國立中山大學教育研究所

碩士論文

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Master Thesis

兩種不同表徵對於國二學生數學解題之探討—以「一元二次方程式」為例

A study on problem solving in quadratic equations with different representations

研究生：劉永政

Yong-Zheng Liou

指導教授：梁淑坤 教授

Dr. Shuk-kwan S. Leung

中華民國 104 年 7 月

July 2015

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士班

研究生劉永政（學號：M012040007）所提論文

兩種不同表徵對於國二學生數學解題之探討-以「一元二次方程式」為例

A study on problem solving in quadratic equations with different representations

於中華民國 104 年 07 月 23 日經本委員會審查並舉行口試，符合碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 姚如芬 ______ 委　員 梁淑坤 ______

委　員 李旻憲 ______ 委　員 ______

委　員 ______ 委　員 ______

指導教授(梁淑坤) ______(簽名)

國立中山大學博碩士論文公開授權書

etd-0703115-131524

2015-08-04 13:13:48

本授權書所授權之論文為授權人劉永政在國立中山大學 教育研究所 103學年度第2學期取得碩士學位之論文。

論文題目： 兩種不同表徵對於國二學生數學解題之探討─以「一元二次方程式」為例

指導教授：梁淑坤 博士

注意事項：

1. 依本校102年1月9日101學年度第1學期第10次行政會議通過，研究所畢業生可於上傳電子論文時自行選擇紙本及電子檔開放年限。
2. 因專利申請涉及論文公開時間，為避免因喪失新穎性而無法申請專利，請各位老師及同學上網參考「**專利各項申請案件處理時間表**」(網址路徑：經濟部智慧財產局→專利→專利情報通→專利處理時限)後再選定論文公開時間。
另有關著作權相關資訊，請參考「經濟部著作權專區」(網址路徑：經濟部智慧財產局→著作權)。
若尚有任何專利申請與著作權等相關問題，歡迎洽詢本校產學營運中心智財技轉組，分機2626。
3. 授權書一式兩份，經本人及指導教授共同簽名後，將論文公開授權書裝訂於審定書之後，辦理離校手續時，除繳交一本論文至圖書館外，另一本繳交至教務處註冊組。

·**電子檔：** 此項授權同意以非專屬、無償方式授權予本校圖書館，不限地域、時間與次數，以微縮、光碟或數位化方式將論文全文(含摘要)進行重製，及公開傳輸，亦授權讀者非營利使用線上檢索、閱覽、下載或列印。

☑ 立即公開傳輸數位檔案。

☐ 因特殊原因，校內請於___年後公開，校外(含國家圖書館)請於___年後將論文公開或上載網路公開閱覽。

※ 論文電子檔公開日期：校內民國104年08月03日，校外(含國家圖書館)民國104年08月03日。

·**紙本論文：** 此項授權同意以非專屬、無償方式授權予本校圖書館，不限地域、時間與次數，以紙本方式將論文全文(含摘要)進行收錄、重製與利用；於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行閱覽或列印。

☑ 同意立即公開。

☐ 因特殊原因，緩議後公開，請於___年後公開閱覽。

※ 紙本論文公開日期：民國104年08月03日。

授權人：劉永政

學 號：M012040007

授 權 人：劉 永 政 (簽章)

劉永政

指導教授：梁淑坤 (簽章)

梁淑坤

中華民國 104 年 8 月 4 日

※ 此授權書嚴禁塗改

若欲修改權限，需登入系統修改後重新列印此授權書。

若論文已審核通過，請聯繫etd@mail.nsysu.edu.tw或校內分機2452，修改後重新列印並簽章。

授權書將自動列印兩份，請於圖書館和教務處辦理離校手續時，各別與紙本論文一併繳交。

謝誌

我離家往高雄求學的這段日子中，學習到了不少東西，有教學上的、做人處事上的、態度上的...等，這一些都是我在中山大學所學習到的東西，雖然我沒能全盤體會，但我可以感覺的出來教育所是一個溫暖的大家庭。

接下來要畢業了，最感謝的就是梁淑坤老師對我的教導，我從梁老師身上看到了老師應有的風範以及對教學的熱忱，對我而言，梁老師就像是我在高雄的一位媽媽，總是對我很關心，也很照顧我，梁老師是我終身學習的良好典範。此外，也非常感謝兩位口考教授姚如芬老師以及李旻憲老師，謝謝兩位老師的鼓勵與建議，使得論文撰寫能夠更佳地完善。

除了師長之外，還有很多人是在我的身邊支持著我，像是采姿、雲卿、祥雲、玟錚、許多學長姊以及學弟妹，在你們的身上，我都看到了我該向你們學習的地方，祝福你們未來可以一切順利，也祝福梁老師身體健康、永保安康。

我想感謝我的家人們以及未來的家人宜芳，有你們在我背後的支持，是給予我前進的動力，我對於你們的感謝無法一一說明，留到我用行動說明吧。

摘要

本研究在探索國二學生在一元二次方程式兩種表徵(圖文題、文字題)題目之間的解題以及解題歷程的關係。研究者所採用收集解題資料的工具是參考某出版社命題修改形成 (共 6 題)，由 43 位學生作答(23 人文字題、20 人圖文題)；另外，收集解題歷程資料的工具同樣參考某出版的一道題再修改。晤談的學生是由 43 位做解題試卷中所挑選出來的六位學生(圖文題 3 人；文字題 3 人)。經進行研究資料分析，解題情形，報告出總分及 6 道題學生逐題作答差異。另外，解題歷程資料分析，係依晤談逐字稿轉譯後討論 Schoenfeld 六階段的時間分佈及百分比。研究者比對結果分析資料(紙筆、晤談)後，為兩種表徵解題、解題歷程關係寫下發現：

1. 解題方面，總分(60 滿分)的低分組(0-9；10-19)，文字題學生人數百分比超出圖文題。逐題得分方面，兩種表徵的成績分差異因題目不同而不一定。

2. 歷程方面，學生在圖文題所花的「閱讀」時間比學生在文字題所花的「閱讀」時間少；「分析」時，圖文題相對文題會高於一半的分析時間。至於總共所需時間，圖文題的學生所花的時間比文字題的少。

3. 關鍵詞：數學解題、表徵、一元二次方程式

Abstract

This study investigates grade 8 students solving quadratic equations in two representation formats (word problem with diagram, word problem) and relationships to problem solving and problem-solving process. The investigator developed instruments for collecting data on problem solving by referring and revising to materials from one textbook series, resulting a set of 6 problems. A total of 20 students solved word problems and 20 solved word problems with diagrams. When collecting data on problem-solving processes the investigator used one textbook problem (revised into 2 formats) then interviewed 6 students (3 solved word problem with diagram, 3 solved word problem). The investigator reported findings on total score and results on each of 6 problems, then results on the comparison on processes using percentage of time in Schoenfeld's Six Problem-Solving Stages. Results are as follow:

1. On problem solving, results on total score revealed that the percentage of students (Word) is higher than the percentage of students (Word with Diagram) for lower score groups (0-9; 10-19 out of 60). For results on individual problem, the direction of difference on two formats was different among problems.
2. On problem-solving processes, and according to Schoenfeld, when Word-with-Diagram compared to Word; students spent less time me on Reading Stage; more on Analysis Stage, and also less time on total time used in solving.

Keywords: Mathematical problem solving, representation, quadratic equations

目錄

圖目錄

表目錄

第壹章、緒論

本章一共分成五節，分別為「研究動機」、「研究目的」、「研究問題」、「名詞釋義」以及「研究限制」。

第一節、研究動機

數學是一門十分有趣的學科，不只能從學校中學到，在平常的生活上也處處都存在著數學的影子。數學的學習就如同人生一樣，人人都有夢想，為了要達到自我夢想，可以經由不同的路徑去得到目標。

在此道路上，有不同的路口有不同的選擇，學習者可以向左、向右甚至直行，不同的路徑會帶來不同的過程，也代表著看到不同的風景。人生就是這樣經由不斷的選擇，嘗試不同的過程，在這過程中，或許會發現別有洞天的美景。但數學更美妙的地方是不管選擇哪一條路，只要路是正確的、合理的，皆能到達目標並且在越崎嶇的道路上，越可以預期將會得到甜美的收穫。

在國中學生的求學道路上，會走過一段從具體思維邁向抽象概念的重要階段，而代數所表現的包含抽象的概念，也是國中數學的重點，在這階段關係著不只是國中階段而已，也對於以後高等教育學習有著不可抹煞的重要性。例如：一元二次方程式在代數體制中有著承先啟後的重要地位，它具有抽象的思維但至少還在二維平面上，不算是太

困難的部份，並且具有所有的解法可供參考，基於這點，研究者認為有必要去分析在一元二次方程式的單元中，國二學生是否掌握老師所要傳遞的學科知識。

到底學生是否掌握此學科知識，可透過一些考試來求答案。而在學生求學的過中，往往與考試緊密相連著，包括國二學生在學習一元二次方程式單元時是不可否認的，在現今的教育體制下考試是檢測學生學習成效的唯一途徑，而學科中的學習成效所包含的意義，不只是一個數字而已，而是學生在接受教育時的吸收程度，吸收學科知識多的學生不一定學習成效比較好，但吸收學科知識少的學生學習成效一定比較差，並且容易將心思放在校園以外的環境中，這對於學生的學習歷程將造成一定量的影響。但在檢測學生學習成效下，往往忽略了學生的解題歷程。近年來已經有許多學者看重的不是評量結果，而是學生解題的歷程，而在學生解題的歷程中，往往會受到題目表徵的干擾，尤其是應用題，在現今的考試題目中，有些題目有附圖，有些則否，而學生的作答在題目圖示與否是值得探討的。

研究者認為圖示具有文字上無法說明的特性，學生可經由圖示來瞭解題目的意思，基於研究者相信人的獨特性，因此，具有圖示的題目至少提供兩種知識傳遞的方式(1：文字表徵；2：圖文表徵)，學生在具有圖示的題目可能會表現比較好。但有些題目卻不具有圖示，這並不代表不需要圖示來輔助說明，而是出題者只提供一種知識傳遞的方式，如此的出題方式會對學生造成影響嗎？有圖示、無圖示是更好

還是更差？研究者對此看法具有高度興趣。因此研究者藉由探討題目表徵及解題歷程之間的關聯性來預期學生在學習成效上的差異。

第二節、研究目的

一、探討國二學生在兩種不同表徵(文字題、圖文題)與紙筆測驗卷解題結果的之關係。

二、探討國二學生在兩種不同表徵(文字題、圖文題)與數學解題歷程結果晤談之關係。

第三節、研究問題

一、國二學生在兩種不同表徵(文字題、圖文題)於紙筆測驗卷解題之結果之關係為何？

二、國二學生在兩種不同表徵(文字題、圖文題)與數學解題歷程結果之關係為何？

第四節、名詞釋義

一、兩種表徵題

Lesh (1987)有題出五種表徵，包括「實物情境、具體操作物、圖畫、口語符號以及書寫符號」,在本研究中,只用圖畫與書寫符號。兩種表徵題係指文字題與圖文題。文字題即為一般的應用問題，只包含文字部份。至於圖文題,它與文字題包含的文字內容是完全相同的,但附加圖示來表示文字題中所包含的內容。

二、解題

研究者收集學生施測之後的紙筆試卷將解題分為三部分,分別為列式、計算過程以及答案，這三步驟；第二部份為學生作答研究者所設計的六到應用問題

三、解題歷程

本研究的解題歷程係參考 Schoenfeld（ 1985)所提出的數學解題歷程六階段時間序列圖(閱讀、分析、探索、計畫、驗證以及遷移)來呈現學生的解題歷程晤談內容。

第五節、研究限制

因研究者應用題型以及地點的不同，提供兩點限制：

一、本研究的數學題目類型為一元二次方程式的應用問題，其研究結果並不一定適宜推論到其他類型的題目上。

二、本研究只以高雄市某一所國中的國二為樣本，其結果並不一定推論全國所有國二學生上。

第貳章、文獻探討

本章一共分為四節，第一節為何謂數學解題、第二節是數學解題歷程、第三節是表徵的相關概念以及第四節一元二次方程式的相關研究。研究者探討以上有關文獻，做為本研究的依據。

第一節、數學解題與解題歷程

國內九年一貫的數學課程目標中明定培養學生獨立思考與解決問題的能力，其中數學課程綱要也強調問題解決就是運用個人先前以具備的經驗、知識、技能和瞭解(教育部，2003)，去思索、探索、推理，到新的或不熟悉的情境，去尋求解答的歷程。NCTM (美國數學教師協會)在 1980 年 Agenda for Action 中認為問題解決(problem solving)必須是學校教學的重心，且於 1989 年在其出版的中小學數學課程及其評量標準中第一項亦指出「數學即解題」(Mathematics as problem solving)(NCTM , 1989)，認為數學教育應該培育學生數學解題能力，使其有能力應用所學的數學知識和計算能力去解決身邊所遇到的問題，成為數學解題者。

Lester (1980)認為數學解題是指一個人面臨一種沒有算式可以獲得答案的數學情境，而個人必須使用先前已具備的經驗、知識、技能與瞭解，去探索、探究、推理，以滿足未能解決的陌生情境需求。

美國的 Kilpatrick (1985)指出「所有的數學都是數學家們在形成

數學問題及解題的過程中所創造出來的。」他曾以三個不同的觀點來描述數學解題的定義：

一、心理層面

數學解題常被定義為一個情境，在此情境中，解題者想到達目標，但通往此目標的路徑無直接到達的方式，因此而產生問題，為了解決此一問題，於是需要尋求答案，而在尋求答案的過程中，需要用到一些數學概念、原理及方法等，亦即把解題看成「解題者為了達到某一目標而做的一些活動。」

二、社會—人類學的層面

把一個數學問題當作是老師給學生的一項課題，學生在接受此項課題時與老師產生微妙的互動，師生雙方根據自己所關注的焦點，而互相解釋對方的行動和意圖，及從自我觀點出發解釋對方的觀點。

三、數學及數學教育層面

將數學問題當作是數學建構基模的來源及數學教學的工具，亦即透過數學解題的教學與學習，學生可以建構自己的數學知識。所以數學解題是讓學生搭起數學鷹架的重要工具。

同樣的，國內近來數學教育改革也以數學解題為方向，現行的九

年一貫的數學課程綱要就將「獨立思考與解決問題」列為十大基本能力之一(教育部，2003)。由此可知，數學解題在數學教育占有極其重要的地位。

數學解題是數學教育的原始目標，那麼什麼是解題？以下列出關於解題的一些專家學者所提出的理論與見解：

認知心理學家 Piaget 把一個人從新生直到成年人的認知發展大致分為四期：感覺運動期、前運思期、具體運思期、形式運思期。

Piaget 認知發展理論的最後一個時期是形式運思期，通常是 11 歲之後以至成人。這個時期的青少年的思維不再受限於必須以實際物體為起點，而可以用各種抽象的形式做各種假設性的思考，同時思維方式也更加合理化與邏輯化，而可以更加不受限制地去想像各種假設情況下的理想狀況等等也讓他們面對這世界時，會比兒童期有著更多的理解狀況與看法。

大抵而言，青少年進入形式運思期之後，其思維方式會有以下比較大的明顯改變。

(一)、可以做完整的假設與推論；

(二)、可以做虛擬的命題思考。

而現今的國中學生年齡約莫 12 歲到 15 歲已經進入 Piaget 所提出的形式運思期，因此對於現今國中生是否到達 Piaget 所提出的形式運思期值得我們去探討。

為了探討 Piaget 所說的(一)可以做完整的假設與推論，我們有必要知道解題者在解題的認知過程發展，接下來，參考 Polya (1945)、Lester (1980)、Schoenfeld (1985)等十一位學者對解題歷程的論說。論述如下：

一、Polya 的數學解題歷程模式

Polya (1945)是最早有系統提出解題策略的學者，他在其所著「如何解題」(How to solve it)一書中，強調解題的重要性，並將解題歷程分為四個階段：

(一)瞭解問題(understanding the problem)；

(二)擬定計畫(devising a plan)；

(三)執行計畫(carry out the plan)；

(四)回顧答案(looking back)。

其解題歷程四階段說明如下：

(一)瞭解問題

1.解題者必須瞭解「未知數是什麼？」、「已知數是什麼？」、「有什麼條件？」、「要確定未知數，條件是否充足？不夠或者夠多？或者矛盾？」。

2.劃一個圖，引入適當的符號。

3.解題者是否可寫下條件的各個部份？

(二)擬定計畫

找出原有資料和未知數之間的關係，如果找不到，要考慮如何輔佐以去解決，解題者應該有解決問題的計畫。

1.解題者以前看過這個題目嗎？或看過類似但以不同形式表達的題目嗎？

2.解題者知道與這個問題有關的問題嗎？知道解題可用的定理嗎？

3.注意未知數！嘗試去想一個有相同或者類似未知數的熟悉問題。

4.解題者能重述問題嗎？是否能用不同的方式來重新描述它？

5.如果解題者不能直接解這個問題，先嘗試從一些相關的問題著手。解題相似或類比的問題？或是否能解這個問題的一部分？解題者能

從已知的條件導出有用的結果嗎？若只保留已知條件的一部分，這樣對於未知數能確定到什麼程度？能考慮其它已知數來決定未知數嗎？解題者可以怎麼改變已知數與未知數？如果必要的話，兩個都改變，則新的未知數會和已知數更接近嗎？

6.解題者使用所有的已知數了嗎？使用所有的條件了嗎？解題者是否已經考慮過與這個問題相關的所有充要概念嗎？

(三)執行計畫

執行計畫並檢查每一個步驟。解題者能清楚地確定每一步驟都正確嗎？解題者能證明每一步驟都正確嗎？

(四)回顧答案

1.解題者能檢驗答案或驗證解題過程嗎？

2.解題者能用不同方式導出這個結果嗎？或能將這個結果或方法應用到別的問題嗎？

二、Lester 的數學解題歷程

Lester (1980)以六階段來描述數學解題歷程，並強調這六階段是不同但卻互相關聯的。說明如下：

(一)察覺問題(problem awareness)

解題者所面對的情境，能瞭解解題困難的存在並察覺這是一個問題，並且有意願解決問題。如果學生沒有意識到困難或者是沒有解題的意願，這整個歷程是毫無意義的。此時解題者必須瞭解：

1.在問題中相關及非相關的訊息是哪些？

2.瞭解訊息間的關係嗎？瞭解所有項目的意思嗎？

(二)理解問題(problem comprehension)

此階段發生於當學生開始對這個問題產生感覺(making sense out of the problem)時。這個階段包含兩個子階段：

1.轉譯(translation)：解題者將問題所提供的資料轉換成對自己有意義、可以理解的字句。

2.內化(internalization)：解題者提取相關訊息並分類，且判斷彼此相關的程度。

很重要的是，在這個階段解題者會形成內在的問題表徵(an internal representation of the problem)，此表徵會隨著解題者在一步步尋找解答的過程中，從起初的不穩定到之後的穩定性提高。

(三)目標分析(goal analysis)

對於某些題目適合建立子目標，有些則否。而子目標的確認也包含問題組成的部分確認，通常有助於問題理解與解題歷程發展，也便於應用熟悉的策略與技巧。此階段解題者將訊息歸類，並做成細目，而進而去認清問題的結構，以便更進一步去瞭解問題的成份，是否滿足以下的條件：

1.有任何子目標可以幫助達成目標嗎？

2.這些目標有一定的次序嗎？

3.這樣的次序編排正確嗎？

4.有正確認清問題的運算條件嗎？

(四)計劃發展(plan development)

計畫發展包括了辨識更多可能性的策略。解題者擬定一個可行計畫、清楚可行的策略，將子目標編列程序和詳細運算。解題者要能瞭解解題進行的程序與方法，而這個階段常常是學生感到困難的部份，因為學生常常無法去組織它們的思考以及計畫。因此解題者應注意下列事項：

1.是否有其它的方式可以解這個問題？

2.有更好的方法嗎？

3.是否曾經解過類似的題目？

4.這樣的計畫能達成目標或者是子目標嗎？

(五)執行計畫(plan implementation)

解題者執行擬定的解題計畫。執行錯誤的可能性會產生混淆的情境，有時解題者會因為簡單的計算錯誤而無法找到正確的模式。因此解題者必須注意下列的事項：

1.使用的策略正確嗎？

2.計畫的步驟順序正確嗎？還是能使用不同的順序？

(六)程序和解答評估(procedures and solution evaluation)

此階段不僅要檢查答案是否有意義，而且從目標分析到發現解答的解題歷程做系統性的評估，此皆屬於這一階段。因此解題者應該注意下列的事項：

1.解答是否符合問題的條件？是否具有一般性(generalization)？

2.解題者所學的是否能幫助解題者解決其它的問題？

(三)Schoenfeld 的數學解題歷程模式

Schoenfeld (1985)在解題歷程中，以控制因素的觀點，將解題歷程區分成：1.閱讀；2.分析；3.探索；4.計畫；5.驗證；6.遷移六個階段。他將解題歷程分為上述的六個階段，從巨觀的原案分析可以看出解一道數學問題時，花多少時間在每一階段上，以及階段之間的轉移情形。以下以表 2-2-1 表示之。

表 2-2-1　Schoenfeld 解題歷程六階段細目

Schoenfeld 解題歷程六階段	解題相關問題
一、閱讀(reading)	1.注意到所有問題嗎？條件是明顯的？或是模糊的？ 2.正確了解目標狀態嗎？目標狀態是明顯的？或是模糊的？ 3.是否評估解題者現有的知識與問題之間的關係？
二、分析(analysis)	1.選擇什麼觀點？此選擇是明確的或者是不明確的？ 2.採取的行動是否根據問題的條件？ 3.採取的行動是否朝向目標？ 4.條件和目標有何關聯？ 5.解題者的行動合理嗎？
三、探索(exploration)	1.本階段的問題是條件引起的？或目標引起的？ 2.所採取的行動有方向或重點嗎？行動有目的嗎？ 3.有無監控行為？監控行為的有無對解答的結果有無影響？ 4.解題者所採取的行動是否合理？

Schoenfeld 解題歷程六階段	解題相關問題
四、執行計畫(planning implementation)	1.是否有計畫行為？ 2.計畫與解題有關係嗎？是否適當？是否有良好的架構？ 3.學生是否評估計畫的相關性、適當性以及結構性？ 4.執行時是否有依循計畫有系統的執行？ 5.是否在局部或整體層次評估執行？ 6.評估有無對結果產生影響？
五、驗證(verification)	1.解題者是否重新檢查答案 2.有無考驗解答？或有的話，將如何考驗？ 3.有無對歷程及解答評估？對結果的信心如何？
六、遷移(transition)	1.對解題當前的狀態有無評估？若放棄一種解題途徑，是否有利用其中有用的部份？ 2.有無評估之前放棄的解題途徑？對解題局部或整體影響如何？所採取的行動適當且充份嗎？

	3.是否評估採取新解題途徑的任何影響？或直接跳入新途徑？ 4.採取新途徑有無評估所有影響？行動是否適當且充份？

Schoenfeld (1985) 提供研究者一種呈現解題例歷程的方法，稱六階段時間序列圖，被國內外者研究者使用。例如：李昱葳(2015)

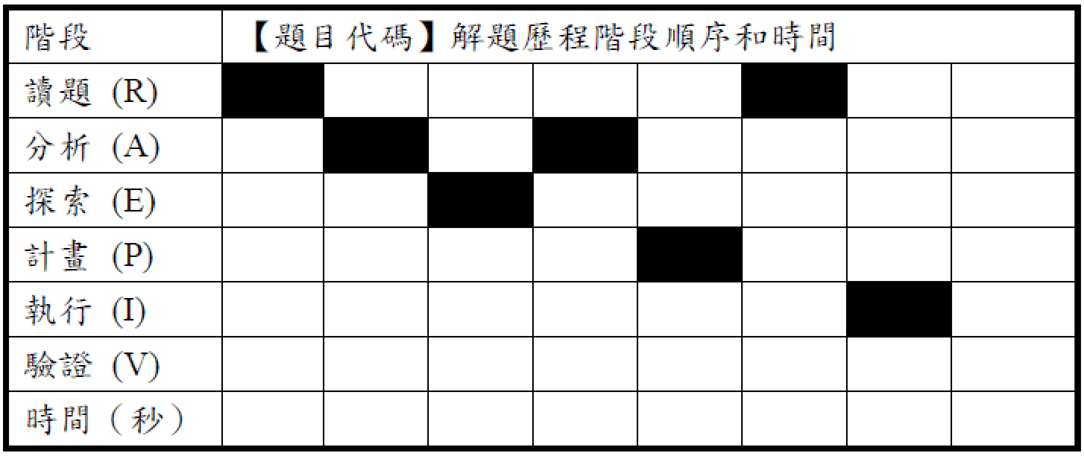


圖 2-2-1　Schoenfeld (1985)六階段時間序列圖

(四)、美國數學督導協會(NCSM，1977)定義解題為運用個人已有的知識到一個新的或不熟悉的問題過程。

(五)、Greeno (1987)解題是依賴解題者記憶中，如何表徵訊息、如何提取訊息及如何運用到問題的情境中。

(六)、Davis (1984)解題是由形成問題表徵，以及對該表徵進行分析等兩個幾乎同時發生的歷程所構成。

(七)、Kilpatrick (1985)從心理學層面而言，數學解題常被定義一個情

境，在此情境中某人想到某一目標，但直接通往此目標的路徑已經被阻塞，因此產生問題。

(八)、黃敏晃(1991)解題是解題者如何把自己從困境中解脫出來的過程。

(九)、Mayer (1992)就認為「問題」有三項特徵：(一)、已知狀態：說明已知條件或情境、(二)、目標狀態：說明欲達成的目標、(三)、障礙：無法立即通往正確答案的阻礙。

(十)、張春興(1993)將問題定義在問題的情境，經由思考與推理而達成目標的心理歷程。

(十一)、胡炳生(1994)在『數學解題思維方法』一書中提到所謂的解題方法應包含三個層次的內容：

1.課本上所列的常規數學題的具體解法和技巧。如一元二次方程式求根公式解法、幾何中做輔助線的技巧等。

2.課本上提及的但未展開的數學解題『通法』，如分析法與綜合法、反證法、幾何問題解析證法等。

3.解題的一般思考原則和總策略，及熟悉化原則、簡單化原則、多樣化原則及規劃策略。

綜合上述的學者所下的定義，解題的過程就是將題目所給予的狀態經由我們所內化的先備知識去引導出正確答案的過程。

第二節、表徵的相關研究

一、表徵的意義

「表徵」(representation)是認知心理學的研究領域中相當重要的概念，因為認知心理學研究的重點在探討人類如何將原始訊息經由表徵歷程的轉換後，將資訊儲存於記憶中，又如何於需要時取回使用(張春興，1988)更進一步瞭解人類如何知道它所處的環境，並以某種形式來代表它所知道的事物（游自達，1995）。

表徵具有兩種意義，一是代表和傳遞某種訊息，二是代表內在的心理結構。就問題解決的層次而論，好的表徵有助於問題解決，而不當的表徵則會妨礙問題的解決。因此問題表徵適當與否，將會影響數學問題的解題成功與否。

因為表徵是一個相當重要的概念，各學者對於「表徵」的定義也有不同的定義，在心理學上，表徵指的是「將外在現實世界的事物以另一種較為抽象或符號化的形式來代表的歷程」或「訊息處理過程中，將訊息經譯碼(coding)後，轉換成另一種型式，以便儲存或表達的歷程」(張春興，1988)。在數學認知心理學上，所謂「表徵」系指物體以及他們之間關係的符號描述（蕭龍生，1993 ）。

