小好解題過程非常順

暢，過程並沒有出現計算錯誤的情形。

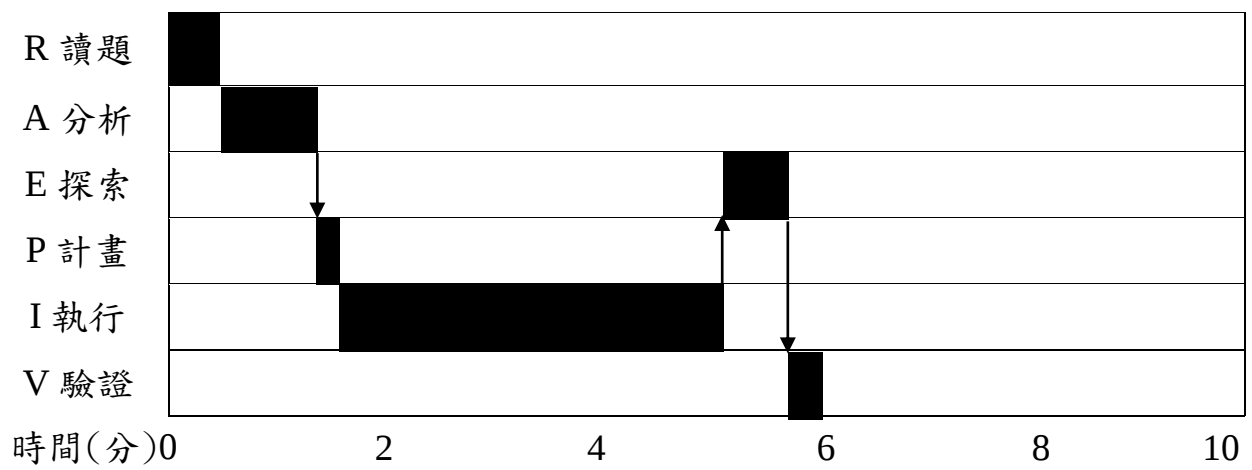


圖 4 - 6 小好代購題解題歷程階段圖



(三) 勝券在握卻功敗垂成的小珍 (高分者)

1. 運動題



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

首先，小珍先進行讀題，將題目念過一次後，便開始作答（讀題 R：35 秒）。小珍先假設一週打桌球 x 小時，游泳 y 小時，由於題目表示每週最多能抽出 8 小時運動，因此小珍列出第一個式子為

$x + y \leq 8$ ；又總花費希望不超過 300 元，所以小珍列出第二個式子為

$30x + 50y \leq 300$ ，敘述清晰且流暢。（分析 A：44 秒）

小珍：設打桌球 x 小時一週，然後游泳 y 小時一週

然後他每週可以最多抽出 8 小時

所以 $x + y$ 會小於等於 8

然後他希望總花費不超過 300

所以打桌球一小時 30

所以就是 $30x$

然後游泳一小時加 $50y$ 不超過 300，小於等於 300

接著，由於打桌球每小時可消耗 300 卡路里，游泳每小時可消耗 450 卡路里，所以小珍目標函數為 $P = 300x + 450y$ 找最小值。（計畫

P : 38 秒)

$$P = 300x + 450y$$

列完限制式與目標函數後，小珍開始繪製可行解區域。小珍先畫出 x 軸與 y 軸後，回到第一條限制式 $x + y \leq 8$ ，在限制式的右方寫上 $(0,8)$ 與 $(8,0)$ ，接著分別於 x 軸上標示 $(8,0)$ ， y 軸上標示 $(0,8)$ ，兩點連線即為 $x + y = 8$ 。同樣的，小珍回到第二條限制式 $30x + 50y \leq 300$ 的右方寫上 $(10,0)$ 與 $(0,6)$ ，並於坐標平面上點上 $(10,0)$ 與 $(0,6)$ ，兩點連線即為 $30x + 50y = 300$ 。

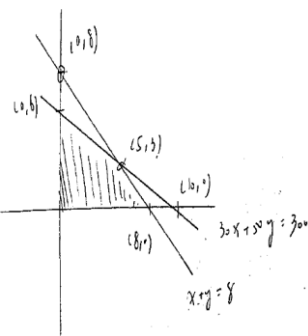
$$\begin{cases} x + y \leq 8 & (0,8) \\ 30x + 50y \leq 300 & (10,0) \\ P = 300x + 450y & (0,6) \end{cases}$$

小珍由 $\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases}$ 解聯立得 $x = 5$ ， $y = 3$ ，並回到圖形上於

$x + y = 8$ 與 $30x + 50y = 300$ 兩條直線的交點上標示 $(5,3)$ ，並於

$x + y = 8$ 、 $30x + 50y = 300$ 、 x 軸、 y 軸所圍成的可行解區域內畫上斜

線。(執行 I : 147 秒)

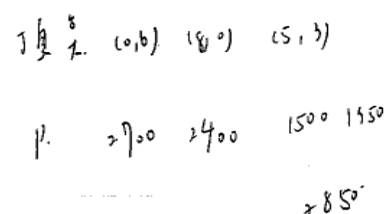


完成圖形的繪製後，小珍將 $(0,6)$ 、 $(8,0)$ 、 $(5,3)$ 代入目標函

數，得知當 $(x,y) = (0,6)$ 時，目標函數 $P = 2700$ ；當 $(x,y) = (8,0)$

時，目標函數 $P = 2400$ ；當 $(x, y) = (5, 3)$ 時，目標函數 $P = 2850$ ，所以小珍得知在 $x = 5$ ， $y = 3$ 時，能消耗最多熱量 2850 卡路里。(探索

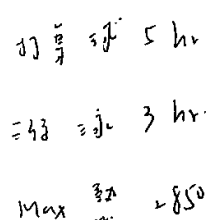
E：46 秒)



Handwritten notes showing points $(0,0)$, $(10,0)$, $(5,3)$ and corresponding P values 0, 2400, 2850.

於驗證階段，小珍再次完整表示，當打桌球 5 小時，游泳 3 小時，可以消耗最多熱量 2850 卡路里。(驗證 V：31 秒)

Handwritten notes showing 5 hr and 3 hr, and Max 2850.



Handwritten notes showing 5 hr, 3 hr, and Max 2850.

小珍：所以他要打桌球 5 小時，然後游泳 3 小時，可以消耗最多熱量 2850

小珍解題過程極為順暢，過程中並沒有計算錯誤，共歷時 341 秒。小珍作答時盡量保持題目版面的整潔，並未在題目的敘述中畫底線或是將重點圈起來。此外，小珍作答時，並未列出 $x \geq 0$ 與 $y \geq 0$ 這兩條限制式，卻能直覺的選取可行解區域在第一象限，小珍表示：

「因為它跟我以前做的題目差不多，都是取第一象限這塊」。再者，小珍在繪製圖形的時候，並未依照刻度大小去畫，小珍表示：「我都是稍微而已」，憑著自己過去的經驗，大略的在坐標軸上標示點坐標 $(0,8)$ 、 $(8,0)$ 與 $(10,0)$ 與 $(0,6)$ 。再者，小珍在繪圖的時候，並未把

可行解區域的頂點坐標 $(0,0)$ 標示出來，亦是從過去的經驗法則得知在坐標 $(0,0)$ 的地方不會有最大值，因此忽略不計，最終並不影響答案。

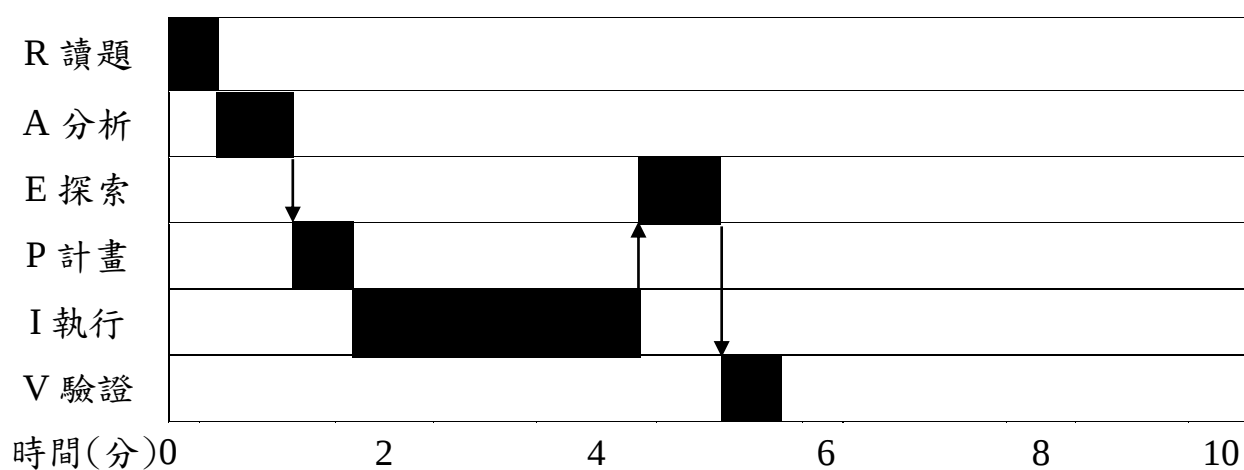


圖 4 - 7 小珍運動題解題歷程階段圖



2. 手套題



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

首先，小珍先進行讀題，邊讀題邊把題目的條件有系統的條列出來。(讀題 R：50 秒)

	甲
紅	50 m
白	40 m
	50 元

小珍：小芬在網路上拍賣兩款，甲款是用紅線 50 公尺，白色的線 40 公尺，可賺 50

甲款式紅色.....白色.....然後可以賺 50 元

	甲	乙
紅	50 m	20 m
白	40 m	40 m
	50 元	30 元

小珍：乙款式紅色 20，白色 40，可以賺 30 元

	x	y	
	甲	乙	
紅	50 m	20 m	900
白	40 m	40 m	1200
	50 元	30 元	

小珍：然後現在有紅色的毛線 900，白色的 1200

然後他要甲款 x 雙，乙款是 y 雙

其次，由於題意表示甲款式手套每雙可賺 50 元，乙款式手套每雙可賺 30 元，要找尋利潤最大值，所以小珍列出目標函數為

$$P = 50x + 30y \text{ 。(計畫 P：9 秒)} \quad p = 50x + 30y$$

接著，每雙甲款手套需使用紅色毛線 50 公尺，每雙乙款手套需使用紅色毛線 20 公尺，共有紅色毛線 900 公尺，故小珍列出第一條限制式為 $50x + 20y \leq 900$ ；每雙甲款手套需使用白色毛線 40 公尺，每雙乙款手套需使用白色毛線 40 公尺，共有白色毛線 1200 公尺，故小珍列出第二條限制式為 $40x + 40y \leq 1200$ 。(分析 A：26 秒)

$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \\ 40x + 40y \leq 1200 \end{cases}$$

列完目標函數與限制式後，小珍開始繪製可行解區域的圖形，畫直線時，為了好找到 x 截距與 y 截距，小珍先將 $50x + 20y \leq 900$ 同時除以 10，化簡為 $5x + 2y \leq 90$ ，並得知當 $y = 0$ ， $x = 18$ ；當 $x = 0$ 時， $y = 45$ ；將 $40x + 40y \leq 1200$ 同時除以 40，化簡為 $x + y \leq 30$ ，並得知當 $x = 0$ 時， $y = 30$ ；當 $y = 0$ ， $x = 30$ 。

$$\begin{array}{cc} 5x + 2y \leq 90 \\ x & y \\ 18 & 0 \\ 0 & 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x + y \leq 30 \\ 0 & 30 \\ 30 & 0 \end{array}$$

小珍：先化簡.....所以 $5x + 2y$ 小於等於 90

$x \dots 18$ ， y 是 $45 \dots$

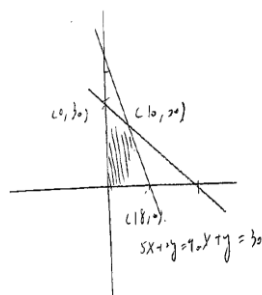
然後這個可以是 $x + y$ 小於等於 30

小珍快速的在 y 軸點上一點 $(0,30)$ ，在 x 軸點上一點 $(30,0)$ （此兩點並沒有標示坐標，只有分別在兩軸上畫一點），兩點連線，即為方程式 $x + y = 30$ ；小珍又快速的在 x 軸點上一點 $(18,0)$ ，在 y 軸點上一點 $(0,45)$ （此兩點並沒有標示坐標，只有分別在兩軸上畫一點），兩點連線，即為方程式 $5x + 2y = 90$ 。並於 $5x + 2y = 90$ 、 $x + y = 30$ 、 x 軸、 y 軸所圍成的可行解區域內畫上斜線。

接下來，再由 $\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 2y = 90 \end{cases}$ 解聯立得 $x = 10$ ， $y = 20$ ，兩線交點為

$(10,20)$ ，於坐標平面上標示 $(10,20)$ 。為了等一下可以代入目標函

數，小珍在 $x + y = 30$ 與 y 軸的交點標示 $(0,30)$ ；在 $5x + 2y = 90$ 與 x 軸的交點標示 $(18,0)$ 。（執行 I：133 秒）



完成圖形的繪製後，小珍將 $(0,30)$ 、 $(18,0)$ 、 $(10,20)$ 代入目標函數，當 $(x,y) = (0,30)$ 時，目標函數 $P = 900$ ；當 $(x,y) = (18,0)$ 時，目標函數 $P = 900$ ；當 $(x,y) = (10,20)$ 時，目標函數 $P = 1100$ ，所

以小珍得知在 $x=10$ ， $y=20$ 時，有最大利潤 1100 元。(探索 E：35

秒)

$$\begin{array}{cccc} \frac{5}{12} & (0, 20) & (10, 20) & (10, 0) \\ & 0 & 900 & 500 + 600 \\ & & & 1100 \end{array}$$

最後，小珍再次完整寫下，當甲款手套製作 10 雙，乙款手套製作 20 雙，會有最大利潤 1100 元。(驗證 V：16 秒)

$$\begin{array}{l} \text{甲} : 10 \text{ 雙} \\ \text{乙} : 20 \text{ 雙} \\ \text{Max} : 1100 \text{ 元} \end{array}$$

小珍：所以甲款是 10 雙，乙款是 20 雙，會有最大利潤 1100 元

小珍手套題的解題過程十分流暢，全程並沒有計算錯誤，共歷時 269 秒。此外，由於手套題的題目較長，小珍於讀題階段 (R)，依題意先將條件逐一系列出，大幅縮減後面的執行階段 (I)，僅花費 133 秒。再者，小珍於執行階段 (I) 畫直線的時候，會先考慮將方程式約分約到最簡，使能夠快速找到 x 截距與 y 截距。此外，同上運動題，小珍在繪製直線的時候，並沒有在坐標軸上畫上刻度，而是憑著自己的感覺大略的分別於兩軸點上坐標，連線即為直線，節省許多時間。最後，小珍在圖形上並沒有將原點 $(0,0)$ 表示出來，小珍表示，依過去的經驗，通常原點 $(0,0)$ 不會產生最大值，故忽略不計，最終不影響答案結果。

