



國立中山大學教育研究所

碩士論文

Institute of Education

National Sun Yat-sen University

Master Thesis

動態幾何軟體 GeoGebra 融入

高二數學幾何教學設計與反思

The Design and Reflections on Activities Developed for the
Integration of GeoGebra into 11th Grade Geometry Instruction

研究生：陳采姿

Tsai-Tz Chen

指導教授：梁淑坤 博士

Dr. Shuk-Kwan Leung

中華民國 104 年 6 月

June 2015

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士班

研究生陳采姿（學號：M026050007）所提論文

動態幾何軟體GeoGebra融入高二數學幾何教學設計與反思

The Design and Reflections on Activities Developed for the

Integration of GeoGebra into 11th Grade Geometry

Instruction

於中華民國 104 年 4 月 8 日經本委員會審查並舉行口試，
符合碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 李旻憲 李旻憲 委員 梁淑坤 梁淑坤

委員 羅春光 羅春光 委員 _____

委員 _____ 委員 _____

指導教授(梁淑坤) 梁淑坤 (簽名)

謝誌

會想進教育所念書，其實是因為當時實習的時候，一度找不到對教書的熱忱，一直想知道教育的本質究竟是什麼？猶豫許久之後，決定透過繼續進修，希望能夠從中找到答案。

會選擇中山大學作為進修的學校是因為一來我可以回高雄陪陪我的家人，其次是因為當初在選擇研究所時，意外地發現了梁淑坤教授的個人網站，內容有許多豐富的數學教學題材與經驗分享，有趣的是我在教學團隊的名單中發現了我一直很敬佩的小學老師，這讓我更是下定決心一定要考上中山教研所並且向梁老師拜師學習。

在論文撰寫的過程中遇到了許多挫折，我知道這是每位研究生的必經之路，但可能因為我個性的關性，常常愛鑽牛角尖，所以其實回想起來真的很感謝梁老師一路以來的指導與包容，梁老師就像是媽媽一樣地照顧著我們，畢業之後最不能忘記的就是那滷蛋的味道！此外，也非常感謝兩位口考教授羅春光老師以及李旻憲老師，謝謝兩位老師的鼓勵與建議，使得論文的撰寫能夠更加地完善。另外也謝謝一路走來幫助過我的各位老師與學生，謝謝你們讓論文能夠順利地完成。

很開心當初能進到中山教研所進修，非常謝謝中山教研所的老師、學長姐與同學們以及所辦辛苦的行政人員們，讓我能夠順利地完成學業，並且也在修課的過程中，漸漸找到了我想知道的答案，也找回自己對教書的熱情。

我還要感謝的就是我的小學老師雅雲老師，沒有雅雲老師的鼓勵，我恐怕還在猶豫是不是真的要繼續升學。也很謝謝青芬學姊在我剛入學徬徨無措時，給了我非常多的指引與鼓勵。還有我的論文夥伴們祥雲、雲卿、永政，謝謝你們一路的陪伴與協助，激發我許多撰寫論文的靈感。最後，特別要感謝的就是一路支持我的家人與庭維，尤其是我的親姊姊倫佳，謝謝妳一直聽我發牢騷，因為有妳的幫忙，論文才得以順利完成。

陳采姿 謹誌

2015年6月

摘要

本研究的目的是在於發展與探討動態幾何軟體 GeoGebra 融入高二學生學習幾何概念的教學設計歷程，透過現職數學教師的建議與學生試做後的觀點作為改進的參考依據，設計出一套適合高二學生學習「空間幾何概念」的數學課程。

本課程包括四個單元：空間中的基本幾何概念、三垂線定理與二面角、認識空間中的多面體與空間中的坐標表示。研究於進行期間資料的蒐集包括課後作業、學習回饋、問卷訪談與教學手札。研究者針對此軟體之功能及幾何概念教學的特質進行研發教學設計，於課程試做後，將這些資料分別對於課程內容的設計、學生的接受程度與學習轉變進行評估與修訂。

經分析後，四個單元的課程試做結果發現如下：在單元一中，藉由 GGB 軟體的輔助教學，對於學生在空間中點線面概念結構的理解是有幫助的。在單元二中，GGB 課程的協助，增加了學生對於空間中圖形的想像與邊角關係（畢氏定理）的推論。在單元三中，透過 GGB 軟體的教學協助，可以增加學生對於空間中圖形的理解以及對於各種題型的解題策略。在單元四中，GGB 軟體教學有利於學生將空間中的抽象思考轉化為具體圖像思考，也順帶釐清先前的學習錯誤迷思。

整體而言，參與本研究的教師與學生對於 GGB 融入數學學習大部分都持正向肯定的態度。因此，善用學校的資訊設備，能夠讓上課更為活潑，甚至可以培養學生學習將問題數學化，解決遇到的難題。透過軟體輔助，學生較能把數學文字抽象問題具象化，進而思考更恰當的解決方法。

關鍵詞：高二幾何教學設計、動態幾何環境、GeoGebra、幾何探索、空間概念

Abstract

The aim of this study is to develop and investigate the integration of the dynamic geometry software GeoGebra (GGB) into eleventh grade students' learning of geometric concepts in high school. The researcher designed a set of mathematics activities using references from research based materials and suggestions from several high school mathematics teachers.

The curriculum includes four units: basic geometric and spatial concepts, theorem of three perpendicular lines and dihedral angle, understanding of polyhedron, and coordinate system in three dimensions. Research data including homework, learning feedback, questionnaire/ interviews and teaching log. After teaching the course, the researcher assessed and revised the course content using results from students' acceptance levels and learning outcomes.

Data analyses on the try-out of four units yielded results as follows: In unit I, students' concept on space or surface structure were assisted by instruction using GGB software. In unit II, the provision of GGB activities increased students' imagination of graphic on space and the inference corners in relation graph (Pythagorean Theorem). In unit III, students showed understanding of spatial graphics and problem solving strategies for various kinds of questions. In unit IV, GGB instruction can help students to convert abstract thinking into concrete image thinking on space. Incidentally, GGB software also clarify prior learning error myth of students.

In all, teacher and students participating in this study gave a positive attitude to the integration of GGB into geometric learning. With the inclusion of GGB, students can translates abstract mathematical word problems into concrete images, and find appropriate solution.

Keywords: 11th grade Geometry Instructional Design, Dynamic Geometry, GeoGebra, Geometric investigation, Spatial concepts

目錄

第一章 緒論	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的與研究問題.....	3
第三節 名詞釋義.....	4
第二章 文獻探討	7
第一節 電腦輔助教學於數學課室.....	7
第二節 動態幾何軟體 GeoGebra 的優勢探索	13
第三節 GeoGebra 融入數學教學的相關研究	18
第四節 GeoGebra 融入幾何教學之分析	22
第三章 研究方法	29
第一節 研究架構.....	29
第二節 研究對象.....	30
第三節 研究程序.....	31
第四節 研究流程.....	38
第五節 課程預試結果與省思.....	39
第四章 研究結果與討論	45
第一節 「空間中的基本幾何概念」課程試做	46

第二節 「三垂線定理與二面角」課程試做	53
第三節 「空間中的多面體」課程試做.....	60
第四節 「空間中的坐標表示」課程試做.....	67
第五節 大班教學課程實施結果與討論.....	72
第六節 課程設計的省思與修正.....	83
第五章 結論與建議	91
第一節 結論.....	91
第二節 建議.....	95
參考文獻	98
附錄	102
附錄一、教材內容	102
附錄二、學生課後作業練習.....	110
附錄三、學生學習回饋單.....	114
附錄四、學生學習心得問卷.....	115
附錄五、教師教學手札.....	117

表目錄

表 2-1	資訊科技融入教學與電腦輔助教學比較.....	9
表 2-2	國內動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學相關研究成果.....	20
表 2-3	普通高級中學必修科目「數學」課程綱要—數學 III.....	24
表 2-4	普通高級中學必修科目「數學」課程綱要—數學 IV.....	25
表 2-5	本研究選擇單元之課程目標.....	27
表 3-1	四個幾何課程內容及目標.....	31
表 3-2	各種原始資料編碼意義.....	37
表 4-1	學生對於課程一的學習印象.....	75
表 4-2	學生對於課程二的學習印象.....	78
表 4-3	學生對於課程三的學習印象.....	80
表 4-4	學生對於課程四的學習印象.....	82
表 4-5	試做學習者對於四個課程的學習滿意度.....	83
表 4-6	大班教學研究對象對於四個課程的排序.....	84
表 4-7	「非講不可」的分類情形.....	85

圖目錄

圖 2-1 空間中平面上之垂線圖形展示.....	14
圖 2-2 GeoGebra 4.9 操作介面.....	16
圖 2-3 正立方體圖形展示.....	17
圖 2-4 本研究之課程分析地位.....	26
圖 3-1 研究架構圖.....	29
圖 3-2 教學流程圖.....	33
圖 3-3 研究流程圖.....	38
圖 4-1 空間中的兩歪斜線.....	47
圖 4-2 正立方體內嵌正四面體.....	48
圖 4-3 三面交於一點.....	49
圖 4-4 thisishuyu.....	50
圖 4-5 平面上的垂線.....	55
圖 4-6 平面上之不是垂線.....	56
圖 4-7 三垂線定理.....	57
圖 4-8 正六面體圖形.....	59
圖 4-9 正四面體內嵌正八面體.....	58
圖 4-10 三種常見的正多面體.....	62
圖 4-11 特殊立體圖形.....	62