此外，「表徵」與數學學習關係密切的另一因素，便是「多義性」。所謂的表徵「多義性」是指同一數學知識或概念均可用多種不同的形

式加以表徵，原有的數學概念並不受外在表徵型式的變化所影響，例如：「一」、「1」、「壹」、「one」雖是不同的表徵符號，但卻代表著相同的數學概念。

二、表徵的分類

Bruner (1966)認為透過「動作表徵」、「形象表徵」及「符號表徵」等三種表徵的方式，兒童可以從過去的經驗提取保留下來的經驗模型，以認識當前的刺激或將當前的刺激收納至過去的經驗模型。動作表徵只靠動作認識外界的刺激，以動作、操弄等方式對於外在環境的認識，尤其當某種知識很難藉由文字、語言、圖表進行教學時通常需要藉由動作表徵為之，例如：單位分數內容物多寡的問題，若能經由實際的做數活動應能讓學生更清楚瞭解。

形象表徵則是以記憶中的心向做為運思的材料，它是以經濟有效的方式管理知覺組織，將它有系統的納入過去經驗模型，例如：學生經由過去所學的一元二次方程式觀念套用在一元二次方程式上，並且有系統的做取捨。符號表徵則是以抽象的文字符號進行運思，例如：將未知數用 x 來取代運算中的未知元素。事實上，符號本身是一種人為的、抽象的、規約化的文化產物，若欲流暢的使用符號得必須先經過社會化學習。

除了形式化的數學符號之外，有一些非型式化的表徵也可做為幫

助數學思考的工具，Lesh , Post 和 Behr (1987)用溝通的觀點描述了五種表徵的類別，包括實物情境(real—world situations)、具體操作物(manipulative aids)、圖畫(pictures)、口語符號(spoken symbols)、以及書寫符號(written symbols)。

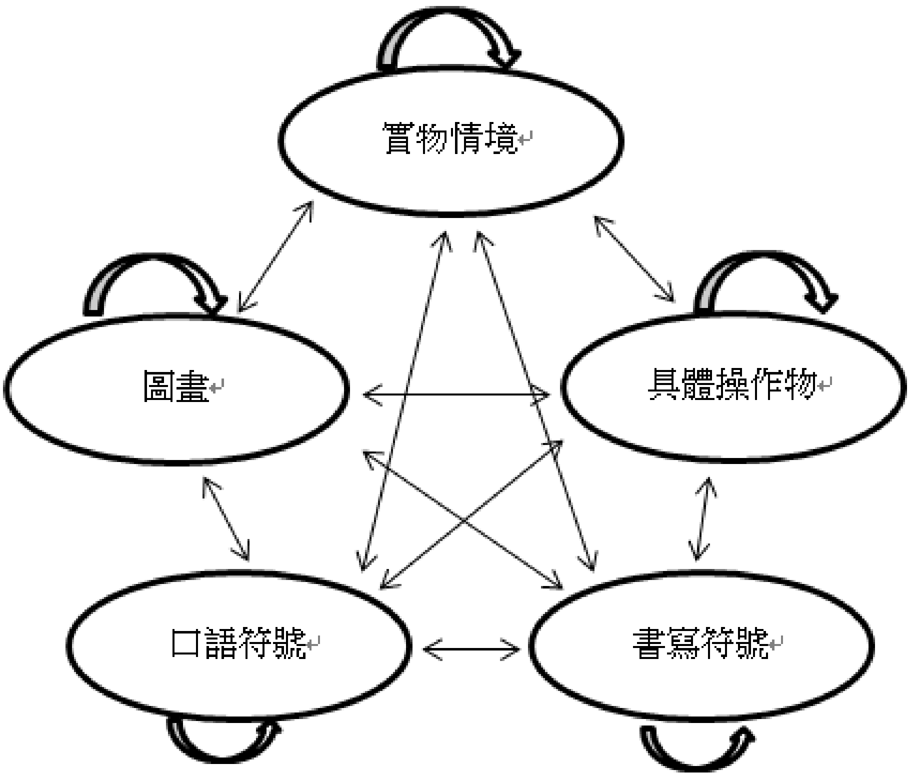


圖 2-3-1　表徵系統互動模式

Lesh 等人(1987)強調此表徵系統互動模式不僅五個元素都很重要，表徵之間的轉譯和同一個表徵內的轉化亦同等重要。換言之，不只構成的元素重要，元素與元素間的動態關係亦至為重要。

表徵系統互動模式的五種表徵雖然都是可以讓外人察覺，但蔣治邦（1994）認為圖像和符號的運思是內隱活動，在評估時需要透過「再次呈現」才能溝通。換言之，將這兩種表徵都必須在教學者的要求下，學習者才可能利用再表現的方式呈現出來。

因為表徵具有「多義性」的性質，在數學活動中，表徵扮演著兩種角色：運思的材料與溝通的媒介，所以表徵是個體運思與溝通的重要工具。而關於表徵的研究相當多，多位學者(Bruner , 1964；Lesh , 1987；Kaput, 1987)分別依三種不同的角度：運思的材料、溝通的媒介及認知的歷程將其分類，綜合以上學者們的想法，可以將以上三大類的表徵型式整理如下表 2-3-1。

表 2-3-1　三大類的表徵型式

不同的分類者	由「運思的材料」分類	由「溝通的媒介分類」	由「認知的歷程」分類
分類者	Bruner（1964）	Lesh、Post & Behr（1987）	Kaput（1987）
分類方式	1. 動作的 2. 圖像的 3. 符號的	1. 實務情境 2. 具體操作物 3. 圖畫 4. 口語符號 5. 書寫符號	1. 認知與知覺的表徵 2. 解釋性的表徵 3. 數學內的表徵 4. 外在符號的表徵

(楊敦州，2004，頁 9)

另外有研究（陸正威、王惠豐，1999）指出高解題能力者，是由語言表徵轉換到意像表徵(如圖形、心像)，才轉換成型式(符號)表徵。至於低解題能力者，由於無法順利將語言轉化為意像，所以無法引發更高層的解題思維，影響了解題的能力。涂金堂(2002)也指出解題者對於數學文字題所產生的問題表徵品質，會影響解題成功的與否。

三、不同題目表徵之間的差異

由於表徵是運思的材料，若能透過不同題目表徵型式的輔助，幫助學生理解問題描述，改善學生解題時的工作記憶負荷，對其解題表現將有所助益(Juhani , 1995)。於是將表徵分為圖像表徵、符號(文字)表徵兩方面，因此就圖像表徵、符號(文字)表徵的差異做探討。

圖示法是外在表徵最常被應用的策略(杜佳貞，1999)。有些學者認為圖示具有整體性與具體性，可以幫助學生形成恰當的表徵，豐富其數學概念，增進解題表現(Bishop , 1989；Webb & Sherrill ,1974)。

對概念學習而言，圖形通常蘊含大量訊息與概念內容，另具描繪與事物有關的空間及視覺特性、整合與補充課文內容……等性質，換言之，圖形表徵為協助學生從教材中快速了解及建構的有效工具，反觀口語訊息則較難說明概念的整理架構，需用複雜與大量語法或文字方能詳盡說明。

對教學而言，雖然圖形表徵具有上述的優點，但使用之際需考量學生的認知負荷，以免使用不當造成干擾或誤導，加上目前許多教科書並非極力極度重視文本內圖形的呈現(Schnotz & Bannert , 2003)，因此圖形表徵的使用雖具提升教學成效的潛力，但若使用不當亦可能出現反效果。蔡興國、陳錦章和張惠博(2010)亦指出若學生對於抽

象圖像表徵的學習有困難，應鼓勵學生退回圖像表徵，充分瞭解情境之後，在進入抽象圖像表徵。

然而 Clement（1981）認為圖示法對於學生在形成有效的問題表徵上是無助益的，甚至會造成學生概念抽象化的困難。以下就「訊息呈現」與「訊息解讀」兩方面來比較：

（一）、訊息呈現方面：

使用圖畫型式加上簡單的文字說明，在訊息的傳達上較為精煉，容易引發學生的解題興趣。相反的，文字型式在訊息的傳達上就較為繁雜，或許因此造成學生在閱讀理解上的困難(張欣怡，1997）。

（二）、訊息解讀方面：

個體讀取文字訊息時，必須從頭開始閱讀與搜尋相關的訊息，然後儲存於記憶中，之後周而復始的搜尋下一個訊息，直到解題需要的訊息都到齊為止。反之，在圖畫題中，通常找第一個資訊，解題者就容易在鄰近的地方搜尋到其他所需要的訊息資料（Larkin & Simon，1987）。

表 2-3-2　文字與圖畫表徵的差異

表徵型式	文字	圖畫
差異性	1.需要較多的說明，因此內容較繁多。 2.可使用單一表徵方式(文字)來呈現訊息。 3.關係是隱示的。 4.訊息間的連結是較不緊密的，即下一個資訊並非儲存在下一個敘述中。	1.訊息表較為精煉，因此內容較為簡單明瞭。 2.可以利用各種符號表徵方式，如圖畫和符號，來呈現訊息。 3.關係是明確的。 4.資訊間的連結較為緊密，即下一個資訊可能儲存於鄰近的位置。

(邱欣慧，2008，頁 26**)**

因此有學者(Moyer et al., 1984)認為圖像表徵在數學的學習上優點如下。

（一）、減少與閱讀有關的工作記憶。

（二）、幫助學生回憶類似記憶，建立適當的問題表徵。

（三）、鼓勵學生投入理解題意。

（四）、使曖昧不明的題意更明確，彌補文字資料的不足。

而在文字題部份，Wagner（ 1981a ）於第五屆數學教育心理學會（PME）中提出一個探究學生對於「文字符號」概念理解的分析架構，他認為文字符號在數學中有許多使用方式，依據它們出現的情境和所指的元素，有不同的名稱(如未知數、一般數、不定數、常數等)。

在數學文字符號中，符號和指示對象決定其語意角色；而符號和情境決定其語法角色。陳彥廷與柳賢(2009)依此觀點並綜合Kuchemann (1981)與九年一貫課程綱要，建構一個七年級代數式中文字符號語意、情境的架構。架構中，文字符號的語意角色包括「特定數」、「特定未知數」與「一般數」三個類別；而文字符號的情境則分為「多項式」與「方程式」兩個類別，每一類別下又分為「一元一次式」與「二元一次式」等子類別，而每一個子類別下又有「列式」、「單一運算」、「混合運算」以及「代換」等細項。

郭汾派、林光賢與林福來（1989）指出，文字符號在代數解方程式、應用題等題材上都需被使用，是重要的數學概念。而美國數學教師協會（The National Council of Teachers of Mathematics［NCTM］, 2000）在《學校數學課程與評鑑標準》亦將對文字符號的理解，作為5～8 年級的數學教學目標。可見，文字符號在代數的學習佔有重要的地位。

Collis（1975）將學生對文字符號的理解分為「視文字符號為一個數字」、「視文字符號忽略不用」、「視文字符號為一個物件」、「視文字符號為一個特定的未知數」、「視文字符號為一般數」以及「視文字符號為一個變數」等六個類別。八十年代起，CSMS 團隊依據 Collis（1975）的研究，探討英國青少年對代數文字符號的理解（Booth , 1984 ; Hart , 1980 ; Kuchemann , 1981）。他們發現，13 歲與 15 歲學生的表現並不理想。

學者（Booth ， 1988 ）陸續針對學生的錯誤概念提出報告。例如，學生會將文字符號當成具體實物或具體實物的標記(NCTM，1981)；固著於文字符號的刻板性用法，不能隨著文字符號名稱改變，而作適應性解題。因此，他們認為替換不同的文字符號，會改變整個題意，而必須用完全不同的方法作答（Ernest ， 2006 ）。

Clement ，Lochhead 與 Monk(1981)也發現，學生會混淆代表實物的文字符號和代表實物數值的文字符號。可見，學生對文字符號的學習產生許多困難。

在國內，Booth 於 1987 年往國內台灣師範大學演講後，郭汾派、林光賢與林福來（1989）即修訂 CSMS 團隊所編製的試題進行本土的研究。研究指出，學生在文字符號單元容易出現錯誤。

而其他學位論文（方吉雄，2001；袁媛，1993；許正諭，2005；陳慧珍，2001；廖福彥，2002；謝和秀，2001；謝宜玲，2003；羅榮福，2003）也呼應郭汾派等（1989）與洪有情（2005）的發現。

綜合這些文獻發現，學生對於文字符號會產生「混淆代表實物的文字符號和代表實物數值的文字符號」、「將文字符號當成未知數、某數或任意數」的另有概念（謝宜玲，2003；Clement , Narode & Resnick , 1981）。

此外，相關研究從運算角度也發現，隨著（□→ x、y）的符號逐

漸複雜，及題目的情境含有較大的數值，則學生的通過率會隨之降低（郭汾派、林光賢與林福來，1989；Carpenter , Lindqist , Silver , Lester & Garofalo , 1982）。而許正諭(2005)認為學生也常發生下列情形：

（一）、運算結果表達不當。

（二）、加、乘算混淆或係數和指數錯置。

（三）、錯誤類比推廣。

（四）、公因子迷思等運算上的問題。

可見文字符號不僅在數學課程的銜接上具重要地位，學生也在學習過程中出現許多困難。

若問題的陳述內容與學生的經驗有關係，將有助於訊息的提取，減少工作記憶負荷，幫助學生在文字題的解題表現。然而，若文字題的問題長度過長，包含了較多的訊息待處理，會增加解題者在工作記憶的負擔(Barnett , 1984 & 林文生，1996)，減慢解題速度或增強解題難度。

其實，每一個表徵的系統皆不相同，因為他們強調或不強調不同方面的概念重點及建構。他們在處理相關概念、資料簡化、即在不同情境下的精簡皆不相同。舉例來說，有些圖形值一千字，有些語言則簡潔與更有效率(Lesh , Landau &Hamilton , 1983)。因此，學生在面

對圖像表徵、符號(文字)表徵兩種不同表徵系統時，其解題概念運用及解題歷程的差異，是值得探討的問題。

第三節、一元二次方程式的相關研究

一元二次方程式在代數課程佔有相當重要的地位，延續七年級方程式的概念，擴張至多項式的概念、勾股定理與方根的運算、因式分解，最後以解一元二次方程式做結束，完成國中階段的代數主題。乘法公式、商高定理以及一元二次方程式分別屬於代數主題中的幾何代數量、數量樣式，規律，解方程式等之高階關係(系統化)。這些概念的瞭解需要仰賴文字符號概念、一次式、解一元一次方程式、等量公理、平方根、數量樣式、幾何量等概念的瞭解。

相關的「一元二次方程式」單元學習，被安排在國中二年級課程中，詳細的分年細目表，如表 2-4-1 所列；

表 2-4-1　八年級分年細目表

8-a-01	能熟練二次式的乘法公式。
8-a-02	能理解簡單根式的化簡以及有理化。
8-a-03	能認識多項式及相關名詞。
8-a-04	能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。
8-a-05	能理解畢式定理(Pythagorean Theorem)及其應用。
8-a-06	能理解二次多項式因式分解的意義。
8-a-07	能利用提公因式法分解二次多項式。
8-a-08	能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。
8-a-09	能在具體情境中認識一元二次方程式，並且理解其解的意義。
8-a-10	能利用因式分解來解一元二次方程式。
8-a-11	能利用配方法解一元二次方程式。
8-a-12	能利用一元二次方程式解應用問題。

李盈賢(2006)針對高雄市某國中二年級學生，進行「一元二次方程式」的迷思概念的類型及成因的探討分析，發現在「一元二次方程式」迷思概念內容如下：(一)因式分解解一元二次方程式的基本原理不清楚；(二)不了解應用問題題意而無法列出算式；(三)完全平方式的求法不清楚；(四)一元二次方程式定義不清楚；(五)因式分解解一元二次方程式不熟悉；(六)配方法解一元二次方程式觀念不清楚；(七)無法正確用判別式判斷一元二次方程式是否有解；(八)求值式計算錯誤。

而在「一元二次方程式」迷思概念成因內容如下：(一)基本觀念建立不夠扎實；(二)學生對文字理解觀念太弱；(三)基本四則運算的能力不夠；(四)太偏重記憶而缺乏理解。

林美娟(2010)將學生所犯的錯誤答案以及錯誤觀念、統整後的類行為：

1.一元二次方程式的認識與解的概念

(1)一元二次方程式判別錯誤

(2)方程式的解或根一定能滿足方程式的應用不熟悉

2.因式分解法解一元二次方程式

(1)因式分解一元二次方程式的基本原理不清楚

(2)十字交乘分解錯誤

(3)當成多項式的因式分解

(4)等量除法公理使用錯誤造成少一個解

(5)乘法公式混淆、遺漏或遺忘

3.配方法解一元二次方程式

(1)平方根的觀念錯誤

(2)完全平方式的判斷與運用錯誤

(3)忽略等量加法公理或等量加法公理的觀念錯誤

(4)配方法解一元二次方程式步驟或原理不清楚

4.公式解解一元二次方程式

(1)判別式計算錯誤

(2)公式解的公式背錯

(3)公式解的係數寫錯

(4)無法使用判別式判斷一元二次方程式是否有解

(5)不瞭解應用問題題意而無法列出算式

(6)無法判斷答案是否合理

由於一元二次方程式在國中階段是代數的結尾部份，因此研究者

往前回歸到文字符號的相關關係以及方程式的概念，提供讀者在看本文獻時，能瞭解一元二次方程式的演進。

一、文字符號的相關認知

文字符號的使用，代表學生進入代數的學習。而代數語言在不同時期有不同表徵，而有不同意義(陳維民，1998)。因此要去研究文字符號就要去研究代數的歷史演進。

根據代數演進的研究，可將文字符號的演進發展史分為三階段：

（一)、文辭代數：

約在西元 250 年以前的這個時期，人類只能用口語形式的自然語言來表達特定方程式的使用，並無符號與特殊記號來表示未知數。

（二)、簡單代數：

到西元 250 年，古希臘數學家 Diophantus 提出運算符號之後，人們開始嘗試一些簡單的符號以及文字來代表未知數，但是只會求特定方程式的解，並無法提出一般方程式的通用公式解。

（三)、符號代數：

Vieta（ 1549—1603)提出以符號來表示某一給定但未知的數，此階段的代數方程式係數，能以文字符號表示且也能夠具有一般數字

中的算則去演算，而能求出方程式的一般解。

對數學中的文字符號，Collis（1975）從學生觀點出發將文字符號概念，分成六種不同的使用層次：

1、文字符號可輕易推導出的值：如：$x+3=4$中的$x=1$。

2、文字符號可省略不用：指文字符號雖然出現在題目中，但在解題過程中不影響計算結果，如：$x+y=43$，$x+y+2=43+2$，在此例子中，前後兩式只在後段「+2」有所不同，因此$x+y$用 43 代替相同的值而可以直接求出$x+y+2$的答案為 45。

3、文字符號當做事件：即文字符號為代表物的簡寫或註記，如：a 代表某一多邊其中一邊的長度的量而不是單純數字。

4、文字符號當做題目給定的未知數：如：一多邊形有 n 邊，而且每一邊長為 3，於是得到周長為 3n。這是可以直接運算。

5、文字符號當做可量化的數字：文字符號代表一組數而非單一數值如：c 是代表小於 5 的數。

6、文字符號當做變數：即文字符號代表一未定的數值，如：比較 n 與 2 的大小。

由上述 Collis 的分類，前三者的描述文字符號的使用，停留在具體層次。而後三者的分類，則過渡到抽象的思考模式。在方程式的概念學習，若學生對文字認知，只是停留在具體階段，固然可以解決一些簡單問題，不過若欲到結構較為複雜的問題時，則往往沒有辦法適當的使用文字符號，因此形成了解題的難度與概念的迷思。

Wanger（ 1981)研究，改變方程式及函數中的文字符號名稱，對學生具有影響的情節。他發現許多學生固著於所命名的文字符號，刻版的用法。當原有的文字符號一被改變時，甚至認為整個題意完全改變，以致影響解題的能力。由此可知學生並沒有完全瞭解文字符號在問題中所代表的意義。

Booth（ 1984)發現：學生在解代數題時，對於文字符號的定義及運算都有困難。學生通常將兩個未知數合併起來(例如 $4x+3y=7xy$)，或去掉括號。

Steinberg， Sleeman 和 Ktorza（ 1990)指出：在學習代數時，很多學生並未有正確的等價概念。多數學生學習到的是如何運用轉換來解方程式，但卻不知道方程式可用來判定兩者是否等價。

上述的學者都將重點擺在代數，接下來研究者將藉由學者們的概念只討論細化過後的方程式部份。

二、方程式

代數的另一核心就是方程式。方程式的定義如下：方程式是斷定兩個表示式具有相同值的公式，它可以是恆等方程式(identical equation 通常稱衡等式 identity)，對於任何給定的變量都成立。也可以是條件方程(conditional equation)，僅對於變量的取一定的值(方程式的根，root)才成立。在上述定義中提到的方程式的根(解)是不同表徵式中的一種共同關係，以式子而言，即滿足的數(數學辭典，1999)。

笛卡兒(Descartes)這位十七世紀法國偉大的哲學家、數學家，解析幾何的創始人說過:「一切的問題都可以轉換為數學問題，一切的數學問題都可以轉換成代數問題，一切代數問題都可以轉換成為方程式，一切問題均將迎刃而解。」，也就是說以問題解決與數學的角度來看，方程式在代數學的領域中扮演著重要的角色(Polya ，1945)。

Clement ， Lochhead 和 Monk (1981)指出：有很大比例主修科學的學生，甚至無法將簡單的句子轉換成方程式。學生解題之所以出現錯誤多半是在將文字轉換成方程式所產生，而非是簡單代數技能或簡單的比例問題。

Wollman (1981)對 Clement 等人的研究工作做進一步研究，發

現造成這些轉譯錯誤的原因有下列幾點：

（一）、做得太快。

（二）、列完方程式沒有立即檢驗。

（三）、未根據題目的意思列式。

（四）、未使用文字符號來列式。

三、配方法

謝佳叡（ 2000 ）的研究指出從學生對於方程式中如果有未知係數時，便顯得困難來看，對於公式解的推導，宜再謹慎思考適合學生學習的教學方法。在配方法的教學上，在配成完全平方的教學內容上特別強化概念性教學，至使學生在較一般化或有變化的題目中犯錯較少的現象來看，對於配方法的學習不宜太快進入程序性教學，宜適度的強化概念性教學。

陳志全（ 2005 ）針對國二學生在「用配方法解一元二次方程式」之錯誤類型、犯錯原因。結論如下：發現在「配方法解一元二次方程式」的錯誤類型內容如下：(一)方程式與多項式定義用法混淆不清；(二)無等價概念以致扭曲等量公理的運用；(三)無法配出適合及完全正確的完全平方式；(四)分數、根式、整數、文字符號個別及相互間的化簡及平方錯誤；(五)正負符號的誤置或忽略遺漏；(六)開根號與等量公理移項法則的順序錯置；(七)無法從圖形文字符號方程式作適切的轉換與聯結；(八)建立一個無法完成配方法的步驟。

而在「配方法去解一元二次方程式」的錯誤原因內容如下：(一)前備的知識不足；(二)舊的學習經驗和新的學習經驗相互干擾；(三)沒有正確的使用運算規則；(四)忽略了題目給予的條件或答案的完整性；(五)無法瞭解題目的敘述；(六)受到不同表徵題目的影響而無法做出正確判斷。

四、因式分解

對於因式分解的定義，大多大同小異。以下列舉幾位專家學者對於因式分解所下的註解：

呂溪木(1983)在「數系與因式分解」中對因式分解的定義如下：多項式的因式分解就是將一個多項式寫成其質因數的連乘積，而質因數應至少為一次多項式。

根據九十六年學年度各版本教科書數學課本第三冊對於因式分解的定義如下：(一)南一版：將一個x的二次式寫成兩個一次式的乘積就將這叫做二次式的因式分解；(二)康軒版：將一個x的二次式寫成兩個一次式的乘積，稱之為二次式的因式分解；(三)翰林版：將一個多項式寫成兩個或兩個以上多項式的乘積，就稱為該將多項式因式分解。

上述的幾位學者對於因式分解都是以多項式當做出發點，而研究者所做的一元二次方程式的因式分解，與上述學者的定義相同，只差

在於研究者所做的討論是具有等式的方程式，而方程式的因式分解與多項式的因式分解幾乎是相同的，差異只是於將方程式做因式分解之後，必須多加瞭解到任何非 0 的數相乘皆不為 0，只要加上這個概念與上述學者們對於多項式因式分解的定義，則可稱為方程式的因式分解。

五、十字交乘法

因式分解的解題方式共有相當多的方法，但大致上可分為以下四種，研究者將一一介紹，其中第四種方式為十字交乘法，為了與上述的因式分解做個連接，研究者一併連其餘三種方法介紹。

(一)提出公因式：一多項式中各項均含有相同的因數時，採用提公因式法。

(二)分組分解：一多項式中雖然各項沒有相同的因式，但經過分組分解之後，組與組之間又有相同的因式時，採用分組分解法。分組分解法大致分為三步驟：1. 將原式的各項作適當分組。2. 分別提出每組的公因式。3. 將經過處理後的每一組當作一項，在將各項提出公因式。

(三)利用乘法公式：運用之前所習得的乘法公式，若有多項式符合其公式形式，則直接套用公式進而達到因式分解的目的。

1. 利用平方差公式： $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

多項式符合a^2-b^2的形式，則將多項式化為$(a-b)(a+b)$的形式。

2. 利用平方和公式：$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

多項式符合$a^2 + 2ab + b^2$的形式，則將多項式化為$(a+b)^2$的形式。

3. 利用平方差公式：$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

多項式符合$a^2 - 2ab + b^2$的形式，則將多項式化為$(a-b)^2$的形式。

4. 十字交乘法：十字交乘法大多運用在二次多項式上，且各項系數為整數者。使用的前提是假設二次多項式是由兩個一次多項式乘積而來，在運用多項式直式乘法檢驗假設的兩個一次多項式的乘積是否符合原多項式。

六、判別式

設方程式為$ax^2 + bx + c = 0$，a、b、c屬於實數，則稱

$\Delta = b^2 - 4ac$為判別式(discriminant of quadratic equation)。

著名科學家牛頓(1642—1727)在其《普遍的算數》中指出，判別式之等於 0，大於 0 及小於 0 分別表示，該方程式具有等根、實根和虛根。判別式是一元二次方程式中重要的算式，因為其決定了方程式解的形式，也是使用公式解方程式時第一步必須要求出的算式，由判別式出發可以討論高次方程式解的形式，進而引出近代代數的產生。所以判別式在一元二次方程式中扮演的角色相當重要。

七、公式解

巴比倫留下的陶片顯示，在大約公元前 2000 年，古巴比倫的數學家就能解一元二次方程式。在大約公元前 480 年，中國人已經使用配方法求得二次方程的正根，但是並沒有提出通用的解題公式。公元前 300 年左右，歐幾里得提出了一種更為抽象的的幾何法求解二次方程。7 世紀印度的 Brahmagupta 是第一位懂得使用代數方程，它同時容許有正負數根。11 世紀阿拉伯的花拉子密獨立地發展出一套公式以求方程的正整數解。亞伯拉罕•巴希亞在他的著作 *Liber embadorum* 中，首次將完整的一元二次方程式解法傳入歐洲。

據說施里德哈勒是最早給出二次方程的普通解法的數學家之一。但這一點在他的時代存在著爭議，這個求解的規則是(引自婆什迦羅第二)：

在方程的兩邊同時乘以二次項未知數的係數的四倍；在方程的兩邊同時加上一次項未知數的係數的平方；然後在方程的兩邊同時開二次方。

例如：解關於 x 的方程 $ax^2+bx=-c$

在方程的兩邊同時乘以二次項未知數的係數的四倍，即 $4a$*，得* $4a^2x^2+4abx=-4ac$*，在方程的兩邊同時加上一次項未知數的係數的平方，即*b^2*，得*$4a^2x^2+4abx+b^2=-4ac+b^2$*，然後在方程的兩*

邊同時開二次方，得 $2ax+b=\pm\sqrt[2]{-4ac+b^2}$ *，接下來經由移項法則以及除上 2a，則可得到公式解* $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *。*