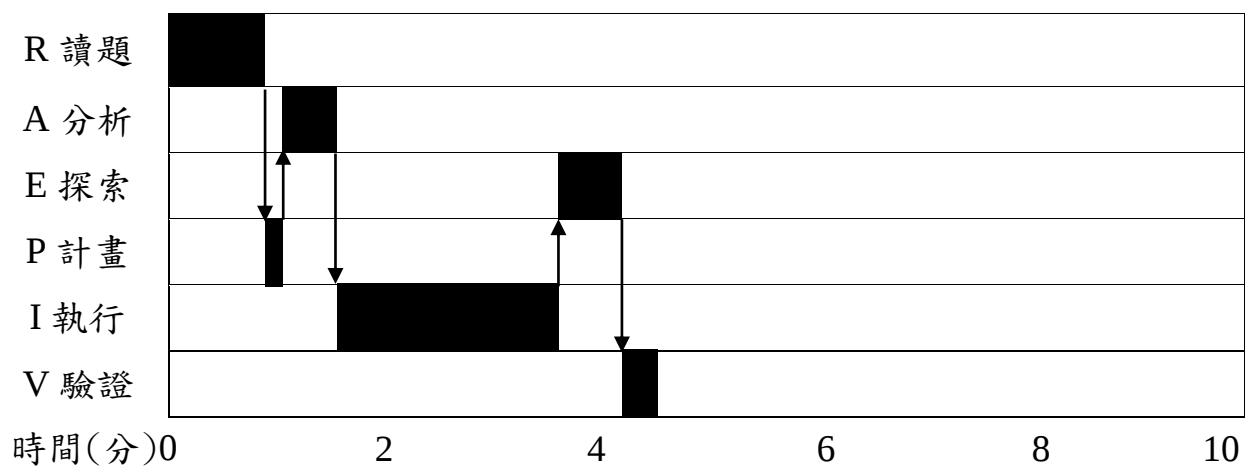


圖 4 - 8 小珍手套題解題歷程階段圖 😊

3. 代購題



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

首先，小珍先進行讀題（讀題 R：57 秒）。接著依照題意開始列式子。小珍假設面膜要代購 x 個，指甲油要代購 y 個，題意表示代購商品的總重量要控制在 3000 克以內，因此小珍列出第一個限制式為 $30x + 100y \leq 3000$ ；又代購的金錢支出在台幣 4000 元以內，故小珍列出的第二個限制式為 $50x + 100y \leq 4000$ ；題目提到指甲油至少要買 10 個，所以小珍又寫上 $y \geq 10$ 。（分析 A：52 秒）

$$\begin{cases} 30x + 100y \leq 3000 \\ 50x + 100y \leq 4000 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

由於代購一個面膜利潤 40 元，代購一個指甲油利潤 100 元，小珍列出利潤的目標函數為 $P = 40x + 100y$ 。(計畫 P：15 秒)

$$P = 40x + 100y$$

列完限制式與目標函數後，小珍開始於坐標平面上繪製圖形，為了好找到 x 截距與 y 截距，小珍先將 $30x + 100y \leq 3000$ 同時除以 10，化簡為 $3x + 10y \leq 300$ ；將 $50x + 100y \leq 4000$ 同時除以 50，化簡為 $x + 2y \leq 80$ 。於 $3x + 10y \leq 300$ ，當 $x = 0$ 時，得 $y = 30$ ；於 $50x + 100y \leq 4000$ ，當 $y = 0$ 時，得 $x = 80$ 。

$$\begin{cases} 3x + 10y \leq 300 & (0, 30) \\ x + 2y \leq 80 & (80, 0) \\ y \geq 10 & (0, 10) \end{cases}$$

小珍：然後整理一下.....

$3x + 10y$ 小於等於 300

$x + 2y$ 小於等於 80

然後 y 大於等於 10

找完兩直線的截距後，小珍回到坐標平面上開始繪製。小珍先畫上 $y = 10$ 之水平線，由於限制式為 $y \geq 10$ ，因此小珍在 $y = 10$ 的上半部塗上斜線。接著，小珍在 x 軸標示 $(80, 0)$ 、 $(100, 0)$ (此兩點並沒有標示坐標，只有在 x 軸上畫兩點)，在 y 軸標示 $(0, 30)$ 、 $(0, 40)$ (此兩點並沒有標示坐標，只有在 y 軸上畫兩點)，將 $(0, 30)$ 與 $(100, 0)$ 兩點連線即為直線 $3x + 10y = 300$ ，將 $(0, 40)$ 與 $(80, 0)$ 兩點連線即為

直線 $x + 2y = 80$ 。小珍將 $y = 10$ 與 y 軸的交點標示 $(0, 10)$ ；將

$3x + 10y = 300$ 與 y 軸的交點標示 $(0, 30)$ ；最後，小珍欲找 $y = 10$ 與

$3x + 10y = 300$ 的交點時發覺怪怪的，開始對自己沒有信心，因為由

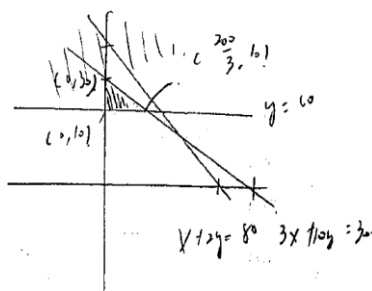
$$\begin{cases} y = 10 \\ 3x + 10y = 300 \end{cases} \text{ 解聯立得 } y = 10, x = \frac{200}{3}。$$

$$\begin{aligned} 3x + 10y &= 300 \\ y &= 10 \\ x &= \frac{200}{3} \end{aligned}$$

依照小珍過去的經驗，很少會有情況頂點解出來是分數，因

此小珍稍微停頓了一下。後來，還是繼續將點坐標 $(\frac{200}{3}, 10)$ 標示於

坐標平面上。(執行 I：285 秒)



小珍：然後……這個點是 $(0, 30)$

這個點是…… $3x + 10y = 300$

然後 $y = 10$ ，所以 x 會等於……

(聯立解得交點是分數，覺得怪怪的……)

x 是 200 除以 3， y 是 10

(思考中……)

最後，小珍將可行解區域的頂點 $(0,10)$ 、 $(0,30)$ 以及 $(\frac{200}{3},10)$

代入目標函數。當 $(x,y)=(0,10)$ 時，目標函數 $P=1000$ ；當

$(x,y)=(0,30)$ 時，目標函數 $P=3000$ ，當 $(x,y)=(\frac{200}{3},10)$ 時，由於

小珍知道面膜的個數必為整數，所以小珍取 $(\frac{200}{3},10)$ 附近的整數點

$(66,10)$ 代入，目標函數 $P=3640$ ，故當面膜代購 66 個，指甲油代購 10 個，有最大利潤為 3640 元。(探索 E：64 秒)

$$\begin{array}{rcl}
 y & = & 10 \\
 x & = & \frac{200}{3} \\
 \text{點} & & (0,10) \quad (0,30) \quad (\frac{200}{3},10) \\
 P & & 1000 \quad 3000 \quad 3640
 \end{array}$$

小珍：然後現在.....

$(0,10)$ ， $(0,30)$ ，200 除以 3，10.....

這是 1000，這是 3000

我們取最近的 66.....

40 乘以 66 加 3000 等於 3640

小珍在代購題的作答上，共歷時 473 秒，前半部極為順暢，過程並沒有計算錯誤。在執行階段 (I)，小珍也將限制式化簡，方便找到 x 截距與 y 截距。但在作圖的時候，小珍並沒有按照比例標示刻度，導致一開始描繪 $y=10$ 的時候畫太高，描繪 $x+2y=80$ 與 $3x+10y=300$ 時，坐標不成比例，最終得到的可行解區域是錯的。小珍發現解聯立

的時候，交點坐標產生分數很多情況是做錯的，她有試著懷疑自己的答案，但卻不知道自己錯在哪裡，小珍表示：「它很奇怪做出來是分數欸，應該不會有分數，應該是做錯了，但我不知道錯在哪裡」，因此繼續下一個探索階段 (E)。於探索階段小珍將頂點代入目標函數，小珍知道 x 與 y 分別代表的是面膜與指甲油的數量，必為整數，因此合理的取頂點 $(\frac{200}{3}, 10)$ 附近的整數解 $(66, 10)$ 代入目標函數，可惜最終答案是錯的。小珍從執行階段發現自己好像有哪裡做錯，到後來的探索階段，從表情看的出來對自己越來越沒有信心，殊不知只是因為圖形畫錯，影響後面的作答，最終也沒有進入驗證階段。

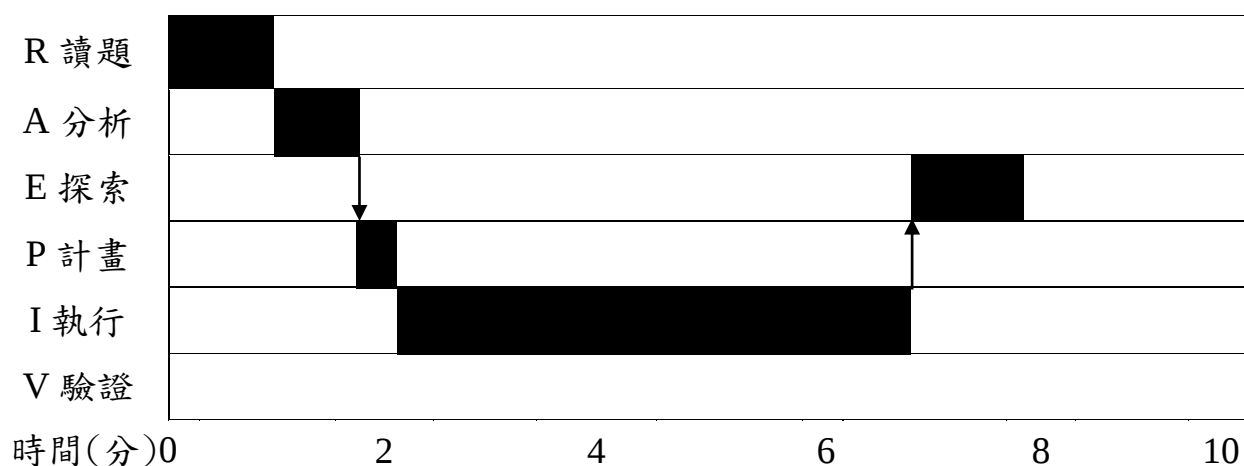
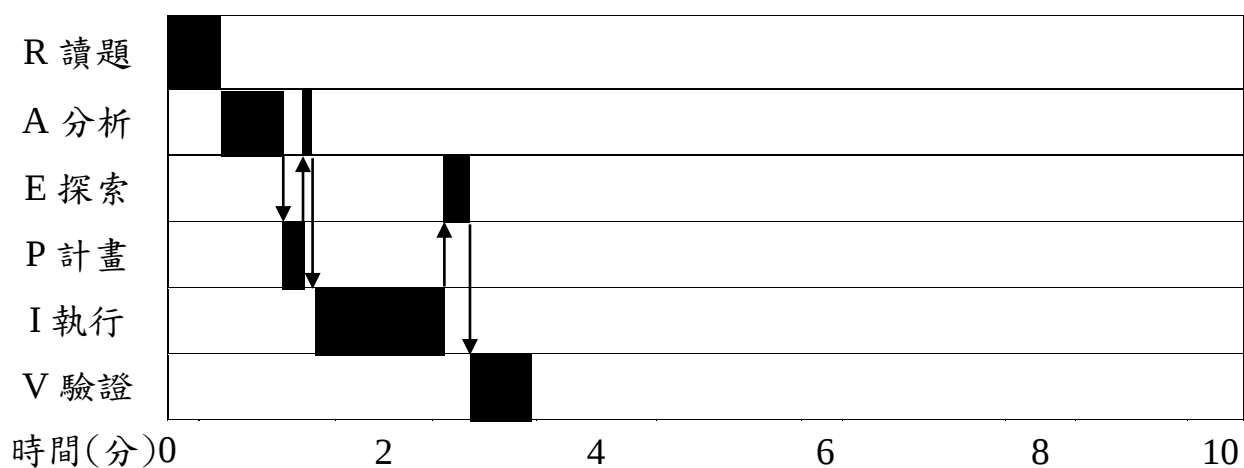