圖 4-12	正立方體中的截面圖形	64
圖 4-13	正立方體中求角度的餘弦值	70
圖 4-14	長方形摺紙問題	71
圖 4-15	八種三面交會分類情形	74

第一章 緒論

本章內容分別針對本研究之研究動機、研究目的與研究問題以及名詞釋義共三個部分進行描述與探討。

第一節 研究動機

隨著資訊時代的來臨，教育部於 2008 年提出「教育部中小學資訊教育白皮書」，以善用資訊科技、激發創意思考、共享數位資源、保障數位機會為主軸，希望打造資訊校園。此外，教育部為了讓資訊融入教育的資源更為豐富，每年特別舉辦「全國中小學資訊融入教學創意競賽」，希望透過競賽，提昇國中小教師將資訊科技應用於各學習領域教學的能力，並增進學生學習效果（教育部電子報，2011）。

現今的教學方式，除了透過教師寫板書、學生抄筆記的方式外，更可以將資訊科技融入教學活動中。電腦、電子白板、校園網路等，成為教學的基本設備，而時下流行的臉書（Facebook）、部落格，若有技巧性地去使用，也能成為學生學習的另一種輔助工具。

然而，雖然有最新的資訊科技工具，但若是不會使用、或是不去用它，那麼建置再多、再新的 e 化教室也是徒然（余姿瑩，2013）。教育部於 97 年起與各科學者合作，期待能以系統化發展高中各學科資訊融入教學教材為目標，藉由分工規劃共同發展符合高中教學現場需求之教材，促進教學資源分享及資訊融入教學（教育部，2009）。此外，教育部（2014）也鼓勵各校提供及分享所屬教師教學資源與心得，提供全國教師資訊融入各學科教學更豐富的教學資源，經由資訊

融入學校的引領及協助，提昇學校資訊教育的水準。

以數學這個科目來說，在中小學裡早已成為最不受歡迎、最枯燥乏味、最沒有成就感的科目（楊淑芬，1992）。如何讓學生重拾信心與學習動力，是我們身為教育工作者必須要去思考的問題，尤其是對於那些學習興趣低落的學生而言，我們更應該要想辦法幫助他們找到適合的學習方法。美國數學教師協會 NCTM (2000) 即指出，科技在教師教學與學生學習數學上是必要的，它影響著教師的教學以及增強學生的學習態度。

幾何是一門探討空間關係與邏輯推理的數學。幾何概念與表徵是數學與其實世界溝通的重要方式且與數學其它領域緊密連結（左台益、梁勇能，2001）。陳俊廷（2002）在「高中學生空間向量學習困難的診斷測驗工具發展」研究中指出，目前國內的數學課程中，尤其是到了高中二年級階段，因空間向量的課程出現，在此階段已非單純的平面問題，而是較為複雜的空間問題。若學生在處理空間中問題時，無法正確地將問題分類及統整，則不僅很難求出答案，甚至會陷入錯誤的解題概念而不自知，造成學習上的困擾。例如現場教師們常覺得頭痛的單元是「空間幾何概念」，每每教到這個單元時，以往傳統的板書教學已不敷使用，教師們無不使出渾身解數，利用各個道具，例如幾何模型、各式各樣的紙盒、氣球等等，為的就是要讓學生能夠具體地學習空間幾何的概念，而非憑空想像。

在幾何學習活動中，學習者需在腦海中作用空間推理的思考過程，而空間視覺化可被用來作為瞭解抽象幾何概念和知識的基礎（Yakimanskaya，1991），以減輕個體在工作記憶區的負擔。陳俊廷

(2002) 在研究中更進一步發現，學生在空間上有學習上的困難，並不是學生自己的推想能力或是思考判斷力不足，而是因為對某些空間概念與某些空間向量的知識背景了解不夠而導致；教師若仍用傳統的教學法，那麼學生原有的想法不易被改變，常會有先入為主的觀點。

綜合以上所述，本研究嘗試以動態幾何軟體 GeoGebra 融入高中幾何課程做教學活動設計，特別是針對空間幾何圖形作圖方面，希望學生藉由軟體輔助學習的過程中，能夠將抽象的空間幾何概念思考轉化為具體的圖像思維，並且能夠增加學生在數學學習上的參與度。

第二節 研究目的與研究問題

壹、研究目的

本研究者的主旨在使用動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學，在設計的過程中再經研究者省思後得以修正課程。此外，研究者亦深入學生的學習課堂中，觀察學生對於動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學的想法，並且以這些想法作為參考資料，使研究者進行分析實施課程時在教學過程中的利弊得失。

因此本研究將使用動態幾何系統 GeoGebra 融入於高中二年級數學「空間概念」單元實施課程教學設計，以期達到下列具體目的：

- 一、探究 GeoGebra 融入高二數學幾何概念教學教材的適切性。
- 二、分析學生對於 GeoGebra 融入數學教學後的接受程度。
- 三、探討執行實施 GeoGebra 融入數學教學試作後，研究者對於課程

設計的省思與修訂建議。

貳、研究問題

根據上述研究動機與目的，本研究研擬的研究問題如下：

- 一、探究 GeoGebra 融入高二數學幾何概念教學教材的適切性為何？
- 二、分析學生對於 GeoGebra 融入數學教學後的接受程度為何？
- 三、探討執行實施 GeoGebra 融入數學教學試作後，研究者對於課程設計的省思與修訂建議為何？

第三節 名詞釋義

壹、動態幾何系統 GeoGebra

本研究使用的 GeoGebra 軟體是一種動態幾何系統軟體，其繪圖的基本元素包括點、線、面、多邊形、向量、圓錐曲線與函數等，可以提供學習者製作動態幾何物件的建構，讓幾何物件以動態呈現。相較於其他需要付費的動態幾何系統軟體，GeoGebra 是免費的，對於學生而言，不需要擔心軟體費用的問題。GeoGebra 的發展，目前已開拓至版本 5.0，增加了 3D 操作的功能，使得數學課堂教學展現新的契機，更能輔助學習者思考。此外，在本研究中研究者使用的版本為可攜式的 GeoGebra 4.9，於課堂使用上較為方便，學生放學後也可以自行在家練習。

貳、數學幾何概念

本研究的數學幾何概念是針對高二數學「空間幾何概念」的學習，其內容是以教育部（2013）修訂的普通高級中學必修科目「數學」課程綱要與南一版、龍騰版高中數學第四冊教材作為設計的依據。其中「空間幾何概念」所包含的課程內容有：空間中的基本幾何概念、三垂線定理與二面角、空間中的多面體以及空間中的坐標表示，共有四個課程。

參、教材的適切性

本研究指的「適切性」，是指在四個課程的試做過程中，透過觀察學生在課堂上與教學者的互動，瞭解 GeoGebra 軟體融入高二數學幾何概念的教學教材是否適合此階段學生學習，並且加以探討 GeoGebra 軟體輔助教學的優點與缺點。

肆、學生對於教學後的接受程度

本研究中學生接受程度，是指在四個課程的試做後，藉由學生上課的反應（記錄於教師手札）與課後的回饋（包括學習回饋單與學習心得問卷），瞭解學生對於 GeoGebra 軟體融入數學教學後的看法，並且加以探討學生使用 GeoGebra 軟體學習的優點與缺點。

第二章 文獻探討

本研究旨在探討以電腦動態幾何軟體 GeoGebra 輔助教學，對於高二學生在空間幾何概念的學習中所產生的影響與轉變，並且進一步探究學生對於 GeoGebra 融入數學教學後的接受程度，以作為未來教學上的參考依據。本章共分四節來探討：第一節為電腦輔助教學於數學課室、第二節為動態幾何軟體 GeoGebra 的優勢探索、第三節為 GeoGebra 融入數學教學的相關研究、第四節為動態幾何軟體 GeoGebra 融入幾何教學之分析。

第一節 電腦輔助教學於數學課室

壹、電腦輔助教學的意義與其優勢

科技發展至今，電腦教學軟體的研究使用與網路的普及，使得現今的教學方式趨向多元化。郭重吉（1997）在過去研究中指出，電腦輔助教學是要建立一個適當的學習環境給學習者學習，因此，在設計電腦輔助學習課程時，必須參考相關的學習理論與教學理論，方能設計出真正有益於學生學習的電腦學習環境。而游惠美、孟瑛如（1998）認為電腦輔助教學是在教學過程中，將電腦當做是一種幫助教師和學生學習的工具，試圖改進教學的一種方法。簡而言之，在電腦輔助教學中的軟體使用，其實是用來輔助一般正式教學的不足，而非用來完全代替教師教學。