在第三節裡，解一元二次方程式的方式有上述這五種。另外，因以上第二章所述的文獻探討解題、表徵，研究者很有興趣去探討「一元二次方程式」以及兩種「表徵」的解題有何異同。

第參章、研究方法與設計

本章共分為四節：研究對象、研究工具、研究流程、資料收集與分析。期對本研究的預試作完整的說明。

第一節、研究對象

在本研究中研究對象無論是預試、正式施測及訪談對象均為國二學生。

一、表徵測驗卷實施

(一)、預試研究對象：

第一次預試對象以台中市立某中學二年級共 28 位學生。第二次預試對象為高雄市立某中學二年級共 29 位學生。

(二)、正式研究對象：

以高雄市立某國中二年級某兩班的學生為正式研究對象，施測之前與導師做規劃。學生共 43 位(20 位圖文題；23 位文字題)

二、晤談的執行：

研究者與班級老師討論之後，班級老師將願意配合以及口語表達

佳的學生選出，因此，只選出六位學生當作正式晤談對象。

(一)預試訪談組共一位男生，名為小元，是國中二年級的學生。

(二)正式訪談組共六名女生，分別是小婷、小雅、小莉、小羽、小柔還有小盈。

研究對象剛好男生為預試組，而女生為正式組，實屬巧合，而非研究者所預設的立場。

正式研究對象：採取上學期的三次月考的數學成績，以第一名文字題、第二名圖文題、第三名文字題...以此類推的方式去分配考卷。

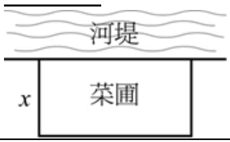
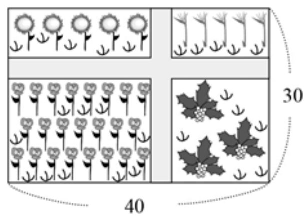
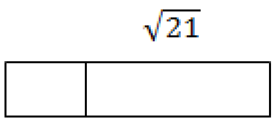
第二節、研究工具

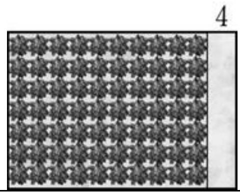
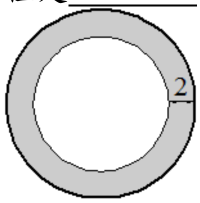
研究工具這兩份皆是一元二次方程式表徵測驗卷：文字題紙筆試卷、圖文題紙筆試卷。除了收集紙筆資料，更有收集大綱及題目一個、晤談資料。

一、正式施測工具(紙筆)

研究者參考九年一貫綱要及討論後，再設計一元二次方程式測驗卷，並考慮兩個版本；文字題以及圖文題。每分卷共 6 題，而圖文題配對的文字題，是題意相同卻沒有附圖，也不影響作答，以下是經 2 次預試以及討論修改才定稿的測驗卷。

表 3-2-1　正式施測文字題與圖文題題目

	文字題	圖文題
第一題	1. 用 100 公尺的鐵絲網去圍成面積是 800 平方公尺的長方形菜圃，此菜圃的一側長邊是河堤，不用鐵絲網去圍，並且完全圍完 100 公尺，設所圍成長方形的短邊長度為 x 公尺，則 x 值為______。	1. 用 100 公尺的鐵絲網去圍成面積是 800 平方公尺的長方形菜圃，此菜圃的一側長邊是河堤，不用鐵絲網去圍，並且完全圍完 100 公尺，設所圍成長方形的短邊長度為 x 公尺，則 x 值為______。 
第二題	2. 有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為935平方公尺，則所開闢通路的寬度為______公尺。請用"配方法”做答。	2. 有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為935平方公尺，則所開闢通路的寬度為______公尺。請用"配方法"做答。 
第三題	3. 若將正方形的其中一邊加上 $\sqrt{21}$公尺後，所形成的長方形面積為 **1** 平方公尺，則原正方形的邊長為多少公尺？	3. 若將正方形的其中一邊加上 $\sqrt{21}$公尺後，所形成的長方形面積為 **1** 平方公尺，則原正方形的邊長為多少公尺 

	文字題	圖文題
第四題	4. 有一長方形土地的長、寬比為 3：2，今從此長方形的長邊 4 公尺處垂直向下劃，直到另一長邊，開闢成走道，而走道之外的新長方形開闢成花圃。若花圃的面積為 520 平方公尺，試問原長方形土地的周長為多少公尺？	4. 有一長方形土地的長、寬比為 3：2，今從此長方形的長邊 4 公尺處垂直向下劃，直到另一長邊，此新的長方形開闢成花圃。若花圃的面積為 520 平方公尺，試問原長方形土地的周長為多少公尺？ 
第五題	5. 有一大圓以及一小圓，將其圓心重疊形成一同心圓，今將大圓內部扣除小圓部份命名為環形，此環形的寬是 2 公分。若環形的面積與小圓的面積相等，則小圓的半徑是________。	5. 有一大圓以及一小圓，將其圓心重疊形成一同心圓，今將大圓內部扣除小圓部份命名為環形，此環形的寬是 2 公分。若環形的面積與小圓的面積相等，則小圓的半徑是________。 

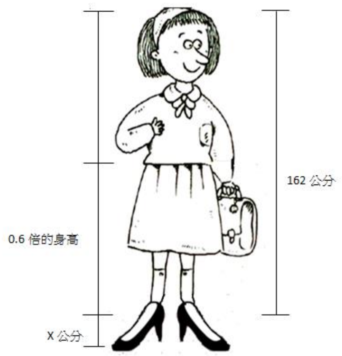
<table>
<tr><th></th><th>文字題</th><th>圖文題</th></tr>
<tr><td>第六題</td><td>6. 假設 $t=\frac{\text{人體的下半身長}}{\text{人體的身高}}$，其中下半身長是由腳底至肚臍的長度。而當 t 滿足 $t:1=1:(t+1)$時，人的外表比例是最美麗的。已知<u>小美</u>的身高是 162 公分，其下半身與身高的比值為 0.6，則她應穿幾公分的高跟鞋，才能使身材比例最美觀？(請以四捨五入法取近似值至整數，其中 $\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$)</td><td>6. 假設 $t=\frac{\text{人體的下半身長}}{\text{人體的身高}}$，其中下半身長是由腳底至肚臍的長度。而當 t 滿足 $t:1=1:(t+1)$時，人的外表比例是最美麗的。已知<u>小美</u>的身高是 162 公分，其下半身與身高的比值為 0.6，則她應穿幾公分的高跟鞋，才能使身材比例最美觀？(請以四捨五入法取近似值至整數，其中 $\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$)

</td></tr>
</table>

表 3-2-2　題號與分層細目表以及難易度分配表

		第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題
8-a-06 能理解二次多項式因式分解的意義		V	V	V	V	V	V
8-a-07 能利用提公因式法分解二次多項式		V			V	V	
8-a-08 能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解		V			V		
8-a-09 能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解題意義		V	V	V	V	V	V
8-a-10 能利用因式分解來解一元二次方程式		V			V		
8-a-11 能利用配方法解一元二次方程式			V			V	
8-a-12 能力應二次方程式解應用問題		V	V	V	V	V	V
難度	易	V	V				
	中			V	V	V	
	難						V

二、修改過程

研究者在工具的設計，有經指導教授及中學老師商討修正，包括共兩次預試，兩次的題目及修改關係如下表。

表 3-2-3　第一次預試第 5 題之修改

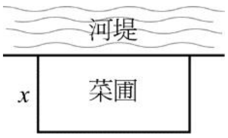
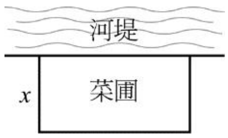
第一次預試第 5 題	第二次預試第 1 題
5.　用 100 m 的鐵絲網去圍成面積是 800 m^2 的長方形菜圃，此菜圃的一側長邊是河堤，不必再用鐵絲網去圍並且圍完 100 m，設所圍成長方形的短邊長為 x m，則 x 值為______。	1.　用 100 公尺的鐵絲網去圍成面積是 800 平方公尺的長方形菜圃，此菜圃的一側長邊是河堤，不用鐵絲網去圍，並且完全圍完 100 公尺，設所圍成長方形的短邊長度為 x 公尺，則 x 值為______。
第 5 題修改之處：研究者經由光華國中彭祥雲老師以及梁淑坤指導老師討論之後，怕學生認為 m 也是一個變數，因此將 m 改為公尺；以及將”不必再用鐵絲網去為並且圍完 100m”更改其語句，以達到更為順暢的語句，最後考量短邊長可能與長邊與短邊弄錯意思，因此更改為短邊長度。	

表 3-2-4　第一次預試第 4 題之修改

第一次預試第 4 題	第二次預試第 2 題
4.　有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條等寬且相交成十字型的通路。但希望剩下種植花卉的面積為 936 平方公尺，則	2.　有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為

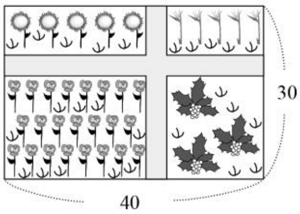
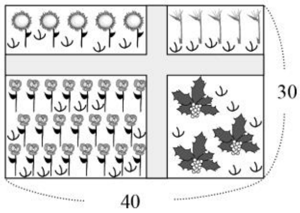
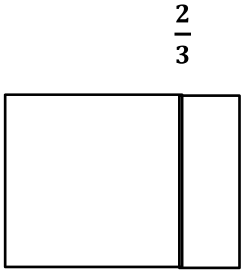
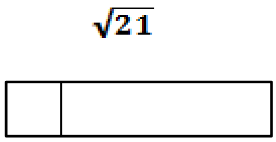
所開闢通路的寬度為________公尺。 	935 平方公尺，則所開闢通路的寬度為________公尺。請用"配方法"做答。 
第 4 題修改之處：原題意"開闢兩條等寬且相交呈十字型的道路"怕學生認知此圖式可以為傾斜的十字形道路，於是改為"兩邊與長寬平行且相交呈十字型的道路"，而數字 936 改為 935 是為了讓學生無法用十字交乘法而更改的設計。	

表 3-2-5 第一次預試第 8 題之修改

第一次預試第 8 題	第二次預試第 3 題
8. 若將正方形的其中一邊加上 $\frac{2}{3}$，而形成的長方形面積為 $\frac{35}{60}$，則原正方形的邊長為何？ 	3. 若將正方形的其中一邊加上 $\sqrt{21}$ 公尺後，所形成的長方形面積為 1 平方公尺，則原正方形的邊長為多少公尺？ 
第 8 題修改之處：此題為了配合無法使用十字交乘法以及配方法，於	

是修改數值為具有根號的數以及加上單位，讓學生可以用更熟悉的解題方式作答。

表 3-2-6 第一次預試第 7 題之修改

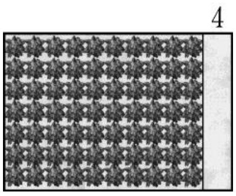
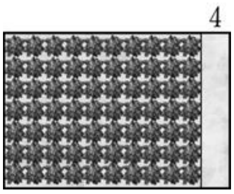
第一次預試第 7 題	第二次預試第 4 題
7. 有一長方形土地的長、寬比為 3：2，從長的一邊劃出一條緊貼寬邊並且寬度為 4 公尺的走道，剩下的部分做為花圃。若花圃的面積為 520 平方公尺，試問原長方形土地的周長為多少公尺？ 	4. 有一長方形土地的長、寬比為 3：2，今從此長方形的長邊 4 公尺處垂直向下劃，直到另一長邊，此新的長方形開闢成花圃。若花圃的面積為 520 平方公尺，試問原長方形土地的周長為多少公尺？ 
第 7 題修改之處：原本”從長的一邊劃出一條緊貼寬邊並且寬度為 4 公尺的走道，剩下的部分作為花園"，怕學生此長邊往下劃但不知畫到何處才停止，因此加入”垂直向下劃，直到另一長邊”。	

表 3-2-7 第一次預試第 2 題之修改

第一次預試第 2 題	第二次預試第 5 題
2. 有兩圓形成一個同心圓，此環形的寬是 2。	5. 有一大圓以及一小圓，將其圓心重疊形成一同心圓，今將大圓內部扣除小圓部

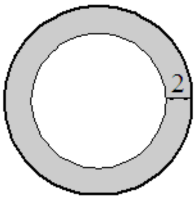
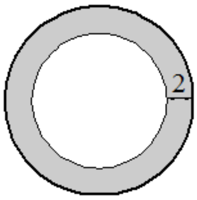
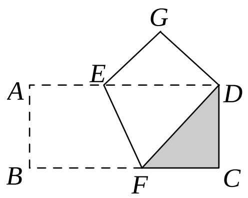
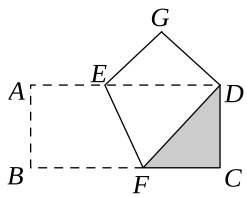
<table>
<tr><td>若環形的面積與小圓的面積相等，則小圓的半徑是________。
</td><td>份命名為環形，此環形的寬是 2 公分。若環形的面積與小圓的面積相等，則小圓的半徑是_________。
</td></tr>
<tr><td colspan="2">第 2 題修改之處：學生在解題時，對於同心圓為環形以及環形的定義不一定每人都一樣，於是更改為”有一大圓以及一小圓，將其圓心重疊形成一同心圓，今將大圓內部扣除小圓部份命名為環形”，期學生對於不同定義有一個統整的概念。</td></tr>
</table>

表 3-2-8　第一次預試第 6 題之修改

<table>
<tr><th>第一次預試第 6 題</th><th>第二次預試第 6 題</th></tr>
<tr><td>6.　長方形紙片 $ABCD$ 的長為 x，寬為 6，若有兩點 E、F 分別在線段 $\overline{\boldsymbol{AD}}$ 與 $\overline{\boldsymbol{BC}}$ 之間。將 $\overline{\boldsymbol{EF}}$ 摺疊，使 B 點與 D 點重合，若 $\overline{CF}=8$，求 $x=$？
</td><td>6.　長方形紙片 $ABCD$ 的長為 x 公分，寬為 $\sqrt{\mathbf{3}}$ 公分，令線段 $\overline{\boldsymbol{AD}}$ 為一長邊，若有兩點 E、F 分別在線段 $\overline{\boldsymbol{AD}}$ 與 $\overline{\boldsymbol{BC}}$ 之間。將 $\overline{\boldsymbol{EF}}$ 摺疊，使 B 點與 D 點重合，若 $\overline{CF}=\sqrt{\mathbf{2}}$ 公分，求 $x=$？
</td></tr>
<tr><td colspan="2">第 6 題修改之處：這一題除了增加單位之外，為了配合不能使用十字</td></tr>
</table>

交乘法以及配方法，增加了修改數字部份。而為了長方形每人對於長邊以及短邊的標點順序不同， 於是增加了”令線段$\overline{AD}$為一長邊”。

以上是紙筆資料收集採用的工具，接下來為學生訪談單的內容是依據 Schoenfeld (1985)的數學解題歷程模式去設計。

三、正式施測工具(晤談單最後版)：

1.文字題

(一).請問你通常怎麼看題目？

(二).你從題目中得到了哪一些線索？

(三).找到這些條件，你馬上想到的是什麼？

(四).為什麼你要這樣做？

(五).如果有圖輔助你，你認為會更有幫助嗎？

(六).你有其他的解題方式嗎？

2.圖文題

(一).通常你看題目是先看圖還是先看文字？

(二).你從文字與圖中得知了哪一些線索？

(三).你通常是從圖中以及文字中得知到了這些線索，你馬上想到得是什麼？

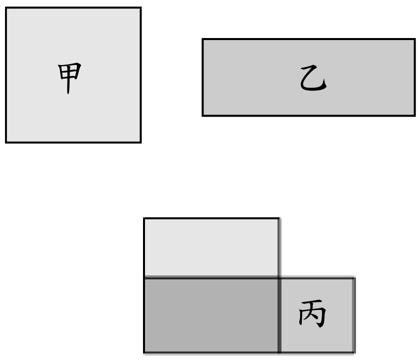
(四).你是如何利用這一些文字與圖來作答的？

(五).如果沒有圖輔助你，你認為對你解題有沒有差異？

(六).你有其他的解題方式嗎？

四、正式施測工具(晤談測驗題)

表 3-2-9　晤談測驗題

文字題	圖文題
甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。 (1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式) (2) 求 x 值。	甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。  (1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？ (請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式) (2) 求 x 值。

第三節、研究流程

1.2014 年 9 月設計題目

2.2014 年 11 月預試一

3.2014 年 12 月預試二

4.2015 年 3 月收集正式解題資料(紙筆測驗)

5.2015 年 6 月收集正式解題歷程資料(晤談)

本研究流程主要以研究對象以及研究工具為參照依據所設計的研究流程。共分為兩次於不同時段進行。

一、紙筆測驗方面，在進行之前，會給予學生 5 分鐘的時間看試卷以及問問題，但嚴禁學生作答以及交談。若學生沒有問題之後。即開始作答,學生作答試題共分為兩種,文字題 23 人以及圖文題 20 人，估計時間為 30 分鐘。

進行第一堂課之後:研究者與班級老師討論之後從學生的考卷挑出 6 位口語表達佳的學生以及值得晤談的學生。

二、訪談資料收集方面，開始前會預先跟學生說明晤談的動機，並且只需研究者用口頭的方式詢問,而學生也只需口頭方式的回答，

1 位學生花 5~6 分鐘作答。

第四節、資料收集與分析

一、紙筆測驗卷

(一)收集

研究者採取依照學生國中三年級上學期第一次數學複習考成績，依序將學生分組，得奇數名次的學生為文字組，而得偶數名次的學生為圖文題，其中文字組 15 人以及圖文組 14 人，研究者交考卷由數學老師代為轉發，學生共各作答 6 題，時間為 45 分鐘。

(二)分析

研究者將受試者的試題結果分為列式正確、解題過程正確以及答案正確，共三個部份。以下用表格方式詳述研究者的評分標準。

表 3-4-1　評分標準表

	得分條件
評分方式	1.列式正確者得 5 分。 2.解題過程中，使用十字交乘法、配方法、公式解或者任何合理的解題方式，得 3 分。 3.答案正確者得 2 分。 4.不完整列式、不完整解題過程以及錯誤答案皆得 0 分。 5.每一題滿分為 10 分。 6.此份試卷總分為 60 分。

二、晤談

(一)收集

將對高雄市某國中的學生小元晤談，此學生具有良好的表達能力，因此，研究者選擇以小元當作預試資料的來源並且加以分析，研究者分析完成，晤談單最後版再確認。晤談的進行是以學生解題時，研究者同時再逐一的依照晤談單 6 個題目最後版去提問共 6 個問題。

(二)分析

小元解的是文字題，題目分析如下：

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖							
閱讀Ⅰ	■							
分析Ⅱ		■						
探索Ⅲ			■		■		■	
計畫Ⅳ				■				
驗證Ⅴ								■
遷移Ⅵ						■		
時間(秒)	50	36	33	12	18	37	12	102

圖 3-4-1　小元的六階段時間序列圖

1.小元之逐字稿

L1 請問一下你通常是怎麼看題目的？
L2 小元：怎麼看題目？什麼意思？(閱讀)
L3 研究者：就是你看題目的方式你是習慣的怎麼去看題目。例如說：你會先看
L4 有沒有什麼線索或者有些人會先劃記重點之類的。所以你通常看到題目你的
L5 第一個動作，你是怎麼做的？
L6 小元：第一個動作是拿筆在空中畫出那個圖形。(閱讀)
L7 研究者：那你為什麼不嘗試把它劃在紙上面？
L8 小元：很亂。(分析)
L9 研究者：有什麼條件是你認為在這一題是很重要的？然後你把它劃下來。
L10 小元：正方形…兩公分…一角重合黏貼以及額外的正方形丙…還有甲和乙的
L11 面積相等。(分析)
L12 研究者：你找到這一些條件之後，你解題通常會是這樣看嗎？
L13 小元：對。(探索)
L14 研究者：你找到這一些條件之後，接下來你會怎麼做？
L15 小元：我會想說甲與乙的一角重疊，因為他們都是 90 度，所以會有一邊往
L16 外凸出，而凸出的這一塊會形成額外的正方形丙，但…(計畫)
L17 研究者：剛才你說你會在空中畫嘛。那對這一題來說，你覺得把它劃出來會
L18 好一點嗎？
L19 小元：不會。(探索)
L20 研究者：所以你長久以來就是在空中構思，不一定把它劃在圖上面？

小元：對。(遷移)
研究者：那你為什麼要這麼做？是因為你長期的習慣嗎？
小元：對。(遷移)
研究者：你覺得有圖輔助你會更有幫助嗎？(探索)
小元：會，有圖的話就不用在腦中思考它是怎樣的放置，不用想的過多，它這樣放是一種算法，他這樣放又是另外一種算法，有圖，它就是唯一的算法。
研究者：有圖就是唯一的算法嗎？(驗證)
小元：唯一的、確定的。它就是那樣，它不會再有別的。
研究者：所以你就可以確定那個圖是正確的？
小元：是。(驗證)
研究者：如果圖是錯誤的，你會去檢查它嗎？
小元：會。(驗證)
研究者：你會去檢查圖跟文字是否相符的的這個步驟？
小元：是。(驗證)
研究者：那你有沒有檢查一下你的答案是不是正確的？
小元：有。(驗證)
研究者：那你是怎麼檢查你的答案是不是正確的？
小元：從看題目、到構想、到最後思考重算一遍。(驗證)
研究者：可是從你的紙上看不到你重算一遍的過程？所以你是用心算的步驟？
小元：對。(驗證)
研究者：所以是用心算的方式，不是驗證你每一句都是對的？
小元:因為第一次寫過之後，就會對每一段落有所記憶，第二次在做的時候，只需要看每一步驟有沒有錯誤，這樣就夠了，所以不需要用筆算。(驗證)
研究者：所以你是逐步的檢查你的答案是不是對的，如果是對的，你就往下檢查，檢查到最後都是對的，你就確定你的答案是對的？
小元：對。(驗證)
研究者：好，那謝謝你了。

2.研究者對於小元 Schoenfeld 六階段圖的分析

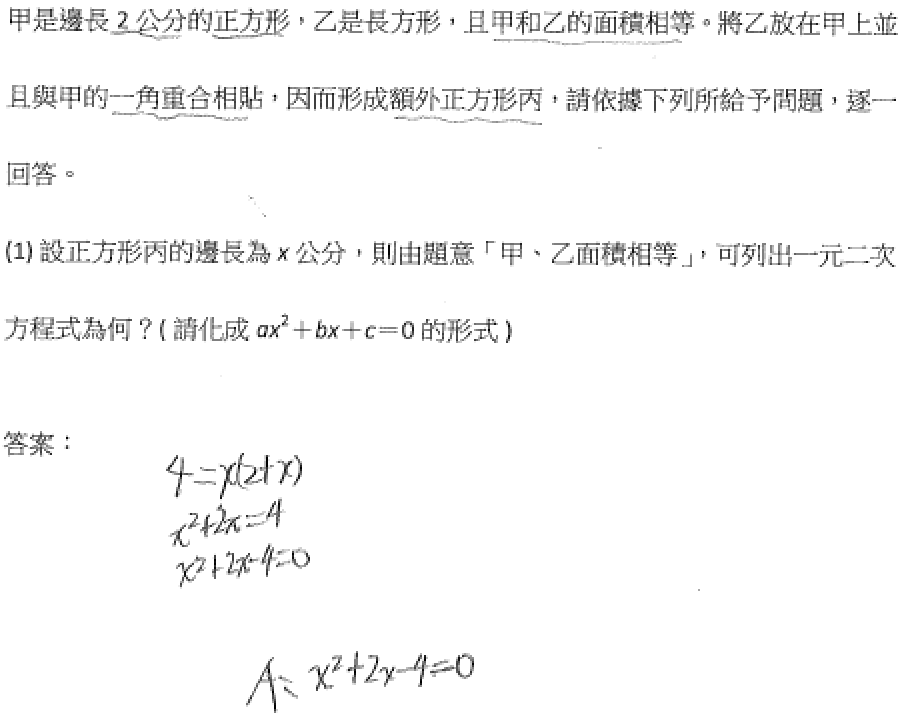
對於小元閱讀部份(Ⅰ)花了 50 秒鐘是總時間的 6 分之 1 才開始進入分析階段，由於小元作的是文字圖，所以小元沒有圖示的輔助來幫助閱讀題目的部份，以至於小元花了 50 秒鐘，來閱讀題目。從小元的數學老師那邊得知，小元對於數學月考有 90 分之上的實力，而讀題花了 50 秒鐘，這段時間似乎有點過長，由此可猜測，如果沒有圖的輔助，可能會是解題者花更多的時間在理解題意方面。

在分析部份(Ⅱ)，小元花了 36 秒是總時間的 8 分之 1 來分析題目，在這一點上，小元的分析時間還算是快的。小元在分析時，他會邊閱讀題目邊在空中畫出題目所給予的條件(L6)，研究者問小元:「為什麼不畫在紙上？」，小元說畫在紙上會覺得圖示是很亂的(L8)，有

可能因為條件的給予順序或者其他條件，就要改變已畫在紙上的圖，這一點令研究者非常意外，因為在空中畫圖容易看不清楚自己所畫出來的圖，而小元對於幾何的空間概念有達到 Piaget 對於抽象概念的理解，甚至有過之而無不及，直接在空中畫圖就可以看出題目所給予的圖示，這一點是介於文字題與圖文題的分析中所沒有的分析方法，因為無論是文字表徵或者是圖文表徵都是顯性的表徵，卻有學生可以使用隱性的表徵來幫助分析題目，這一特點的確值得分析。

在探索階段(Ⅲ1)，小元花了 33 秒鐘是總時間的 9 分之 1。在觀察小元的探索階段中，有發現小元對於題目所給予的條件是沒有依照題目所給予的順序的(L10-L11)，小元會選擇自己所需要的條件順序，而在這一點，可以由小元的劃底線順序中得知，並且也從小元口中得知，小元看的順序就是這樣的方式。

小元在計畫(Ⅳ)所花的時間最少，只有 12 秒是總時間的 25 分之 1。因為當其在分析階段時，就已經有圖示來輔助小元，但小元卻在計畫中沒有完整的表達他所要表達的方式，小元使用的是配方法解題，他在腦袋中想出圖示之後(L17-L18)，就開始進行作答，一步步的依照題目條件給予的順序慢慢的算出答案，在此步驟花的時間不多也是可想而知的，因為小元已經有了自己的圖示以及自己需要的題目條件順序，所以在計畫時，只要順利的去執行即可。



甲是邊長2公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。

(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

答案：

$4=x(2+x)$

$x^2+2x=4$

$x^2+2x-4=0$

A: $x^2+2x-4=0$

圖 3-4-2　小元第一小題解題結果

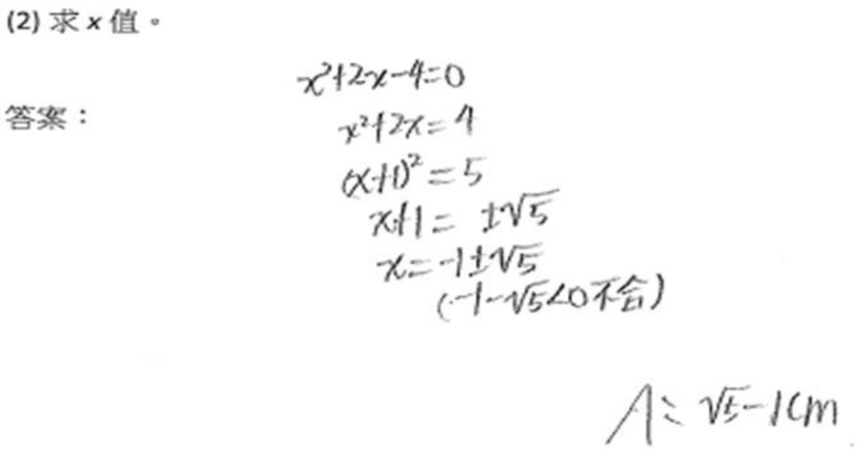
探索階段(Ⅲ2)，小元花了18秒鐘是總時間的17分之1。小元對於題目有沒有給予圖示，小元認為是看題目的難度所決定的，研究者給小元的晤談題，小元認為是不需要畫在紙上就可以作答的(L17-L19)。