圖 4 - 9 小珍代購題解題歷程階段圖 😞

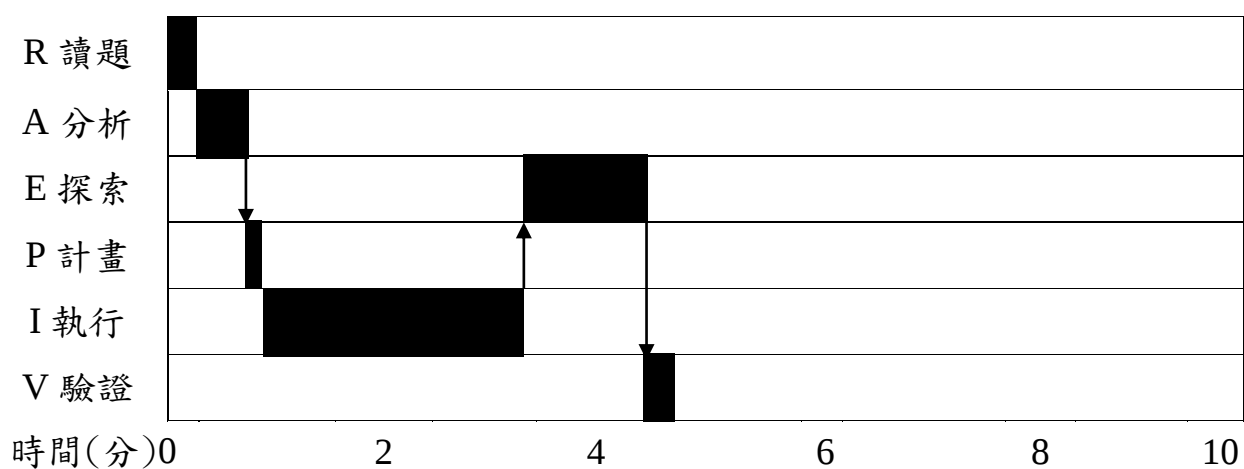
(四) 綜合比較與討論

根據上述之解題歷程分析，底下分別針對小寬、小好、小珍之運動題、手套題、代購題進行探討，詳述如下。

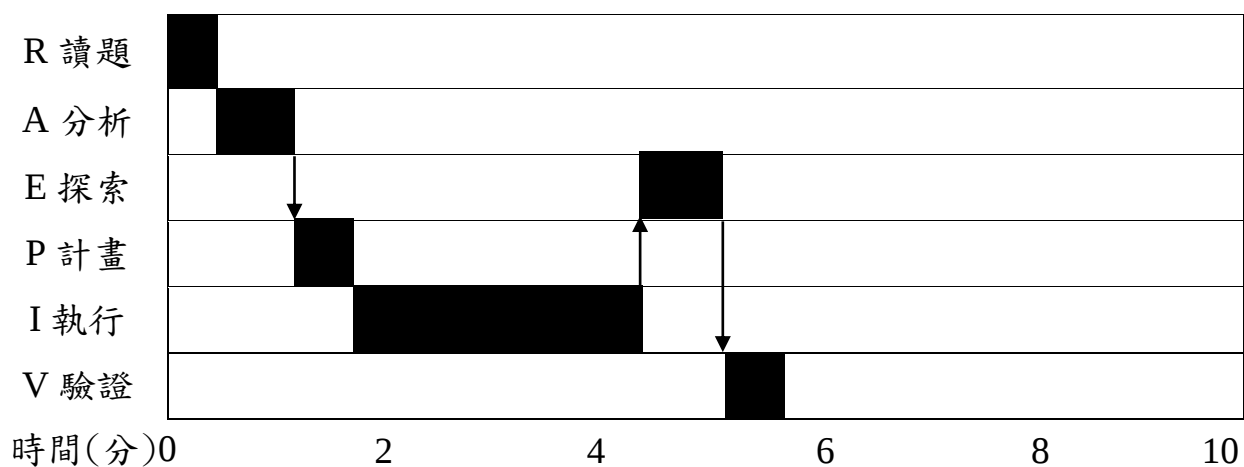
1. 運動題之比較



小寬運動題解題歷程階段圖 😞



小好運動題解題歷程階段圖 😊

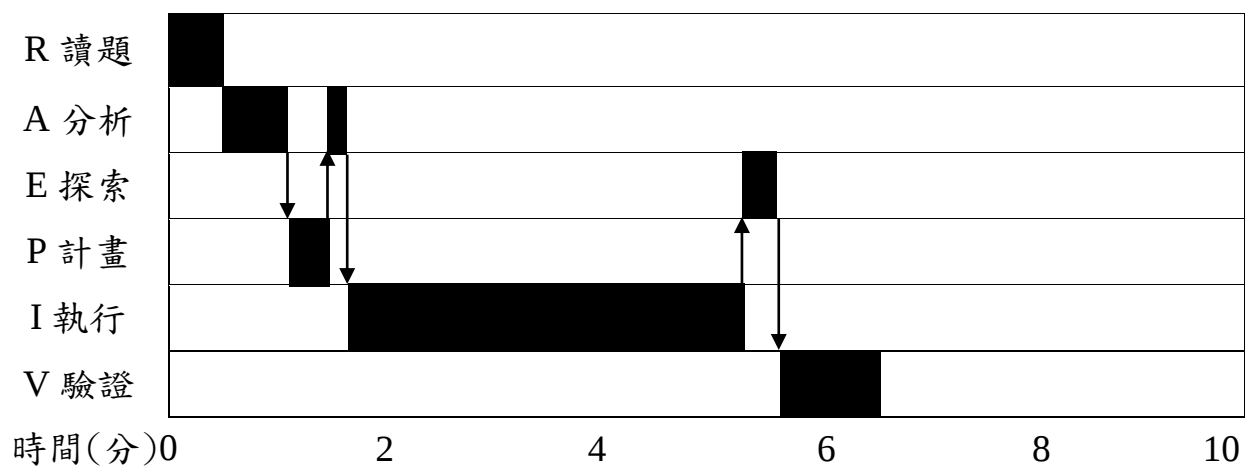


小珍運動題解題歷程階段圖 😊

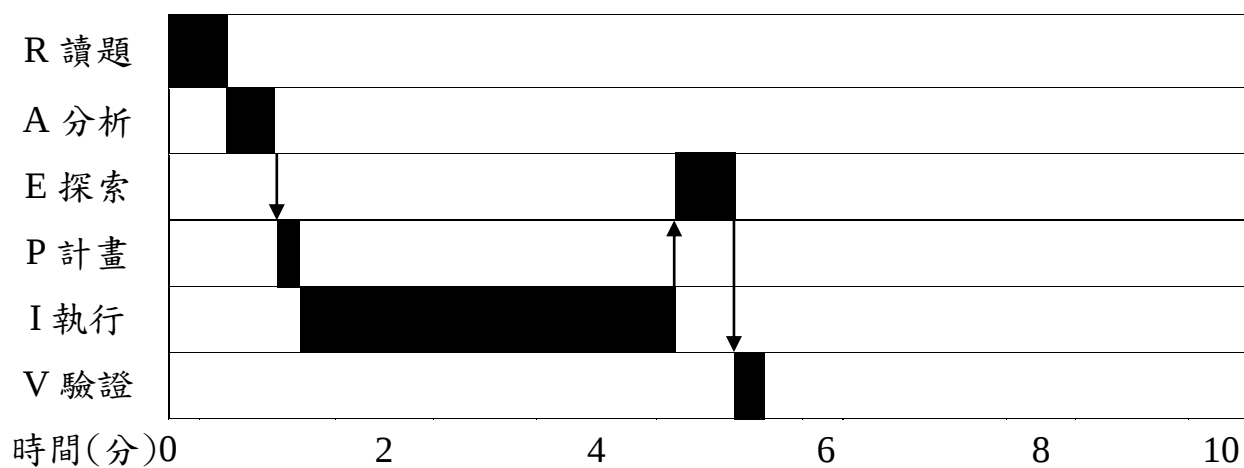
由運動題的解題歷程可得知，低分者小寬於讀題階段最短，僅歷時 19 秒，中分者小好歷時 24 秒，高分者的小珍歷時 35 秒。在分析階段，由於小寬少列一條限制式，因此歷時最短，經歷 2 次分析僅 34 秒，小好、小珍各 1 次分析分別為 43 秒與 44 秒。此外，小寬因為缺少一個條件，因此在執行的階段歷時 75 秒，相較於小好的 122 秒與小珍的 147 秒，花費的時間最少；再者，高分者小珍在執行階段花費的時間比小好還要多，本研究認為，由於小珍較為謹慎，作答第 1 題的時候特別小心翼翼，每個步驟均詳細的交代、字跡排版整齊，且繪製圖形的時候皆輔以工具，因此比小好多出 25 秒的時間。過去的研究結果顯示，專家比起生手在認知上更有條理，且知識結構較為縝密 (Gobbo & Chi, 1986)，本研究與過去研究結果一致。

整體看來，小好與小珍的解題歷程較為流暢，每個解題歷程階段均只出現 1 次，而小寬的解題歷程有出現反覆的情形，發現少了兩個條件又回去補齊，因此出現 2 階段的分析。

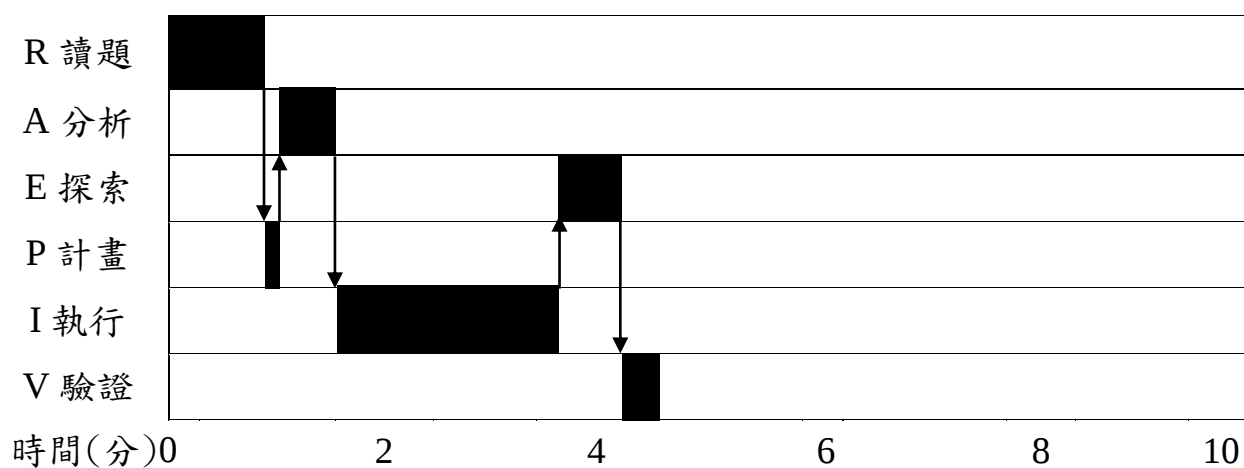
2. 手套題之比較



小寬手套題解題歷程階段圖



小妤手套題解題歷程階段圖



小珍手套題解題歷程階段圖

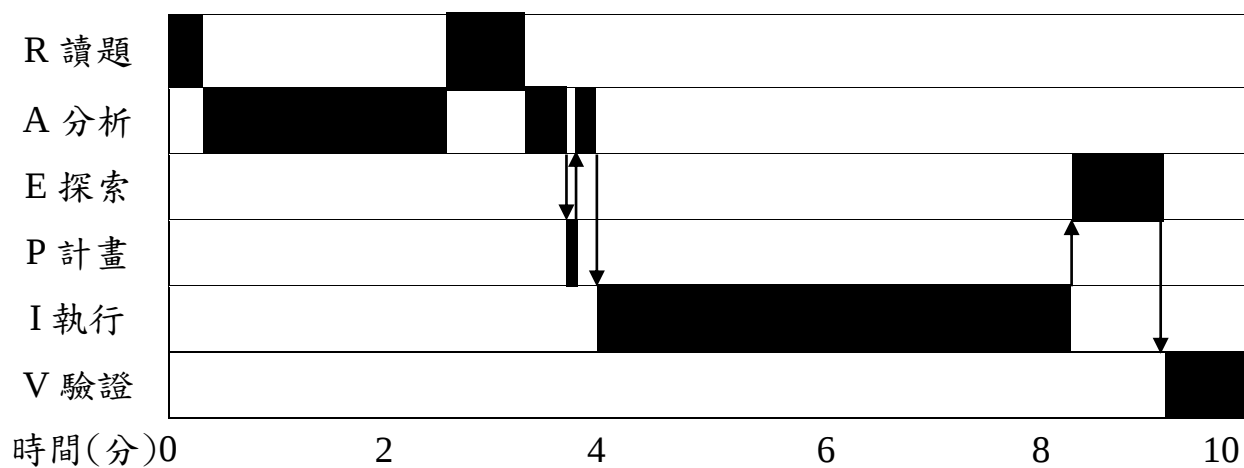


由手套題可以看出，高分者小珍在讀題階段所花費的時間為 50 秒，相較於低分者小寬的 35 秒、中分者小好的 47 秒都還要長些，但於分析階段小珍只歷時 26 秒，比起小寬的兩次分析共 50 秒，以及小好的 31 秒還來得迅速。

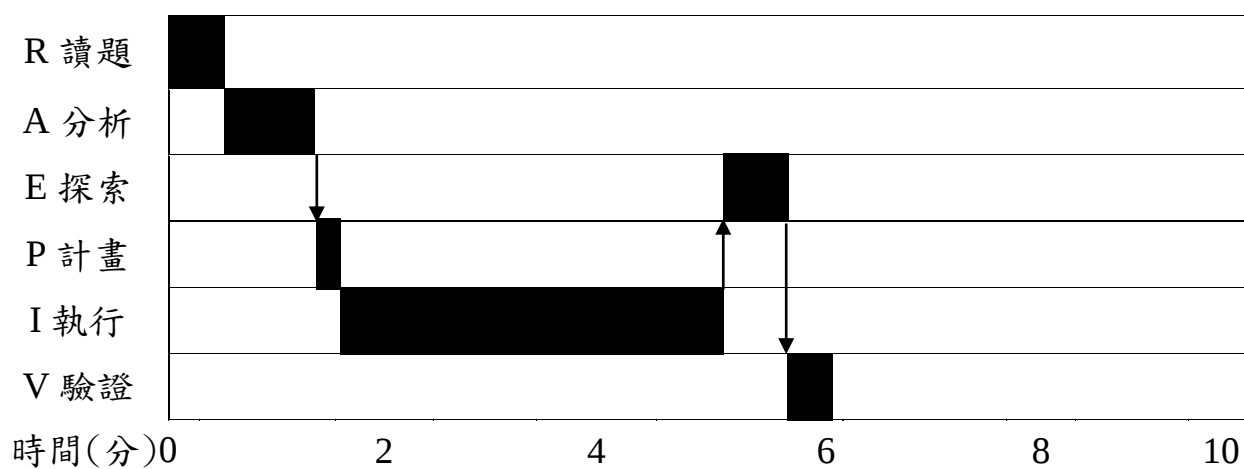
此外，更值得一提的是，在執行階段，低分者、中分者、高分者就產生很大的落差，低分者小寬於執行階段歷時 223 秒，中分者小好歷時 186 秒，高分者的小珍僅歷時 133 秒。原因為小珍在讀題的階段，就邊讀題邊把題意的資訊系統化的轉為表格，以至於在分析與執行階段，能快速擷取所需要的訊息進行列式以及繪圖；而小寬因為限制式沒有先進行化簡，以至於數字較龐大，計算上需耗費較多的時間；小好因為在執行階段有發生 2 次計算錯誤，所以花費的時間比小珍還多。

Schoenfeld (1985) 提到，影響解題須考慮到 4 個變項，包含資源、捷思、控制及信仰系統。在捷思方面，高分者小珍較能化簡問題以及將題意整理成表格，中分者小好與低分者小寬未能及時組織問題與脈絡化，因此在解題歷程時間上有所差異，於解題歷程的執行階段尤為明顯。

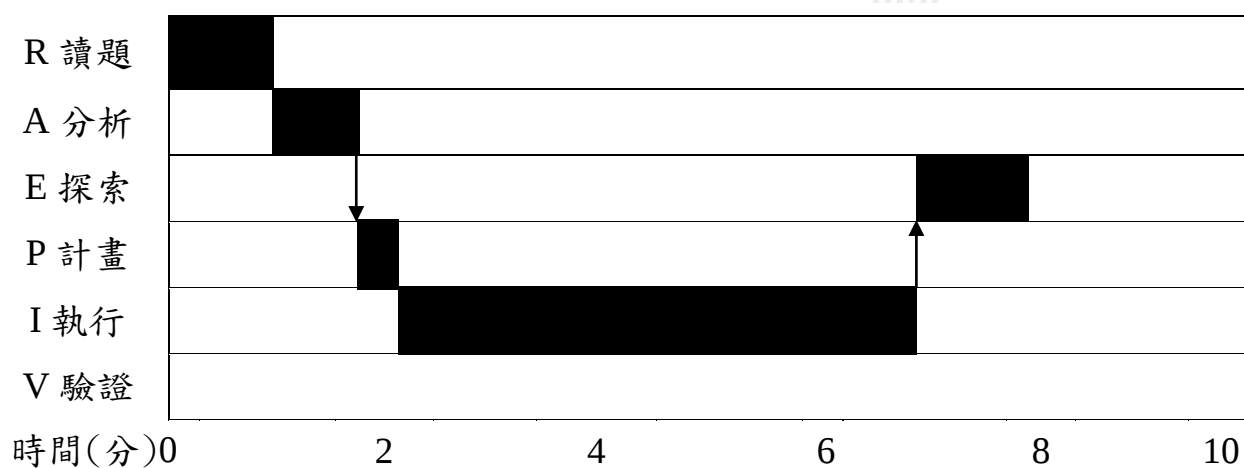
3. 代購題之比較



小寬代購題解題歷程階段圖 😞



小好代購題解題歷程階段圖 😊



小珍代購題解題歷程階段圖 😞

從代購題的解題歷程可得知，低分者小寬的解題歷程，呈現 2 次讀題以及 3 次分析，過程反反覆覆。小寬第一次讀題僅花費 25 秒，相較於中分者小好 31 秒，以及高分者小珍 57 秒都還要來的迅速，但後來小寬未完全了解題意，又進行第 2 次讀題，歷時 54 秒。在分析的部分，由於代購題情境較為複雜些，低分者小寬無法立即將題意順利的轉乘抽象的數學符號，前後共歷經 3 次分析，共歷時 169 秒，而中分者小好與低分者小珍於分析階段皆順利，一次就成功，分別歷時 63 秒與 52 秒。