一般而言，大家普遍認為電腦輔助教學與資訊科技融入教學意義

上是一樣的。然而，徐新逸（2003）將資訊科技融入教學分為狹義與廣義兩種定義：狹義意指應用資訊科技的技術；而廣義則是應用系統化教學設計的科學方式，以達成預設之教學目標，並且提供學習者有意義的學習歷程，進而增進較佳的教與學之轉變。於此定義，電腦輔助教學看起來是偏向狹義定義的範疇。而根據王全世（2000）的觀點，資訊科技在教學中可分為五個等級，分別從等級 0 至等級 4：

- ◆ 無（等級 0）：教學過程中沒有使用任何的資訊科技。
- ◆ 分離（等級 1）：資訊科技被用來教學生如何使用資訊科技，與其他課程沒有連結或連結很低。
- ◆ 補充（等級 2）：師生偶爾使用資訊科技來教與學，被視為補充的角色。
- ◆ 支援（等級 3）：在大部分的學習活動中需要用到資訊科技，在教學中視扮演支援的角色。
- ◆ 整合（等級 4）：在日常的教學活動中，師生很自然地使用資訊科技來教與學。資訊科技被視為是一項工具、一個方法或一種程序，在任何時間、地點都可以用來尋找問題的解答。

等級 3 與等級 4 看似相同，但是等級 4 在層次上略高一等，較注重的是利用資訊科技來達到整合的效果，並且能夠順利解決問題，而不只是輔助的角色。從上面的等級標準來看，電腦輔助教學充其量只能到達等級 3，而資訊科技融入教學則可以達到等級 4 的最高境界。由此可看出，電腦輔助教學與資訊科技融入教學在意義上仍然是有明顯的差異性存在。表 2-1 為資訊科技融入教學與電腦輔助教學比較。

表 2-1 資訊科技融入教學與電腦輔助教學比較

比較項目	資訊科技融入教學	電腦輔助教學
概念與精神	強調融入與整合，代表的是整個教學過程。	只是輔助工具，不能代表整個教學過程。
資訊科技在教學中的角色	不可缺少的工具，並可以延伸為一個方法或一個程序。	輔助的媒體或工具。
涵蓋的範疇	較廣，包含電腦輔助教學。	較窄，為資訊科技融入教學的一部分。
目的	1、培養學生資訊素養。 2、培養運用科技與資訊的能力。 3、提昇教學品質。	1、輔助教師教學。 2、提昇教學品質。
實施	較複雜、困難。	較簡單、容易。

資料來源：王全世（2000）。資訊科技融入教學之意義與內涵。

過去許多文獻指出，電腦輔助學習系統應建構在學習理論、學習環境、學科內容及現代資訊科技上，再經過分析、規劃、設計、發展、評估及修正等階段不斷反覆的回饋修正而成。有效的電腦輔助學習課程軟體，首先要探討相關學習理論，同時分析建構學科內容，選擇適當的編輯工具並充分運用資訊科技技術，再進行系統的整合(戴文雄，1998)。邱貴發（1996）則認為電腦輔助學習的核心概念是指在某個文化社會環境中，以領域知識為主幹，運用合適的學習理論及電腦科技輔助該領域知識的學習。根據這些概念，學習理論和電腦科技都是依據領域知識而選用的，使用電腦輔助學習的研究者應在充分了解文化社會環境的前提下，把電腦科技和學習理念整合到領域知識的學習過程中。

1960 年代後期，心理學家發現學習者的內在認知結構與建構知識的過程才是學習成功的關鍵（余麗惠，2002），以下便從認知理論談起。

電腦輔助教學的方法與設計深受認知心理學之主要理論的影響 (Alessi & Trollip, 1991)。認知學習論的主張，將學習視為演繹 (deduction) 的歷程 (由普遍原則到特殊事例)，認知心理學家們視學習為個體對事物經由認識、辨別、理解，從而獲得新知識的歷程，在此歷程中個體所學到的是所謂的認知結構 (張春興，2011)。在這整個學習的歷程中，學習者的角色必須由被動的訊息接受者變為主動而積極的參與者，以建構自己的知識 (沈中偉，1995)。

認知心理學家 Mayer 將電腦多媒體學習，定義為利用文字 (包含書寫印刷的視覺文字與口述的聽覺文字) 或圖片 (靜態圖片、動畫及影片) 的學習 (Clark & Mayer, 2008)。Mayer (2002) 與多位專家以 Paivio (1990) 的雙碼理論 (Dual-Coding Theory) 為基本，提出「多媒體學習認知理論」 (A Cognitive Theory of Multimedia Learning)，並做了三種基本假設，分別為：雙通道假設、有限容量假設、主動學習假設，並進一步提出訊息處理中必經的三個心理認知過程 (Clark & Mayer, 2008)，分別為選擇、組織與整合。

與傳統講述法相比，電腦輔助教學的優勢在於較能夠引起學生學習的注意力，並且可以針對學生的個別差異做適性的調整。林保平 (2008) 以教學教具觀點提出電腦輔助教學應有的特質：(1)能針對數學課程中的各個主題能做適度的橫向連結、(2)具一般性、(3)具多重表徵的呈現、(4)動態可操作、(5)具自動化功能、(6)使用的彈性、(7)不排他。此外，根據 Burns & Bozeman (1981)，以後設分析方法進行電腦輔助學習的調查研究顯示，電腦輔助教學比傳統教學優越，但若混何使用，其效果會特別顯著 (Dalton & Hannafin, 1988)。

貳、電腦輔助教學應用於數學課堂

綜觀國內外文獻，許多研究專研於電腦輔助教學應用於數學領域上的影響與成效，而且多數都認為使用電腦輔助教學不僅對於提昇學生在數學學習上有所幫助，學生對於利用電腦輔助教學也大多抱持著肯定的態度（林保平，2008）。

數學發現的過程是一個猜測、檢驗與改進的過程。在教學的過程中，教師如何將抽象概念轉為具體思考是課堂的重要任務之一。以電腦輔助教學而言，最常見的方式是使用電腦套裝軟體於輔助學生做觀察式學習，在課堂上的數學概念操弄會使學生受到視覺化圖像變化的刺激，進而協助學生在觀察學習過程中做出有意義的猜測（Hohenwarter et al, 2008）。

數學概念包括一系列有意義的情境，是由基本關係組成的不變性以及用表徵形式呈現的符號（Vergnaud, 1987），說明了數學的學習，涵蓋了數值的、代數的、圖形的以及語意的各種表徵的交互應用（Kaput, 1992）。而電腦視窗環境可同時包含文字、圖形、靜態畫面、動態畫面等訊息，透過適當的設計，將數學概念以這些形式來呈現，使得數學概念的基本關係外顯出來，不同表徵間的變化情形用連結的方式同時變化，並在視窗中展現多重表徵間的連結（左台益、蔡志仁，2001）。

以幾何課程來說，幾何探索的過程中個體通常會透過圖像操作和邏輯論述進行幾何思考。在過去的研究也指出幾何的本質同時包含了圖形性與概念性的特徵，圖形性特徵是指視覺化可操作，概念性特徵

是指可邏輯推理與論述(Fischbein, 1993)。而幾何活動是複雜的認知過程，包含了構圖、視覺化與推理，發展視覺表徵與推理能力有利於各種不同的認知歷程的交互作用(Duval, 1995)。

動態幾何環境如何影響學生進行幾何探索是目前一個重要的議題。Battista (2007)在關於電腦環境的研究針對過去這 20 年來的研究進行了整理與論述，尤其是在關於電腦環境對於幾何學習的研究上，他認為在電腦環境中有兩個特徵需要特別去注意，第一是探索特定的幾何圖形，其次是圖形的重構可以幫助幾何學習。雖然多數研究顯示動態幾何環境能夠增進與支持重要的學習，但在目前的研究中不知道增加幅度的影響，更不知道在動態幾何環境下學習與在紙筆環境下學習時如何不同。因此，需要更多的比較研究，以量的去探究一般性，而質的則是去探究歷程上的差異（許舜淵、胡政德，2014）。

在現代教育中教師所扮演的角色不再只是傳統的「知識講述者」，而是帶領學生學習與觀察推演的「引導者」（游正祥，2011）。Bussi (1996) 認為教學活動的核心是產生在「數學討論」時，透過發現學習的教學活動設計的目的，是將課程學習的經驗轉換為數學知識的建構。然而，就傳統的輔助教材而言，學生的確是只能單向思考，對於學生的啟發效果有限。不過，隨著科技的發展，近年來動態幾何系統已被開發出來，例如：GSP、Cabri 3D、GeoGebra...等，值得特別注意的是，利用動態幾何系統教學，教師必須跟著調整其數學信念及角色扮演才能成功，若能將評量的方式加以修正，也有機會刺激學生去探索數學知識（游正祥，2011）。

第二節 動態幾何軟體 GeoGebra 的優勢探索

壹、動態幾何軟體簡介

電腦提供了強大的計算與繪圖能力，使個體可運用真實數據進行模擬或建模的活動，並且直接操弄數學物件與關係，以連結真實經驗與數學形式(Balacheff & Kaput, 1996)。由於概念工具的操作及產生的動態表徵均蘊含數學概念及思維策略，因此在此一環境下它迫使使用者激發出數學想法。這種人與資訊科技的互動方式從人機主從關係可能轉化成雙方各自具自主意識的雙向互動關係，且數學係為其共同的溝通語言（左台益，2012）。