在遷移階段(Ⅵ)，小元花的時間是37秒鐘是總時間的8分之1。通常都是最後檢驗答案時，才會使用遷移階段，小元很特別，他在算題目的時候就已經開始使用遷移的階段。這來自小元長久以來就是以這樣的方式作答(L22-L23)，所以他不需要使用額外的方式來檢驗自己的做法。

在探索部份(Ⅲ3)，小元花了12秒鐘是總時間的25分之1。小元也認為有圖示的題目對於他解題來說，是有幫助的，因為小元在構思

圖形當中，長久以來的習慣就是畫在空中，這對於小元所畫的圖，不代表著唯一性(L25-L26)，也就是說有其它種可能性是小元所沒有想到的，但小元提到若題目有給予圖示，在這方面就可以免去在空中畫圖構思的不確定性，因為他相信有圖的輔助會減少他在構思上的困難，並且相信此圖就是唯一的以及正確的圖。

而最後的驗證(Ｖ)階段，小元花最多的時間總共花了 102 秒是 3 分之 1 的總時間去驗證的。在其前面的步驟，小元都算是有其解題架構，在驗證的部份也是。小元一開始說是用心算的(L39-L40)，研究者原先打算要求小元將其心算過程寫下來，但小元給予的回應卻說不用，因為小元雖然是使用心算的方式，但其心算的不是數字部份，而是計算過程的合理性部份，小元對於自己所算出來的數字有絕對的信心，所以在驗證時，小元會先驗證其所假設的題目有無符合題目，若有，就開始不管題目了，接下來只要慢慢的去架構以及思索自己所列出的每一個式子是否有缺陷或者是不完美的地方(L43-L44)，若有，回到上一步去做修改，若沒有，則繼續的往下去架構以及思索這一新的式子是否有缺陷，一直重複這樣的過程，直到答案出來為止(L45-L47)。也就是因為小元對於每一步驟的算式都仔細的去分析，所以最後，小元並沒有帶入所算出的答案回原本的題目，因為其在最後一個步驟時，就已經得知求出的兩解其中一解為負數，不可能為答案，所以小元正確的依照他自己長久以來的習慣算出了正確的答案。



(2) 求 x 值。

答案：

$x^2+2x-4=0$

$x^2+2x=4$

$(x+1)^2=5$

$x+1=\pm\sqrt{5}$

$x=-1\pm\sqrt{5}$

$(\because -1-\sqrt{5}<0$ 不合$)$

A: $\sqrt{5}-1$ cm

圖 3-4-3　小元第二小題解題結果

(三)、信度

信度檢核方面，研究者邀請一位對 Schoenfeld 六階段有了解的老師，檢查逐字稿是否對應有誤，而此老師從 6 位抽取並檢核兩位學生，發現階段對應沒有錯誤。

第肆章、研究結果與討論

本章節將分成兩節。第一節為解題。研究者比較一元二次方程式兩種表徵，呈現正式圖文題與正式文字題試卷之研究結果；第二節是解題歷程，分別是針對 6 位學生對於圖文題與文字題的放聲思考晤談資料的分析結果。

第一節、兩種表徵解題之研究成果

43 位國二學生，各作答 6 題，每題 10 分，考試的總分為 60 分，以下是同學作答結果。

一、學生作答分析結果(總分)

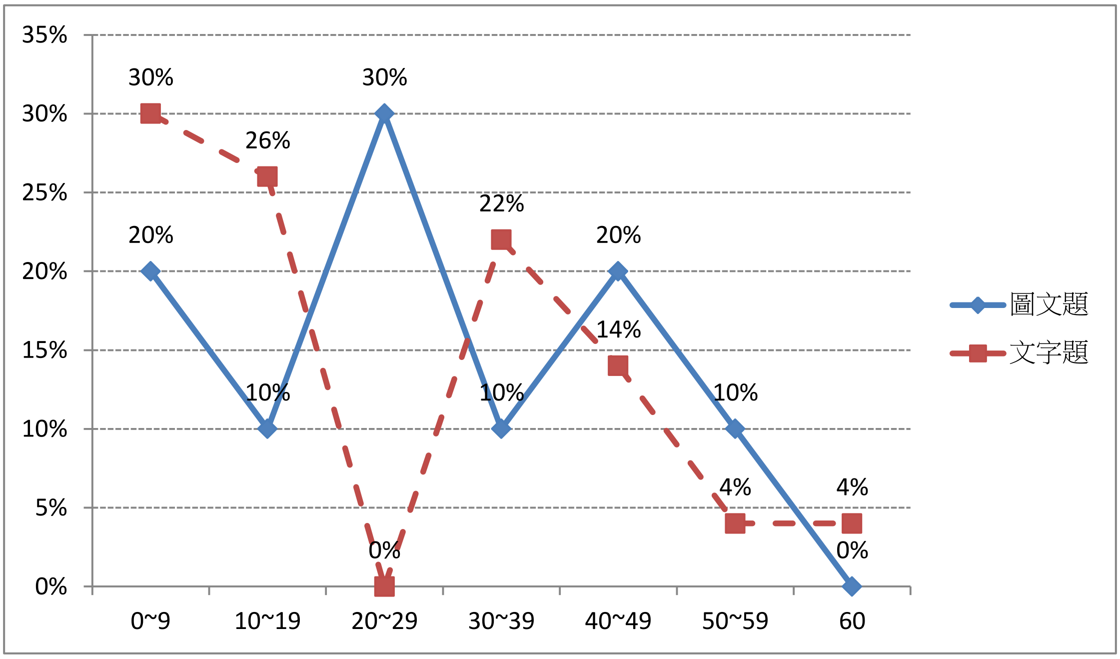


圖 4-1-1　圖文題與文字題學生分數分布圖

從圖 4-1-1 呈現各得分組人數，實線(▬)為圖文題，虛線

[redacted]

([redacted] [redacted])為文字題。從上圖看觀測出來 20~29 分是一個分水嶺，低於 20~29 分的得分組，文字題學生答對的人數與圖文題答對的人數開始有更大的差距(差 10%到 16%)。

至於高於 30~39 分的得分組，學生作答的試題是否為文字題或是圖文題得分總分差異不大。但對於後半段的學生，可能圖文題相對於文字題對於學生有幫助，以上用總分的分析圖顯示不同分數組別的百分比(圖文題、文字題)。除此之外，研究者也用 t-test(不等組)去比較兩種表徵的平均分，發現圖文題的平均分組高於文字題的平均分組，但是沒有統計的顯著差異。

以上是總分及平均分的結果，以下是逐題分析(第一題到第六題)

二、學生作答分析結果(逐題分析)

(一)、第一題

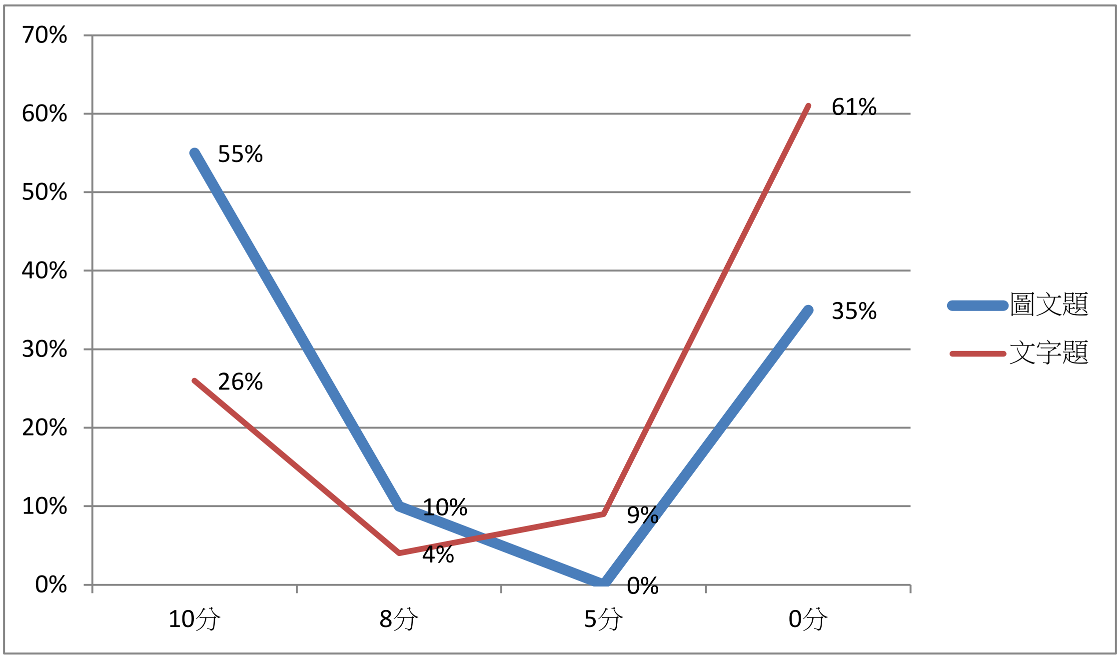
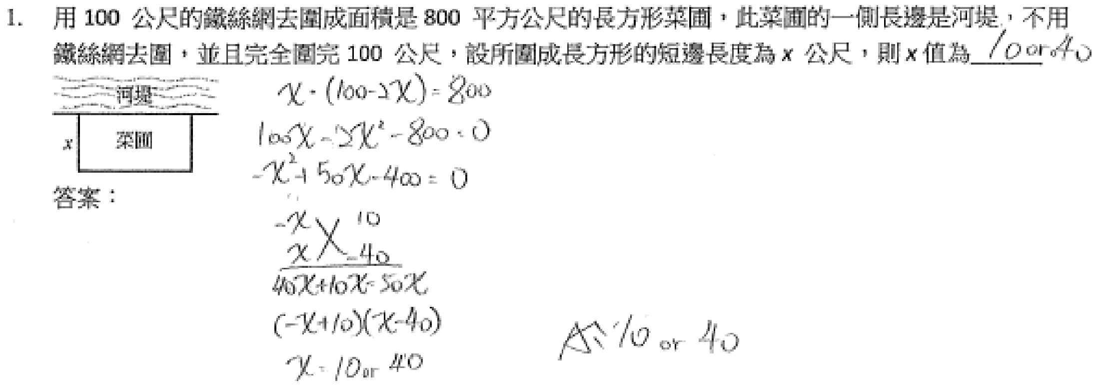


圖 4-1-2　第一題學生作答得分分布圖

上圖呈現學生回答的得分情形，粗線為圖文題，細線為文字題。在第一題中學生的作答中，5 分以上圖文題的學生有 65%，至於文字題方面，得 5 分或得 5 分以上的學生有 30%，因此，可看出在第一題，圖文題相對於文字題較有優勢。因為此題的解法用學生習慣使用的十字交乘法就可以解題，而圖文題加上了圖示的輔助，給予學生不同的表徵，讓學生可由自己習慣的試題表徵來作答，而有了較大的差異。

在一元二次方程式中，學生得到 8 分就是沒有做出答案的判讀，以至於將兩個符合算式卻不符合題目的答案都列入正確答案以至於錯誤，在這方面圖文題與文字題的差異不大，但對於國二學生來說，這的確是容易出現的錯誤。

佐證 2-6-30


1. 用 100 公尺的鐵絲網去圍成面積是 800 平方公尺的長方形菜圃，此菜圃的一側長邊是河堤，不用鐵絲網去圍，並且完全圍完 100 公尺，設所圍成長方形的短邊長度為 x 公尺，則 x 值為 10 or 40

河堤

x 菜圃

答案：

$x\cdot(100-2x)=800$

$100x-2x^2-800=0$

$-x^2+50x-400=0$

$(-x+10)(x-40)$

$x=10$ or 40

A: 10 or 40

佐證 2-3-9

1. 用 100 公尺的鐵絲網去圍成面積是 800 平方公尺的長方形菜圃，此菜圃的一側長邊是河堤，不用鐵絲網去圍，並且完全圍完 100 公尺，設所圍成長方形的短邊長度為 x 公尺，則 x 值為 40 。

答案： $100-2x$

$x(100-2x)=800$

$100x-2x^2=800$

$2x^2-100x+800=0$

$x^2-50x=-400$

$x^2-50x+(25)^2=225$

$(x-25)^2=225$

$x-25=\pm 15$

$x=25\pm 15$

$=40$ or 10

只得 5 分的同學，意味著只有列式正確，但在其計算過程中，幾乎是空白或者是使用自己習慣的方式去作答，而不是有邏輯性的作答。

奇特的是，在第一題中只有列式正確的圖文題學生沒有人，換句話說，在第一題中，圖的輔助可能沒有我們想像中的那麼有幫助，而只是提供一種輔助的方式，學生不會作答，就不會作答，對於有沒有圖示沒有關係的。

得 0 分的學生,可以看得出來圖文題比文字題還要有較少的人數。由於有效試卷圖文題 20 份,文字題 23 份,在與其他分數做比較之後，文字題得 0 分的學生當然要相對圖文題來的高。

總言之，此題的結果顯示，學生在圖文題的成績優於學生在文字題的成績。

(二)、第二題

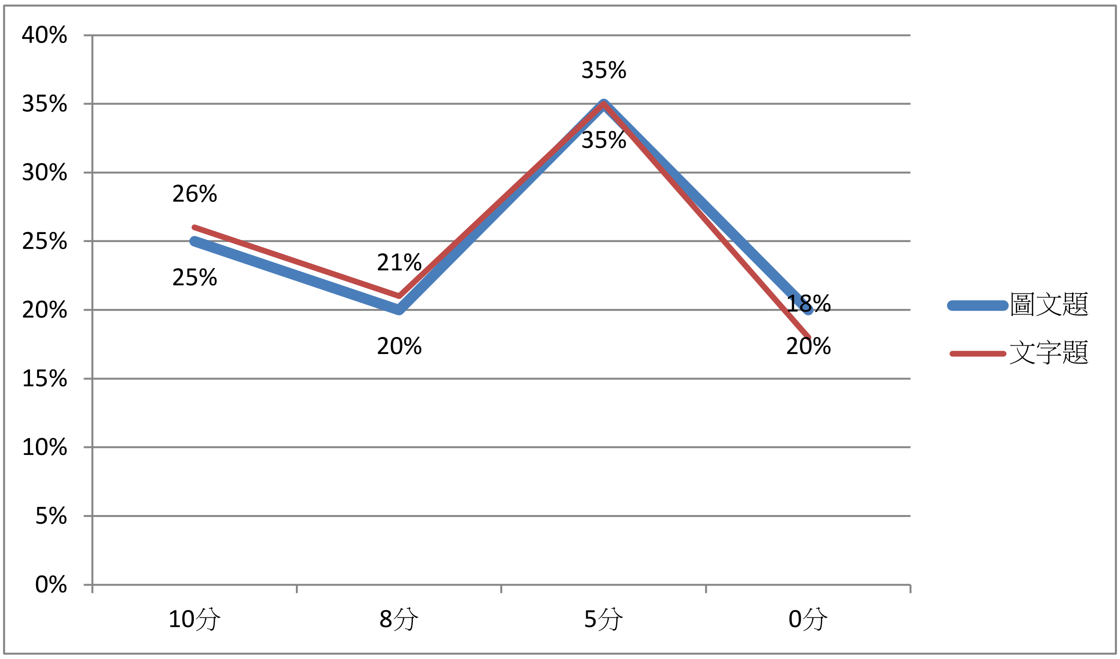
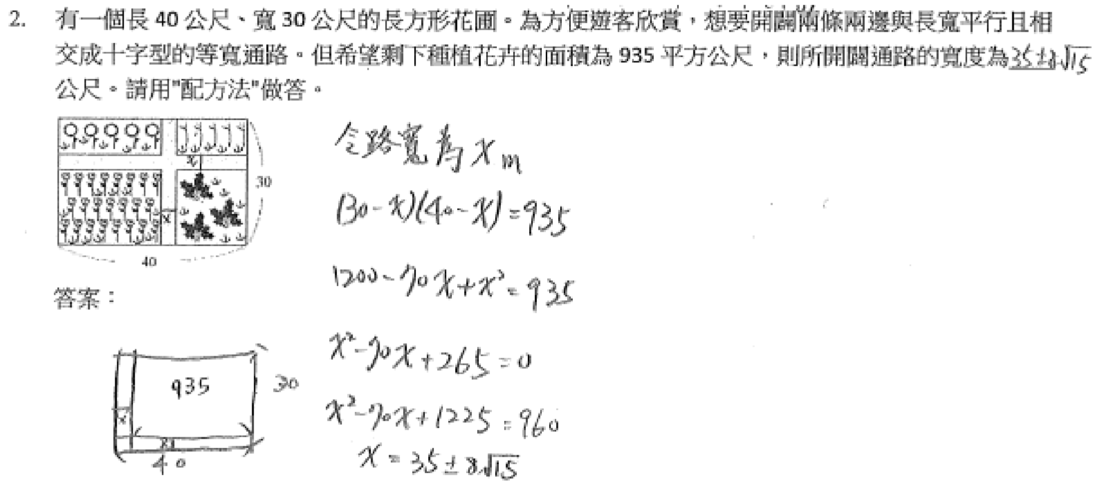


圖 4-1-3　第二題學生作答得分分佈圖

第二題整體來看，圖文題文字題沒有太大的差異。但從圖 4-1-3 可以看得出來學生作答的意願高出第一題許多，值得注意的是得到 8 分與得到 5 分的百分比的增加。

先從得到 8 分的百分比來說，雖然差異不大，但可以看出沒有檢驗正確答案的百分比也大幅的增加了，並且無論是圖文題或文字題共有 9 人缺少這個步驟或者檢驗錯誤，這對於老師的教法及學生的學習上都有很大的問題，在一元二次方程式這一單元與其他的單元最大的不同是每題算出的答案都會有兩個解，但老師若沒再三的強調此特性，對於學生的學習是會有所阻礙的。

佐證 2-6-13



2. 有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為 935 平方公尺，則所開闢通路的寬度為 $35\pm8\sqrt{15}$ 公尺。請用"配方法"做答。

答案：

令路寬為 x m

$(30-x)(40-x)=935$

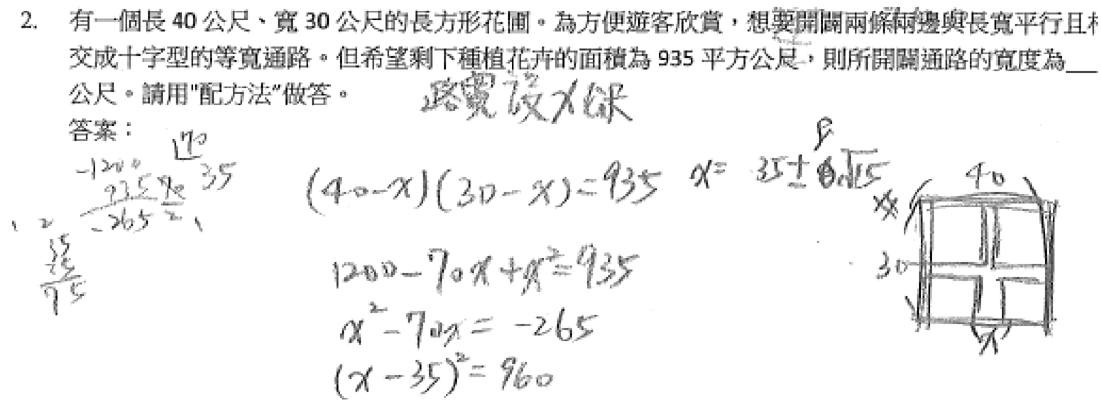
$1200-70x+x^2=935$

$x^2-70x+265=0$

$x^2-70x+1225=960$

$x=35\pm8\sqrt{15}$

佐證 2-6-10



2. 有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為 935 平方公尺，則所開闢通路的寬度為___公尺。請用"配方法"做答。

答案：

路寬設 x 公尺

$(40-x)(30-x)=935$　$x=35\pm8\sqrt{15}$

$1200-70x+x^2=935$

$x^2-70x=-265$

$(x-35)^2=960$

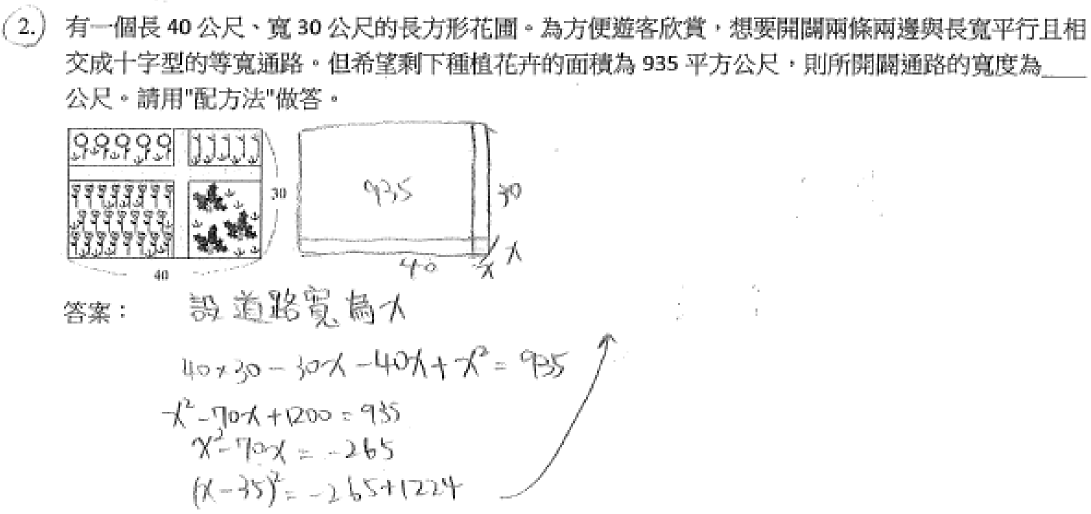
得 5 分的百分比最多，也就是只有算式正確的人數最多，那麼計算過程以及答案都錯誤，這一題可以使用學生習慣的配方法來解題，正常來說應該不成問題，研究者從學生的試題中發現，除了沒有檢驗計算過程正確與否之外，學生將文字表徵或者圖文表徵轉換成算式之後常常出現空白的情況，從試卷上可以發現並沒有嘗試作答的意願。

因此在於將跨過圖文表徵或文字表徵轉換成算式型式的鴻溝外，還有另一個鴻溝的存在，也就是學生看到算式跟學校所學或者是補習班所學到的數學之間是有鴻溝存在的，這可能是老師的解法不被學生認同或者是學生有學生自己的解法，但這解法是錯誤的卻沒有被糾正，

以至於學生對於解題有不良的影響。

而這一點也符合 Lesh ， Post 和 Behr （ 1987)所提出的表徵系統互動模式，不單單是表徵與表徵之間的轉換會造成鴻溝之外，表徵「多義性」之間的轉換，確實對於學生解題會造成轉換上的困難。

佐證 2-6-18


(2.) 有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為 935 平方公尺，則所開闢通路的寬度為____公尺。請用"配方法"做答。

答案： 設道路寬為x

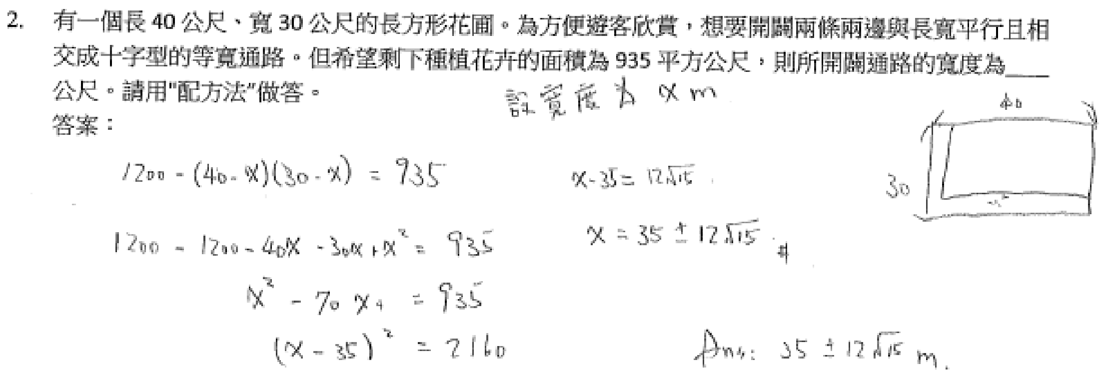
$40\times30-30x-40x+x^2=935$

$x^2-70x+1200=935$

$x^2-70x=-265$

$(x-35)^2=-265+1225$

佐證 2-6-26


2. 有一個長 40 公尺、寬 30 公尺的長方形花圃。為方便遊客欣賞，想要開闢兩條兩邊與長寬平行且相交成十字型的等寬通路。但希望剩下種植花卉的面積為 935 平方公尺，則所開闢通路的寬度為____公尺。請用"配方法"做答。

答案： 設寬度為 x m

$1200-(40-x)(30-x)=935$

$1200-1200-40x-30x+x^2=935$

$x^2-70x+=935$

$(x-35)^2=2160$

$x-35=12\sqrt{15}$

$x=35\pm12\sqrt{15}$ #

Ans: $35\pm12\sqrt{15}$ m.