執行階段，小寬、小好、小珍分別歷時 255 秒、186 秒、285 秒，在執行階段顯然小好處於上風。原因為小寬於執行階段，並未將限制式化簡，而是直接尋求 x 截距與 y 截距，在計算上耗費較多時間；小好整體下來算是順利，因此所花的時間並不多；小珍花費的時間居三者之冠，由於小珍在繪圖的過程中，並沒有按照刻度去畫直線，以至於可行解區域的交點找錯，解聯立得交點的 $x = \frac{200}{3}$ 為一分數，小珍認為解出來的坐標不會是分數，但不知道自己哪裡做錯，因此往後的每一個步驟又更加小心且放慢速度，因此耗費最多時間。

最後較為特別的是，先前的運動題、手套題，小寬、小好、小珍均有驗證階段，唯獨小珍的代購題沒有。由於小珍認為自己的答案有誤，對自己沒有信心，因此處於半放棄的狀態，沒有進到驗證階段。

第二節 線性規劃解題策略探討

線性規劃的 6 階段解題歷程中，於探索階段找尋最大值與最小值的方法有二，包含頂點法與平行線法，本研究認為，頂點法需要花費較多的時間將每個頂點代入目標函數，但不容易出錯；平行線法需要結合過去斜率的觀念，較為困難，但速度較快，能節省許多時間。本節欲探討的是，在 Schoenfeld (1985) 的解題歷程中，於探索階段找尋極值時，低分者、中分者、高分者用的解題策略為何。

(一) 運動題的解題策略

小寬在運動題的呈現上，先依題意列限制式 $\begin{cases} 30x + 50y \leq 300 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ ，其

次為建立目標函數 $P = 300x + 450y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小寬在動題上的解題策略使用頂點法，小寬將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

小好在運動題的呈現上，先依題意列限制式 $\begin{cases} 30x + 50y \leq 300 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$ ，其

次為建立目標函數 $P = 300x + 450y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小好在動題上的解題策略使用頂點法，小好將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

小珍在運動題的呈現上，先依題意列限制式 $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 30x + 50y \leq 300 \end{cases}$ ，其

次為建立目標函數 $P = 300x + 450y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最

後找尋最大值與最小值。小珍在動題上的解題策略使用頂點法，小珍將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

綜觀上述運動題，小寬、小好、小珍 3 人運用的解題策略均為頂點法。

(二) 手套題的解題策略

小寬在手套題的呈現上，先依題意列限制式
$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \\ 40x + 40y \leq 1200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

其次為建立目標函數 $P = 50x + 30y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小寬在動題上的解題策略使用頂點法，小寬將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

小好在手套題的呈現上，先依題意列限制式
$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \\ 40x + 40y \leq 1200 \end{cases}$$
，

其次為建立目標函數 $P = 50x + 30y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小好在動題上的解題策略使用頂點法，小好將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

小珍在手套題的呈現上，先建立目標函數 $P = 50x + 30y$ ，其次為依題意列限制式
$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \\ 40x + 40y \leq 1200 \end{cases}$$
，再圖解二元一次聯立不等式，最

後找尋最大值與最小值。小珍在動題上的解題策略使用頂點法，小珍將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

綜觀上述手套題，雖然小珍在「依題意列限制式」與「建立目標函數」這兩步驟對調了，但不影響最終結果。小寬、小好、小珍 3 人運用的解題策略均為頂點法。

(三) 代購題的解題策略

小寬在代購題的呈現上，先依題意列限制式
$$\begin{cases} 100x + 50y \leq 4000 \\ 100x + 30y \leq 3000, \\ x \geq 10, y \geq 0 \end{cases}$$

其次為建立目標函數 $P = 100x + 40y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小寬在動題上的解題策略使用頂點法，小寬將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

小好在代購題的呈現上，先依題意列限制式
$$\begin{cases} 50x + 100y \leq 4000 \\ 30x + 100y \leq 3000, \\ y \geq 10 \end{cases}$$

其次為建立目標函數 $P = 40x + 100y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小好在動題上的解題策略使用頂點法，小好將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

小珍在代購題的呈現上，先依題意列限制式
$$\begin{cases} 30x + 100y \leq 3000 \\ 50x + 100y \leq 4000, \\ y \geq 10 \end{cases}$$

其次為建立目標函數 $P = 40x + 100y$ ，再圖解二元一次聯立不等式，最後找尋最大值與最小值。小珍在動題上的解題策略使用頂點法，小珍將每個頂點找出後代入目標函數找尋最大值。

綜觀上述代購題，小寬、小好、小珍 3 人運用的解題策略均為頂點法。

（四）綜合討論與比較

由 3 位學生之 3 道題目可知，學生的 9 個解題歷程均採用頂點法之策略，與預試階段的平行線法之結果截然不同，令研究者非常訝異。由於本研究在預試階段，參與者所採用的是平行線法，故研究者推測在正式施測階段，高分者將採用較高階的解題策略－平行線法，但結果並非如此，小寬、小好、小珍 3 人均採用頂點法。

本研究推論，解題的策略深受教學者的影響，學生的解題策略常受到平常教師熟悉的解題策略，教導學生的解題方法，使得學生養成固定的解題模式。事後訪問高分者小珍，小珍表示：「老師上課有教過，但很快就帶過去了，上課老師都用頂點法，所以我都用頂點法比較不會弄錯」，她知道解線性規劃題目可利用平行線法，但由於只有上課聽老師輕輕帶過，平常老師上課還是習慣用頂點法，而且在學習的過程中還是較常出現頂點法，因此在解題策略上，小珍都以頂點法為主。

第三節 線性規劃成敗因素探究

本研究選取小寬、小好、小珍進行放聲思考與事後晤談，每人分別給予 3 道線性規劃的問題，共 9 題，答題情況如下：

表 4-1 小寬、小好、小珍答題情況表

	<u>小寬</u> （低分者）	<u>小好</u> （中分者）	<u>小珍</u> （高分者）
運動題	×	O	O
手套題	O	O	O
代購題	×	O	×

小寬答錯運動題與代購題，手套題正確；小好 3 題均答對；小珍則答錯代購題，運動題與手套題皆正確，以下針對錯誤的 3 題進行分析。

（一）小寬的運動題－欲速則不達

運動題為 3 題當中最簡單的一題，題意敘述簡短且明瞭，但小寬在列限制式的時候，忽略了題目其中一句話：每週最多能抽出 8 小時運動，故少掉一條限制式 $x + y \leq 8$ ，以至於限制式只有一條，畫出來的圖形為三角形，而不是四邊形，最終得到錯誤的答案。

事後晤談得知，小寬有覺得限制式怪怪的，一般圖形畫出來不會只有一條直線，因此研究者請小寬再次仔細閱讀題目，小寬馬上發覺，原來是自己忽略了一句話，因而少了一條限制式，難怪圖形畫出

來會覺得怪怪的。

Lester (1980) 提出影響解題的因素有 4 個，包含問題本身、個人特徵、解題行為、環境特徵。本研究發現小寬作答運動題時，受個人特徵影響，以致於未能成功。由於小寬是第一個做施測，尚未完全進入狀況，且運動題為第一題，似乎有些不自在，也比較緊張，因此未能完整答題。

（二）小寬的代購題－馬虎失街亭

代購題為 3 題中最複雜的題目，題意的敘述較長，且限制式較多，因此需要有耐心及毅力逐步完成。小寬在前段分析的歷程當中，逐步摸索，一開始列限制式時跌跌撞撞，但後來及時修正，並未影響後面的作答。可惜的是，小寬於探索階段，誤將頂點 (15,50) 代入限制式 $100x + 30y = 3000$ ，而非目標函數 $P = 100x + 40y$ ，以致於最終無法得到正解。

國內學者張景媛 (1994) 提到專家與生手思考模式有所不同，專家能將其心中所想的觀念用符號表達出來，但生手有時所列出來的式子和自己口中說出來的意思不同，這主要是生手還不善於用數學符號來表達自己的概念。小寬在列限制式的時候，面臨將題意轉化成抽象數學符號的困難，後來重新讀題並釐清題意後，能慢慢的寫出正確的限制式。

中國著名學者胡炳生 (1995) 也提到，影響解題的因素有七項，其中之一為「個人的思維品質」，小寬的答題過程中，思維較不縝密，以至於容易計算錯誤。本研究認為，小寬功虧一簣的原因可能也受到前面計算過程的影響，小寬作答代購題時間長達 600 秒（10 分鐘），在前面分析階段花費許多的精力，以至於到最後探索階段精神較不集中。此外，若再加上前面 2 題的作答時間，總歷程時間將近 20 分鐘，對於小寬而言，身心的負擔可能較為沉重，因此在最後一個步驟計算錯誤。

（三）小珍的代購題－智者千慮必有一失

小珍屬於高分組，也最被研究者看好，而且從運動題到手套題，過程一帆風順，中間完全沒有計算錯誤，但卻在代購題出了差錯。小珍在代購題的執行階段繪製可行解區域，描繪坐標軸的時候，從不標示刻度，小寬與小好都會視情況，取適當長為 1 個刻度，但小珍從未如此，完全依據自己過去的經驗取適當長度當成直線的 x 截距與 y 截距。在運動題與手套題，由於情境較為單純，概略的畫圖並不會影響最終的答題結果，但代購題的部分，由於情境較複雜，限制式較多，小珍在畫限制式的時候，並未依照比例去描繪，以致於限制式所圍出來的可行解區域為一個三角形，而不是一個四邊形，原先正確要找的頂點為 $(0,30)$ 、 $(0,10)$ 、 $(50,15)$ 、 $(60,10)$ ，小珍因為圖形畫錯，找出

來的頂點為 $(0,10)$ 、 $(0,30)$ 、 $(\frac{200}{3},10)$ ，因此最後得出的結果與正解有所出入。

Lester (1980) 提出影響解題的因素有 4 個，其中小珍受到過去解題行為的影響，過去的解題經驗讓小珍習慣不標示刻度，直接找截距作圖，以至偶爾會有錯誤的情況產生，這也是研究者在研究前始料未及的。中國學者胡炳生 (1995) 也提到，解題會受到個人的思維品質的影響，小珍的計算過程較屬於跳躍式的思考模式，雖然速度較快，但稍有疏忽，容易計算錯誤。

第四節 低分者、中分者、高分者解題的發現

本研究探討高二學生在線性規劃之解題歷程，從中可以發現低分者、中分者、高分者，的解題過程有所不同，雖然最終得到同樣的答案，但過程大相逕庭。本節針對小寬、小好、小珍的計算過程，提出以下幾點的發現，包含計算能力、掌握問題的結構、工具的輔助與使用、計算版面的配置 4 個層面來探討，茲分別敘述如下。

（一）計算能力

同樣解一道題目，列完限制式後，低分者小寬不習慣化簡限制式，直接找 x 截距與 y 截距，有些數字過於龐大，小寬需仰賴直式的除法，需耗費較多的時間；中分者小好會先將限制式約分，但都沒有將限制式約分到最精簡的樣子，而是習慣看到個位數字有 0，就全部同除以 10，此外，小好偶爾在約分的時候會出現計算錯誤的情況；高分者小珍計算上均沒有出現錯誤的情形，且將所有限制式化為最簡，因此小珍在找尋 x 截距與 y 截距畫直線非常迅速，思考較屬於跳躍式的直覺思考。

（二）掌握問題的結構

Krutetskii (1963, 1969, 1976) 在分析數學資優生的個案研究中提到，解題特質包含了「心理特徵」和「解題特徵」，其中資優生的心理特徵具有數學抽象思考的能力，且能迅速面廣泛地組織材料，掌

握問題的結構。在線性規劃的解題歷程中，從手套題就能很明顯看的出來，低分者小寬、中分者小好進行讀題後再慢慢依照題意將限制式逐一系列出，而高分者小珍在讀題階段，就邊讀題邊把題目的條件很有組織的轉換為表格，方便下一個分析階段列出限制式，因此大幅縮短了整個解題歷程的時間，僅花費 269 秒（小寬花費 395 秒，小好花費 329 秒）。在解題特徵上，小珍也是以簡化、經濟為原則。

（三）工具的輔助與使用

進行放聲思考前，研究者均準備鉛筆、橡皮擦與尺給參與者使用，研究發現，在繪製可行解區域的時候，低分者小寬均不使用尺，徒手繪圖，因此畫出來的圖形精準度有待商榷。中分者小好繪製兩坐標軸時亦不用尺畫，但在畫直線方程式的時候就會輔助尺來描繪。小珍從頭到尾均輔助尺來畫直線，圖形繪製較為工整。

（四）計算版面的配置

研究發現，低分者小寬書寫的版面較為凌亂，算式前後跳躍，書寫的方式與課堂老師教的不一，而是以自己習慣的方式呈現，中分者小好與高分者小珍版面配置較有條理，按部就班的將條件、算式逐一系列出，排版較為整齊讓人清晰易懂。

第五章 結論與建議

第五章共分為兩節，第一節為研究結論，第二節為未來研究與教學上的建議，詳見如下。

第一節 研究結論

本節依據待答問題，包含高二學生在線性規劃問題上所呈現的解題歷程為何？高二學生在線性規劃問題上所運用的解題策略有哪些？高二學生在線性規劃問題上成功與失敗的因素為何？所得到的結論如下。

（一）線性規劃解題歷程有 6 階段

本研究發現，高二學生在線性規劃的解題歷程中都會出現如 Schoenfeld (1985) 所提出的讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證共六個階段。讀題為閱讀題目；分析為將題目的條件條列限制式，或將題意有條理的整理成表格；探索為由平行線法找尋最大、最小值，或由頂點法將頂點代入目標函數找尋極值；計畫為列出目標函數；執行包含化簡限制式、解聯立方程組、畫可行解區域；最後，驗證為重述及回顧方程組的解。低分者小寬由於解題過程較不順利，因此呈現的解題歷程階段較多，中分者小妤與高分者小珍解題過程較為順暢，因此每個解題歷程階段都只出現一次，與過去研究結果發現一致。在本研究中，寫出目標函數隸屬於計畫階段，平均歷時最短；執行階段包