動態幾何軟體（如 Geometer Sketchpad、Cabri 或 GeoGebra 等）所建構的學習環境，其工具本身內含數學概念，而且要有效地操作此工具也需依數學概念與思維策略來執行動作。這種在電腦螢幕上呈現的動態影像同時具有三種本質：虛擬實境的圖像元件、數學理論的幾何圖形以及自電腦運算的動畫形式（左台益，2012）。

左台益（2012）在過去文獻中，以 Donald 認知演化四個階段與 Shaffel 及 Kaput 的虛擬文化觀為基礎，說明動態幾何軟體作為虛擬夥伴的意義，提供教學設計參考。文中指出，動態幾何軟體具備三個基本功能：概念性的工具、人機互動關係與動態表徵。茲將整理如下：

- ◆ **概念性的工具**：作圖工具符合歐氏幾何作圖概念，在操作時受數學思維所規範，因此也比較容易激發使用者的數學想法。

- ◆ **人機互動關係**：透過動態幾何軟體內部自主性的計算所呈現的物件軌跡，將會激發學習者自發性的思考其呈現原因。
- ◆ **動態表徵**：在動態的操作過程中，可將情境式的問題賦予其數學意義。

貳、動態幾何軟體 GeoGebra 的介紹與優勢

GeoGebra 軟體是由任教於 Florida Atlantic University 的 Markus Hohenwarter 為數學教育所研發的數學軟體。其開發精神為 Markus 主張的 KISS 原則(Keep it Simple and Short)，目標在於整合代數與幾何兩大系統(黃楷智，2011)。GeoGebra 名稱來自於 Geometry + Algebra，意即結合幾何(Geometry)與代數(Algebra)(林宜臻，2013)。利用繪圖工具在右側繪圖區畫出點、線、面時，左側代數區就會同時呈現相對應的數值或方程式；反之亦然，當下方的指令列輸入代數方程式或函數時，繪圖區就會呈現對應的幾何圖形，如圖 2-1。

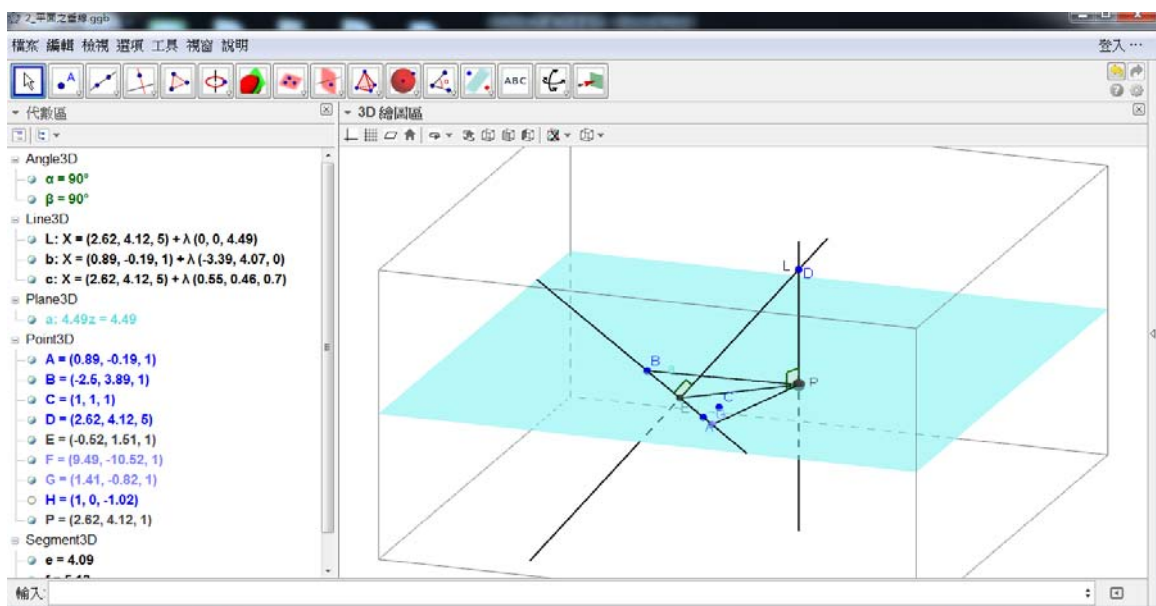


圖 2-1 空間中平面上之垂線圖形展示

動態幾何軟體在1993年從國外引入臺灣，臺師大團隊發展GSP、清大全任重教授則是發展Cabri（余姿瑩，2013）。然而，這兩套軟體都是商業軟體，一旦離開校園就會有版權爭議的問題，一般高中師生想自由運用與學習恐怕會有其困難之處，若要自行購買正版軟體就會是一種負擔。2002年，開放性軟體GeoGebra問世，2006年臺師大物理系黃福坤教授將其翻譯成中文版，2008年由臺師大數學系左台益教授及其團隊成員進行軟體及手冊的翻譯（林宜臻，2013）。在翻譯的過程中，他們發現GeoGebra的功能比起以前增加了很多，他們認為GeoGebra是一個值得發展的動態數學軟體，也可以適時地運用在中小學的數學教材中（左台益、胡政德，2009）。

於2008年之後，國內才開始陸續有比較多人使用GeoGebra做研究，在這之前，常見的動態幾何軟體仍是以GSP為主。動態幾何軟體GeoGebra會開始受到重視的原因，除了軟體的功能會不斷推陳出新之外，其取得方便為免費無版權的問題才是其最大優勢（余姿瑩，2013）。此外，GeoGebra的版面、操作工具也較GSP豐富，對於初學者來說，也是相對好操作的。

動態幾何軟體GeoGebra目前在全球各地已迅速獲得教師之間和世界各地研究人員普及使用，但在教學的運用上仍有其不足之處。例如：對於電腦軟體操作不熟悉的學生，可能會不知所措，反而無法跟上課程進度；對於剛開始接觸的教師可能因為擔心無法設計適當的教材而不敢貿然使用。其實臺灣目前已經有很多開發完整的相關教材供教師們參考使用，透過這些資源，教師們可以自行選擇課程與時間做妥善的運用與安排（林宜臻，2013）。

GeoGebra 是一套動態幾何系統，可用點、向量、線段、直線或圓錐曲線等工具來繪圖，當數值改變時，相對應的函數或方程式圖形也隨之改變；另一方面來看，可直接輸入方程式和坐標，由軟體進行數字、向量、點坐標的運算，並可求出函數的微分與積分，還可用來算方程式的根或函數的極值。這種可直接做代數運算的功能，讓 GeoGebra 成為可處理幾何圖形的電腦代數系統（黃楷智，2011）。

圖 2-2 為本研究使用的可攜式版本 GeoGebra4.9 的操作介面，此介面為新版具有的功能。點開「檢視」，內容新增了「試算表」與「3D 繪圖區」，畫面中除了既有的 2D 平面繪圖區 (x, y 座標平面) 之外，亦增加了 3D 立體繪圖展示區 (含 x 軸、 y 軸、 z 軸與原點)，操作工具列也因而增加許多功能，例如已知空間中三點畫出一平面、點對稱、多面體會圖等空間中常用之需求。

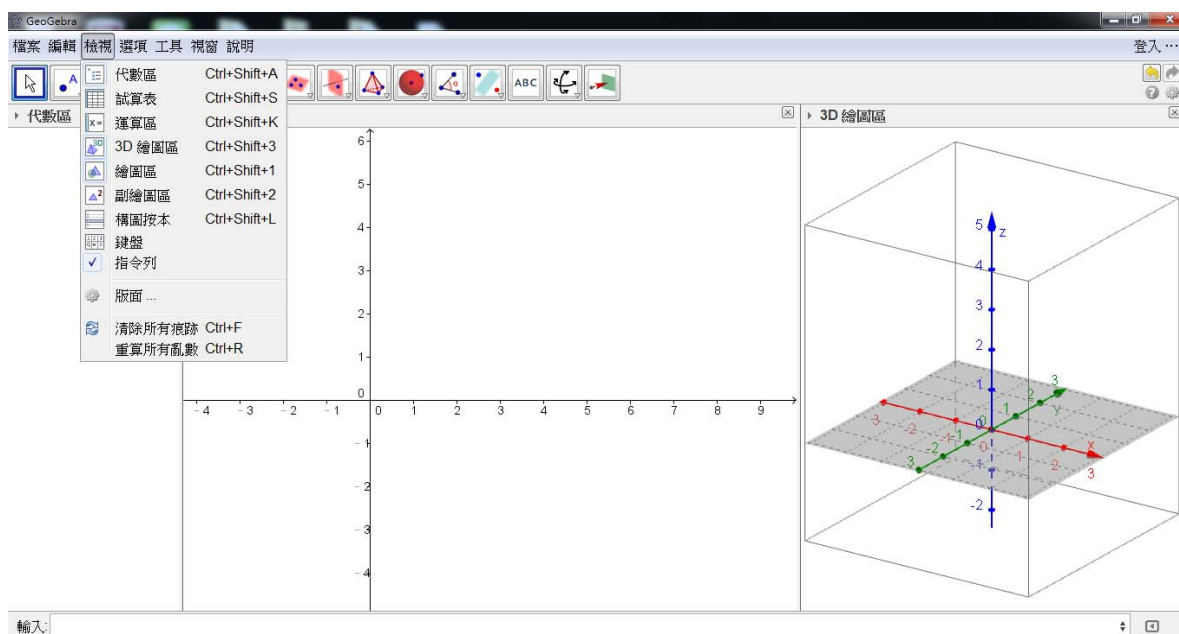


圖 2-2 GeoGebra 4.9 操作介面

圖 2-3 是利用新版的 GeoGebra 可攜式版本 4.9 畫出的正立方體圖形。透過簡單的指令操作，教師可以在螢幕上快速畫出一個正立方體，並且以繪圖工具做簡單的線段連接達到題目的要求，除了取代傳統板書的不便性之外，也可以節省課堂進行的時間。