而在第二題的題目當中，看出圖文題與文字題沒有太大的差異。

(三)、第三題

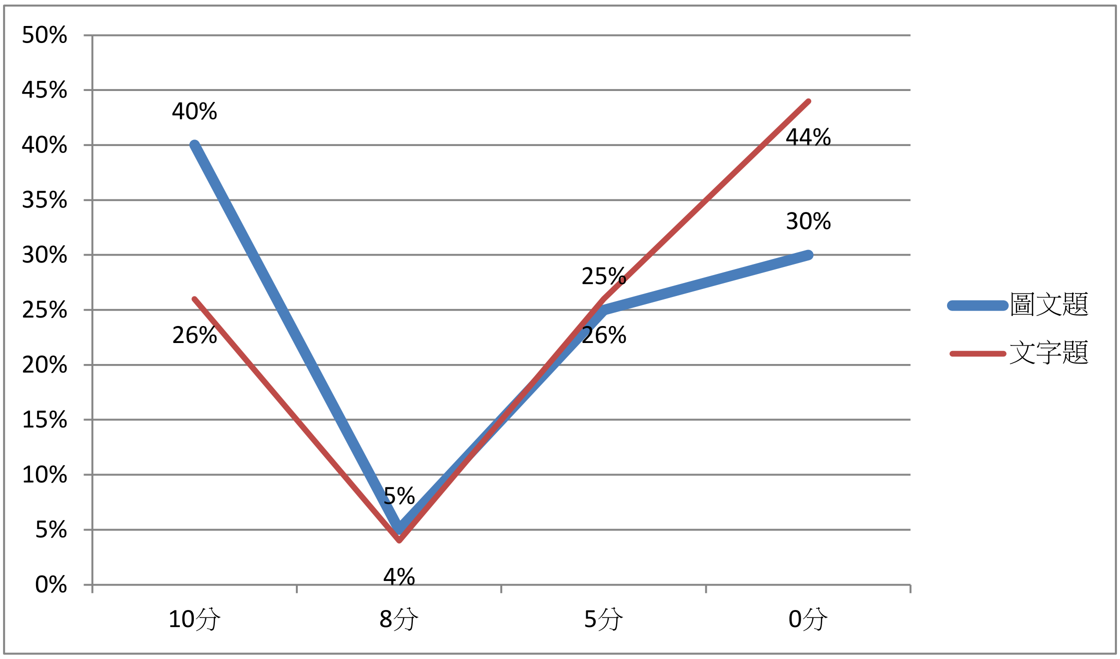


圖 4-1-4　第三題學生作答得分分佈圖

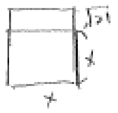
此題獲得 5 分(包含)以上的學生在得到 10 分圖文的學生優於文字題的學生，而其餘部份相差不多，在這一題需要用到公式解的解法才能作答，從得到 10 分的百分比來看，圖文題的 20 人中就有 8 人答對占 40%，但在文字題的 23 人中才有 6 人答對占 26%，在這個比率之下，可以看出圖示對於學生是有所幫助的。

研究者觀察這一些學生的作答，發現答對的學生都是使用公式解來作答，這是理所當然的，因為用其他的方式並沒辦法解開這一題，但在其他可以使用公式解之外的方式解題的題目，無論是圖文題還是文字題都很少使用到公式解來解題，對於某些資優的學生來說，也許他們已經使用過很多種方式來解題，只是最後還是使用公式解來解題較為方便。

佐證 2-6-17

3. 若將正方形的其中一邊加上 $\sqrt{21}$公尺後，所形成的長方形面積為 1平方公尺，則原正方形的邊長為多少公尺？

答案：



設原正方形边長 x m

$(x+\sqrt{21})x=1$

$x^2+\sqrt{21}x-1=0$

$\frac{-\sqrt{21}\pm\sqrt{21+4}}{2}=\frac{-\sqrt{21}\pm 5}{2}$

A. $\frac{-\sqrt{21}\pm 5}{2}$ m.

在這個題目的圖示表徵中，出現較為不常見的"所增加的邊長"比"原本的邊長"還要長的這個圖示。對於文字題的學生來說，他們看不到這個情況，所以會有些同學出現答案很大的情況，而又缺乏驗證，以至於作答失敗。

相對於文字題來說，圖文題的學生計算出答案之後，可用目測的方式觀察到"所增長的的邊長”比”原本的邊長”還要長這個條件，

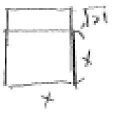
所以在做最後驗證的時候可以輔助作答，而不用直接的去做計算，但我們可以從圖 4-1-4 看到得到 5 分的百分比圖文題卻低於文字題，這與研究者觀察到的似乎有些矛盾，其實不然，因為許多得 5 分的學生有列出算式但卻沒有正確的計算過程，以至於沒有達到最後需要驗證的這一個步驟。

因此，圖示不只可以幫助學生將題目表徵轉換成算式的形式，在對於驗證的步驟也是會有幫助，甚至不用計算就可以知道符合題目的正確答案是何者。

佐證 2-6-20

3. 若將正方形的其中一邊加上 $\sqrt{21}$公尺後，所形成的長方形面積為 1平方公尺，則原正方形的邊長為多少公尺？

答案：



設原正方形邊長 x m

$(x+\sqrt{21})x=1$

$x^2+\sqrt{21}x-1=0$

$\frac{-\sqrt{21}\pm\sqrt{21+4}}{2}=\frac{-\sqrt{21}\pm 5}{2}$

A: $\frac{-\sqrt{21}\pm 5}{2}$ m.

（四）、第四題

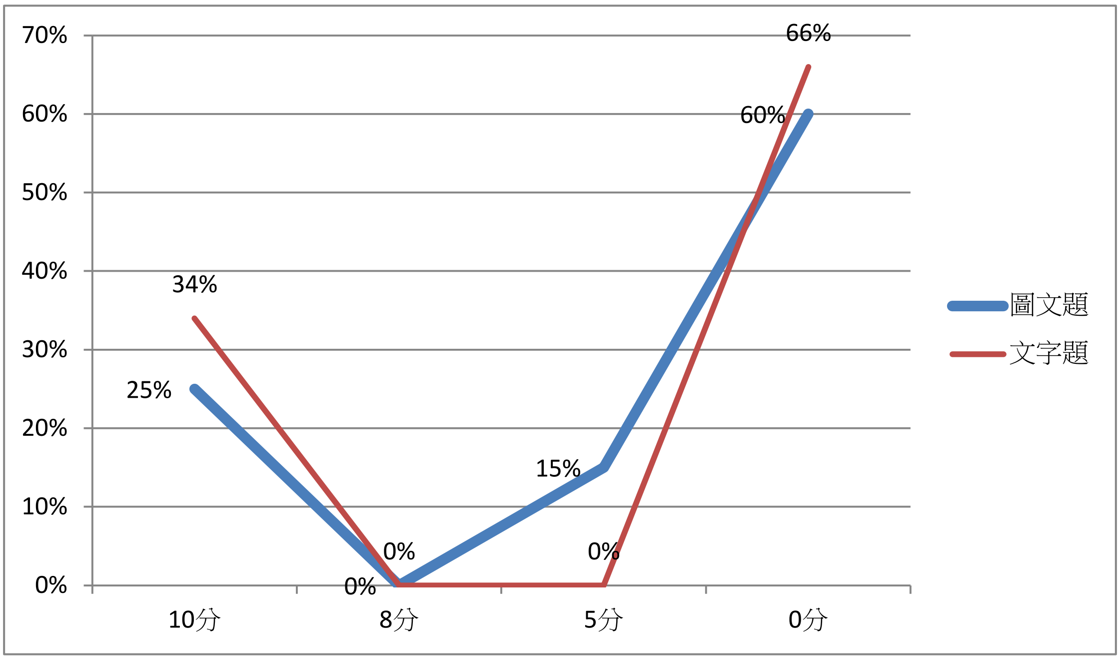


圖 4-1-5　第四題學生作答得分分佈圖

第四題無論是圖文題還是文字題的學生都表現不好，在文字題正確作答的學生，接有畫出與圖文題相似的圖形而導致作答成功，但這一題也可以看出就算有圖示以及文字的輔助學生對於常見的題目還是不見得會，此題的考題類型在很多的版本中都有類似的題目，研究者發現這些版本所規劃出來的題目幾乎都是圖文題，很少有純文字表示的題目，也許因為這種原因使得圖文題的學生在作答會比文字題的學生表現來的好。

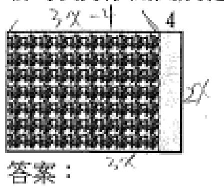
看從圖 4-1-5 可以看出事實不然，文字題的學生表現的比圖文題的學生還要好，這給我一個啟示，在第二章一些相關研究指出有圖示的題目會比沒有圖示的題目要好，例如：圖形表徵為協助學生從教材中快速了解及建構的有效工具，反觀口語訊息則較難說明概念的整理架構，需用複雜與大量語法或文字方能詳盡說明(Hegarty & Just , 1989 ; Larkin & Simon , 1987 ; Schnotz , 2002)。但或許過份著重在"圖"這件事上面了，學生的數學學習一開始就是先從語文開始學習，後來當語文不夠用或者可以更簡單的表示文字才開始使用"圖"，所以學生在解題的過程一開始並非只看圖以及數字來作答，而是先看完文字，再用圖示來輔助，因此，有些學生在讀完文字部份之後，就已經有解題的構思，於是開始作答，而”圖”對於此類的解題者就幫助不大了。

這也符合了，雖然圖形表徵具有上述的優點，但使用之際需考量學生的認知負荷，以免使用不當造成干擾或誤導，加上目前許多教科書並非極力極度重視文本內圖形的呈現(Höffler & Leutner , 2007 ; Schnotz & Bannert , 2003)，因此圖形表徵的使用雖具提升教學成效的潛力，但若使用不當亦可能出現反效果的情形。

此題得到 8 分的百分比為占 0%，就可以間接說明若文字表徵對於解題者沒有幫助，則圖示表徵的功能就有限了，這也就是為什麼圖文題得 5 分的百分比有 15%，而文字題的百分比卻還是 0%，但這並不代表"圖"沒有用處，而是這時"圖"是學生解題的最後方法，若能從圖中得到關鍵，則可以接下去作答，文字題的學生沒有此”圖”來作輔助，因此表現較為不佳。

佐證 2-6-14

4. 有一長方形土地的長、寬比為 3：2，今從此長方形的長邊 4 公尺處垂直向下劃，直到另一長邊，此新的長方形開闢成花圃。若花圃的面積為 520 平方公尺，試問原長方形土地的周長為多少公尺？



答案：

設長方形寬為2x公尺，長3x公尺

$2x(3x-4)=520$

$6x^2-8x=520$

$6x^2-8x+4^2=520+16$

$(6x-4)^2=536$

$6x-4=\pm 6\sqrt{66}$

$x-\frac{4}{6}=\pm\frac{6\sqrt{66}}{6}$

$x-\frac{4}{6}=\pm\sqrt{66}$

$x=\frac{4}{6}\pm\sqrt{66}$ m #

（五）、第五題

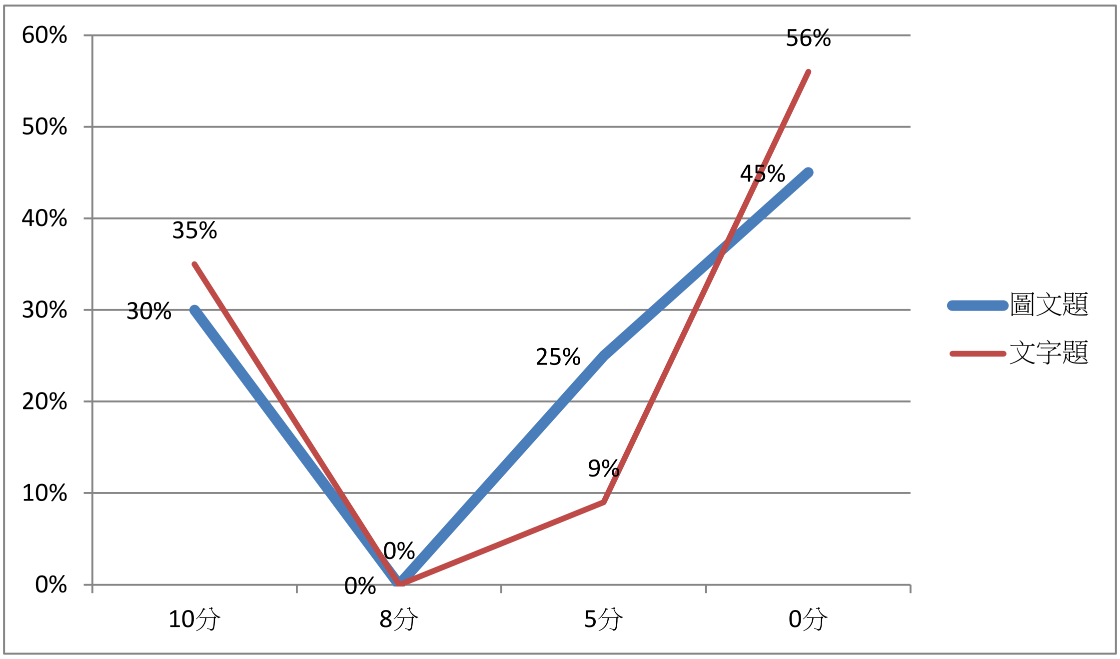


圖 4-1-6　第五題學生作答得分分佈圖

此題研究者所觀察到現象與第四題符合，都可以看到研究者在第四題所觀察到的現象在第五題以及第六題皆有出現。

第五題較第四題不一樣的地方是第五題的圖示較容易畫出來，這也是第五題得 5 分百分比高於第四題得 5 分百分比的一項原因。

從中還可以發現到題目賦予的圖相對於學生自己畫的圖更有幫助，因為這一題雖然畫出的圖是很容易的，但學生對於題目所給予的圖是相信為真，而對於自己所畫的圖卻不一定相信為真，為什麼會這樣呢？研究者認為是由於文字表徵的不了解已經使學生失去一些能夠解出這一題的信心，進而對於自己所畫出來的圖沒有絕對的信心，間接導致計算過程失敗。

有一點值得觀察的是為什麼得 8 分的百分比一樣是 0%，學生從題目給予的條件轉換成算式時，在第五題幾乎做不出來，也許是因為前

面的三題已經太費腦力使學生失去求知的動力或者是配方法的吸收不佳導致學生對於計算過程的不順利，這些都是有可能的原因，因而使得到 5 分的 7 人(占 34%)皆在計算過程中失敗。

(六)、第六題

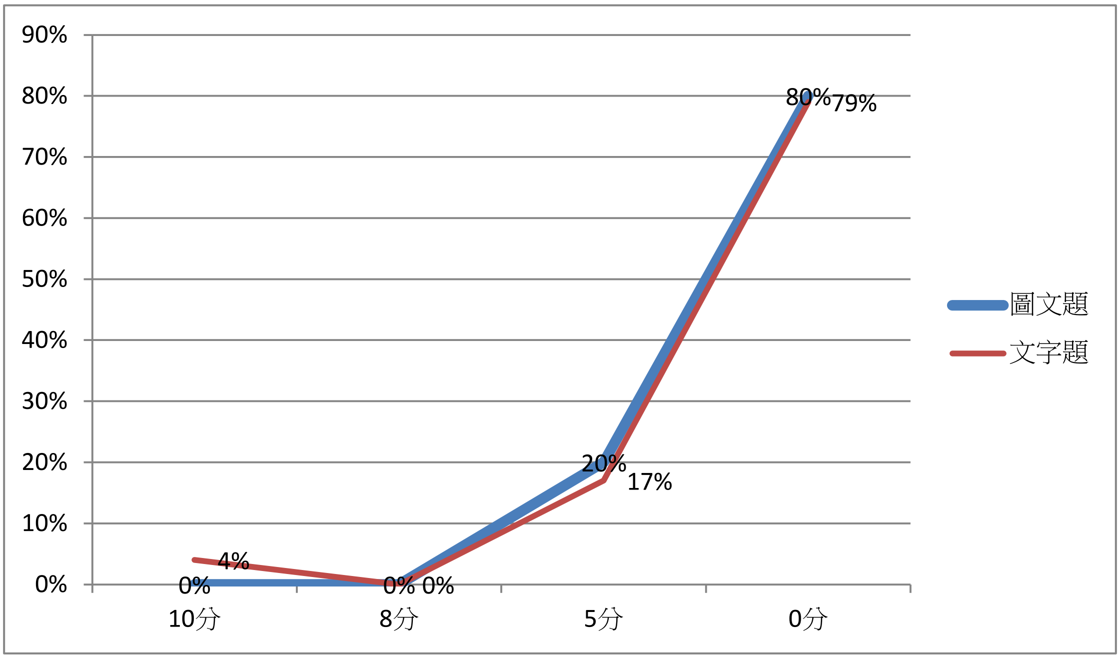
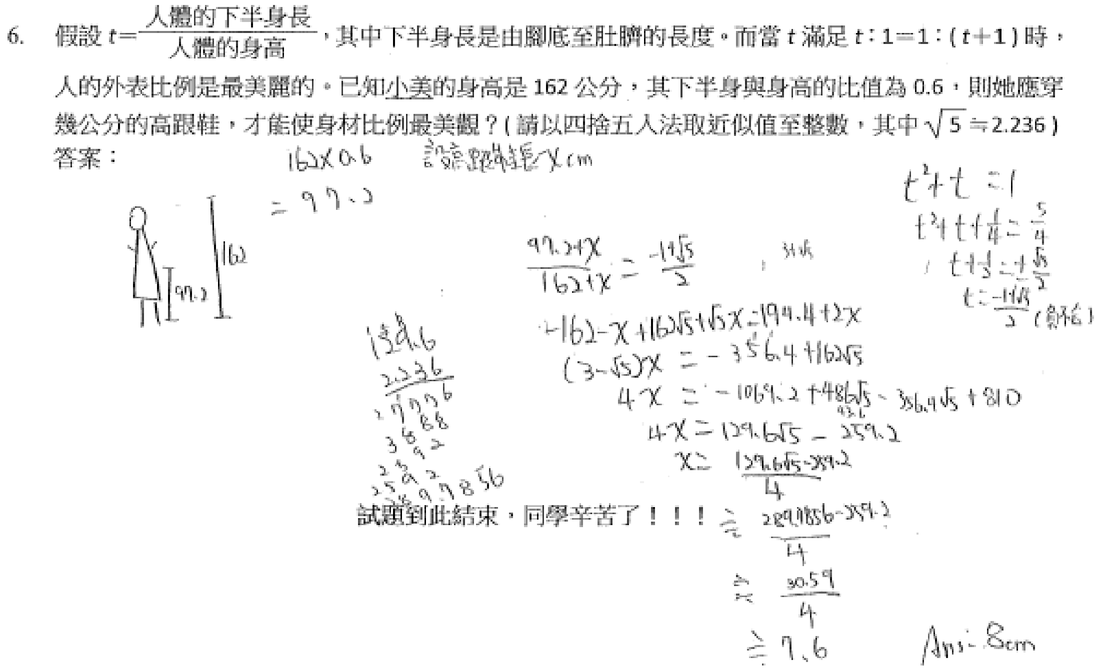


圖 4-1-7　第六題學生作答得分分佈圖

第六題只有一位做文字題的學生答對，圖文題的學生最多只得到 5 分，並且許多人都得到 0 分，原因在於這一題的文字表徵、列式以及計算過程都是困難的，不只是這三點困難，圖對於學生計算過程的幫助也是不容易理解的，以至於這一題只有一位學生答對，而這位答對的學生是得到滿分的學生，沿用第四題所提出來的想法，也許這位學生在讀題時就已經有所構思，所以可以直接作答，而不需要利用到圖來輔助。

佐證 2-3-12



6. 假設 $t=\dfrac{\text{人體的下半身長}}{\text{人體的身高}}$，其中下半身長是由腳底至肚臍的長度。而當 t 滿足 $t:1=1:(t+1)$ 時，人的外表比例是最美麗的。已知小美的身高是 162 公分，其下半身與身高的比值為 0.6，則她應穿幾公分的高跟鞋，才能使身材比例最美觀？(請以四捨五入法取近似值至整數，其中 $\sqrt{5}\doteqdot 2.236$)

答案：

試題到此結束，同學辛苦了！！！

這一題的圖具有許多的條件，這些條件都是來自於文字中並且加以圖形化，若學生在文字表徵看不懂時，轉換看圖示表徵，這可能會帶來一個問題，除了一次看到的條件太多之外，還是圖示表徵並沒有順序的這項概念，學生在文字表徵解題時就已經對於題目所給予的條件不清楚甚至無解題概念，就算加上圖來輔助學生解題，只會更困難，因為失去了條件的順序性，換句話說，文字表徵的出現順序對於學生的解題可能會造成干擾，交換題目所給予的條件可能會使學生作答更順利。

另外，第六題的圖並非對解題有絕對的幫助，甚至會有誤導或者是使學生更模糊的可能性。

以上的第一節，總分的結果顯示，圖示表徵，對於低分組即(20-29)或以下，會有幫助。可是，在逐題分析中的結果，圖示在不同題目中，給的訊息有時候協助(第一題、第五題)，有時候干擾(第三題、第四

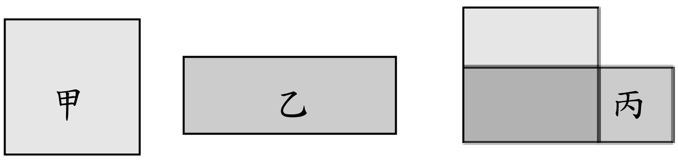
題)，亦有時候沒有差異(第二題、第六題)。

第二節、兩種表徵解題歷程之研究成果

研究者選出 6 位晤談對象，分別是寫圖文題的小莉、小盈、小柔。以及寫文字題的小羽、小婷以及小雅。研究者將原案做成逐字稿再利用 Schoenfeld 六階段分析歷程。其中兩位經由另一位研究生做信度檢查，以下是歷程結果的呈獻。

一、圖文題：小莉、小盈以及小柔所作答的題目。

甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。



(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

(2) 求 x 值。

圖文題晤談對象共 3 名，分別為小莉、小盈以及小柔。以下研究者分析她們的解題歷程結果，先附上 Schoenfeld 解題歷程六階段序列圖，再提供逐字稿，最後寫上分析。

(一)小莉進行晤談分析結果

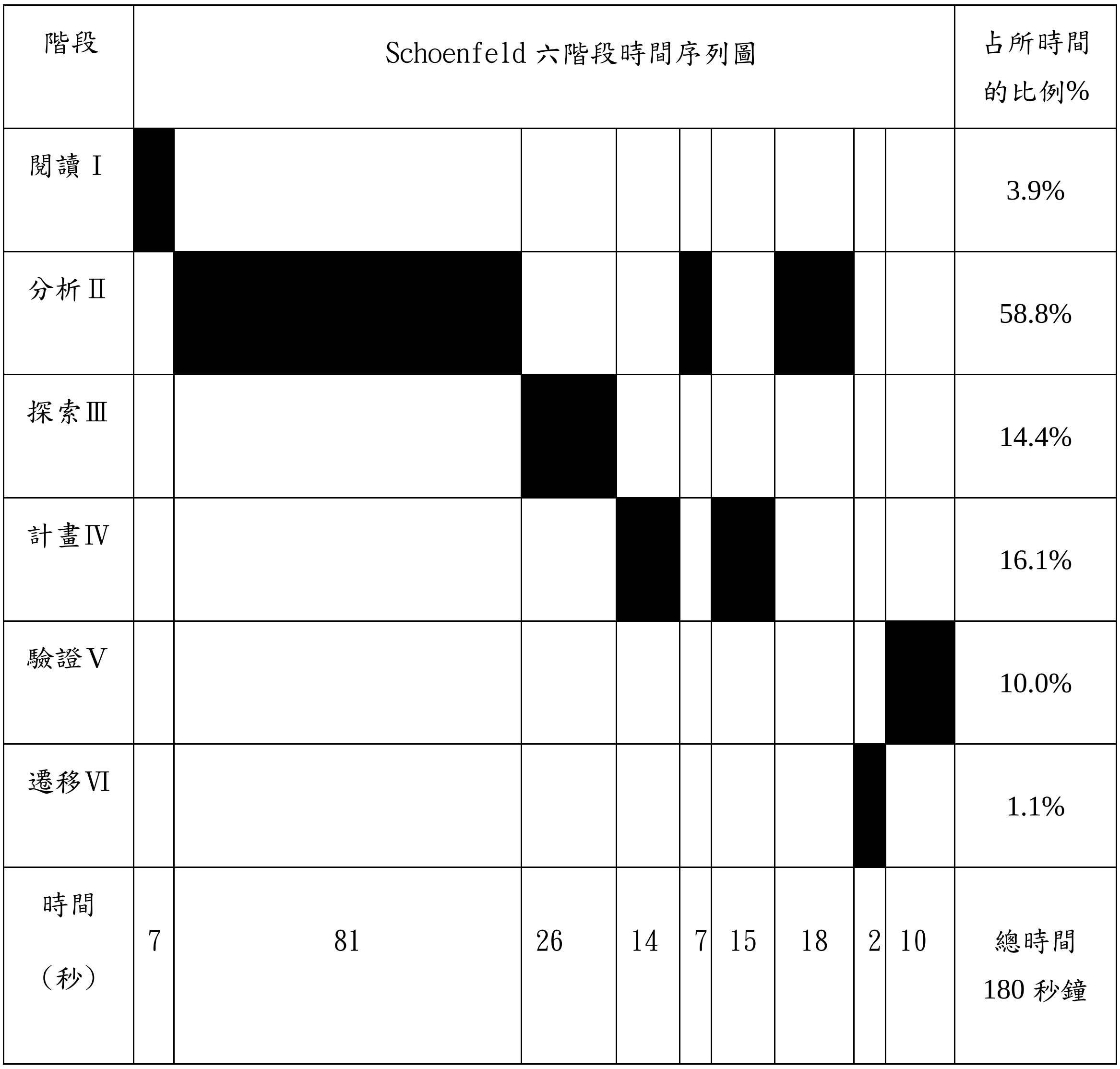


圖 4-2-1　小莉解題歷程時間序列圖

1.小莉之逐字稿

L1 研究者：通常你看題目，是先看圖還是先看文字？
L2 小莉：會先看圖吧。(閱讀)
L3 研究者：那文字的部份呢？
L4 小莉：我會先跑去看圖，因為圖通常沒什麼資訊，接下來看題目，在把文字
L5 填上去。(分析)
L6：那你從文字和圖中得知了哪一些線索？
L7 小莉：甲邊長 2 公分，乙邊長不明但是跟甲同一個面積，然後它說丙(邊長)
L8 是 x，那重疊的深色部分短邊就是 x，另一邊就是 2。(探索)
L9 研究者：你是習慣將未知數擺在裡面嗎？
L10 小莉：沒什麼特別的動機，就是寫而已。(分析)

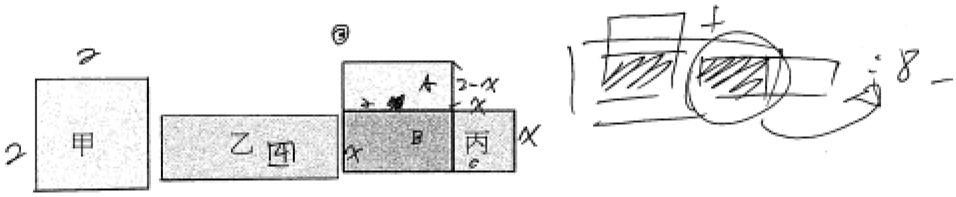
L11 研究者：你從圖中以及文字中得知到了這些線索，你馬上想到的是什麼？
L12 小莉：沒有什麼馬上想到，就照著做而已阿。(分析)
L13 研究者：那你照著算的步驟會是什麼步驟呢？
L14 小莉：你問我，我也不知道，我也不知道到底會先寫什麼？(探索)
L15 研究者：你可以說明一下，你作答的方式是什麼嗎？
L16 小莉：看圖就寫了阿，這有什麼好疑慮的。(計畫)
L17 研究者：可以說一下你的 8-2x 是哪裡來的嗎？
L18 小莉：8-2x 這不是兩塊重疊在一起嗎？(分析)
L19 研究者：對。
L20 小莉：這一塊是多算的吧(指的是重疊部份)，這兩塊加起來原本要等於 8(甲
L21 加乙的面積)，8 在把這多餘的一塊減掉就好啦。(計畫)
L22 研究者：如果沒有圖輔助你，你認為對你解題有沒有差異？
L23 小莉：會有一點差異，因為自己畫會很麻煩，視覺上的效果吧，畫出來會很
L24 糾結。(分析)
L25 研究者：那你還有其他的解題方式嗎？
L26 小莉：沒有。
L27 研究者：那你後來沒有辦法解題出來的原因，你知道嗎？
L28 小莉：就是解不出來，解出來之後不知道為什麼答案好像會變成 0 的樣子，
L29 後來就不想算了，好累。(驗證)

2.研究者對於小莉 Schoenfeld 六階段圖Ⅰ到Ⅵ的分析

首先，是閱讀部份(Ⅰ)，小莉花了 7 秒鐘，是全部時間的 26 分之 1。所以她在閱讀部份小莉習慣先看圖(L2)。

接下來是分析的部份(Ⅱ1)，小莉花了 81 秒鐘(是全部時間的 3 分之 1)在做分析。小莉看完圖之後，再去看題目，這只是小莉的一個習慣，但小莉有提到一個重點就是"圖通常沒什麼資訊"(L4)，所以她先看完圖之後，馬上就去看文字部份，然後把文字填上圖示(L4-L5)，使圖示表達的比較有意義。而從文字與圖示中，小莉得到的線索有甲邊長 2 公分，乙邊長不明但是跟甲同一個面積，然後它說丙(邊長)是 x，那重疊的深色部分短邊就是 x，另一邊就是 2(L7-L8)。由此可知，小莉的重點放在重疊的部分，並且沒有習慣將未知數固定擺在圖示中的某個位置(L10)。

甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。



(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

答案：
甲面积 = 4
乙面积 = 4
丙面积 = x^2
图③：面积 $(8-2x)$.