含化簡限制式、繪製可行解區域、解聯立方程組以及選取可行解區域範圍，所以平均歷時最長。

（二）線性規劃解題策略共有兩種

研究結果顯示，低分者、中分者、高分者解題策略均採用頂點法，與本研究預試階段參與者所用的平行線法大有不同。本研究認為，學生的解題策略深受老師的影響，學生模仿老師的解題策略，並於解題中展現。此外，線性規劃問題也較難出現像一般幾何題或是代數題有一題多解的情況產生，題目雖然情境多元，但解法非常制式化。在教學上，教師若能在課程中，適時的給予學生多元的解題策略，能讓高分組的學生在解題的策略上更為精進。

（三）線性規劃解題成敗因素除了學科內容還有解題能力

從本研究得知，學生在線性規劃的解題上，成敗不只在於是否了解線性規劃的課程內容，因為參與者對於學校教師或課後補習班教師的授課內容均能吸收，皆能掌握線性規劃解題的先後步驟，而且解法大同小異。本研究認為，學生在線性規劃的成敗關鍵為解題能力，包含學生的讀題能力、學生的計算能力以及學生的解題行為。

首先為學生的讀題能力，線性規劃的題目大多屬於情境應用題，學生大多要身歷其境，以全面了解整個問題的結構，並能抽絲剝有條

理的逐一列出條件與限制式。因此，學生須具備基本的讀題能力，才能在千變萬化的題目當中敗戰百勝。

其次為學生的計算能力，高中的線性規劃與一般幾何或是代數的題目不一樣，一般的題目步驟少，目標單一且明確，但線性規劃步驟較為繁瑣，需階段性的完成每一個步驟，最終才能得到正解，且每一個步驟均有關聯，倘若一個小地方出錯，往往都會影響答案，平均作答也較一般的題目花上數倍的時間，因此學生常常在漫長的計算過程中計算錯誤，導致結果錯誤。

最後為學生的解題行為，解題行為受到過去解題經驗的影響，過去的解題經驗影響一個人的解題習慣，若沒有培養正確的解題習慣，可能在某些情況下解題能暢行無阻，但在某些情況下，情境稍微複雜，未必能成功，因此長期培養學生解題行為尤為重要。

綜觀上述 3 點，本研究認為讀題能力與計算能力需要學生長時間培養，意即平常要多演練題目，多學習不同情境下的線性規劃問題，訓練讀題過程中對於條件擷取的敏銳度，在計算過程中，亦能增進計算能力。另一方面，解題行為需要借助教師的引導，學生一開始學習線性規劃，會有各人獨自的風格及解題習慣，有些習慣是好的值得鼓勵，但有些習慣在某些情況下會導致結果錯誤，初學者卻渾然不知，因此教師必須由教學經驗告訴學生該行為的優與劣。教師在教學的過

程中，應該重視學生的解題歷程，並非最終的結果。

第二節 未來研究與教學上的建議

本節主要根據研究結果，給予未來研究與教學上兩方面的建議。

（一）未來研究的建議

本研究針未來研究方面，提出以下 3 點建議，包含選用不同題材、選擇不同教師授課的班級學生進行探討、增加研究對象。

1. 選用不同題材

本研究探討的是線性規劃的解題歷程，除了情境的轉換之外，題目變化並不多，往後的研究可針對非例行性 (non-routine) 以及需要多步驟之題目作探討，並採用 Schoenfeld (1985) 的解題歷程進行分析。

2. 選擇不同教師授課的班級學生進行探討

本研究發現，樣本取自同一班級的學生，其解題策略受到教學者的影響，學生所使用的解題策略大同小異，因此往後的研究可考慮選取不同教師授課的班級學生，進行解題策略的探討。

3. 增加研究對象

本研究因限於時間、人力之限制，樣本採立意抽樣的方式，抽取高雄市某高中某班的學生，依照 107 學年度上學期第一次段考數學成績分為高、中、低三組，於各組中各選取 1 位學生進行

研究，建議可以增加研究對象，結果更具代表性。

（二）教學上的建議

本研究針對實務教學方面，提出以下 3 點建議，包含著教師宜著重於學生解題能力的培養並注重其解題歷程，教師不妨於解題後討論多元的解題方法，以及教師教學不妨加入自我檢核或同儕互助。

1. 教師宜著重於學生解題能力的培養並注重其解題歷程

本研究發現，無論是低分者、中分者或是高分者，對於線性規劃的做法都具備基本的了解，從列限制式、列目標函數、找可行解區域以及將頂點代入目標函數，解題流程基本上學生都知道。但會讓學生出錯的是個人的計算能力及個人算數的習慣培養，因此教師在課堂教學引導學生時，必須要清楚的強調解題歷程中每個步驟的大原則與小細節，並強化學生計算能力，盡量避免在作答時出現重複的錯誤。

2. 教師不妨於解題後討論多元的解題方法

本研究蒐集的資料，學生於線性規劃找最大、最小值，均採用頂點法，沒有人採用平行線法。頂點法為將每個頂點代入目標函數，找尋極值。但由於需將每個點逐一代入目標函數，雖然過程比起平行線法較不易出錯，過程需耗費較多的時間。高分者小珍表示上課老師有提及平行線法，由於不常使用，因此並未使用

此方法。本研究認為，針對程度較好的同學給予適時的補充與題目上的練習，長時間的訓練及培養對於解題速度有很大的幫助。

此外，108 新課綱即將上路，未來線性規劃的應用問題置於高三加深加廣選修數學乙當中學習，學生到高三更能適應較高層次的解題技巧，從中更能體會到平行線與圖形產生極大、極小值的精髓，值得一學。

3. 教師教學不妨加入自我檢核或同儕互助

本研究發現，線性規劃雖不難，但每個人都有自己的盲點所在，就算是高分組的學生，知道自己似乎有做錯，卻完全不知道自己錯在哪裡，因此在學習線性規劃單元時，可以採小組的方式互相幫助，答案若有不同亦可以互相討論，除了達到 108 課綱所提及的溝通互動之基本理念，與他人溝通並解決問題之外，也能避免學生一直作答失敗，而產生習得無助感。

參考文獻

一、中文文獻

王文科、王智弘 (2014)。教育研究法。臺北市：台灣五南圖書出版股份有限公司。

李心儀 (2016)。不同解題歷程模式中的回顧。台灣教育評論月刊，5(8)，157-161。

李芳樂 (1993)。數學錯誤成因的探討。初等教育學報 (香港)，4(1)，77-82。

吳德邦 (1987)。解題導向的數學教學策略—閱讀問題部份。臺中師院學報，1，90-224。

林奕宏、張景媛 (2001)。多元智能與問題解決整合型教學模式對國小學生數學學習表現之影響。教育心理學報，33(1)，1-29。

林清山、張景媛 (1994)。國中生代數應用題教學策略效果之評估。教育心理學報，27，35-62。

胡炳生 (1995)。數學解題思維方法。九章出版社。

洪萬生 (2004)。教改爭議聲中，證明所為何事？師大學報：科學教育類，49(1)，1-13。

教育部 (2013)。修正普通高級中學必修科目[數學]課程綱要。台北市：教育部。

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高

級中等學校數學領域。取自：

https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_18524_6629744_60029.pdf

陳英豪 (2007)。影響資優生數學解題能力之重要因素探討。網路社會

學通訊期刊，61。取自：

http://mail.nhu.edu.tw/~society/e-j/61/61_59.htm

張景媛 (1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研

究。教育心理學報，27，175-200。

單維彰 (2013)。99 數學課綱的前期檢討與微調建議。

蔡坤憲 (2006)。怎樣解題。(原作者：George Polya) 臺北市：天下文

化出版社。

謝淡宜 (1998)。小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程

之比較。臺南師院學報，31，225-268。

二、英文文獻

- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26(4), 499-531.
- Denzin, N. K. (1978): *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods*. New York: McGraw-Hill
- Ferrini-Mundy, J., & Martin, W. G. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Gobbo, C., & Chi, M. (1986). How knowledge is structured and used by expert and novice children. *Cognitive development*, 1(3), 221-237.
- Kathleen, T. T. (1986). *Error Reduction Strategies for whole number operations in grade four* (Doctoral dissertation, Doctoral Dissertation, University of Brigham Young).
- Kelley, T. L. (1939). The selection of upper and lower groups for the validation of test items. *Journal of educational psychology*, 30(1), 17.
- Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. (Unpublished doctoral dissertation, Stanford University). *Dissertation Abstracts International*, 28, 4380A. (University Microfilms 68-5, 442)
- Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. In L. L. Hattield, & D. A. Breadboard (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 7-20). Athens, GA: Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics and the Department of Mathematics Education, University of Georgia.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krutetski, V. A. (1963). Some characteristics of the thinking of pupils with little capacity for mathematics. In B. Simon & J. Simon (Eds.), *Educational Psychology in the U.S.S.R.* (pp. 214-233). Stanford, CA: Stanford University Press.
- Krutetskii, V. A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in schoolchildren. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, 2, 59-104.
- Krutetskii, V. A., WIRSZUP, I., & Kilpatrick, J. (1976). *The psychology of*

- mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Lester, F. K., Jr. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindquist (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp. 29-45). Berkeley, CA: McCutchan.
- Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 41-69.
- Leung, S. S. (2009). Research efforts on probing students' conceptions in mathematics and reality: Structuring problems, solving problems, and justifying solutions. In L. Verschaffel, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*. (pp. 213–225). New York: Sense.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional science*, 26(1-2), 49-63.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D.A.Grouws (ED.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan Publishing Company, Maxwell Macmillan Canada.
- Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Silver, E. A. (Ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sutton, C. R., & West, L. (1982). *Investigating Children's Existing Ideas about Science: A Research Seminar*. University of Leicester, School of Education.
- Tyler, R. W. (1949). *Basic Principles of Curriculum and Instruction*. Chicago: The University of Chicago Press.

附錄

附錄一 預試試卷

放聲思考練習題



付款題

哥哥買了 3 枝原子筆和 1 本筆記本，共付了 27 元；弟弟買了 2 枝原子筆和 3 本筆記本，共付了 46 元。若原子筆 1 枝 x 元、筆記本 1 本 y 元，請列出符合題意的二元一次方程組。



年紀題

假設哥哥現年 x 歲，弟弟現年 y 歲，已知兄弟兩人相差 4 歲。3 年前，哥哥年齡的 4 倍比弟弟年齡的 5 倍少 13 歲，請列出符合題意的二元一次聯立方程式。

正式預試試題



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？





手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？
最大利潤為多少元？



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

附錄二 預試試題逐字稿

(一) 運動題逐字稿

原案	備註 (編號)
0240 (50 秒) 打桌球一小時付費 30 元，然後可以消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，則可以消耗熱量 450 卡路里，然後他說每個人每週可以抽出 8 小時運動，然後又希望總花費不超過 300 元，然後他說如何分配兩種時數才可以消耗最多的熱量。	讀題(R)
0330 (114 秒) 以這一題的話我可以先假設...呃，欸~~等一下喔，因為題目是說每一週，那我會先假設每週打桌球 x 小時，然後這個.....游泳 y 小時。 然後呃.....我會先分成這個兩個部分，第一個是價錢，因為呃.....它因為說他每一週希望不要花費超過 300 元，那打桌球每一小時是 30 元，那我們剛剛是假設桌球每桌是 x 小時，所以我們可以列出 $30x$ 加上這個游泳的 $50y$，然後不超過 300，小於等於 300。 然後第二個的部份就是一個.....喔.....呃.....他一個禮拜，他可以抽出幾個小時，因為它說你每週最多只能抽出 8 個小時，那我用桌球的 x 小時加游泳 y 小時，然後相加要小於等於 8。我第一個會先令出這個二元一次的方程組。然後就可以先將它進行化簡的部分。	分析(A1)
0524 (11 秒) (化簡中.....)	執行(I1)
0535 (22 秒) 然後我們就是把這個圖.....。 喔，呃.....因為.....呃，每週打桌球跟游泳的一個時數一定要大於等於 0，所以我們這邊可以加入兩個條件，x 大於等於 0 跟 y 大於等於 0。 那我們就是將圖給它畫出來。	分析(A2)
0557 (42 秒) 等一下.....。 喔！它题目的目標是要求.....呃.....要如何分配兩種運動的時數才	計畫(P)

可以消耗最多的熱量，那所以我的目標函數 P，最多的熱量的話，會變成 $300x$ 加 $450y$，這是我的目標 P。 0639 (66 秒) 那我先將圖畫出來.....。 這是 x 軸，這是 y 軸，那.....第一條 $3x$ 加 $5y$ 小於等於 30，我們應該知道(0,6)，然後跟這個 y 代 0 的時候，x 是 10，畫出第一條。 第二條 x 加 y 小於等於 8。	執行(I2)
0745 (127 秒) 那兩個都是小於等於，然後而且 x 要大於等於 0，y 也要大於等於 0，所以就是這一塊，然後 P 的話.....因為 P 的話，它的斜率是 $\frac{450}{300}$，嗯.....負的.....負三分之二。 Ok 然後就是，這條斜率是負五分之三，這條斜率是負一，那我們所要求的一個目標的一個斜率是負三分之二，所以負三分之二的話，這個是.....，呃.....負三分之二它是小於，呃.....這一條 $3x$ 加 $5y$ 的這個負五分之三，但是它要大於負一，然後我們就以這支筆來看。 這樣.....這樣平移的話，我們大概可以知道會過這個點，然後這個點就是兩個的一個交點。	探索(E)
0952 (16 秒) (解聯立方程式中.....)	執行(I3)
1008 (76 秒) 我們可以知道它過(5,3)，那我們可以求出來，x 等於 5，y 等於 3。呃.....就是每一週桌球 5 個小時，然後游泳 3 小時，然後總共熱量 300 乘以 5 加 450 乘以 3，1500 加上 1350，2850，ok~~。 1124 共歷時 524 秒	驗證(V)

(二) 手套題逐字稿

原案	備註 (編號)
1150 (13 秒) (讀題中.....)	讀題(R1)
1203 (42 秒) 呃~因為像他這一題題目稍微長一點，我會採用就是一個稍微把它 做個簡單的一個表格，把它整理出來 (整理成表格中.....)	分析(A1)
1245 (8 秒) (讀題中.....)	讀題(R2)
1253 (67 秒) 它現在有紅色毛線 900 公尺，然後白色 1200。然後甲製造 x 雙， 乙製造 y 雙，然後它的一個目標是要求甲跟乙各製造多少雙才能 使利潤最大，所以利潤最大就是 $50x$ 加 $30y$ 。	計畫(P)
1400 (46 秒) 然後呃.....紅毛線總長是 900 公尺，所以我們可以列出第一個式 子，甲的 50 去乘以總共製造 x 雙，加上乙每雙 20 公尺去乘以 y 雙，要小於等於 900。然後以白色的話 $40x$ 加 $40y$ 小於 1200。那過 程中一樣 x 大於等於 0， y 大於等於 0。	分析(A2)
1446 (129 秒) 那我們將圖可以把它畫出來。 (畫圖中....) x 軸， y 軸.....。 那我們畫第一條， x 加 y 等於.....小於等於 30。第二條直線 $5x$ 加 $2y$ 小於等於 90。	執行(I1)
1655 (92 秒) 那它都是小於等於的式子，我們可以知道是這一塊。 那我們從我們要求的一個目標是 $50x$ 加 $30y$ ，這一條斜率就是負三 分之五，這一條斜率是負一，負二分之五。 那我們可以知道我們要求的這一條呢，它的斜率是大於這一條	探索(E)