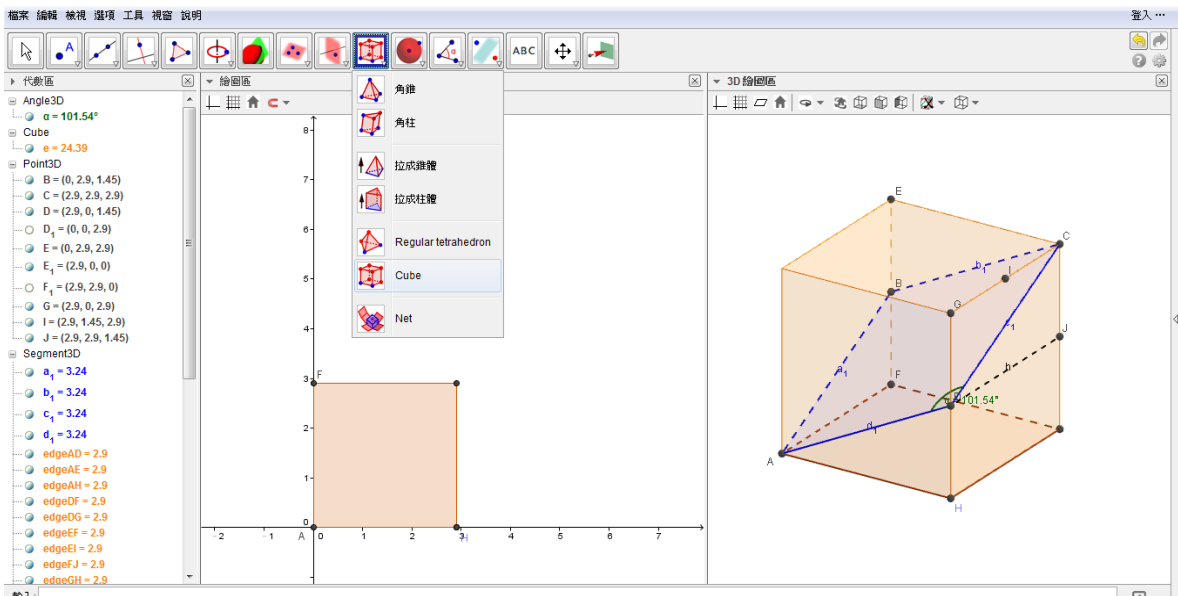


圖 2-3 正立方體圖形展示

整體而言，動態幾何軟體 GeoGebra 相較於其他軟體的優勢在於：

- (1) 它是一個免費的開放性軟體；
- (2) 它是一個可互動的雙向軟體；
- (3) 它有一個 Wiki 論壇供大家開放討論；
- (4) 它可以直接做代數運算的功能，並且操作方便；
- (5) 它可以做動態軌跡觀察（2D、3D 繪圖區）。

動態幾何軟體 GeoGebra 可以提供良好的機會將傳統的授課方式代換成一個要求互動的課堂，給予教學現場的數學教師一個新工具的運用。總而言之，運用 GeoGebra 上課之餘，不能僅止於觀看圖形的動態模擬變化，宜同時讓學生操作 GeoGebra 與觀察函數圖形變化，對於提升學生學習的成效會更有幫助。

第三節 GeoGebra 融入數學教學的相關研究

整理過去在動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學的文獻中，研究者發現，在學習成就方面的探討多是針對學科分數而言，例如：前、後測或是段考成績；在學習態度方面則偏向引起學生課堂上的興趣為主，較少顧及學生在動態幾何軟體 GeoGebra 融入教學的學習後，是否能自主運用於課後練習，並且可以自行以動態幾何軟體 GeoGebra 解決日後所遇到的數學難題。學習態度良好雖然能夠提昇學生的學習成就，但是身為教育工作者最大的目標是希望可以培養學生把問題數學化，進而解決問題。

研究者根據搜尋臺灣碩博士論文加值系統所蒐集到的資料，將國內相關研究於底下作簡單的介紹。

壹、GeoGebra 融入數學教學相關研究之分析

洪慈徽（2008）在過去研究中，比較「GeoGebra 輔助教學」與「傳統講述教學」對高中學生學習三角函數圖形單元之成效，並探討學生經由 GeoGebra 輔助教學後的態度調查。研究方法為準實驗研究法，採不等組前後測設計。經實驗教學與資料統計處理分析之後，結果發現實驗組在數學學習成就與數學學習態度兩方面的表現皆優於控制組。此外，實驗組學生對於採用電腦輔助教學持正向的態度，尤其是高分群的學生明顯給予較多的肯定。

姚念廷（2009）的研究是以教材開發、實務探討為主要目的。藉由數學輔助軟體 GSP、Cabri 3D 與 GeoGebra，根據教學經驗並且融合教學與視覺思考，開發在三維空間中呈現的圓錐節痕教材。姚念廷

(2009)認為，任何一種套裝軟體都可以彌補用傳統方式上課(黑板)的盲點，要讓班上全部學生都瞭解上課的內容，也許沒辦法用其中一種來詮釋。因此，善用學校擁有的數位媒體設備，讓上課更有趣，更貼切生活，甚至培養學生把問題數學化，進而解決問題，是他努力完成的目標。

彭建勛(2010)將高中課程「空間中的平面與直線」單元，在動態幾何學習的環境下作教學，並且探討在此環境下學生的概念結構與解題的表徵運用，以及比較動態環境的教學方式和一般傳統的教學方式有何異同。研究方法運用問卷與半結構性的訪談，針對訪談資料進行深度質性分析並比較不同的教學方法其學生運用表徵的差異。研究結果發現學生在動態幾何環境學習後，較未介入動態幾何環境教學的學生能夠在解題策略上出現動態圖形思考，進一步解決數學問題。因此，彭建勛(2010)建議教學者在進行教學時，可以配合動態環境的設計，讓學生在學習空間中平面與直線的代數方程式時，能操作空間圖形與觀察其型態結構，以強化學生對被表徵物的理解。

楊舜傑(2011)以 GeoGebra 繪圖軟體製作多媒體套件結合現在教育中所謂的問題導向學習法(**Problem-Based Learning**)的一個教學策略，讓學生在幾何圖形的問題中，能將複雜的問題簡化，並培養學生建立獨立思考與解決問題的能力。研究結果發現，以 GeoGebra 為幾何教學的工具，不論是教學硬體方面甚至是教學方式，與傳統的教學方式相比皆有一個相當大的突破，若可以將中學幾何相關課程與之結合，對於學生學習上會有很大的幫助。

游正祥(2011)透過一項長期的教學實驗，探討教師如何將動態

幾何系統融入學校正規課程的過程，並且探討在 GeoGebra 融入課程的學習環境中，學生的學習態度、短期與長期的學習成效和傳統教學方法的差異性。研究結果發現藉由學生操作 GeoGebra 的圖像表徵所得到的學習經驗比傳統教學更具學習遷移的效果，協助學生將學習經驗應用於日後的學習，學生對於數學課程的學習較傳統的教學方式更富有想像力，對於數學問題的解決，也較能結合文字、圖像的表徵，思考更恰當的解決方法。

在這些的研究中可以大致整理成兩大類型的研究：一種是探討軟體融入教學後對學生的學習成就或學習態度的影響；另一種則是研發適當的教材搭配軟體輔助，希望藉以彌補用傳統方式上課（板書）的缺點。研究者認為，若能適當地將動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學中，都會提昇學生的學習動機或學習態度，甚至學生的學習成就都會有所幫助（表 2-2）。但是這些研究中多是探討動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學時，學生於課堂學習後的表現（例如學習成就、學習態度），卻可能忽略了學生在學習的歷程中所受到的轉變。

表 2-2 國內動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學相關研究成果

動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學對學生學習過程的影響				
	學習成就	學習態度	學習興趣	解題能力
洪慈徽 (2008)	優於控制組	優於控制組	實驗組傾向 正向支持	
姚念廷 (2009)			提昇	提昇
彭建勛 (2010)	提昇			提昇
楊舜傑 (2011)			提昇	提昇
游正祥 (2011)		提昇		提昇