$(8-2x)-2x-(4-2x)=x^2$
$x^2-(8+2x)+2x+(4+2x)=0$
$x^2+2x-4=0$

Ans: $x^2+2x-4=0$

圖 4-2-2　小莉第一小題解題結果

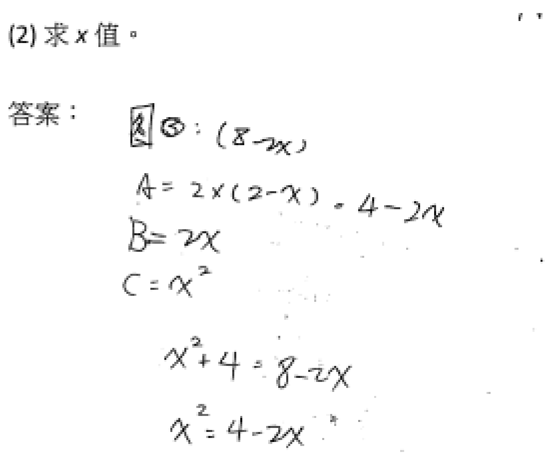
接下來是探索階段(Ⅲ)，小麗花了 26 秒鐘，是總時間的 7 分之 1。研究者問小莉從圖中以文字中得知道了這些線索，她馬上想到的是什麼(L11)？小莉說她馬上想到什麼沒有，就只是照著題目做而已(L12)，而當研究者問小莉照著算的步驟是什麼時(L13)，小莉也說她不知道應該先寫什麼(L14)。由此可知，小莉在探索解題的過程中，並沒有自己獨特的思維或者可以這麼說，小莉不清楚自己解題時的架構，就

只是順著自己當下的感覺去進行作答，因此，小莉在探索階段幾乎是以直覺來做探索的這一動作。

計畫部分(Ⅳ)，小莉花了 14 秒鐘(是全部時間的 13 分之 1)。在作解題計畫時，小莉只有看圖，因為小莉將文字的圖示標示於圖上了(L4-L5)，所以小莉直接用圖去做計算並且依照自己的直覺去作答。對於作答的方式，小莉認為是很直觀的，沒有疑慮的(L16)。

分析部分(Ⅱ2)，小莉花了 7 秒鐘(是全部時間的 26 分之 1)。由於研究者發現小莉算不出答案之後，就開始問小莉列式中的 8-2x 是哪來的，小莉直接跟研究者說，8-2x 指的是正方形甲與長方形乙重疊部分的面積。因此，可以知道小莉打算解題的方式是從重疊的部分來做一個起始點，從這一點開始進行分析的動作。

計畫部分(Ⅳ)，小莉花了 15 秒鐘(是全部時間的 12 分之 1)。她使用的方式是將正方形甲與長方形乙的面積相加，於是得到「8」，再扣除掉多餘計算的重疊部分(L20-L21)。這一種計劃方式是正確的，並且可以知道小莉保有解題的架構，只是對於解題架構的模式不慎清楚。



(2) 求 x 值。

答案： 圖⊙：$(8-2x)$

$A=2x(2-x)=4-2x$

$B=2x$

$C=x^2$

$x^2+4=8-2x$

$x^2=4-2x$

圖 4-2-3　小莉第二小題解題結果

分析部分(Ⅱ3)，小莉花了 18 秒鐘(是全部時間的 10 分之 1)。由於小莉已經有解題架構，只是不擅長或者不知如何表達出她所思考的解題架構，於是小莉回到了分析的階段。當研究者問小莉如果沒有圖輔助，她認為對解題來說有沒有差異(L22)？小莉認為是有的，小莉屬於抽象思考較為薄弱的學生，所以她認為自己畫圖的話會很麻煩，而且由於是視覺上的效果，導致會出來的圖會很糾結(L23-L24)。小莉想要表達的意思應該是對於自己所畫出圖示是依照題目所給予的方式去畫的，但是不確定她所畫的圖是不是唯一的圖示或者是對於自己所畫出的圖示不具有信心，因此導致會有內心糾結的情況。

遷移部分(Ⅵ)，小莉花了 2 秒鐘而已。她在此部分連思考都沒有，就說沒有(L26)。

最後，是驗證的部分(Ⅴ)，小莉花了 10 秒鐘。研究者問小莉知

道是否知道自己沒有解出答案的原因(L27)，小莉沒有直接的回答，而是直接說就是解不出來,解出來之後不知道為什麼答案好像會變成0 的樣子，後來就放棄，不想算了(L28-L29)。由此可知，當小莉解不出答案的時候，她會選擇放棄的步驟。

(二)小盈進行晤談分析結果

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖					占所時間的比例%
閱讀 I						2.7%
分析 II						57.4%
探索 III						34.4%
計畫 IV						0%
驗證 V						0%
遷移 VI						5.5%
時間(秒)	5	57	63	48	10	總時間 183 秒鐘

圖 4-2-4　小盈解題歷程時間序列圖

1. 小盈之逐字稿

L1 研究者：通常你看題目是先看圖還是文字？
L2 小盈：會先看文字。(閱讀)
L3 研究者：為什麼你會先看文字的部份？
L4 小盈：因為會有一些數字，然後看完題目，在代入圖裡。(分析)
L5 研究者：那你從文字與圖中得知到了哪一些線索？
L6 小盈：甲這個邊長是 2，乙是長方形，重疊的地方長邊就是 2，還有丙的邊長
L7 為 x。(分析)
L8 研究者：通常你得知到了這一些線索，你想到的是什麼？
L9 小盈：就是想到老師之前說過的一些一元二次方程式的列式方式，像是
L10 $ax^2 + bx + c = 0$ 之類的。(探索)

L11 研究者：那你是如何利用文字與圖來作答的？
L12 小盈：就把它(文字)寫上去，比較方便去得知(線索)。(探索)
L13 研究者：如果沒有圖輔助你的話，你覺得有沒有差異？
L14 小盈：會有，我會試著畫畫看那個圖出來，這樣比較容易知道重疊部份是怎
L15 麼樣。(分析)
L16 研究者：那你有其它的解題方式嗎？
L17 小盈：沒有。
L18 研究者：好，那謝謝你的幫忙。

2. 研究者對於小盈 Schoenfeld 六階段圖Ⅰ到Ⅵ的分析

首先是閱讀部份(Ⅰ)，小盈花了 5 秒鐘的時間。小盈說她會先看文字部份(L2)。在這一部份小盈所花的時間非常的少，只有五秒鐘，也許就是小盈看題目過於太快，容易忽略掉一些重要的線索以至於解題過程中十分的不順利。

而分析部份(Ⅱ1)，小盈花了 57 秒鐘。小盈在看題目看得時間非常的快，這一點我們已經從閱讀部份知道了，而在分析部份，研究者發現小盈會先看一些題目的數字，然後再代入題目中(L4)，換句話說，小盈只看題目所給予的數字部份，然後將其畫在圖上，並沒有完全的閱讀完題目就急著要作答。而小盈從題目中，只獲得甲這個邊長是 2，乙是長方形，重疊的地方長邊就是 2，還有丙的邊長為 x(L6)，忽略了最重要的甲與乙的面積相等。由於是從題目中所獲知的條件不足，導致小盈分析得不順遂。書寫部份，只在「$2x^2+x+$」就停下來了。

探索部份(Ⅲ)，小盈花了 63 秒鐘，是 3 分之 1 的總時間。這也是小盈花最多時間的一階段。由於小盈在分析題目時，她所想的是老師之前所教過的內容像是一些一元二次方程式的列式部份(L9)，因為經過了學習一元二次方程式的時間太久了，所以導致小盈沒有解題方

式來作答。但小盈還是有嘗試著將文字所提供的數字線索放在圖示上，其能比較方便得知線索(L12)，但比較可惜的是，當小盈寫上線索之後，並沒有解題架構的產生，也就是因為如此，小盈並沒有進入計畫(Ⅳ)以及驗證(Ⅴ)的階段，以至於完全空白。

分析部份(Ⅱ2)，小盈花了 48 秒鐘是全部時間的 4 分之 1。由於在探索階段小盈沒有解題架構的產生，所以小盈又回到了分析階段，在這一個階段，研究者問小盈：如果沒有圖輔助你的話，你覺得有沒有差異(L13)，小盈認為會有差異，而她選擇的方式是會將圖示給畫出來，並且從中就可以比較容易知道重疊部份可能會是長什麼的樣子(L14-L15)。

最後，在遷移部份(Ⅵ)，小盈花了 10 秒鐘而已。由於小盈沒有任何得解題架構，所以小盈沒有第一種解題方式，因此也沒有第二種解題方式。

(三)小柔進行晤談分析結果

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖									占所時間的比例%
閱讀 I	■									7.8%
分析 II		■					■			18.9%
探索 III			■		■					48.5%
計畫 IV						■				15.4%
驗證 V				■				■		8.6%
遷移 VI									■	0.7%
時間（秒）	32	23	85	25	113	63	54	10	3	總時間 408 秒鐘

圖 4-2-5　小柔解題歷程時間序列圖

1. 小柔之逐字稿

L1 研究者：通常你看題目你是先看圖還是先看文字？
L2 小柔：文字。(閱讀)
L3 研究者：為什麼？
L4 小柔：因為先看文字，再把文字的線索畫在圖上。(閱讀)
L5 研究者：那你從文字與圖中得知到了哪一些線索？
L6 小柔：1.甲和乙的面積相等；2.甲是邊長 2 公分的正方形；3.形成額外的正方
L7 形丙。(分析)

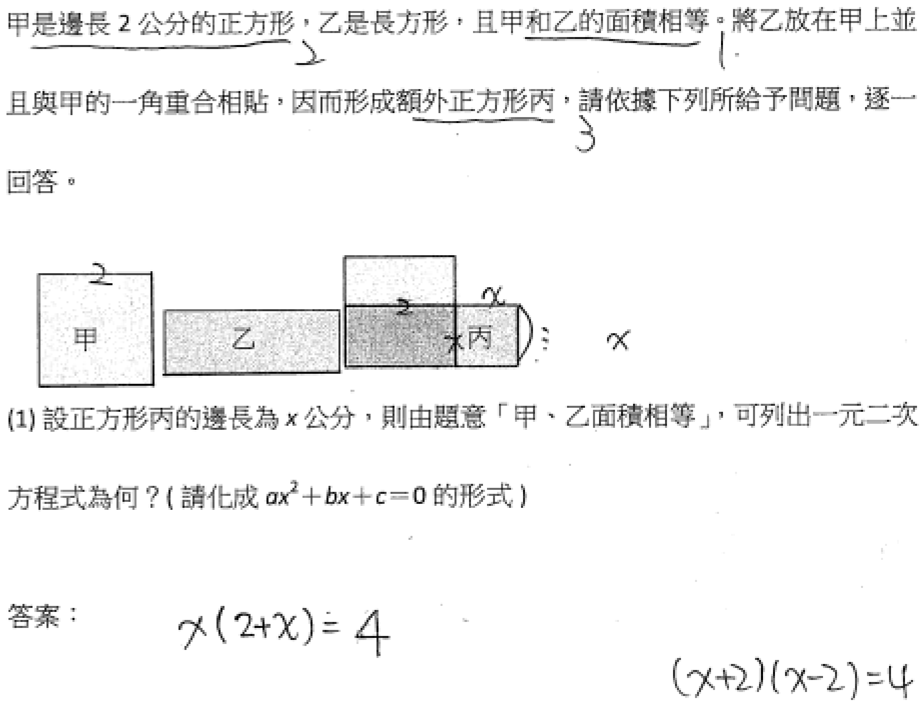
L8 研究者：那你標上這一些線索之後，你馬上想到的會是什麼？
L9 小柔：就甲和乙的面積相等，想辦法把乙的面積求出來。(探索)
L10 研究者：從你的式子中，你是由乙跟丙的關係求得出來的嗎？
L11 小柔：嗯。(探索)
L12 研究者：那你有驗證你的算式是對的嗎？
L13 小柔：沒有。(驗證)
L14 研究者：為什麼？
L15 小柔：應該算是有啦。因為這是我第二次列的式子，所以我沒有檢查第二次
L16 列的式子。(驗證)
L17 研究者：那你可以列出你的第一次式子嗎？
L18 小柔：$(x+2)(x-2)=4$。(探索)
L19 研究者：那你為什麼會列成這一個式子呢？
L20 小柔：因為這邊我沒有標(指的是丙的一邊長度)，應該說是，我標錯，我標
L21 成 2-x。(探索)
L22 研究者：你怎麼發現你的第一個式子是錯的？
L23 小柔：就覺得第一個式子很怪，然後驗證一下，發現錯了，就改成第二個式
L24 子。(探索)
L25 研究者：那你從哪裡覺得很怪？
L26 小柔：就是一直算不出來，所以覺得很怪。(探索)
L27 研究者：那你列完式子之後，你是如何作答的？
L28 小柔：就是我想要讓一邊等於 0，所以我就先把 4 移過去，因為這樣會不清
L29 楚，所以我就先把它乘進去，所以就變成 x 的平方加 2x-4 等於 0，因為這個
L30 是負 4(常數項)，如果是和的平方或是差的平方的話，2x 不可能弄成負 4(小
L31 柔要表達的意思應該是無法使用十字交乘法)，所以我就用 x 的平方加 2x 想
L32 成一個和的平方，就是 x+1 的平方。(計畫)
L33 研究者：如果你認為沒有圖輔助你，你認為有沒有差異？
L34 小柔：有。(分析)
L35 研究者：你可以說一下為什麼你覺得有差異嗎？
L36 小柔：因為我應該會看不懂文字的敘述。(分析)
L37 研究者：為什麼你會看不懂文字的敘述？
L38 小柔：因為我會看不懂題目的敘述，像是「將乙放在甲上並且與甲的一角相
L39 貼，因而形成額外的正方形丙。」(分析)
L40 研究者：所以有時候，你沒辦法理解文字的意義，所以你需要圖來幫助你作
L41 答，是嗎？
L42 小柔：對。(分析)
L43 研究者：那你有去驗證你的答案是否正確嗎？
L44 小柔：有。(驗證)
L45 研究者：那你是怎麼驗證的？
L46 小柔：就是帶進去(原題目驗證)阿。(驗證)
L47 研究者：那你有其他的解題方式嗎？
L48 小柔：沒有。
L49 研究者：那謝謝你的幫助。

2. 研究者對於小柔 Schoenfeld 六階段圖Ⅰ到Ⅵ的分析

首先是閱讀部分(Ⅰ)，小柔花了 32 秒鐘，是總時間的 13 分之 1。由於小柔閱讀的是圖文題，所以在閱讀部分，小柔先看的是文字部分(L2)，看完文字部分之後，再將文字得知到的線索標示於圖上面(L4)。

在這一部分中，小柔所做的閱讀過程並非一起閱讀圖與文字部分，而是先閱讀完文字再去將圖是輔助與文字線索，這一方法需要的是記憶力以及對於線索的充分了解性才能一次性的將文字線索給一一標註。

分析部分(Ⅱ1)，小柔花的時間是 23 秒鐘，是總時間的 18 分之 1。小柔用阿拉伯數字表示(如下圖)，得知到的線索順序分別是 1.甲和乙的面積相等；2.甲是邊長 2 公分的正方形；3.形成額外的正方形丙(L6-L7)。小柔在得知的線索部分，並非是依造題目所給予的順序去做閱讀，而是先閱讀重點部分是甲與乙的面積相等，從中開始注意到有甲以及乙，再去注意到甲是邊長兩公分的正方形，最後是額外的正方形丙的部分。在小柔分析的階段，小柔有注意到以上 3 項重點，但是忽略了乙是長方形以及乙與甲的放置部分，在這一部分，研究這將會在下面的分析(Ⅱ2)加以說明。



甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。

(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

答案： $x(2+x)=4$

$(x+2)(x-2)=4$

圖 4-2-6　小柔第一小題解題結果

在探索部分(Ⅲ1)，小柔花了 85 秒鐘，是總時間的 5 分之 1。研究者問小柔得知到了這一些線索之後，馬上小到的是什麼(L8)？小柔想到的是甲與乙的面積相等，由於已經知道甲的面積是 4，所以只需要知道乙的面積是多少即可(L9)。而小柔得知乙的面積部分是由正方形丙所得知的，而這一點是研究者觀察小柔所列出的式子所知道的，並且得到了小柔的同意(L10-L11)。所以小柔雖然沒有在分析階段將乙與甲的放置部分列為分析的線索之一，但是小柔可以從圖示上，去得知甲與乙的放置關係。

驗證部分(Ⅳ1)，小柔花了 25 秒鐘，是總時間的 16 分之 1。小柔並沒有驗算她所得知的第二個式子(L13)，因為這是小柔重新探索之

後才得到的第二個式子，所以小柔並沒有驗算第二個式子，但小柔有驗算第一個式子(L15)，由於對於第一個式子感覺到奇怪所以有進行驗證第一個式子的動作(L23)。

探索部分(Ⅲ2)，小柔花了 113 秒鐘(是總時間的 4 分之 1)，也是花最多時間的一個部分。連同探索(Ⅲ1)的時間，占了全部時間的一半。由於小柔在第一次列式之後感覺到奇怪(L26)，所以開始進行上述的驗證部分，從驗證中小柔發現她所列的第一個式子為$(x+2)(x-2)=4$(L18)，是因為小柔將丙的一邊長度標示成 2-x，所以導致算式錯誤，於是研究者問小柔為什麼會覺得第一個式子怪怪的(L25)，小柔的回應是一直算不出來，所以才覺得怪怪的(L26)。其實應該是小柔對於所列出的式子$(x+2)(x-2)=4$經由整理之後發現過於簡單(因為沒有一次項)，所以小柔認為可能在圖示的註記上出現問題(L20-L21)，所以對於列出的式子過於簡單，可能會對於小柔產生列式正確與否的疑惑，而開始重新進行探索的部分。

計畫部分(Ⅳ)，小柔花了 63 秒鐘(是總時間的 6 分之 1)。在這一個階段，小柔想起老師所教過和的平方和差的平方部分，經由觀察一次項之後決定使用和的平方公式，因而得到 x+1 的平方(L28-L32)。小柔在一元二次方程式的學習應該學得還不錯，因為小柔有觀察常數項是-4，而-4 以及一次項的係數 2 是無法使用十字交乘法來使用的，所以小柔選擇用和的平方公式來進行分析的部分。

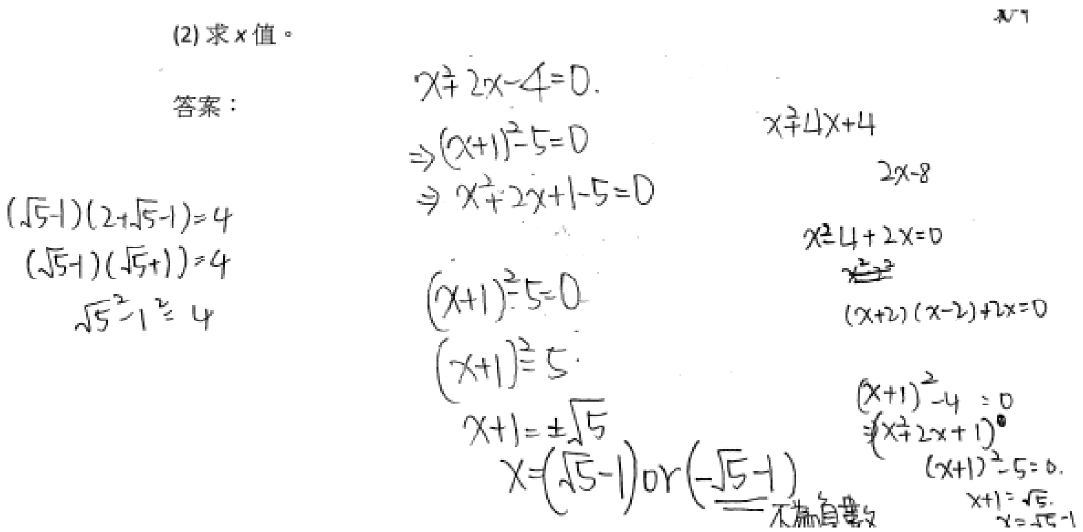


圖 4-2-7　小柔第二小題解題結果

接下來是分析部分(Ⅱ2)，小柔花了54秒鐘，是總時間的8分之1。在這一部分，延續分析(Ⅱ1)，小柔說到她看不懂文字的敘述，例如像是「將乙放在甲上並且與甲的一角重和，因而形成額外的正方形丙」(L38)，小柔因為受到文字表徵的限制，所以沒有辦法完全用題目所提供的文字線索來幫助解答，由此可知，圖示對於小柔來說是可以幫助作答的，若沒有圖示的輔助，小柔可能在閱讀題目的時候就會遇到難題，而導致沒有辦法進行分析的部分。

驗證部分(Ⅵ2)，小柔花了10分鐘，是總時間的41分之1。在驗證部分，小柔直接將利用和的平方公式所求得的兩個解帶入原式子去做一個驗證的動作(L46)，並且得知$-\sqrt{5}-1$不可能為答案，所以選擇$\sqrt{5}-1$為答案。通常學生都會直接選擇正數就當作正確答案，直接省略驗證的動作，小柔做的很好，她不是使用心算的方式做驗證的動

作，而是將第一題所求得的方程式，將負數屏除在外，直接將$\sqrt{5}-1$帶入原式子去做驗證的動作，這個驗證的動作做得很確實，使得小柔確定答案就是$\sqrt{5}-1$。

最後是遷移部分(Ⅵ)，小柔花了 3 秒鐘而已。這是小柔所花最短的時間，小柔並沒有使用任何的其他的方式來解題(L48)。由於小柔對於驗證的部分做得很確實，所以小柔確定她的答案是正確的，以至於不需要其他的解題方式來解題。

(四)、綜合圖文題三者結果(小莉、小盈以及小柔)：

1.解題歷程成功與失敗

	小莉	小盈	小柔
第一小題	成功	失敗	成功
第二小題	失敗	失敗	成功

三位同學做圖文題表現不一，其中一位全成功，一人第一小題對而已，第三位兩題均不成功。

2. 圖文題三位同學解題歷程

階段	小莉 Schoenfeld 六接段時間序列圖(1.成功；2.失敗)									時間比例
閱讀	■									3.9%
分析		■			■		■			58.8%
探索			■							14.4%
計畫				■		■				16.1%
驗證									■	10.0%
遷移								■		1.1%
時間	7	81	26	14	7	15	18	2	10	100%
階段	小盈 Schoenfeld 六接段時間序列圖(1.失敗；2.失敗)									時間比例
閱讀	■									2.7%
分析		■		■						57.4%
探索			■							34.4%
計畫										0%
驗證										0%
遷移					■					5.5%
時間	5	57	63	48	10					100%
階段	小柔 Schoenfeld 六接段時間序列圖(1.成功；2.成功)									時間比例
閱讀	■									7.8%
分析		■					■			18.9%
探索			■		■					48.9%
計畫						■				15.4%
驗證				■				■		8.6%
遷移									■	0.7%
時間	32	23	85	25	113	63	54	10	3	100%

小莉：小莉在分析段花了做多的時間，占了全部時間的 58.8%。小莉所做的圖文題當中，她認為圖並沒有給予任何的條件(L4)，所以當她看完圖之後，會將文字畫記在圖的旁邊。小莉的作答方式很直接，就是將文字畫上圖之後，就馬上開始進行解題，腦袋中並沒有多加的溝思如何建立解題架構(L11-L16)。而在解題過程中，小莉是利用甲與乙有一塊重疊的部份，那一塊面積就是 2x，因此，只要將全部的甲與乙面積和減去 2x，就沒有重複計算的部份，而小莉就是使用這種方式來解題的(L17-L22)。由於小莉一直在進行分析階段，看能不能找出解題的方法，很可惜小莉沒有找到好的解題方法玖以驚失去的計算題目的信心，於是就放棄作答(L27-29)。

小盈：花做多時間的部份是 57.4%的總時間。小盈習慣先看文字之後，再將文字帶入圖中(L4)，小盈的作答方式很直接，就是直接將文字現所帶入圖中進行探索的動作，但小柔在探索時，將甲與乙重疊部份的長度看成是 2，所以在探索上，就已經出現不正確的條件了(L6)。也就是因此，小盈一直沒有好的列題方式，以至於到最後，都是完全空白。

小柔：小柔花做多時間的階段是探索部份花了總時間的 48.9%，而這一點是小柔與小莉、小盈不同之處。小柔是第一以及第二小題解題成功的同學，所以在探索階段花的時間比較多。小柔跟小莉、小盈一樣都會將文字畫上圖示來輔助作答(L2-L3)。小柔在分析階段，有特別注意到的一小題所給予的線索「甲和乙的面積相等」，所以就以乙的

面積當作想法為出發點去作探索的階段(L9-L11)。小柔其實並非一開始就列對式子(L18)，後來經由計算之後發現式子怪怪的，所以從新回到探索階段，而發現自己所列的第一個式子是錯的(L20-L26)，於是列出了第二個式子。小柔認為有圖輔助會對解題有幫助(L34)，因為小柔有看不懂文字表徵中的一些條件，而從圖示中可以直接看出文字表徵所要表達的意思(L33-L42)，所以小柔認為圖示表徵是有幫助解題的。最後，小柔有進行驗證的步驟(L44)，小柔做的驗證步驟做的很確實，就是直接將答案帶入原式子去做一個驗證的動作(L46)，而不是單純的檢驗過程是否正確，這樣的確能更加地確定自己所算的答案是正確的，小柔因此也得到的全對的結果。

3.綜合三人的解題結果

(1).雖然首先看的部份是不盡相同，但會直接從文字部份所得到線索表示於圖示上(小莉 L4-L5；小盈 L4；小柔 L4)。小莉首先看得是圖示部份(L2)；小盈以及小柔首先看得是文字部份(小盈 L2：小柔 L2)。