的，呃.....$5x$ 加 $2y$ 這一條，但是它會小於 x 加 y 等於 30 這一條。 (拿筆作擺動中.....) 是.....呃.....一樣因為是介於這兩條之間，那這樣平移的話，呃.....一樣會過這個點，所以我們先解交點。 1827 (14 秒) (解聯立方程式中.....) 1841 (28 秒) 那我們求出來是 10 跟 20，那就代表說，甲.....甲，甲款我們可以做 10 雙，乙款可以做 2.....20 雙，那它的最大利潤，就是 50 乘以 10 加 30 乘以 20，500 加 600，1100。 1909 共歷時 439 秒	執行(I2) 驗證(V)
--	----------------------------

(三) 代購題逐字稿

原案	備註 (編號)
1923 (44 秒) (讀題中.....) 這邊有一個表.....。	讀題(R)
2007 (121 秒) 他說是代購一個面膜跟指甲油，指甲油至少買 10 個，那我先令這個面膜要買 x 個，然後指甲油要買 y 個。他說指甲油至少買 10 個，所以 y 大於等於 10。 然後代購的金錢控制在 4000 的一個上限，代購金錢..... 代購金錢支出的話.....那應該就是成本吧..... 成本的話就是 $50x$ 加 $100y$ 小於等於 4000，因為他說 4000 元是上限。 然後擔心超重，重量的話..... $30x$ 加 $100y$ ，3000 克以內。	分析(A)
2208 (22 秒) 那它的目標是要說，怎樣才可以賺最多的錢，那就是利潤的部份，就是我們把面膜的 40 元乘以買 x 個，加上指甲油的 100 元乘以 y 個，那我們現在可以先把圖畫出來。	計畫(P)
2230 (131 秒) (畫圖中.....) 我先把這個式子稍微整理一下。 好，ok！ 那開始畫圖，這個.....。 第一條 x 加 $2y$ 小於等於 80。 那我們畫出來第一條是 x 加 $2y$ 等於 80。 然後畫第二條， y 代 0 的話， x 是 100； x 代 0 的話， y 是 30。	執行(I1)
2441 (10 秒) 呃.....我稍微做個檢查.....。 啊~然後這個 x 等於 0 的話是 40.....。 Ok~~	驗證(V1)
2451 (95 秒)	探索(E)

那 y 要大於等於 10。 y 要大於等於 10 的話是這一條。 然後 x 要大於等於 0，那就是這一塊。 那我們的目標的話，斜率是，呃.....負十分之四，然後這一條 x 加 $2y$ 的話斜率是負二分之一。然後這一條 $3x$ 加 $10y$ 的話斜率是負十分之三。 那用把這三個斜率做個簡單的一個比較。 呃.....負五分之二，負五分之二大於負二分之一，然後這個.....小於.....嗯....我們把這個，把它變成負十分之五，然後這個是負十分之四.....。 十分之三，那它也一樣介於兩個之間。 那斜率負的話，應該長這樣，把它平移，平移，平移，平移..... 那一樣是這個交點，交點的話.....我們先來解這兩條線的一個交點。 2626 (38 秒) (解聯立方程式中.....) $4y$ 等於這個 60，y 等於 15。 y 等於 15 的話，代回去 30，所以 8 扣 30 的話.....50 所以 50 跟 15。 2704 (48 秒) 所以，呃.....我們求出來 x 等於 50，y 等於 15。 也就是說，面膜要 50 個，指甲油要 15 個，那總共可以賺這個 40 乘以 50 加上 100 乘以 15，總共會等於 3500。 2752 共歷時 509 秒	執行(I2) 驗證(V2)
---	-----------------------------

附錄三 預試試題計算過程

(一) 放聲思考練習題

放聲思考練習題

⑤ 付款題

哥哥買了3枝原子筆和1本筆記本，共付了27元；弟弟買了2枝原子筆和3本筆記本，共付了46元。若原子筆1枝 x 元、筆記本1本 y 元，請列出符合題意的二元一次方程組。

$$\begin{cases} 3x + y = 27 \\ 2x + 3y = 46 \end{cases}$$

年紀題

假設哥哥現年 x 歲，弟弟現年 y 歲，已知兄弟兩人相差4歲。3年前，哥哥年齡的4倍比弟弟年齡的5倍少13歲，請列出符合題意的二元一次聯立方程式。

(二) 運動題計算過程

正式預試試題



打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

設每週打桌球 x 小時

游泳 y 小時

$$\begin{cases} 30x + 50y \leq 300 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x + 5y \leq 30 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$P: 300x + 450y$$

$$m = \frac{300}{450} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$



$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 30 \\ x + y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{m} &= -\frac{3}{5} \\ m &= -1 \end{aligned}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

$$3x + y = 24 \quad -\frac{4}{15} > -\frac{10}{15}$$

$$2y = 6$$

$$x = 5, y = 3$$

每週桌球 5 小時

游泳 3 小時

熱量 2850

$$\begin{aligned} 300(5) + 450(3) &= 1500 + 1350 \\ &= 2850 \end{aligned}$$



(三) 手套題計算過程



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

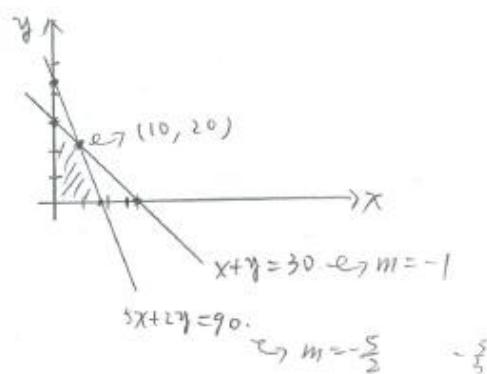
	紅	白	每雙	雙數
甲	50	40	50	x
乙	20	40	30	y

$$P: 50x + 30y \rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

紅色毛線 900m.

白色毛線 1200m.

$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \rightarrow 5x + 2y \leq 90 \\ 40x + 40y \leq 1200 \rightarrow x + y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} \text{甲} \quad 10 \\ \text{乙} \quad 20 \end{array} \rightarrow 50 \times 10 + 30 \times 20 = 500 + 600 = 1100$$

$$\begin{array}{l} 2x + y = 60 \\ 3x = 30 \end{array}$$

$$-\frac{15}{6} < -\frac{10}{6}$$

(四) 代購題計算過程

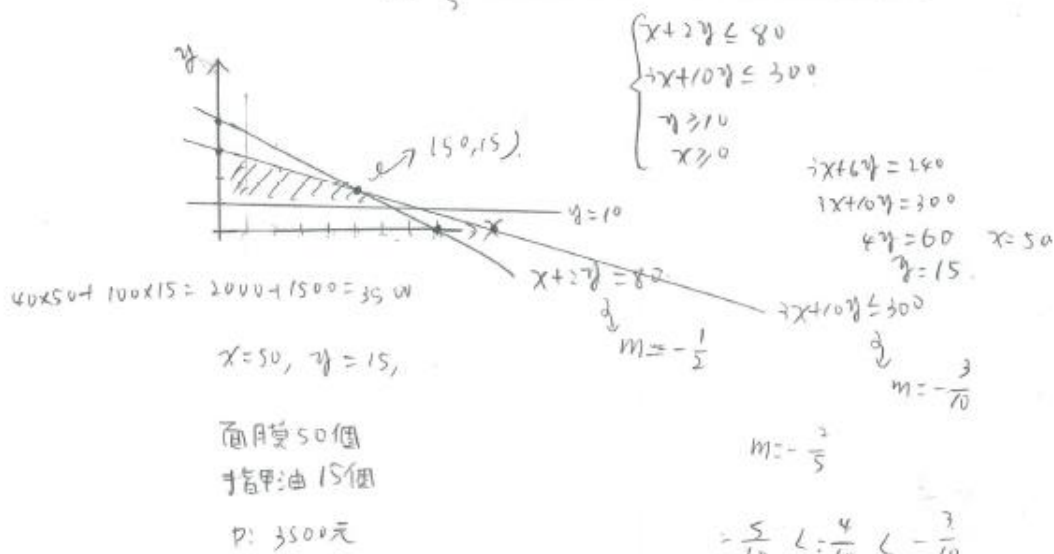
代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激
 夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的錫踢面膜以及UNT 指甲油
 回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整
 理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出控制在台幣
 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以
 內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才
 可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

$$\begin{cases} y \geq 10 \\ 50x + 100y \leq 4000 \\ 20x + 100y \leq 3000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$P: 40x + 100 \cdot y \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$



附錄四 正式施測試題

放聲思考練習題



付款題

哥哥買了 3 枝原子筆和 1 本筆記本，共付了 27 元；弟弟買了 2 枝原子筆和 3 本筆記本，共付了 46 元。若原子筆 1 枝 x 元、筆記本 1 本 y 元，請列出符合題意的二元一次方程組。



年紀題

假設哥哥現年 x 歲，弟弟現年 y 歲，已知兄弟兩人相差 4 歲。3 年前，哥哥年齡的 4 倍比弟弟年齡的 5 倍少 13 歲，請列出符合題意的二元一次聯立方程式。



運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？





手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？



代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

附錄五 正式施測試題逐字稿

(一) 小寬運動題逐字稿 (低分者)

原案	備註 (編號)
0010 (19 秒) 一小時付費 30，消耗 300 50.....450..... 8 小時又不超過 300 元.....	讀題(R)
0029 (29 秒) 所以是設打桌球是 x ，游泳是 y $30x+50y$ 要小於等於 300 然後.....等一下.....	分析(A1)
0058 (13 秒) 然後目標是 $300x+450y$	計畫(P)
0111 (5 秒) 然後 x 大於等於 0， y 大於等於 0	分析(A2)
0116 (75 秒) (畫圖中.....) 然後求頂點 欸.....欸.....應該是.....	執行(I)
0231 (17 秒) 就是代進去那個目標函數	探索(E)
2048 (32 秒) 答案是打桌球 10 個小時，然後消耗 3000 熱量卡路里	驗證(V)
0320	
共歷時 190 秒	

(二) 小寬手套題逐字稿 (低分者)

原案	備註 (編號)
0330 (35 秒) 手帕紅色毛線 50 公尺，白色毛線 40 公尺，可以賺 50 元，乙款式 20 公尺和 40 公尺，可以賺 30，有 900 公尺和 1200，然後甲款是 x，乙款是 y	讀題(R)
0405 (45 秒) 所以是 $50x$ 加.....，再看一下.....$20y$ 吧!應該是.....可以小於等於 900 然後 $40x+40y$ 可以小於等於 1200	分析(A1)
0450 (12 秒) 然後目標函數是 $500.....50x+30y$	計畫(P)
0502 (5 秒) 然後 x 大於等於 0，y 大於等於 0	分析(A2)
0507 (223 秒) (畫圖中.....) 然後..... 18 和 45 18.....45..... 這個是.....$50x+20y$ 等於 900 然後這個是 $40x+40y$ 等於 1200 然後再求範圍是這邊 然後再.....寫頂點 然後這個要求交點 (解聯立中.....) 這個是 10，然後..... 這個是 x 是 10，然後 y 是 20，然後再求目標函數	執行(I)
0850 (28 秒) 呃.....等一下，所以是 900 跟 50，500 加 600 等於 1100，然後是 900	探索(E)

0918 (47 秒)

確認一下.....

喔!所以答案是甲款做 10 套

喔，甲款做 10 雙啦，然後乙款做 20 雙，然後最大利潤是 1100

嘿!!!

1005

共歷時 395 秒

驗證(V)

(三) 小寬代購題逐字稿（低分者）

原案	備註 (編號)
1020 (25 秒) 他說指甲油至少要買 10 個，4000 元是上限，重量要在 3000 以內，指甲油至少要 10 個	讀題(R1)
1045 (125 秒) 所以.....先設面膜跟指甲油是 x 和 y 然後.....指甲油的成本是..... 設指甲油為 x ，指甲油的成本是 $100x$ ，那面膜的成本是 50 乘.....50 乘..... 思考一下，4000 元是上限..... 4000 減 $100x$ ，然後重量的話是 $100x$ 加面膜的是 3000 減 $100x$ 這樣好像不太對..... 我可以想一下這題要怎麼做嗎？	分析(A1)
1250 (54 秒) (讀題中.....) 指甲油至少要買 10 個.....至少要買 10 個..... 成本上限是 4000	讀題(R2)
1344 (28 秒) 還是設指甲油是 x ，面膜是 y 然後 $100x + 50y$ 會小於等於 4000 然後 $100x + 30y$ 會小於等於 3000，這個是重量	分析(A2)
1412 (12 秒) 然後利潤的話是，利潤的話是 $100x + 40y$	計畫(P)
1424 (16 秒) 然後 x 要大於等於 10， y 要大於等於 0	分析(A3)
1440 (255 秒) 然後先畫圖 (畫圖中.....)	執行(I)

$100x + 50y$ 會等於 4000 寫錯了..... 改成是 1 格是 20 的話，是這樣..... 然後這個是 80，所以是..... 這個是 $100x + 50y = 4000$ 然後這個是..... 這個是 $100x + 30y$ 會等於 3000 然後求它的 喔!還有一個是 x 要大於等於 10，所以要畫 x 等於 10，在這裡..... 那畫出來的話會變成是..... 所以這邊是 10，然後 0 這邊是 30，然後 0 這邊是 x 等於 10 和 100 x 這樣不是 y 的交點 所以代進去是 1000 加 $50y$ 會等於 4000，那 $50y$ 是 3000，所以 y 會是 60 所以這邊是 (10, 60) 那這邊是兩條線的交點，所以是 $20y$ 會等於 1000，所以 y 是 50 那 x 會是 $100x$ 加 1500 會等於 3000 所以 $100x$ 會等於 1500，x 會是 15 所以這邊是 15 和 50	
1855 (45 秒) 所以求目標函數的話是 1000 加 2400，等於 3400 然後這個是，1500 加 1500 會等於 3000 然後這個是 3000，所以答案是.....	探索(E)
1940 (40 秒) 所以答案是 10 個指甲油然後 60 個面膜，然後利潤會是 3400 看一下.....應該是沒錯	驗證(V)
2020 共歷時 600 秒	

(四) 小好運動題逐字稿 (中分者)