貳、GeoGebra 融入數學教學常見困境

研究者依據相關文獻探討，歸納出國內以動態幾何軟體 GGB 融入數學教學之常見困境，整理如下。

一、教材設計若非教師本人設計，師生會無法融入其教學環境

國內目前已經有許多數學教師致力於投入設計GGB教材，許多相關的教學內容或GGB研習資訊都可以在「台灣GGB中心」看得到。然而，根據林宜臻（2013）的研究報告指出，國內目前以GGB融入教學的高中教師並不多，其中有50.3%的教師是因為不知道如何有效使用，即使有現成教材也會因為不熟悉軟體而作罷。而游正祥（2011）再過去研究中也發現，如果教材不是老師自己製作的，老師無法感受到作者建構的概念，上課時無法完整表達出作者的設計內涵，只能如同錄音機一樣播放講解內容而已。

二、授課時數受限

以目前國內的教育環境而言，學生承受到家長的期待的壓力與學生個人的自我期許，為了短期的學習成就，學生選擇了速成的公式解或特殊解法，而不去追求知識的理論背景（游正祥，2012）。因此，教師在教學上也不敢輕忽，為了每一次的大小考試努力地在追趕課程進度，林宜臻（2013）的報告中也指出，有教師認為使用電腦教學會耽誤教學進度，在時間不夠用的情況下，學生無法再學習運用其他新軟體。如果只是偶一為之尚可接受，但是需要佔用太多時間，恐怕不是非常理想，除非課程專門給數學科指定來上 GeoGebra。

三、資訊設備相關問題

翁瑞樺（2012）認為，想要利用科技融入教學，必須先克服電腦設備的問題與學生是否能夠熟練操作。在林宜臻（2013）的研究報告中有老師提到，學生若不能人人操作，會降低學習興趣，所以不建議使用 GGB 融入教學。另外，學校硬體設備是否充足也是一大考量。學校硬體設備不能充分讓老師均能使用，操作需借用教室，比較麻煩，而且城鄉差距過大，僅少數都會型學校可行。

四、可能造成學生另類的學習障礙

林宜臻（2013）在過去研究報告中指出，有部分數學教師反對使用 GGB 融入一般數學課堂教學，探究其原因發現，教師們認為學生不適合在電腦教室上課，電腦教室的環境容易讓學生分心，在學生能力無法理解的情況下，教師無法專注執行教學可能會導致上課秩序無法掌控。另外，彭建勳（2010）也指出，在教學環境的設計上，是否會因為未要求學生同時需注意 GGB 中幾何與代數表徵，增加學生需要同時連結代數與幾何表徵而造成學習上的困難，引此造成學生另類的學習障礙，會是一個值得探究的問題。

第四節 高中數學幾何教材之分析

本研究試圖將動態幾何軟體 GeoGebra 融入高中二年級的數學教學中，研究者在本章節先針對數學學習領域目標，再就南一版與龍騰版高中數學第四冊教材逐一分析探討，藉以找出高二課程中較適合以動態幾何軟體 GeoGebra 融入的單元。

壹、高中二年級數學教材地位分析

本研究主要是以二年級課程為主軸，根據教育部於 2013 年公布的高中課程 102 微調課綱，其教材綱要整理如表 2-3、表 2-4。

經研究者參閱相關文獻後發現，幾乎所有高中單元幾乎都可以用動態幾何軟體 GeoGebra 來協助學生學習，GeoGebra 不只扮演板書數位化，除了將課程內容呈現，其設計也讓學生有動腦思考的時間與空間（林宜臻，2013）。然而，尤其是到了高中二年級階段，因空間向量的課程出現，在此階段已非單純的平面問題，而是較為複雜的空間問題（陳俊廷，2002）。此外，空間向量的課程概念中，皆扣緊「空間概念」做延伸，因此本研究選擇「空間概念」作為課程設計的主軸，其中包含的課程主題為：空間中的基本幾何概念、三垂線定理與二面角、空間中的多面體以及空間中的坐標表示。圖 2-4 為本研究的課程分析地位圖。

表 2-3 普通高級中學必修科目「數學」課程綱要—數學 III

主題	子題	內容	備註
一、三角	1. 直角三角形的邊角關係	1.1 直角三角形的邊角關係（正弦、餘弦）、平方關係、餘角關係	2.1 cot, sec, csc 置於數學甲 I、數學乙 I 2.2 將弧度量融入廣義角的教學，強化度與弧度的轉換練習。由引進弧度所延伸出的問題僅限於度度量與弧度轉換練習，不要延伸到弧長與扇形面積。 4.1 不含和差化積、積化和差公式 5.1 可使用計算器求出三角函數值
	2. 廣義角與極坐標	2.1 廣義角的正弦、餘弦、正切、平方關係、補角 2.2 弧度，弧度量與度度量的互相轉換 2.3 直角坐標與極坐標的變換	
	3. 正弦定理、餘弦定理	3.1 正弦定理、餘弦定理	
	4. 差角公式	4.1 差角、和角、倍角、半角公式	
	5. 三角測量	5.1 三角函數值表 5.2 平面與立體測量	
二、直線與圓	1. 直線方程式及其圖形	1.1 點斜式 1.2 兩線關係（垂直、平行、相交）、聯立方程式	3.2 不含兩圓的關係
	2. 線性規劃	2.1 二元一次不等式 2.2 線性規劃（目標函數為一次式）	
	3. 圓與直線的關係	3.1 圓的方程式 3.2 圓與直線的相切、相割、不相交的關係及其代數判定	
三、平面向量	1. 平面向量的表示法	1.1 幾何表示、坐標表示，加減法、係數乘法 1.2 線性組合、平面上的直線參數式	
	2. 平面向量的內積	2.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式 2.2 直線的法向量、點到直線的距離、兩向量垂直的判定	
	3. 面積與二階行列式	3.1 面積公式與二階行列式的定義與性質、兩向量平行的判定 3.2 兩直線幾何關係的代數判定、二階克拉瑪公式	

資料來源：教育部（2013）。普通高級中學必修科目「數學」課程綱要。

表 2-4 普通高級中學必修科目「數學」課程綱要—數學 IV

主題	子題	內容	備註
一、空間向量	1.空間概念	1.1 空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係	1.1 僅作簡單的概念性介紹 4.3 不含特殊技巧行列式題型
	2.空間向量的坐標表示法	2.1 空間坐標系：點坐標、距離公式 2.2 空間向量的加減法、係數乘法，線性組合	
	3.空間向量的內積	3.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式、兩向量垂直的判定	
	4.外積、體積與行列式	4.1 外積與正弦的關聯、兩向量所張出的平行四邊形面積 4.2 三向量所張出的平行六面體體積 ◎4.3 三階行列式的定義與性質	
二、空間中的平面與直線	1.平面方程式	1.1 平面的法向量、兩平面的夾角、點到平面的距離	
	2.空間直線方程式	2.1 直線的參數式、直線與平面的關係 ◎2.2 點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離	
	3.三元一次聯立方程組	3.1 消去法 ◎3.2 三平面幾何關係的代數判定	
三、矩陣	1.線性方程組與矩陣	1.1 高斯消去法(含矩陣的列運算)	1.1 重點在於矩陣三角化的演算法 4.2 此處面積指兩向量所張出的平行四邊形面積
	2.矩陣的運算	2.1 矩陣的加法、純量乘法、乘法	
	3.矩陣的應用	3.1 轉移矩陣、二階反方陣	
	◎4.平面上的線性變換與二階方陣	4.1 伸縮、旋轉、鏡射、推移 4.2 線性變換的面積比	
四、二次曲線	1.拋物線	1.1 拋物線標準式	不含斜或退化的二次曲線；不含直線與二次曲線的關係(指弦與切線)；不含圓錐曲線的光學性質
	2.橢圓	2.1 橢圓標準式(含平移與伸縮)	
	3.雙曲線	3.1 雙曲線標準式(含平移與伸縮)	