(2).三位同學均花了最多的時間在分析部份上；而小柔解題成功，所以小柔花了最多的時間在探索上，由此可知，解題成功與否跟「分析、探索」階段有關係。

(3).三人皆稱圖示有幫助(小莉 L23；小盈 L34；小柔 L36)，如果沒有圖示輔助作答的話，都會自己會進行畫圖得這一步驟，但對於自己

所畫出的圖，不一定具有絕對正確的信心。

(4).小莉、小盈以及小柔都沒有進行遷移階段(小莉 L26；小盈 L17；小柔 L48)。

二、文字題：小羽、小婷以及小雅所作答的題目。

甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。

(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

(2) 求 x 值。

文字題晤談對象共 3 名，分別為小羽、小婷以及小雅。

(一)正式施測學生小羽進行晤談分析結果

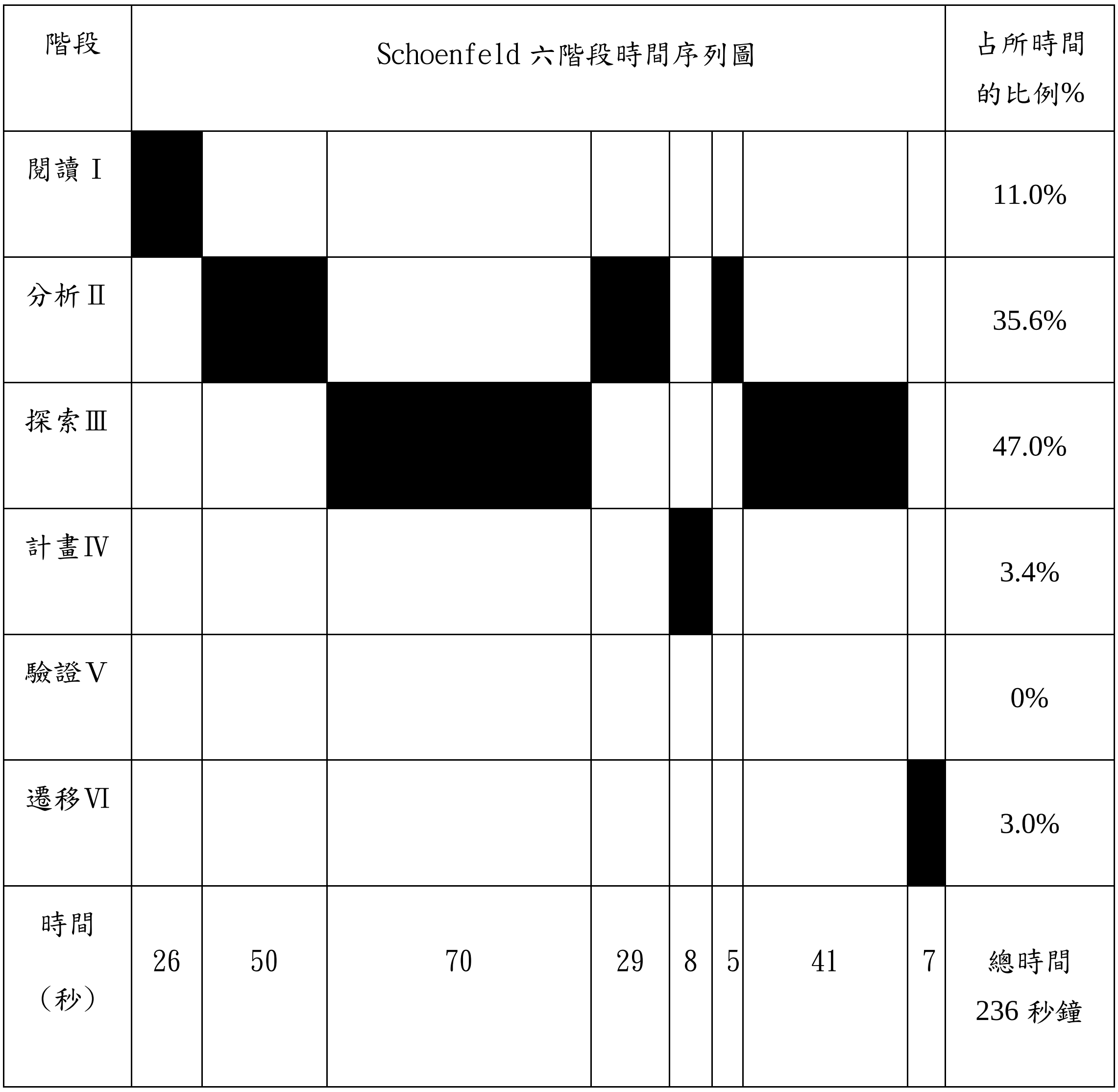


圖 4-2-8　小羽解題歷程時間序列圖

1.小羽之逐字稿

L1 研究者：通常你是怎麼看題目的？
L2 小羽：通常先看題目裡面數字的部份，如果有圖形的話，就會一邊看描述(文
L3 字描述)一邊把數字標上去(圖示)，如果沒有的話，就自己想辦法畫。(閱讀)
L4 研究者：那你從題目中的得知到了哪一些線索？
L5 小羽：就邊長的部份還有面積。(分析)
L6 研究者：可以註記一下嗎？
L7 小羽：甲邊長 2 公分的正方形，所以面積就是 4，乙是長方形面積也是 4，長
L8 方形有一邊的長一定小於 2，然後面積相等，所以長方形一定會多出一塊，因
L9 為它們要重合，還要想辦法把多出來這一塊認成正方形。(分析)
L10 研究者：你找到了這一些條件，你馬上想到的是什麼？

L11 小羽：一開始先畫圖，但是不知道怎麼畫出丙為正方形，所以先畫出丙，再
L12 畫出其他的邊。(探索)
L13 研究者：那你為什麼會列出這一個式子？
L14 小羽：因為它說正方形丙的邊長是 x，所以乙的面積是 x+2 再乘以 x，會等
L15 於 x 的平方加 2x 減 4 等於 0。(計畫)
L16 研究者：所以你是用乙的面積去扣掉甲的面積嗎？
L17 小羽：我是直接看長方形，我沒有管甲，丙不是乙的一部份嗎？(探索)
L18 研究者：丙是乙的一部份沒錯，那你的減 4 是哪裡來的。
L19 小羽：其實本來是 x 的平方加 2x 等於 4，但是題目要我換種形式，所以我才
L20 寫成 x 的平方加 2x 減 4 等於 0。(分析)
L21 研究者：那你的 4 是哪來的？
L22 小羽：它就是甲的面積。(分析)
L23 研究者：所以你是用甲跟乙的面積相等去作的嗎？
L24 小羽：嗯。(計畫)
L25 研究者：那你認為有圖來幫助你，會更有幫助嗎？
L26 小羽：會有幫助阿。(分析)
L27 研究者：可以說說看為什麼會有幫助嗎？
L28 小羽：因為要畫圖形就會花了很多的時間，一開始都想不出來。(探索)
L29 研究者：為什麼一開始會想不出來？
L30 小羽：因為我比較沒有辦法，就是沒什麼想像力，所以就很難想。(探索)
L31 研究者：如果沒有附圖的話，你認為困難度會提升嗎？(探索)
L32 小羽：會比較難。
L33 研究者：那你有其它的解題方式嗎？
L34 小羽：沒有，因為算不出來。
L35 研究者：好，那謝謝你的幫忙。

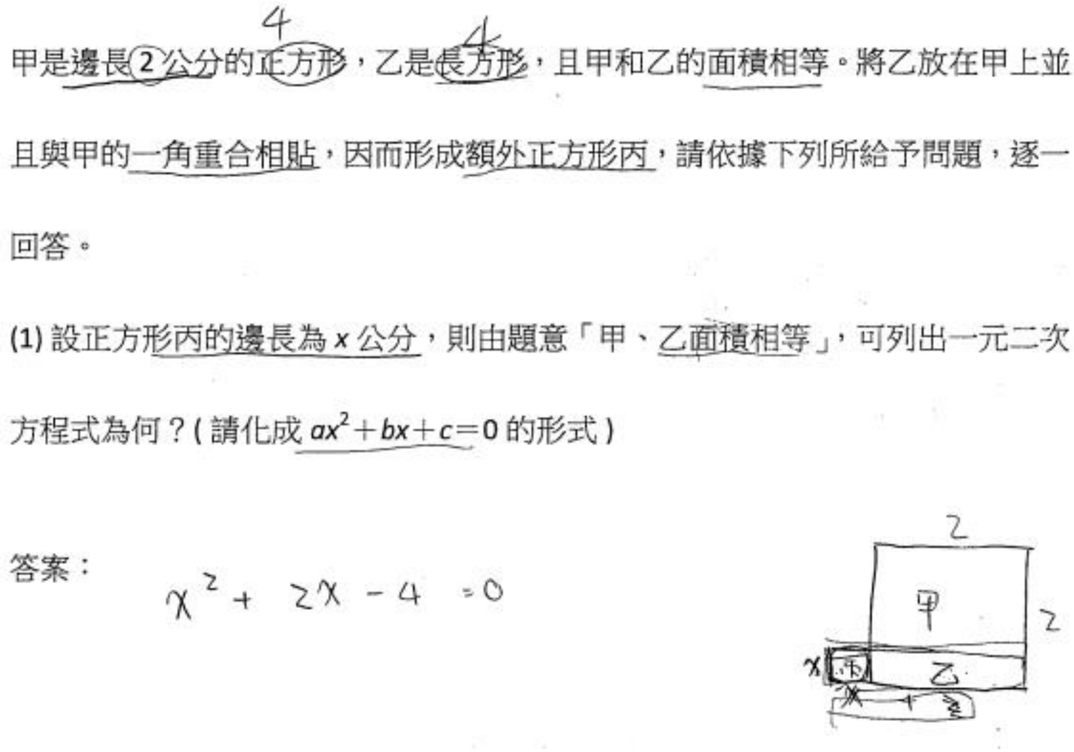
2. 研究者對於小羽 Schoenfeld 六階段圖Ⅰ到Ⅵ的分析

首先是閱讀部份(Ⅰ)，小羽花了 26 秒鐘，是全部時間的 9 分之 1 左右。在閱讀部份，小羽通常先看題目裡面數字的部份，如果有圖形的話，就會一邊看描述(文字描述)一邊把數字標上去(圖示)，如果沒有的話，就自己想辦法畫(L2)。由此可知，對於小羽來說，圖示是讀題不可或缺的部份，小羽習慣將圖畫出來，若沒有圖示輔助作答的話，對於小羽閱讀題目的部份是不習慣的。

再來是分析部份(Ⅱ1)，小羽分析的時間是 50 秒鐘(占總時間的 5 分之 1)。小羽從題目中注意到的線索是邊長部份還有面積部份(L5)，像是甲邊長 2 公分的正方形，所以面積就是 4，乙是長方形面積也是 4，長方形有一邊的長一定小於 2，然後面積相等，所以長方形一定

會多出一塊，因為它們要重合，還要想辦法把多出來這一塊認成正方形(L7-L9)。在這分析的部份，小羽分析的很好，有注意到一定會多出一塊丙，而這一塊丙的是一塊正方形，從這一點中可以發現小羽正在發展抽象思考的能力，只是還不健全，這一點在探索部份會加以說明。

探索部份(Ⅲ)，小羽花了 70 秒鐘，是全部時間的 3 分之 1。在探索時，小羽會先畫圖，但是小羽畫圖的方式一開始是畫出正方形甲，在注意到甲與乙的一角重合，所以有畫出多出來的一塊丙，但所畫出的這一塊丙並不是正方形，而是長方形，所以經由多次的嘗試之後，小羽決定先畫出正方形丙再連接邊長得到正方形甲與長方形乙(L11-L12)。所以小羽的思考方式是從丙為正方形出發，這一點與其他人不同，而我們可以從小羽說的正方形丙的邊長是 x，所以乙的面積是 x+2 再乘以 x，會等於 x 的平方加 2x 減 4 等於 0(L14-L15)。這一點小羽利用的是丙的面積是 x 平方，重疊部份是 2x，利用的是丙與重疊部份的面積和是乙的面積，而因為得知乙的面積等於 4，所乙丙的面積加上重疊部分面積扣掉以的面積就等於 0，這一點的想法很特殊，因為題目有特別括號甲與乙的面積相等，而小羽並沒有使用甲和乙的面積相等開始探索，這種方式，不失為一種好方法。



甲是邊長2公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。

(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

答案：　$x^2+2x-4=0$

圖 4-2-9　小羽第一小題解題結果

而分析部份(Ⅱ2)，小羽花了 29 秒鐘，是全部時間的 8 分之 1 左右。由於小羽做完探索階段，應該進入計畫階段，但由於小羽對於列完式子之後就沒有解題方式，所以小羽又回到的分析方式。這時，小羽注意到的是4這一個數字是甲的面積(L22)，而這多注意到的部份，很可惜的沒能起幫助小羽解題的作用。

計畫階段(Ⅳ)，小羽花了 8 秒鐘的時間，是全部時間的 30 分 1。小羽經由探索階段多注意到了甲的面積是 4(L22)，但沒有更好的計畫方法去執行解題，以至於在計畫階段花了比較少的時間 8 秒鐘。

(2) 求 x 值。

答案：

$$x(x+2)=4$$

$$x+2=\frac{4}{x}$$

$$\frac{4}{x}-x=2$$

圖 4-2-10　小羽第二小題解題結果

分析階段(Ⅱ3)，小羽花了 5 秒鐘，是全部時間的 47 分之 1。由於沒有任何的解題想法，所以小羽回到的分析階段，在這一階段研究者問小羽你認為有圖來幫助你，會更有幫助嗎(L25)？研究者期許小羽能從圖中想到方式去作答，只是很可惜的是，小羽並沒有想到解題方式，但是已經將重點擺在圖示上，只是還沒有解題方式。

在探索部份(Ⅲ2)，小羽花了 41 秒鐘，是全部時間的 6 分之 1 左右。由於研究者的提示，小羽將注意力轉移到了圖示上，也說了有圖會更有幫助(L26)，小羽說她認為有圖會幫助作答，因為小羽比較沒有想像力所以在畫圖時，需要花比較多的時間在畫圖上(L29-L30)，並且說題目若沒有畫圖的話，會提升題目的困難度(L32)。

最後是遷移部份(Ⅵ)，小羽花了 7 秒鐘的時間(占了總時間的 34 分之 1)。雖然小羽分析題目的方式沒有依照題目所給予的提示去進行，但當研究者在問有沒有新的解題方式時，小羽依舊沒有其他的解題方式，因為算不出來(L34)。

(二)正式施測學生小婷進行晤談分析結果

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖										占所時間的比例%
閱讀Ⅰ	■										12.2%
分析Ⅱ		■		■		■				■	44.9%
探索Ⅲ			■					■			14.7%
計畫Ⅳ					■						10.2%
驗證Ⅴ							■				15.9%
遷移Ⅵ									■		2.0%
時間（秒）	30	56	14	8	25	28	39	22	5	18	總時間 245 秒鐘

圖 4-2-11　小婷解題歷程時間序列圖

1.小婷之逐字稿

L1 研究者：請問一下，你通常是怎麼看題目的？
L2 小婷：就是第一行看到最後一行，如果有圖的話，會看著圖一起作答。(閱讀)
L3 研究者：那像這一題沒有圖呢？
L4 小婷：就是看比較重點的字，像是甲和乙的面積相等、一角重合相貼。(閱讀)
L5 研究者：那你從題目中得知到了哪一些線索？
L6 小婷：像邊長 2 公分的長方形(正方形)，面積就是 4，乙是長方形，如果是(邊
L7 長)整數的話就是 1 乘 4 或 2 乘 2，因為它是長方形，所以不會是 2 乘以 2。(分
L8 析)
L9 研究者：那如果答案不是整數呢？
L10 小婷：我就會想不到。(分析)
L11 研究者：通常你看到這一些條件，你想到的會是什麼？

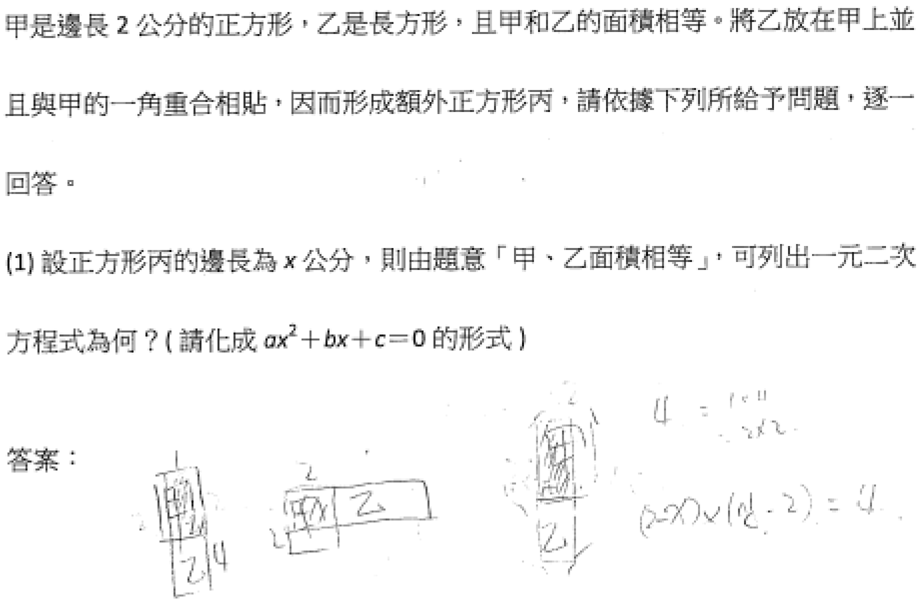
L12 小婷：就是先畫圖，再去求答案。(探索)
L13 研究者：那你為什麼要選擇這樣做？
L14 小婷：這樣子可以讓題目變清楚，知道自己要求什麼。(分析)
L15 研究者：你可以說一下你的想法架構嗎？
L16 小婷：我以前是看題目看到最後，就直接作答；國中之後，因為圖比較多，
L17 開始去畫圖，因此如果求面積的話，以圖去作答，會比較知道自己要求的東
L18 西是什麼。(計畫)
L19 研究者：如果有圖輔助你，你覺得會更有幫助嗎？
L20 小婷：一定會。(分析)
L21 研究者：可以說說看為什麼有圖會對你比較有幫助嗎？
L22 小婷：如果沒有圖的話，你只能去想像那個，但求出來的答案就不太會確定
L23 它是不是正確的。(分析)
L24 研究者：所以你平常會去作驗證的這個動作囉？
L25 小婷：嗯。(驗證)
L26 研究者：那這一題你有作驗證這個動作嗎？
L27 小婷：因為沒有算出來，所以沒有作驗證的這個動作。(驗證)
L28 研究者：那你有去檢查你的算式是正確的嗎？
L29 小婷：這個算式我只是先把它列出來，因為我只知道大部份的條件，所以就
L30 是先列而已。(驗證)
L31 研究者：當你畫圖之後，你發現不太好解，所以你回到之前讀題的情況嗎？
L32 小婷：對。(探索)
L33 研究者：那你回到讀題的情境，你依舊沒有解題的方式嗎？
L34 小婷：對。(探索)
L35 研究者：那你有其他的解題方式嗎？
L36 小婷：就是只能猜數字吧。(遷移)
L37 研究者：那如果你用整數猜不出來呢？
L38 小婷：如果不是整數的話，就會猜幾個有小數點的，但這一題比較難，所以
L39 猜不出來。(分析)
L40 研究者：好，那謝謝你的幫忙。

2. 研究者對於小婷 Schoenfeld 六階段圖Ⅰ到Ⅵ的分析

首先是閱讀部份(Ⅰ)，小婷花了 30 秒鐘，是總時間的 12 分之 1。由於小婷是做文字題，所以小婷讀題的習慣是從第一行閱讀到第二行(L2)，然後如果有圖示輔助的話會連圖一起看(L2)，而這一題沒有圖示來輔助小婷，除了從第一行看到最後一行之外，還會特別注意到一些重點部份，像是甲與乙的面積相等以及一角重合相貼的部份(L4)。由此可知小婷在閱讀題目時，會從第一行閱讀到最後一行，但在閱讀的過程中，會去注意到可以幫助解題的線索。

分析部份(Ⅱ1)，小婷花了 56 秒鐘，是總時間的 6 分之 1，也是

花最多時間的一部份。小婷在分析時，所注意到的重點像邊長兩公分的正方形面積就是 4，乙是長方形，如果邊長是整數的話就是 1 乘 4 或者 2 乘 2，因為是長方形，所以就不會是 2 乘 2(L6-L8)。在分析的第一步驟，小婷犯了兩個錯誤，第一個是長方形也可以是 2 乘 2，而第二個錯誤，是小婷一開始想到的解法應該是十字交乘法，因為十字交乘法就是利用常數項的乘積來做分析，而在於一元二次方程式中，學習的方式不止是十字交乘法，還有其他方法。而小婷說如果答案不是整數的會想不到(L10)，由此可知，小婷對於一元二次方程式習慣使用的方式是十字交乘法。還有一點值得注意的是，小婷有依照文字的線索話出圖示來，但並沒有辦法從文字或者是圖示中想出題目所需要的列式模式。


甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。

(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

答案：

圖 4-2-12　小婷第一小題解題結果

在探索部份(Ⅲ1)，小婷花了 14 秒鐘，是總時間的 25 分之 1。在探索的第一階段，小婷得知到了這一些線索之後，會開始畫圖，並且在畫完圖之後會開始進行計畫階段(L12)。很可惜的是，小婷在畫完圖之後，並沒有良好的計畫階段，可能是由於小婷在分析部份一直沒有注意到甲與乙的面積相等這一個線索，所以收集的線索不完全，乙至於沒有辦法列出正確的式子。

在分析階段(Ⅱ2)，小婷花了 8 秒鐘，是全部時間的 43 分之 1。如同上述的分析部份，小婷會畫出圖示來輔助作答(L12)，研究者問小婷為什麼會選擇這樣做(L13)？小婷的回答是這樣可以讓題目變得清楚，知道自己所要求的是什麼(L14)。小婷這種畫圖的方式的確可以使自己的思想架構具體化，只可惜小婷已經將題目由文字轉成圖示還是沒辦法成功的列出正確的式子。

接下來是計畫部份(Ⅳ)，小婷花了 25 秒鐘，是總時間的 14 分之 1。在計畫部份，由於這一題小婷沒有計畫部份，所以小婷說出了她所習慣的計畫部份。在國中之前，小婷習慣看題目看到最後就直接作答(L16)，但到了國中之後由於有圖的題目比較多，所以對於沒有圖的題目開始養成習慣去畫圖(L16-L17)，尤其是需要求面積的題目，更需要有圖來輔助，這樣會更清楚題目所要表達的意思(L17-L18)。因此可以知道對於小婷來說，上了國中之後，因為數學題型的轉換，導致小婷對於自己解題方式也跟著轉換，而這種轉換的成功與否是必需要看題目的給予以及自己有沒有辦法畫出符合題目要求的圖示才

能夠作決定的。

分析部份(Ⅱ3)，小婷花了 28 秒鐘，是總時間的 12 分之 1。由於小婷沒有辦法從題目中得知到完整的式子，所以回到的分析階段，在這階段研究者問小婷有沒有圖的差異(L19)，小婷的回應是一定會有差異(L20)。小婷說到如果題目沒有圖示的話，在國中階段，只能憑空去想像抽象的圖示，這樣對於求出來的答案會不確定它是否正確(L22-L23)。圖示對於小婷來說不只可以幫助作答，更可以從中去檢驗自己所算出來的答案是否正確。因此，小婷在作沒有圖示的數學題目時，很可能只是很單純的在作計算的這一個動作，而沒有將計算出來數字作一個與題目的連結。

驗證部份(Ⅴ)，小婷花了 39 秒鐘，是總時間的 9 分之 1。小婷有說到平常她會作驗證的這一個動作(L24-L25)，但是因為這一題並沒有算出來，所以沒有作驗證的這個動作(L27)，因此研究者再問有沒有作算式的驗證動作(L28)，小婷的回應是她只是知道大部份的條件，所以小婷只列出式子(L29-L30)。所以小婷也沒有驗證算式是否正確的這一個動作。

探索部份(Ⅲ2)，小婷花了 22 秒鐘，是總時間的 16 分之 1。在這階段，小婷因為花了圖示還是得不出算式，所以回到了閱讀的部份去進行探索階段(L31-L34)。很可惜的是，就算回到了閱讀題目的情境下，小婷依然沒有注意到甲與乙的面積相等這一個線索，所以沒有辦

法完整的列出式子，只能到達分析題目的階段，以至於完全空白。(圖 4-2-13)


(2) 求 x 值。

答案：

圖 4-2-13 小婷第二小題解題結果

遷移部份(Ⅵ)，小婷花了 5 秒鐘，是總時間的 69 分之 1，這也是小婷花作多時間的一個部份。小婷馬上回答她會選擇猜數字來選擇出答案(L36)。這一部份的猜數字，並不是利用常數項的部份來進行猜數字的部份(因為小婷沒有列出正確的一元二次方程式)，而是選擇直接帶入比較常見的整數部份，這就是小婷的遷移部份，雖然是一種大海撈針的方式也不夠精密，但這也算是除了學校所教的方式之外，有種不算好用但是可行的一種方式。

最後是分析部份(Ⅱ4)，小婷花了 18 秒鐘，是總時間的 19 分之 1。小婷說到如果猜不出整數部份，會選擇帶入幾個常見具有小數點的數字，但由於這一題比較困難，所以猜不到答案是什麼(L38-L39)。小

婷由於一直無法得到式子，所以一直回復到分析的部份來幫助作答，但一直被忽略的重點甲與乙的面積相等終究還是沒被小婷所注意到，所以當文字轉換成圖示時，線索的收集完整性跟題目有沒有給予圖示幫助作答，都有很大的影響。

(三)正式施測學生小雅進行晤談分析結果

階段	Schoenfeld 六階段時間序列圖									占所時間的比例%
閱讀Ⅰ	■									12.7%
分析Ⅱ		■					■			38.6%
探索Ⅲ			■							11.2%
計畫Ⅳ				■				■		15.3%
驗證Ⅴ					■				■	16.8%
遷移Ⅵ						■				5.3%
時間（秒）	43	73	38	45	23	18	58	7	34	總時間339秒鐘

圖 4-2-14　小雅解題歷程時間序列圖

1.小雅之逐字稿

L1 研究者：通常你是怎麼看題目的，可以說看看嗎？
L2 小雅：就是比較偏向看數字還有一些重點之類的。(閱讀)
L3 研究者：數字指的是什麼？
L4 小雅：就是邊長那一類的，還有例如這一題的面積(甲與乙)相等，將這一些
L5 綜合起來，之後就是畫圖。(閱讀)
L6 研究者：那你從題目當中得知道了哪一些線索？
L7 小雅：第一個是甲是正方形邊長是 2，然後乙是長方形，甲跟乙又面積相等，
L8 所以乙那個長方型的面積就會是 4，然後乙又放在甲上面跟一個角重疊，形成
L9 一個正方型丙，丙的邊長是 x。(分析)

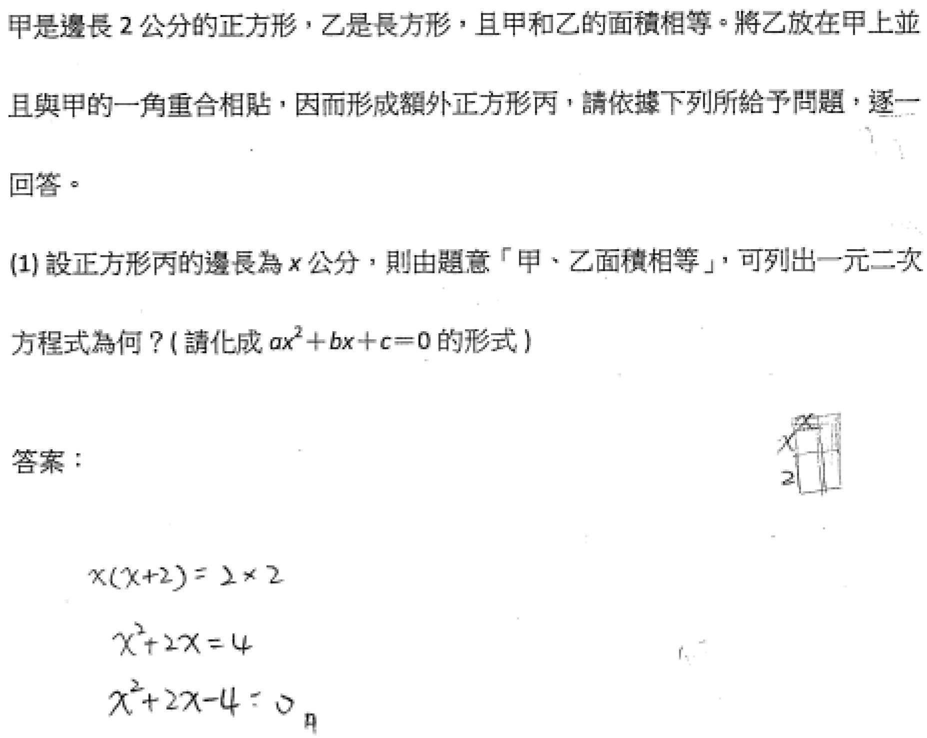
L10 研究者：你得到了這一些線索，你馬上想到的會是什麼？
L11 小雅：沒有，就是直接開始作答。(探索)
L12 研究者：那請問一下你是怎麼作答的？
L13 小雅：就乙上面這個邊是 x，丙的面積是 x 乘以 x，(乙)比較長的這一個邊
L14 就是 x+2，把乙的面積算出來之後會等於甲的面積，所以 x 乘以 x 加 2 會等
L15 於 4，然後再把它化簡成這個樣子($x^2+2x-4=0$)。(計畫)
L16 研究者：那你有驗證你的步驟是對的嗎？
L17 小雅：沒有，算的時候就已經知道差不多的樣子，所以不用檢查。(驗證)
L18 研究者：你打算怎麼解出你所列的式子？
L19 小雅：我本來打算用十字交乘法，然後發現沒辦法，於是開始想有幾個解法，
L20 然後有一點忘記，最後，想出來就是用公式解，然後就把它算出來。(遷移)
L21 研究者：如果有圖幫助你，你覺得會更有幫助嗎？
L22 小雅：有可能會混淆你(解題者)，最好的方式應該是重新畫一個吧。(分析)
L23 研究者：那你從第一個式子到最後的答案，你是怎麼做的？
L24 小雅：是用公式解。(計畫)
L25 研究者：那你有驗證你的答案是對的嗎？
L26 小雅：是有反覆的算了一次，然後得到答案不可能是負的，所以它($-2-2\sqrt{5}$)
L27 不可能是答案，然後這個加(-2 加$2\sqrt{5}$)起來是正的，所以答案就是這一個
L28($-2+2\sqrt{5}$)。(驗證)
L29 研究者：好，那謝謝你的幫忙。