原案	備註 (編號)
0000 (24 秒) 一小時付費 30，桌球，可消耗熱量 300 卡路里；游泳付費 50，可消耗 400 卡路里，最多抽出 8 小時運動，總花費不超過 300 元，所以.....	讀題(R)
0024 (43 秒) 設桌球要花 x 小時，游泳花 y 小時 要列出方程式是 $30x + 50y$ 小於等於 8 不對!不對!小於等於 300 塊 然後 $x + y$ 小於等於 8	分析(A)
0107 (13 秒) 目標函數是 $300x + 450y$	計畫(P)
0120 (122 秒) 所以去找頂點..... 可以找到頂點是 6.....，(0, 6)跟(10, 0)，還有(0, 8)跟(8, 0) 然後畫圖 所以一格是 2 的話，(0, 6)在這裡 啊!不對..... (0, 6)在這裡，(10, 0)在這裡 所以會有一條方程式在這裡..... 再來是這個跟這個.....這個..... 所以找出來的範圍在這裡 然後代頂點，所以這是(0, 6) 這個是.....不是這個..... 這個是 8 跟 0 還有一個頂點是，呃..... 同乘以 3，所以會得到這樣 然後上面減下面得到 $y = 3$，代回得 $x = 5$ 所以這裡是 5 跟 3	執行(I)
0322 (52 秒)	探索(E)

然後再代回目標函數 所以頂點有這 3 個 然後再代進去求，得到、得到、得到、得到、得到..... 0414 (28 秒) 所以得到，得到桌球要打 5 個小時，游泳要花 3 個小時，會得到最多熱量 2850 卡路里 0442 共歷時 282 秒	驗證(V)
--	--------------

(五) 小好手套題逐字稿 (中分者)

原案	備註 (編號)
0450 (47 秒) 甲款式是用紅色 50 公尺還有白色 40 公尺，可以賺 50 元；乙款式使用紅色 20 公尺，還有白色 40 公尺，可以賺 30 元。現在有紅色 900 公尺跟白色 1200 公尺，要得利潤最大。 嗯哼…… 所以，所以……	讀題(R)
0537 (31 秒) 可以列出方程式是 $50x + 20y$ 小於等於 900，還有 $40x + 40y$ 小於等於 1200	分析(A)
0608 (12 秒) 然後求最大利潤是 $50x + 30y$	計畫(P)
0620 (186 秒) 所以可以列方程式…… (化簡中……) 找頂點的話是 45 跟 18 這個是 300 跟 300 好的，所以…… 等等…… 我看看…… (發現化簡錯誤回去做修正) 所以不對，這裡是 60，所以這裡是 30 跟 30 所以這裡是…… 所以如果一格是 5 的話 可以列出這裡有一個點跟這裡有一個點 還有這裡有一個點跟這裡有一個點 然後範圍在這裡 所以頂點是(0, 30)跟(18,0) 找出交點是…… $3x = 30$，$x = 10$，y 會等於…… 這裡是 20……，這裡 40，y 會等於 4 不對！y 會等於 20 所以這個交點是(10, 20)	執行(I)

0926 (33 秒) 然後找最大利潤..... 可以得到這個是 900 這裡是 1100 這裡是 900	探索(E)
0959 (20 秒) 所以是甲款要 10 雙，跟乙款要 20 雙，有最大利潤 1100 1019 共歷時 329 秒	驗證(V)

(六) 小好代購題逐字稿 (中分者)

原案	備註 (編號)
1027 (31 秒) (讀題中.....) 指甲油至少要買 10 個，至少.....，指甲油..... 控制在 4000 元為上限 行李超重，所以重量控制在..... 代購面膜跟指甲油各多少	讀題(R)
1058 (63 秒) 所以設面膜要代購 x 個，指甲油要代購 y 然後是.....呃..... 4000 元為上限，所以可以列出 $50x+100y$ 小於等於 4000 行李超重，所以可以列出 $30x$ $30x$ 加..... $30x+100y$ 會小於等於 3000 指甲油至少買 10 個，所以指甲油要大於等於 10	分析(A)
1201 (8 秒) 然後最大利潤是 $40x+100y$	計畫(P)
1209 (186 秒) 所以..... 化簡方程式可以得到這兩個 然後再找頂點 哦..... 然後畫圖 令一個是 20，可以得到.....9、10、11 所以這裡是 100 3、4、5、6、7、8，所以一格是 10 所以可以得到這個點是 10 還有這個點的一條方程式跟這裡.....還有這裡 可以得到第二條方程式 然後 y 要大於等於 10，所以還有這裡 所以範圍是這個 得到的頂點有這裡跟這裡	執行(I)

所以這裡是(0, 30)，這裡是(0, 10) 然後 $2x=100$，x 會等於 50 代回去可以得 y 會等於 50 所以這裡是 50 跟 15 然後那個點會跟、會跟、會跟.....這條是..... 這條交點 所以把 y 等於 10 代進去 會得到 x 等於 60 1515 (51 秒) 然後再代回去目標函數會得到..... 這個、這個、這個、這個.....跟、這個、這個，還有、這個、這個 然後會得到這裡是 3000，這裡是 1000，這裡是 3000 加 1500， 3500 這裡是 2400 跟 1000，所以是 3400 1606 (20 秒) 所以代購指甲油..... 不對!是面膜 50 個，指甲油 15 個，會得到最大利潤是 3500 元 1626 共歷時 359 秒	探索(E) 驗證(V)
---	---------------------------

(七) 小珍運動題逐字稿 (高分者)

原案	備註 (編號)
0002 (35 秒) 打桌球一小時 30，可以消耗 300 卡路里；游泳一小時 50，可以消耗熱量 450，然後每週可以最多 8 小時，花費不超過 300 好.....	讀題(R)
0037 (44 秒) 設打桌球 x 小時一週，然後游泳 y 小時一週 然後他每週可以最多抽出 8 小時 所以 $x+y$ 會小於等於 8 然後他希望總花費不超過 300 所以打桌球一小時 30 所以就是 $30x$ 然後游泳一小時加 $50y$ 不超過 300，小於等於 300	分析(A)
0121 (38 秒) 然後他希望可以消耗 450 卡路里 所以就是打桌球 $300x$ 加上游泳的 $450y$ 會.....消耗熱量 450 卡路里 喔!他想.....他要問最多可以消耗多少熱量 所以目標函數是 $300x+450y$ 好.....然後	計畫(P)
0159 (147 秒) 然後先畫圖 $x+y$ 這條線是 L_1，這是 $(0, 8)$、$(8, 0)$ 8 跟 8..... 這是 $x+y=8$ 然後 $30x+50y=300$ 所以是 $(10, 0)$ 跟 $(0, 6)$ $(10, 0)$.....$(0, 6)$..... 然後這條是 $30x+50y=300$ 所以這個點是 $(0, 8)$，這個點是 $(10, 0)$ 然後他們的交點.....	執行(I)

(八) 小珍手套題逐字稿 (高分者)

原案	備註 (編號)
0555 (50 秒) 小芬在網路上拍賣兩款，甲款是用紅線 50 公尺，白色的線 40 公尺，可賺 50 甲款式紅色.....白色..... 然後可以賺 50 元 乙款式紅色 20，白色 40，可以賺 30 元 然後現在有紅色的毛線 900，白色的 1200 然後他要甲款 x 雙，乙款是 y 雙	讀題(R)
0645 (9 秒) 然後他要求利潤最大 所以目標函數是 $50x + 30y$	計畫(P)
0654 (26 秒) 好~然後..... 列式..... 他說紅色毛線有 900 公尺，所以 $50x + 20y$ 會小於等於 900 白色毛線 1200，所以 $40x + 40y$ 會小於等於 1200	分析(A)
0720 (133 秒) 然後先畫圖 好..... 先化簡..... 所以 $5x + 2y$ 小於等於 90 x18，y 是 45..... 然後這個可以是 $x + y$ 小於等於 30 (0, 30)或者是(30, 0) 好..... 這是 $x + y = 30$ 的線，然後(18, 0)，(0, 45)..... 這條是 $5x + 2y = 90$ 然後範圍在這裡 然後他們的交點..... $5x + 2y = 90$，$2x + 2y = 60$ x 會等於 10，y 等於 20	執行(I)

所以這個交點是(10, 20) 然後這個點是(0, 30) 這個點是(18, 0) 0933 (35 秒) 然後代頂點法 頂點(0, 30)，然後(18, 0)，還有(10, 20) 目標函數.....三三九，這個是 900 然後這個是 900 然後這個 500+600 是 1100 1008 (16 秒) 所以甲款是 10 雙，乙款是 20 雙，會有最大利潤 1100 元 1024 共歷時 269 秒	探索(E) 驗證(V)
--	---------------------------

(九) 小珍代購題逐字稿 (高分者)

原案	備註 (編號)
1035 (57 秒) 指甲油至少要買 10 個 然後金錢支出是 4000 元 代購商品要 3000 克以內 他要代購面膜、指甲油各多少才可以賺最多	讀題(R)
1132 (52 秒) 所以 3000 克..... 設面膜 x，指甲油是 y 所以 $30x+100y$ 要小於等於 3000 然後成本 $50x+100y$ 要小於等於 4000 指甲油至少要買 10 個，所以 y 要大於等於 10	分析(A)
1224 (15 秒) 目標函數是 $40x+100y$	計畫(P)
1239 (285 秒) 然後整理一下..... $3x+10y$ 小於等於 300 $x+2y$ 小於等於 800 然後 y 大於等於 10 然後這個可以是 0 跟 30，還有 100 跟 0 這條線是 $(0, 400)$.....800.....80..... 好~然後這個是 $(0, 40)$，跟 80 跟 0 等一下要畫圖 y 要大於等於 10 然後.....40.....80.....100.....30..... 然後這是 $y=10$ 然後這條線是..... $3x+10y=300$ 然後這一條線是 $x+2y=80$ 所以他的範圍在這裡 然後這個點是 $(0, 10)$ 然後.....這個點是 $(0, 30)$	執行(I)

這個點是..... $3x+10y=300$ 然後 $y=10$，所以 x 會等於..... (聯立解得交點是分數，覺得怪怪的.....) x 是 200 除以 3，y 是 10 (思考中.....) 1724 (64 秒) 然後現在..... $(0, 10)$，$(0, 30)$，200 除以 3，10..... 這是 1000，這是 3000 我們取最近的 66..... 40 乘以 66 加 3000 等於 3640 1828 共歷時 473 秒	探索(E)
--	-------

附錄六 正式施測試題計算過程

(一) 小寬放聲思考練習題 (低分者)

放聲思考練習題



付款題

哥哥買了3枝原子筆和1本筆記本，共付了27元；弟弟買了2枝原子筆和3本筆記本，共付了46元。若原子筆1枝 x 元、筆記本1本 y 元，請列出符

合題意的二元一次方程組。

$$\begin{aligned} \text{哥: } 3x + y &= 27 \\ \text{弟: } 2x + 3y &= 46 \end{aligned}$$



年紀題

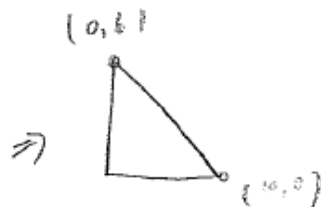
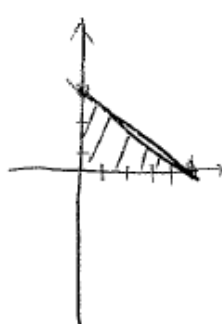
假設哥哥現年 x 歲，弟弟現年 y 歲，已知兄弟兩人相差4歲。3年前，哥哥年齡的4倍比弟弟年齡的5倍少13歲，請列出符合題意的二元一次聯立方程式。

(二) 小寬運動題計算過程 (低分者)

運動題

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

$$\begin{aligned} x \geq 0, y \geq 0 \\ 30x + 50y &\leq 300 \\ P: 300x + 450y \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P: 300(0) + 450(6) &= 1500 \\ 3000 \end{aligned}$$

A: 打桌球 10 h
3000 卡路里

(三) 小寬手套題計算過程 (低分者)

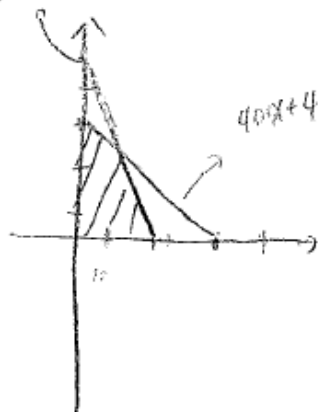
手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手

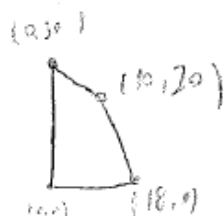
套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

$$\begin{aligned} x &\geq 0, y \geq 0 \\ L_1: 50x + 20y &\leq 900 \\ L_2: 40x + 40y &\leq 1200 \\ P: 50x + 30y &\end{aligned}$$

$$50x + 20y = 900$$



$$40x + 40y = 1200$$



$$P: \begin{array}{r} 900 \\ 1500 + 600 = 1100 \\ \hline 400 \end{array}$$

$$100x + 40y = 1800$$

$$40x + 40y = 1200$$

$$60x = 600$$

$$x = 10$$

$$40x + 40y = 1200$$

$$40y = 600$$

$$y = 20$$

$$A: 9: 10 \text{ 雙 } B: 20 \text{ 雙}$$

$$\text{Max 利潤: } 1100 \text{ 元}$$

(四) 小寬代購題計算過程 (低分者)

代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限，由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

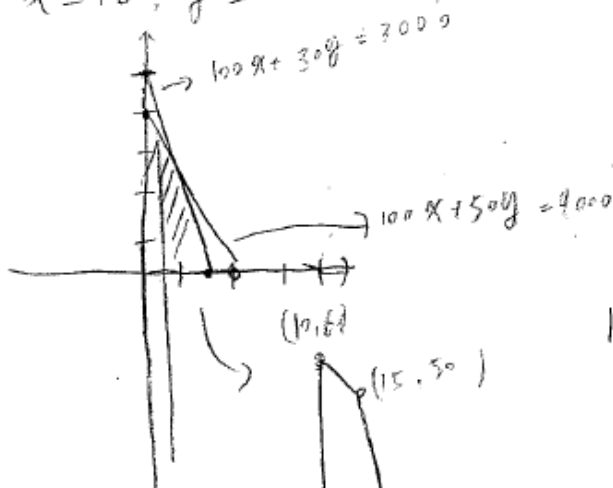
	踢踢面膜	UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

$$100x + 50y \leq 4000$$

$$100x + 30y \leq 3000$$

$$P: 100x + 40y$$

$$x \geq 10, y \geq 0$$



$$20y = 1000$$

$$y = 50$$

$$x = 15$$

$$100x + 1500 = 3000$$

$$100x = 1500$$

$$1000 + 50y = 4000$$

$$50y = 3000$$

$$y = 60$$

$$(10, 0) \quad (30, 0)$$

$$P: \begin{cases} 1000 + 5400 = 3400 \\ 1500 + 1500 = 3000 \\ 3000 \end{cases}$$

$$10 \text{ 指甲油} \\ A: 60 \text{ 面膜} \\ 3400 \text{ 元}$$

(五) 小好放聲思考練習題 (中分者)