資料來源：教育部(2013)。普通高級中學必修科目「數學」課程綱要。

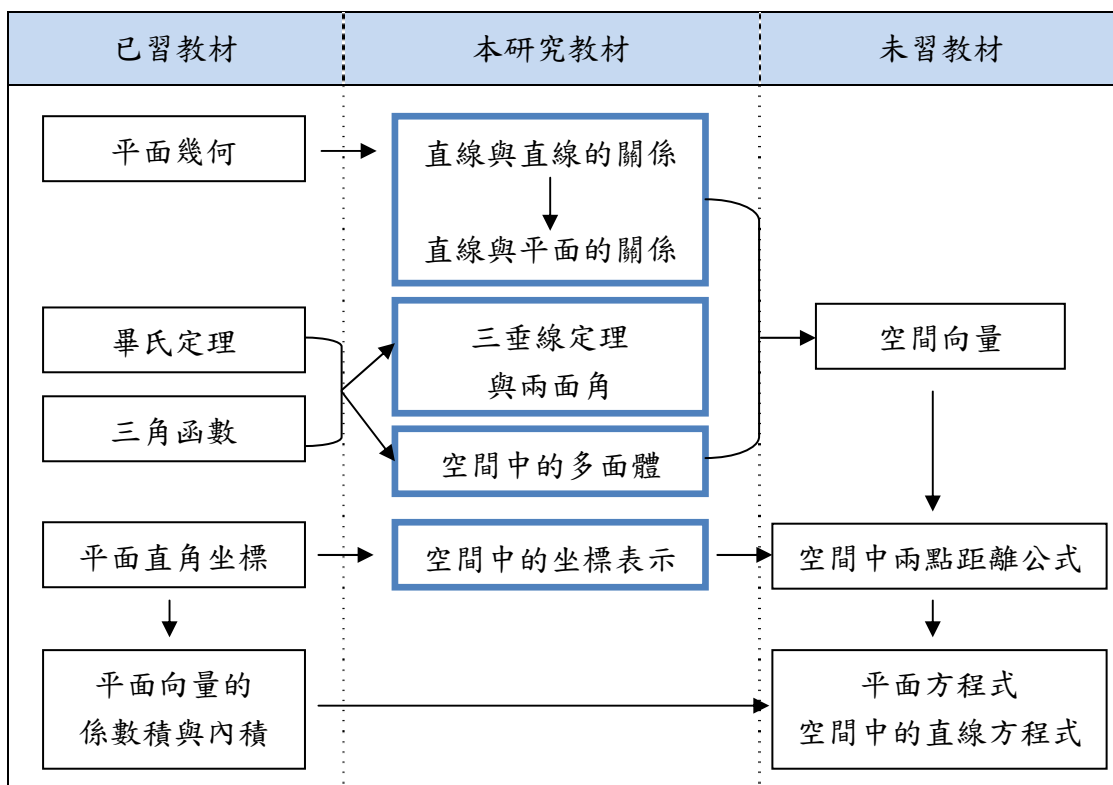


圖 2-4 本研究之課程分析地位

貳、課程目標

根據教育部於 2013 年修正的「普通高級中學必修科目數學課程綱要」，其數學課程欲達成的目標為：

- 一、培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
- 二、培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。
- 三、培養學生欣賞數學內涵以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

此外，教育部另規劃選修數學課綱，提供學生適才適性的學習機會，針對不同學生的需要，選修課程共分四類：標準課程、基礎課程、統整課程和進階課程。其中有一個即是將「數學軟體」納入選修數學的進階課程中，目的在於使學生學習以數學軟體解決問題。

而根據龍騰版普通高級中學數學第四冊教師手冊，針對「空間概念」單元之教學目標，整理如表 2-5。

表 2-5 本研究選擇單元之課程目標

課程內容	課程目標
空間中的基本幾何概念	(1)能了解直線與直線的關係，包含兩歪斜線。 (2)能了解直線與平面的關係，包含直線與平面垂直。
三垂線定理與二面角	(1)能了解平面與平面的關係，包含兩平面夾角。 (2)能了解三垂線定理及其基本應用。
空間中的多面體	能利用過去平面的先備知識解決空間中所遇到的問題。
空間座標系	能了解空間坐標系，並且能自行運用坐標表示。

綜合上述文獻探索與分析，我們可以了解到對於空間概念的教學，在傳統的教法上有其困難與限制，身為教師的我們要能夠有所變通。在這資訊爆炸的時代，以多元的教學方式改善傳統教學模式，藉以提昇學生的學習意願，並且適時地引導、幫助學生。透過動態幾何軟體 GeoGebra 教學，在圖形呈現方面，可以彌補學生僅從黑板的平面圖形學習時，因為缺少一個維度所造成的知覺障礙與錯誤。換言之，以動態圖像呈現，能夠使缺少的維度以一個虛擬的維度做呈現補強。因此，本研究欲探討的問題是：在動態幾何軟體 GeoGebra 融入高二數學幾何教學後，是否加深學生對於空間幾何概念的學習印象？並且探討學生在學習之後對於課程的接受程度為何？

第三章 研究方法

本章將依據前兩章所研擬的研究目的與研究問題，進行研究設計的說明，共分四節作介紹：第一節為研究架構、第二節為研究參與者、第三節為研究程序、第四節為研究流程。

第一節 研究架構

本研究架構分為三個階段，研究者首先設計課程，再經現職教師、試教學生以及研究者反覆設計修改後，最後進行大班樣本學生的數學課程教學試做，整理如圖 3-1。

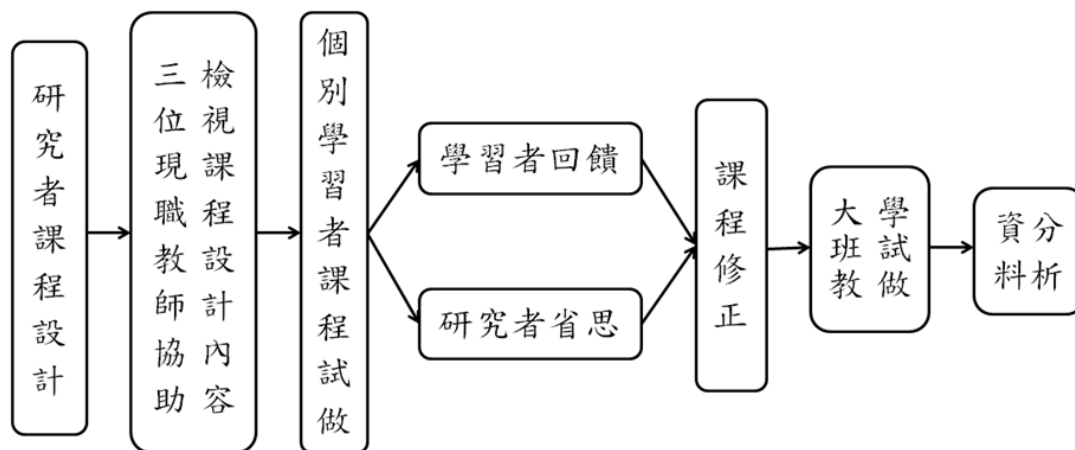


圖 3-1 研究架構圖

第二節 研究參與者

壹、課程試做之教學者

本研究中，研究者除了自行設計課程之外，同時也擔任研究現場的教學者。研究者目前於高雄市某高中擔任數學科兼課教師，教學至今已經有 2 年的教學經驗。曾在實習期間，擔任 GSP 特色課程小助教，發現學生容易在學習幾何時，常陷入錯誤的學習觀念而不自知，造成學習上許多的錯誤迷思。因此，研究者嘗試透過本次的論文研究，找出教學現場常見的困境，並且也增進自己的教學能力。

貳、課程試做之學習者

本研究挑選的五位試教學習者，是研究者去年教過的學生，現階段為高中二年級。根據學生前一年的數學學業成績與數學課堂學習表現，分為高、中高、中低程度各兩位學生。研究者試教的目的是主要是檢測課程以供不同能力的學生使用。研究者先選取中、高程度的學生進行試教，希望能夠透過中、高程度的學生對於課程的瞭解，慢慢進行課程的修正。最後，對低成就感的學生再做一次課程試做，修訂課程後使課程的進行更簡潔明瞭，讓該教材能發揮最大的效能。

參、大班教學試做之研究對象

研究者將個別試做後的改版課程，另再安排一次大班教學，藉以探究本課程內容設計是否適合在大班中教學。本研究的大班教學試做對象為參與某市立高中舉辦的均質化活動上課的學生，參與者一共有 48 位學生，來自各個不同的學校，年級均為高中二年級，尚未接觸過「空間向量」單元，但皆已學過平面幾何等先備概念知識。

第三節 研究程序

壹、課程內容規劃與設計

一、教材和單元的選擇

本研究計畫探索的課程以 102 年數學微調課綱為主，在高中二年級下學期的數學課程當中融入 GeoGebra 動態幾何學習環境作為探索內容。經文獻分析後，本研究選擇「空間概念」作為課程設計的主軸，其中包含的四個課程主題為：空間中的基本幾何概念、三垂線定理與二面角、空間中的多面體以及空間中的坐標表示（課程內容詳見附錄一）。表 3-1 為本研究的各課程目標。

表 3-1 四個幾何課程內容及目標

課程	課程內容	課程目標
一	空間中的基本幾何概念 (預計教學時間：75分鐘)	熟悉動態幾何軟體GGB操作介面，並以動態幾何軟體GGB觀察瞭解空間中點、線、面的交互關係。
二	三垂線定理與二面角 (預計教學時間：75分鐘)	釐清學生對於空間中兩面夾角的迷思，並計算其兩面夾角的角度與位置關係。
三	空間中的多面體 (預計教學時間：50分鐘)	使學生能夠從圖形觀察中學會以幾何思維模式輔助文字思維模式解題。
四	空間中的坐標表示 (預計教學時間：50分鐘)	學生能夠自行建立空間中各點坐標並用以解決空間中直線與平面之相關題型。

二、課程內容效度的檢驗

為了期許研究者設計的課程能夠廣為使用，研究者找了三位教學年資平均 11 年的老師協助檢視教材內容，並且提供研究者關於課程

的建議。透過 3 位現職教師的協助，研究者希望能夠兼顧到左台益（2012）在文獻中提過，動態幾何軟體所具備的三個基本功能：概念性的工具、人機互動關係與動態表徵。在過程中，研究者也事先依據文獻及相關參考資料先自行設計課程，自行模擬試做過一次之後，再與 3 位教師一起從中找出研究者設計時可能遇到的困難與缺失。經過共同討論後提出修正建議，最後研究者就教師們所提供的建議再加以修改，使課程的難易度、功能性更符合學生使用。