2. 研究者對於小雅 Schoenfeld 六階段圖Ⅰ到Ⅵ的分析

首先是閱讀部分(Ⅰ)，小雅花了 43 秒鐘，是總時間的 8 分之 1。在閱讀時，小雅習慣偏向看文字中的數字以及重點之類的，而其數字部分在這一題來說指的是邊長(L2-L4)，而重點部分在這一題來說就例如是甲與乙的面積相等之類的(L4)，小雅習慣將這一些重要的內容收集起來之後，再將這一些線索畫成一個圖(L5)。這也代表著小雅並沒有將所有的文字都看過一遍，而是只是將解題所需要的重點集合起來，進而去畫出圖示再輔以收集到的重點，這就完成了小雅的閱讀題目部分。

分析部分(Ⅱ1)，小雅花了 73 秒鐘，是總時間的 5 分之 1 也是花了最多時間的一個階段。在這一個階段，小雅所收集到的線索是第一個甲是正方形邊長是 2，然後乙是長方形，甲跟乙又面積相等，所以乙那個長方型的面積就會是 4，然後乙又放在甲上面跟一個角重疊，

形成一個正方形丙，丙的邊長是 x(L7-L9)。小雅是利用題目所給予的順序，然後收集解題所需要的重點加以集合，在這一個階段，小雅不只分析了題目所給予的線索，而且一邊分析題目所給予的線索就一邊開始畫圖，然後將圖示標上從文字線索中得知道的文字線索。



甲是邊長 2 公分的正方形，乙是長方形，且甲和乙的面積相等。將乙放在甲上並且與甲的一角重合相貼，因而形成額外正方形丙，請依據下列所給予問題，逐一回答。

(1) 設正方形丙的邊長為 x 公分，則由題意「甲、乙面積相等」，可列出一元二次方程式為何？(請化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式)

答案：

$x(x+2)=2\times 2$

$x^2+2x=4$

$x^2+2x-4=0$

圖 4-2-15　小雅第一小題解題結果

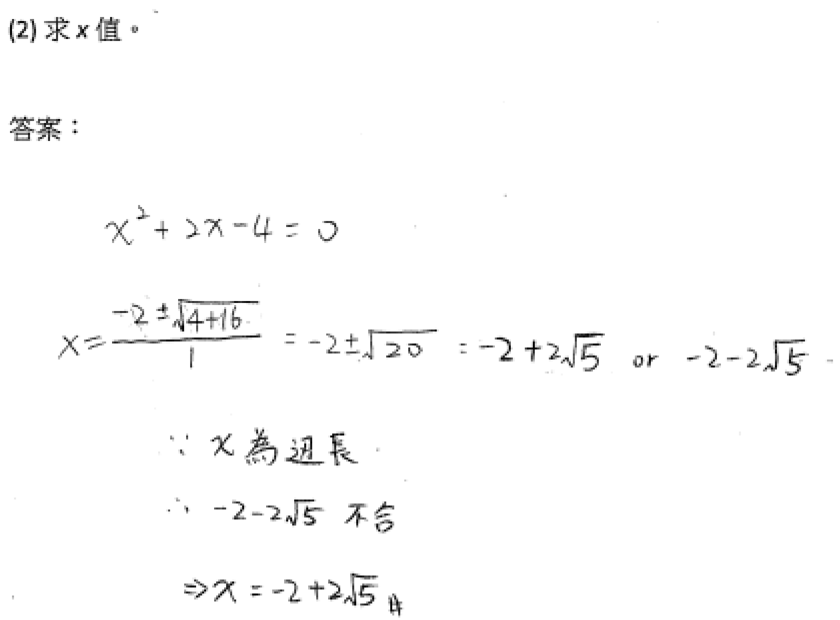
探索階段(Ⅲ)，小雅花了 38 分鐘，是全部時間的 9 分之 1。在這一些段小雅並沒有進行探索的動作而是直接開始作答(L11)。由於小雅在分析的Ⅱ1 就已經進行了畫圖的動作，小雅已經將分析與探索的階段結合在一起，所以在這一階段，小雅沒有任何的直接想法，就進入了計畫的階段。

在計畫階段(Ⅳ1)，小雅花了 45 秒鐘，是全部時間的 8 分之 1。在計畫階段，小雅首先利用了丙是正方形且邊長是 x，進而去得知乙長方形的面積用丙所得知道的訊息是 x 乘上 x+2，再利用已與甲的面積相等，而甲的面積等於 4，因此，列出了第一題的答案(L13-L15)。在這一方面，小雅沒有從題目所給予的甲與乙的面積相等出發，而是選擇由題目所給予的丙的邊長是 x，再進而去得知到第一題的算式，因此可以知道，原題目所給予的順序是可以給予解題者做一項參考，但不可否認的，在配合題的部分，小雅選擇用原題目所給予的資訊做解題的分析開端而不是配合題第一題所給予的甲與乙的面積相等，由此可知，對於題目所給予的條件，解題者可以選擇自己熟悉的讀題方式來選擇如何開始作答，而並非全盤受到題目所給予的線索所限制。

在驗證部分(Ⅴ)，小雅花了 23 秒鐘，是全部時間的 15 分之 1。小雅在做驗證第一題的時候，事實上她並沒有做驗證的步驟，而是由於小雅在列式時，就已經對於自己的列式沒有感受到懷疑，所以她直接忽略了檢驗列式的這一個步驟(L17)。由於小雅是屬於資優生，所以在學習的過程中，小雅所面臨到的困難比普通的學生還要來的少，所以小雅在解題時，較具有信心，所以對於檢驗列式是否正確，小雅不需要去做驗證，而是確定一開始的列式正確，就足夠了。

而遷移部分(Ⅵ)，小雅花了 18 秒鐘，是全部時間的 19 分之 1。在遷移部分，小雅一開始是打算使用十字交乘法來解題(L19)，後來發現沒有辦法用十字交乘法來解開這一題，於是開始思索有沒有其他

的方式可以來解這一題，小雅想到的方式是公式解(L19-L20)。在這一題，小雅想到的方式並沒有錯，因為公式解的確可以解決任何的一元二次方程式的問題，但很可惜的是，小雅對於公式解的熟悉程度還不構，雖然完成了公式解的分子部分，卻忘了將分母部分乘以 2，於是導致解題的錯誤產生。


(2) 求 x 值。

答案：

$$x^2+2x-4=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{1}=-2\pm\sqrt{20}=-2+2\sqrt{5}\ \text{or}\ -2-2\sqrt{5}$$

∵ x 為邊長

∴ $-2-2\sqrt{5}$ 不合

$\Rightarrow x=-2+2\sqrt{5}$ #

圖 4-2-16　小雅第二小題解題結果

分析部分(Ⅱ2)，小雅花了 58 秒鐘，是全部時間的 6 分之 1。在這個步驟，研究者問小雅如果有圖輔助你，你覺得會更有幫助嗎？(L21)，小雅的回答是可能會導致混淆的情形產生，所以她認為的方式最好是自己畫一個圖示來幫助自己(L22)。這一個問題，跟大家所回答的答案不一樣，研究者有問小雅為什麼會這樣的想，小雅的回答是「因為文字給予的條件會讓她直接的想到圖示，而這個圖示與題目所給予的圖示若是相同的，則會有幫助；若是不相同，對小雅而言會

產生混淆的情況。」在這一點上，小雅的確與一般學生有所不同，小雅會從文字上去做思考而得到自己心目中的圖示，而對於題目所給予的圖示若不相同，則會產生令小雅困惑的地方。這代表著小雅可以直接從文字的線索上面去作答，而不一定需要圖示的輔助，但換言之，若有圖示的輔助，小雅感到困惑，這也代表著小雅對於兩者圖示的同構性沒有完全的分辨清楚。但小雅可以直接從文字提示作答，就已經是很令人感到雀躍的天分。

計畫部分(Ⅳ2)，小雅花了 7 秒鐘，是總時間的 48 分之 1 來做第二階段的計畫。當小雅列出第一題的式子之後，小雅想到的解法是公式解(L24)，所以小雅直接套上公式解的解法來算出答案。而對於公式解的確認部分，小雅並沒有完全的熟悉公式解的解法或者是忘了公式解的公式部分，所以導致分母少乘上了 2 這個部分。

最後是驗證部分(Ⅵ2)，小雅花了 34 秒鐘，是全部時間的 10 分之 1。小雅所得到的答案是$-2\pm2\sqrt{5}$，小雅說因為$-2-2\sqrt{5}$是負數，所以不可能是答案(L26)，而另外一解$-2+2\sqrt{5}$是正數，所以它是答案(L17-L28)。這一個步驟是對的，但小雅只驗證正負號，忘了驗證自己所算出的答案是否符合條件，在一邊的數學題目中，尤其是一元二次方程式往往會得到 2 個解，學生常常會去檢驗負數不會是答案，而去選擇答案是正數的那一個，但這一題，$-2+2\sqrt{5}$雖然是正數，但其的數值卻大於 2，所以也不是答案。若小雅有仔細地確認答案，而不

是只是取正值為答案的話，小雅將會發現它所計畫的過程中出現了問題，只是小雅缺乏這個動作，而導致最後雖然有答案，卻不是正確答案。

(四)、綜合圖文題三者結論(小羽、小婷以及小雅)：

1.解題歷程成功與失敗

	小羽	小婷	小雅
第一小題	成功	失敗	成功
第二小題	失敗	失敗	失敗

三位同學做文字題表現不一，其中兩位第一小題全對，第三位兩題均不成功。

2. 文字題三位同學解題歷程

階段	小羽 Schoenfeld 六階段時間序列圖(1.成功；2.失敗)										時間比例
閱讀	■										11.0%
分析		■		■		■					35.6%
探索			■				■				47.0%
計畫					■						3.4%
驗證											0%
遷移								■			3.0%
時間	26	50	70	29	8	5	41	7			100%
階段	小婷 Schoenfeld 六階段時間序列圖(1.失敗；2.失敗)										時間比例
閱讀	■										12.2%
分析		■		■		■				■	44.9%
探索			■					■			14.7%
計畫					■						10.2%
驗證							■				15.9%
遷移									■		2.0%
時間	30	56	14	8	25	28	39	22	5	18	100%
階段	小雅 Schoenfeld 六階段時間序列圖(1.成功；2.失敗)										時間比例
閱讀	■										12.7%
分析		■					■				38.6%
探索			■								11.2%
計畫				■				■			15.3%
驗證					■				■		16.8%
遷移						■					5.3%
時間	43	73	38	45	23	18	58	7	34		100%

小羽：小羽花最多的時間在探索階段，佔了總時間的 47.0%。小羽習慣做文字題時，通常會先看題目裡的文字，如果有圖，就邊看圖邊標上數字，由於小羽做的是文字題，所以小羽開始畫圖(L2-L3)。小羽在分析時，分析步驟是甲邊長是 2 公分的正方形，所以面積是 4，乙與甲的面積相等，所以乙的面積也是 4，然後因為面積相等，所以一定會多出一塊，而要想辦法將這一塊丙認為是正方形(L7-L9)。在這一點上，小羽已經有了構圖的結構，只是小羽先畫出甲與乙的面積重疊失敗，於是開始使用丙是正方形再畫出甲與乙重疊的部分(L11-L12)，因此，小羽認為有圖輔助的話，會減少一些畫圖的時間，並且一開始會想不出來該如何畫圖(L28)，而這會想不出來怎麼畫圖的原因是因為小羽自認為比較沒有想像力，所以要畫圖對她來說，會很難想(L30)，也因此，小羽認為沒有圖示輔助的話，會比較困難(L31-L32)。

小婷：小婷花最多時間在分析階段，共花了總時間的 44.9%。小婷作答的是文字題，所以沒有附圖，於是小婷閱讀的方式是從第一行閱讀到最後一行，因為沒有圖示的輔助，所以小婷決定只看重點的文字部分，像是甲和乙的面積相等以及一角重合相貼(L4)。小婷選擇的解題方式是將常數項因式分解(L6-L8)，並且如果答案不是整數的話就會想不到答案(L9-L10)。而通常看到題目就會先畫出圖示來輔助作答，小婷說到，這樣可以比較清楚的知道自己所要求的是什麼(L14)。小婷提到了因為進入國中階段，所以需要做圖文題比較多，而用圖來輔

助作答會更有幫助(L20)，並且小婷習慣用圖去做驗算的動作(L22-L23)，由於小婷沒有計算出來，所以沒有進行驗證的動作(L27)，於是回到了讀題階段，只可惜依舊沒有解題方式，而導致兩小題都作答失敗。對於遷移部份，小婷所選擇的方式是猜數字做其他的解題想法(L36)，如果沒有整數可以猜到答案的話將會猜一點有小數點的數字，由於這一題比較難，所以就沒有好的解題方法(L35-L39)。

小雅：小雅花最多時間的部份在分析階段，共花了 38.6%的總時間。小雅看題目偏項看重點部份，也就是只看文字的數字部份(L2)，看完文字部份就會將收集到的資料畫成圖示(L5)，小雅會完圖示之後，就會開始直接作答(L11)。而在驗證部份，小雅說她並沒有做驗證的動作，因為在算的時候就已經知道差不多的樣子，所以不需要特別去檢查。在計畫部份，小雅原本打算使用十字交乘法去開始作答，但發現不行使用十字交乘法作答，於是改用公式解的方式作答(L18-L20)。特別的是，小羽以及小婷都認為有圖示輔助作答會有幫助，小雅卻認為有圖輔助作答會有混淆的情況產生，所以最好的情況是自己畫一個圖(L21-L22)。小雅有做驗證的動作，但小雅利用公式解算出兩個解之後，因為長度不可能為負數，所以就選擇答案為$-2+2\sqrt{5}$(L26-L28)。

3.綜合三人的解題結果

(1). 解文字題的學生都會使用畫圖的策略來幫助解答。當寫文字題

的學生看到題目時，有些會輔以文字以及畫圖示一起作答；有一些會看完文字之後再畫出圖示。

(2).解文字題的三位學生驗證的比例高於圖文題。文字題的學生獲得到了自己所畫出的圖示，會將自己所畫的圖示代入驗證的步驟；而圖文題的學生則較少。

(3).有圖示的題目是具有更高的難度的(小羽 L31-L32)，小雅就認為有圖示來輔助作答是會造成混淆的情形產生(L22)，在文字題中，只有小羽畫出的圖示是正確的，雖然與研究者所設計的圖文題方向相反，但算是正確的做圖成功(圖 4-2-9)。

(4).對於驗證部份而言，文字題的學生比較有自己的想法，可能是由於需要自己畫圖，所以需要更謹慎的作答，以至於對於遷移部份而言，比較有自己的想法，例如猜數字(小婷L36)或者將答案代入原式子(小雅 L25-L26)進行遷移的步驟。

圖文題與文字題差異的比較	
圖文題	文字題
1.在閱讀階段，作答圖文題在閱讀部份是需要花較少的時間，圖文題的三位同學作答秒數分別是 7 秒、5 秒以及 32 秒。	1.在閱讀階段，文字題的三位同學作答的秒數分別是 26 秒、30 秒以及 43 秒。

2.三人幾乎都花了全部時間的一半，分別是 58.8%、57.4%以及 48.9%。由此可知，做圖文題的同學會花較多的時間在分析(58.8%、57.4%)以及探索(48.9%)上。 3.在作答總時間上，圖文題的三位分別為 180 秒、183 秒以及 408 秒。由此可知，除了 408 秒的那位同學作答較為謹慎之外，圖文題可以加快作答的時間。	2.在花最多時間的階段，文字題花的時間少於一半，分別是 35.6%、44.9%以及 38.6%。而文字題的學生花最多時間的階段也是在分析(44.9%、38.6%)以及探索(35.6%)上。 3.在作答總時間上，文字題的同學分別為 236 秒、345 秒以及 339 秒。做文字題的同學，作答時間的差距，不像圖文題來得這麼大，約莫 300 秒鐘。

第伍章、研究結論與建議

第一節、研究結論

一、解題方面，總分的結果顯示，圖示表徵，對於低分組即(20-29)或以下，會有幫助。可是，在逐題分析中的結果，圖示在不同題目中，有時候有幫助，有時候干擾，亦有時候沒有差異。

二、解題歷程方面，學生雖然在閱讀的部份是不盡相同，但會直接從文字部份所得到線索表示於圖示上。

三、無論是文字題或圖文題，同學均花了最多的時間在 Schoenfeld「分析」部份上；其次是「探索」，由此可知，解題成功與否跟 「分析、探索」二階段有關係。

四、圖文題同學皆稱圖示有幫助。

五、圖文題的同學都沒有進行遷移階段，文字題的同學有作遷移。

六、解文字題的學生都會先使用畫圖的策略來幫助解答。

七、解文字題的學生「驗證」的時間比例高於圖文題同學的時間比例。文字題的學生獲得到了自己所畫出的圖示，會將自己所畫的圖示代入驗證的步驟；而圖文題的學生則較少。

八、對於驗證部份而言，文字題的學生比較有自己的想法，可能是由

於需要自己畫圖，所以需要更謹慎的作答。

第二節、建議

一、執行研究上的建議

(一)對於測試學生的選擇,研究者建議挑選口語表達能力較佳的學生，還需要特別請問帶班導師的意見。

(二)在學生學習一元二次方程式時，由於是在第三次月考才考，正式施測的時間建議在過完農曆年之後,這樣才能保持學生對於一元二次方程式的熟悉度。

(三)研究者所施測的試卷只有 6 題，並且學生只有 43 人，資料的收集稍嫌不足，研究者建議未來研究多加點題數以及人數。

(四)對本研究有興趣者，在於一元二次方程式的題目設計，需要注意難易度的考量，尤其是係數方面需要特別注意。

(五)由於研究者是採用訪談問題請學生以有聲思考方式完成解題,本研究的訪談問題(6 題)加插於國二學生解題過程中,因此,Schoenfeld 六階段所給的時間也許會有若干限度的影響。可是，此 6 個訪談問題同樣出現在所有的訪談對象(共 6 人)，此牛刀小試的訪談結果，仍可供圖文題以及文字題的比較。

二、教學上的建議

(一)教師宜在平日數學題目的習作及考試多注意插圖。

(二)雖然圖常常協助學生理解題意,但教師應注意到插圖是否合適,以免造成干擾。

(三) 而對於學生解圖文題沒有一定要解出來的執著,不妨改用別的圖或者是別的表徵。

(四)教師宜交導學生使用圖示檢查,例如本研究訪談學生沒有注意到兩個解都需要檢查是否為答案,以至於$-2+2\sqrt{5}$雖然有可能是答案,但丙這個正方形的長度是不可能大於 2 的,所以學生如果有驗證的這個動作,將會發現她所使用的公式解是錯誤的公式解,所以教師在教學上,必須更加得小心謹慎。

參考文獻

中文部分

王淵智（ 2005 ）。**多元表徵課程對於國小四年級分數學習成效之時驗研究**。國立高雄師範大學教育學系博士論文，未出版，高雄。

呂溪木（ 1983 ）。"**從國際科展看我國今後科學教育發展的方向**"， *科學教育月刊* .

杜佳真（1999)。數學文字題的表徵教學策略。科學教育研究與發展季刊，15，59-67。

李盈賢（ 2006 ）。**高雄市國二學生一元二次方程式迷思概念之研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。

李昱葳（2015)。**國小五年級學生數學解題歷程的自我調整學習策略與動機信念之個案研究**。國立中山大學教育所在職專班碩士論文，未出版，高雄市。

李家豪（ 2008 ）。**應用 5E 教學模式探討國中學生的「配方法解一元二次方程式」概念改變之研究**。國立彰化師範大學科學教育研究所，未出版，高雄市

邱欣慧（ 2008 ）。**國二學生在兩種表徵題中商高定理概念及解題歷程之研究**。國立中山大學教育研究所碩士在職專班碩士論文，未出版，高雄。

林文生（ 1996 ）。**一位國小數學教師佈題情境及其對學生解題交互**

影響之分析研究。國立台北師範學院碩士論文。

林玉雯、黃台珠和劉嘉茹（ 2010 ）。**探討圖形表徵與視知覺學習偏好對生物辨識學習之影響**，科學教育學刊，18(6)，521-546。

林美娟（ 2010 ）。**高雄市國二學生解一元二次方程式錯誤類型之分析研究**，高雄師範大學數學系，未出版，高雄市。

涂金堂（ 2002 ）。國小學生數學文字題知識結構之評量。教育與心理研究，25(中)，369-399。

陸正威、王惠豐（ 1999 ）。**數學解題的意義與理論發展之研究**。教育新知，14，1-8。

胡炳生（ 1997 ）：**數學解題思維方法**。台北市：九章出版社。

黃敏晃（ 1991):淺談數學解題。教與學，23，2-15。

郭汾派, 林光賢, and 林福來（ 1989 ）。"**國中生文字符號概念的發展**"，*國科會專題研究計畫報告*，*NSC* : 77-0111.

郭炎明（ 2007 ）。**高中生解三元一次方程組幾何意義的困難點** 。國立台灣師範大學數學系在職碩士班碩士論文，未出版，台北。

郭奇松（ 2007 ）。台南縣國二學生解一元二次方程式應用問題之歷程分析研究，國立高雄師範大學數學系，未出版，台南。

張春興（ 1988 ）。**知之歷程與教之歷程：認知心理學的發展及其在教育上的應用**。行政院國家科學委員會認知與學習研討會專集論文。

張春興（ 1993 ）。**現代心理學。**台北，東華。

張熙明和楊德清（ 2004 ）。**國小五年級學童分數表徵教學之研究**，中華民國第 22 屆科學教育學術研討會(2006)。

游自達（ 1995 ）。**數學學習與理解之內涵-從心理學觀點分析**。初等教育集刊，3，頁 31-45。

陳維民(1998 ）。**兒童的未知數概念研究----一個國小六年級兒童的個案研究。**

陳志全（ 2005)國二學生［用配方法解一元二次方程式］單元錯誤類型分析之研究.

陳彥廷和柳賢（ 2009 ）。**運用提問方法促進中學生對代數中文字符號語意理解之研究：提問模型建構**，科學教育學刊，17(3)，203-231。

陳彥廷和柳賢（2009）。**中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道的探討**，科學教育學刊，17(1)，1-25。

教育部（ 2003 ）:國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。

楊敦州（2004）。**型態化數學解題與表徵能力之初探—以國中數學為例**。國立高雄師範大學資訊教育研究所碩士論文，未出版，高雄。

蔡興國、陳錦章和張惠博（ 2010 ）。**高中學生解題歷程之力圖表徵與列式關係之研究**，科學教育學刊，18(2)，155-175。

蔣治邦（ 1994 ）：**由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計**。國民小學數學科新課程概說(低年級)，60-76。台北：台灣省國民教師研習會。

蕭龍生（ 1993 ）。**數學認知心理學之研究**。台灣省政府教育聽編印。

謝佳叡 （ 2000 ）。國中生配方法學習歷程中之數學思維研究， *臺灣師範大學數學系學位論文*。

謝宜玲和陳英娥（ 2003 ）。在課堂討論情境下國一學生文字符號概念及對運算相關法則的認知， *中華民國第十九屆科學教育學術研討會， 臺北* 。

謝金秤（ 2008 ）。**國中因式分解之複式評量研究**，高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄。

外文文獻

Barnett, J. (1984). The study of syntax variables. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds.), Task variables in mathematics problem solving, 23-68. Philadelphia, Pennsylvnia : The Franklin Institute Press.

Bishop, A. J. (1989).Review of research on visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1), 7-15

Booth, L.R.(1984). Child-method in secondary mathematics. Educational Studues in Mathematics, 12 29-41.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), The Ideals of Algebra, K-12(pp.20-32). Reston, VA: NCTM.

Bruner, J. S .(1966). Tower a theory of instruction. Cambridge, MA:Harward University.

Clement, J.,Lochhead, J., & Monk, G.(1981). Translation difficulties in learning mathematics. American Mathematical Monthly, 88, 286-290.

Collins, J. L. (1985). Self-efficacy and ability in achievement behavior (Unpublished Doctor dissertation, Stanford University).

Davis, R. B. (1984). Learning mathematics.The Cognitive Science approach to mathematics education. Norwood, New Jersy: Ablex Publishing corporation.

Greeno ,J.G.(1987). *Instructional representations based on research about understanding*.In A.H. Schoenfeld(Ed.), Cognitive Science and

Mathematics Education. Hillsdale.

Juhani, L. (1995). Working memory and school achievement in Ninth Form.Education Psychology, 15(3), 271-281.

Kaput, J, J(1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier(Ed.). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 19-36. Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Kilpatrick, J.(1985). A retrospective account of the past 25 years of research and learning mathematical. In E. Silver(Ed.) Teaching and learing mathematical problem solving : Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ : Lawrece Erlbaum Associates.

Kuchemann, D. (1981).Algebra. In K. Hart(Ed), Children's Understanding of Mathematics: 11-16(pp 102-119). London: John Murray.

Larkin, Jill H., and Herbert A. Simon. "Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words." *Cognitive science* 11.1 (1987): 65-100.

Lester, F.K., & Garofalo, J(1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway(Ed.), Research in mathematics education. The National Council of Theachers of Mathematics.

Lesh, R. & Post, T. R.(1987). Proportionality and the Development of Prealgebra Understandings. In Coxford A. F. & Shulte, A. P. (Eds.), The Ideas of Algebra, K-12. pp78-90. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Moyer, J., Moyer, M., Sowder, L., & Threadgill-Sower, J.(1984).Story problem formates：Verbal versus telegraphic. Journal foe Reasearch in Mathematics Eduacation, 15 (1), 64-68.

Mayer, R. E. (1992).Thinking, problem solving, cognition. New York: W.H.Freeman and Company Press.

National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM)(1977).Position paper on basic mathematical skills.Arithmetic Teacher, 25, 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(1989).Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA:Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(2000).Primciples and standards for school mathematics.Retrieved November 20,2003 from http://standards.nctm.org/document/prepost/cover.htm

Polya G. (1945). *How To Solve It.*Princeton, N.J. :Princeton University Press.

Sternberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. Journal for Research in Mathematics Eduacation, 22, 112-121.

Schnotz, Wolfgang, Maria Bannert, and Tina Seufert. "16. Toward and integrative view of text and picture comprehension: visualization effects on the construction of mental models." *The psychology of science text comprehension*. 2002.

Schoenfeld, A. H. (1985).Mathematical problem solving.New York:

Academic Press.

Wanger, S(1981). Conservation of equation and function under transformation of variable. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 107-118.

Webb, L. F. & Sherrill, J. M.(1974).The effects of differing presentations of mathematical word problems upon the achievement of preserve elementary teachers. School Science and Mathematics, 74,559-565.

Wollman, W.(1981). Determining the sources of error in a translation from to sentence.