放聲思考練習題



付款題

哥哥買了3枝原子筆和1本筆記本，共付了27元；弟弟買了2枝原子筆和3

本筆記本，共付了46元。若原子筆1枝 x 元、筆記本1本 y 元，請列出符

合題意的二元一次方程組。

$$3x + y = 27$$

$$2x + 3y = 46$$



年紀題

假設哥哥現年 x 歲，弟弟現年 y 歲，已知兄弟兩人相差4歲。3年前，哥哥年

齡的4倍比弟弟年齡的5倍少13歲，請列出符合題意的二元一次聯立方程

式。

(六) 小好運動題計算過程 (中分者)

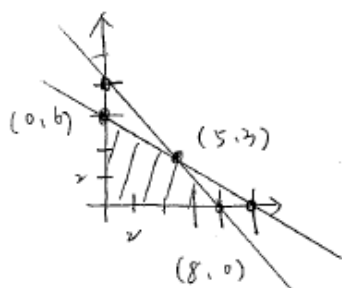


運動題

打桌球一小時付費30元，可消耗熱量300卡路里；游泳一小時付費50元，可消耗熱量450卡路里。某人每週最多能抽出8小時運動，又希望總花費不超過300元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

$$\begin{cases} 30x + 50y \leq 300 & \begin{array}{r} 0 \\ 6 \end{array} \begin{array}{r} 10 \\ 0 \end{array} \\ x + y \leq 8 & \begin{array}{r} 0 \\ 8 \end{array} \begin{array}{r} 8 \\ 0 \end{array} \end{cases}$$

$$P = 300x + 450y$$



$$3x + 5y = 30$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 30 \\ 3x + 3y = 24 \end{cases}$$

$$2y = 6, y = 3, x = 5$$

(x, y)	(0, 6)	(5, 3)	(8, 0)
P	2700	2850	2400

$$\begin{array}{r} 1500 \\ 1350 \\ \hline 2850 \end{array}$$

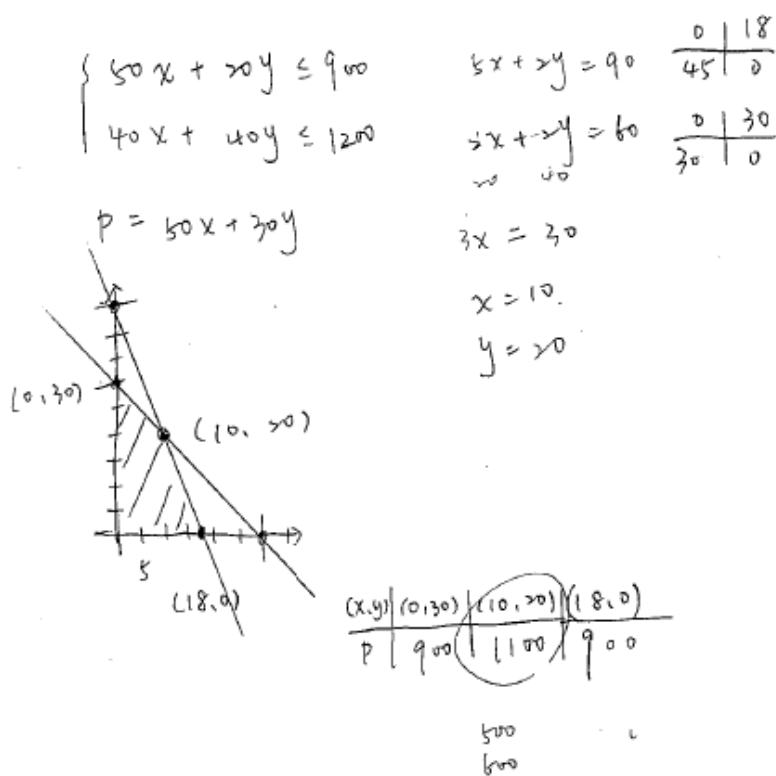
桌球 5 小時
游泳 3 小時
最多 2850 卡

(七) 小好手套題計算過程 (中分者)



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？



甲 = 10 雙

乙 = 20 雙

最大：1100 元

(八) 小妤代購題計算過程 (中分者)

代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激奔美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可以賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

	x 踢踢面膜	y UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

$$\begin{cases} 50x + 100y \leq 4000 \\ 30x + 100y \leq 3000 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

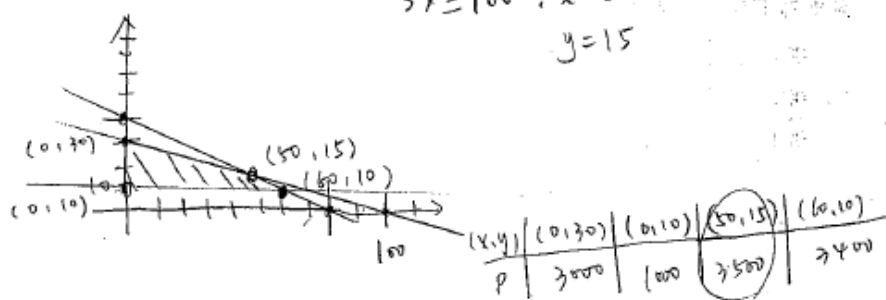
$$P = 40x + 100y$$

$$\begin{aligned} 5x + 10y &\leq 400 \\ 3x + 10y &= 300 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 80 \\ 40 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 100 \\ 30 \quad 0 \end{array}$$

$$2x = 100 \therefore x = 50$$

$$y = 15$$



$$\begin{aligned} \text{面} &= 50 & 2000 \\ \text{指} &= 15 & 1500 \\ \text{最大} &= 3500 \text{ 元} & 2400 \\ & & 1000 \end{aligned}$$

(九) 小珍放聲思考練習題 (高分者)

放聲思考練習題



付款題

哥哥買了3枝原子筆和1本筆記本，共付了27元；弟弟買了2枝原子筆和3本筆記本，共付了46元。若原子筆1枝 x 元、筆記本1本 y 元，請列出符合題意的二元一次方程組。

$$\begin{cases} 3x + y = 27 \\ 2x + 3y = 46 \end{cases}$$



年紀題

假設哥哥現年 x 歲，弟弟現年 y 歲，已知兄弟兩人相差4歲。3年前，哥哥年齡的4倍比弟弟年齡的5倍少13歲，請列出符合題意的二元一次聯立方程式。

(十) 小珍運動題計算過程 (高分者)



運動題 x

打桌球一小時付費 30 元，可消耗熱量 300 卡路里；游泳一小時付費 50 元，可消耗熱量 450 卡路里。某人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 300 元，該如何分配兩種運動時數才可消耗最多熱量？最多熱量為多少？

$$\begin{cases} x + y \leq 8 & (0, 8) \\ 30x + 50y \leq 300 & (10, 0) \\ P = 300x + 450y & (0, 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 30x + 50y = 300 \end{cases} \Rightarrow y = 6$$

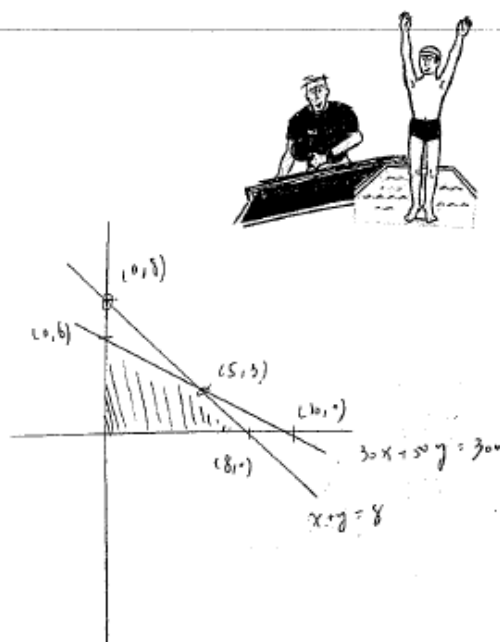
$$30x + 30y = 180$$

$$y = 6$$

$$x = 2$$

$$P = 300x + 450y$$

$$P = 300(2) + 450(6) = 600 + 2700 = 3300$$



$$30x + 50y \leq 300$$

$$x + y \leq 8$$

$$\text{Max } P = 3300$$

(十一) 小珍手套題計算過程 (高分者)



手套題

小芬在網站上拍賣兩款以毛線織成的手套，其中甲款式使用紅色毛線 50 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 50 元；乙款式使用紅色毛線 20 公尺及白色毛線 40 公尺織成，每雙可賺 30 元。現有紅色毛線 900 公尺及白色毛線 1200 公尺，並令甲款式及乙款式的手套各製作 x 雙及 y 雙，試求甲款式與乙款式手套各製作多少雙才能使利潤最大？最大利潤為多少元？

	x	y	
甲	2		
紅	50 m	20 m	900
白	40 m	40 m	1200
	50 元	30 元	

$$P = 50x + 30y$$

$$\begin{cases} 50x + 20y \leq 900 \\ 40x + 40y \leq 1200 \end{cases}$$

$$5x + 2y \leq 90$$

x	y
18	0
0	45

$$x + y \leq 30$$

$$0 \leq x$$

$$0 \leq y$$

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 2y = 90 \end{cases}$$

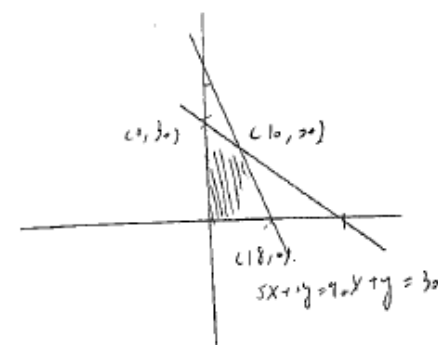
$$2x + 2y = 60$$

$$x = 10$$

$$y = 20$$

$$\text{可行域}$$

	$(0, 0)$	$(18, 0)$	$(10, 20)$
P	0	900	1100



$$\text{甲} = 10 \text{ 雙}$$

$$\text{乙} = 20 \text{ 雙}$$

$$\text{Max} = 1100 \text{ 元}$$

(十二) 小珍代購題計算過程 (高分者)

代購題

美妝達人 Strawberry 飄洋過海來到台灣旅遊，應好友們要求決定來個台灣激夯美妝代購行程。Strawberry 打算幫忙代購台灣的踢踢面膜以及 UNT 指甲油回國，經過她的精打細算，將面膜以及指甲油每一個的成本、重量、利潤整理如下表。已知指甲油至少要買 10 個，且她將代購的金錢支出（成本）控制在台幣 4000 元為上限；由於擔心行李超重，她將代購商品重量控制在 3000 克以內。請問 Strawberry 此次的台灣之旅，要代購面膜以及指甲油各多少個，才可賺到最多的錢？最多可以賺多少錢？

$$\begin{cases} 30x + 100y \leq 4000 \\ 30x + 100y \leq 3000 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

	x 踢踢面膜	y UNT 指甲油
成本(元)	50	100
重量(克)	30	100
利潤(元)	40	100

$$P: 40x + 100y$$

$$\begin{cases} 30x + 100y \leq 3000 & (10, 30) \\ x + y \leq 80 & (0, 40) \\ y \geq 10 & (0, 10) \end{cases}$$

$$30x + 100y \leq 3000$$

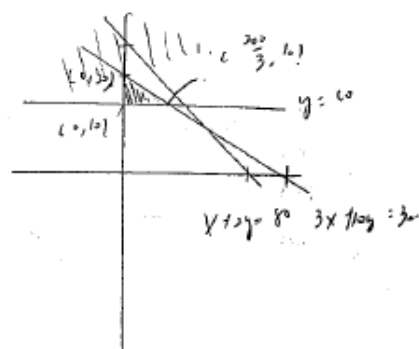
$$y \leq 30$$

$$x \leq \frac{200}{3}$$

$$y \geq 10 \quad (0, 10) \quad (0, 30) \quad (\frac{200}{3}, 10)$$

$$P: 1000 \quad 3000$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 66 \\ \hline 240 \\ 240 \\ \hline 2140 \\ 100 \end{array}$$



附錄七 事後晤談札記

(一) 小寬事後晤談札記

Q1：針對運動題，一般畫出來的可行解區域都可以看到兩條直線，你有沒有覺得你畫的圖形哪裡怪怪的？

A1：啊~~最多 8 小時這個條件沒有看到。

Q2：針對手套題，看起來你是用頂點法做的對吧？你如何知道哪一個點會有最大值產生？

A2：把可行解區域周圍的點都代進去就知道哪一個是最大值了。

Q3：答題的過程中，因為限制式的係數都很大，是否有考慮要先把限制是化簡呢？這樣比較好找頂點？

A3：是有，但我從以前就很習慣直接把坐標標上去。

Q4：為何你在畫可行解區域的時候，要將圖形額外拉出來再畫一個？

A4：哦~我都習慣這樣，看起來比較清楚。

(二) 小好事後晤談札記

Q1：妳在寫限制式的時候，因為打桌球跟游泳的時間不可能是負的，

所以應該有 $x \geq 0$ 與 $y \geq 0$ 對吧？

A1：喔，對！我忘了。

Q2：妳在做題目的時候都習慣用頂點法嗎？

A2：嗯……我都用頂點法。

Q3：那為何將頂點代入目標函數的時候，沒有考慮到 $(0,0)$ 呢？

A3：啊~因為之前做題目的時候，最大值都不會在 $(0,0)$ ，因為代進

去都是 0，所以我就沒有寫了，但最後結果還是對的。

Q4：針對代購題，因為指甲油至少要買 10 個，所以妳列出了

$y \geq 10$ ，當下妳有沒有想到少了一個限制式 $x \geq 0$ 呢？

A4：我沒有想到欸。

(三) 小珍事後晤談札記

Q1：在寫限制式的時候，一般都有 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 對吧？

A1：對呀！對呀！對呀！（小珍靦腆的笑，她忘記了）

Q2：妳選取可行解區域的時候是對的，少了 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ，為何選出來的區域還是對的呢？

A2：因為它跟我以前做的題目差不多，都是取第一象限這塊。

Q3：在畫刻度的時候，妳會抓一下它的間距嗎？

A3：我都是稍微而已。

Q4：代購題的部分做到最後有沒有覺得怪怪的？

A4：有啊，它很奇怪做出來是分數欸，應該不會有分數，應該是做錯了，但我不知道錯在哪裡。

Q5：那為何將頂點代入目標函數的時候，沒有考慮到 (0,0) 呢？

A5：哦~因為最大值不會在 (0,0) 啊，代進去都是 0，所以我就沒有寫了，但最後結果還是對的。

Q6：妳會使用平行線法嗎？

A6：老師上課有教過，但很快就帶過去了，上課老師都用頂點法，所以我都用頂點法比較不會弄錯。