以下為 3 位教師的背景介紹以及該教師對於研究者課程設計的建議：

（一）林老師

林老師教學至今已有 25 年的經驗，目前任教的學校位於高雄市區，屬於都市型學校，學生程度普遍偏高，PR 值約 90。林老師指出，以軟體輔助數學教學需特別注意，對程度好的學生而言並不一定會有其明顯的成效，但是這樣的方式有別於傳統的教學方式，可以提供學生另類思考的機會，學習以不同的角度去思考解題的作法。此外，林老師也提到，學習數學知識是透過觀察、猜測進而下結論與驗證，而非僅從課本得到知識。他認為，適時地讓學生透過電腦軟體輔助課程內容做觀察，對於學生學習而言，不僅提昇學習的興趣，也提高學生在學習數學上的成就感。

（二）許老師

許老師教學至今已有 4 年的經驗，目前任教的學校位於高雄市區，屬於社區型學校，學生素質偏向中等程度，PR 值約 75。許老師認為此課程對於提昇學生的學習興趣會有很大的幫助。此外，教師若是能

夠在課前以動態幾何軟體 GeoGebra 準備好所需圖形，不僅可以省去在黑板上畫圖的時間，也可以讓學生更快地進入課堂狀況。然而，許老師建議研究者，因為課程實施的對象是給未接觸過「空間幾何概念」的學生，因此在隨堂例題的規劃上應以簡潔為主，盡量先以是非題呈現，讓學生可以循序漸進地討論各種圖形的可能性，切勿將題型複雜化，如此，學生也能夠較有效地吸收課程知識。

(三) 黃老師

黃老師教學至今已有 4 年的經驗，目前任教的學校位於高雄市區，屬於都市型學校，學生程度普遍偏低，PR 值約 30。黃老師認為軟體輔助教學對於中低程度學生有極大的協助，不僅讓學生更易於了解課程內容，並能提升學生的學習興趣。黃老師建議課程實施前可能需預留時間教導學生如何使用軟體，確認學生會使用軟體後，再實施課程內容。隨堂練習部分，建議一張考卷應有兩種以上題型，否則對於程度較不佳學生看到全部都是應用題型的考卷會有無助感。

三、課程說明

本研究之教學活動流程主要有五個部分：課前準備、課程實施、學生課後練習與學習回饋、課後練習檢討與課堂分享，整理如圖 3-2。

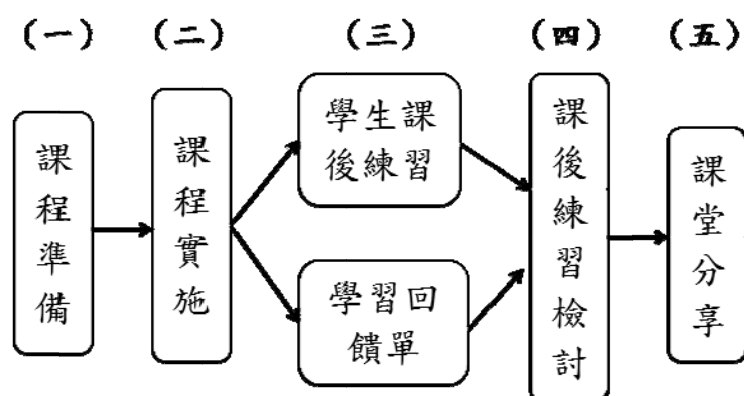


圖 3-2 教學流程圖

(一) 課前準備

- 1、確認每位學生都有電腦與相關設備可以使用。
- 2、規劃課程講義與課後練習作業。
- 3、製作搭配課程講義中隨堂例題的 GGB 操作檔案。
- 4、設計學習回饋單。

(二) 課程實施

- 1、每人分配一台電腦，4 人分為一組，採隨機分組。(視教室情況而定)
- 2、教學者講解課程與數學概念知識，並且隨機抽組別提問討論內容。
- 3、學生自行上機操作並且討論隨堂例題，於討論結束後各組輪流做分享。
- 4、例題講解完畢之後，教學者做總討論，並且發放作業，於下堂課檢討。

(三) 學生課後練習與學習回饋

- 1、課後練習：每堂課的課後練習約有 3~5 題不等，內容與該課堂的學習概念相關，目的在於檢視學生對於新知的吸收程度。
- 2、學習回饋：主要是想透過學生的觀點來瞭解課程是否有需要改進之處。

(四) 課後練習檢討

- 1、教學者於每堂課開始前，與學生一起討論前一堂課的作業與難題。
- 2、透過師生互動，讓學生的學習更為精進。

(五) 課堂分享

- 1、教學者於四堂教學活動結束之後，請學生彼此分享與討論上課的想法與建議，將結果記錄下來以作為課程改進的參考依據。

四、課程實施注意事項

- 1、部分學生可能會對於上機不熟悉，因此教學者於第一堂課時須特別留意大家操作電腦軟體的情形，必要時適時予以幫助。
- 2、少數學生數學程度較佳，相對於其他學生而言會有比較多的空白時間，因此教學者須事先準備進階題，讓程度較佳的學生有多一點的挑戰性。
- 3、多鼓勵學生討論與思考，並且將想法寫在學習單上與教學者分享。

貳、資料蒐集

在動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學課程後，研究者將透過課後作業、學習回饋單、學生學習心得問卷與教師教學手札（研究者於設計修改過程的省思和教學實施心得而寫成的札記）等作為資料蒐集，進而探討本研究中的發現。

一、學生課後作業

研究者於每次試教後會發一張關於該堂課的課後練習，目的在於觀察學習者的學習狀況。每張作業的練習題數約 5 題左右，預計將會花上學習者 30 分鐘左右的時間（詳見附錄二）。

二、學生學習回饋單

研究者於每堂教學試做後發給試教學習者填寫，填寫的內容主要是想透過學生的觀點來看上課時師生互動的情形，研究者可依學生的課後感想與心得來反思學生在學習後的收獲，並且思考這項課程是否具適切性（詳見附錄三）。

三、學生學習心得問卷

本研究的問卷訪問對象為大班教學研究對象的學生。問卷將於四堂課程結束後發放，內容為動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學後學生的接受情形、學生對於動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學後的感想與建議（詳見附錄四）。

四、教師教學手札

在研究過程中，研究者利用教學手札記錄自己對於課程執行上的反思，並且詳細記錄課餘時間觀察或融入學生互動的課程心得、動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學後所遭遇到的困難以及教學中的發現和學生的特殊表現（詳見附錄五）。

參、資料編碼

本研究蒐集的資料包括課後作業（業）、學習回饋單（單）、學生學習心得問卷（卷）與教師教學手札（札）等。研究者將所有的資料進行編碼建檔。建檔後，研究者依蒐集到的資料分段分類註記並作命名分類主題，整理完畢之後，再與指導教授和有經驗的教師討論分類是否恰當。經嚴謹的討論分析與整理後，茲將編碼方式整理成表 3-2。

表 3-2 各種原始資料編碼意義

編碼	意義
P ₁ ~P ₅	指預試參與者之代號，依姓氏筆劃由少至多。
T ₁ ~T ₆	指課程試做之學習者之代號，依姓氏筆劃由少至多。
S ₁ ~S ₄₈	指大班教學研究對象之代號，依學校代碼與班級座號。
師	指研究者於教學時的角色代號。
1031021 業	代表 103 年 10 月 21 日學生課後作業。
1031021 單	代表 103 年 10 月 21 日學生回饋單。
1031021 卷	代表 103 年 10 月 21 日學生學習心得問卷。
1031021 札	代表 103 年 10 月 21 日教師手札。
1031021 錄	代表 103 年 10 月 21 日課程錄音檔。

肆、資料分析與檢驗

研究過程為避免主觀的過度介入，使研究能增加其客觀性及可靠性，本研究採取三角校正(methodological triangulation)的研究方法。在研究中採用多元的方法、多元的資料蒐集、觀察角色於不同的情境進行研究資料之蒐集與校正(Denzin,1989)。

研究者研究方法的三角校正包括資料蒐集的三角校正與分析者的三角校正。資料蒐集三角校正，研究者透過學生學習回饋單、學生學習心得問卷、教師教學手札與錄音檔等多樣方式蒐集資料；分析者的三角校正，針對個別學生在教學活動中其學習回饋單、學生學習心得問卷、以及教師教學手札進行編碼分析整理。透過研究者與指導教授及高雄市某現職數學任課教師，進行資料之編碼，以期能充分解釋本研究結果，增加其客觀性及可靠性。

第四節 研究流程

本研究流程是先以個人經驗和文獻蒐集先擬出一個初步的研究計畫，目的在於探索研究者感興趣的研究主題與其研究方向，並蒐集相關文獻來佐證這項初步的研究計畫。待多方討論後，設計出本研究所使用的數學課程，然後實施課程，接著開始蒐集本研究所需的資料進一步做整理分類與分析。在配合相關文獻後，最後進行報告撰寫。圖 3-3 即為研究者實施動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學的研究流程。

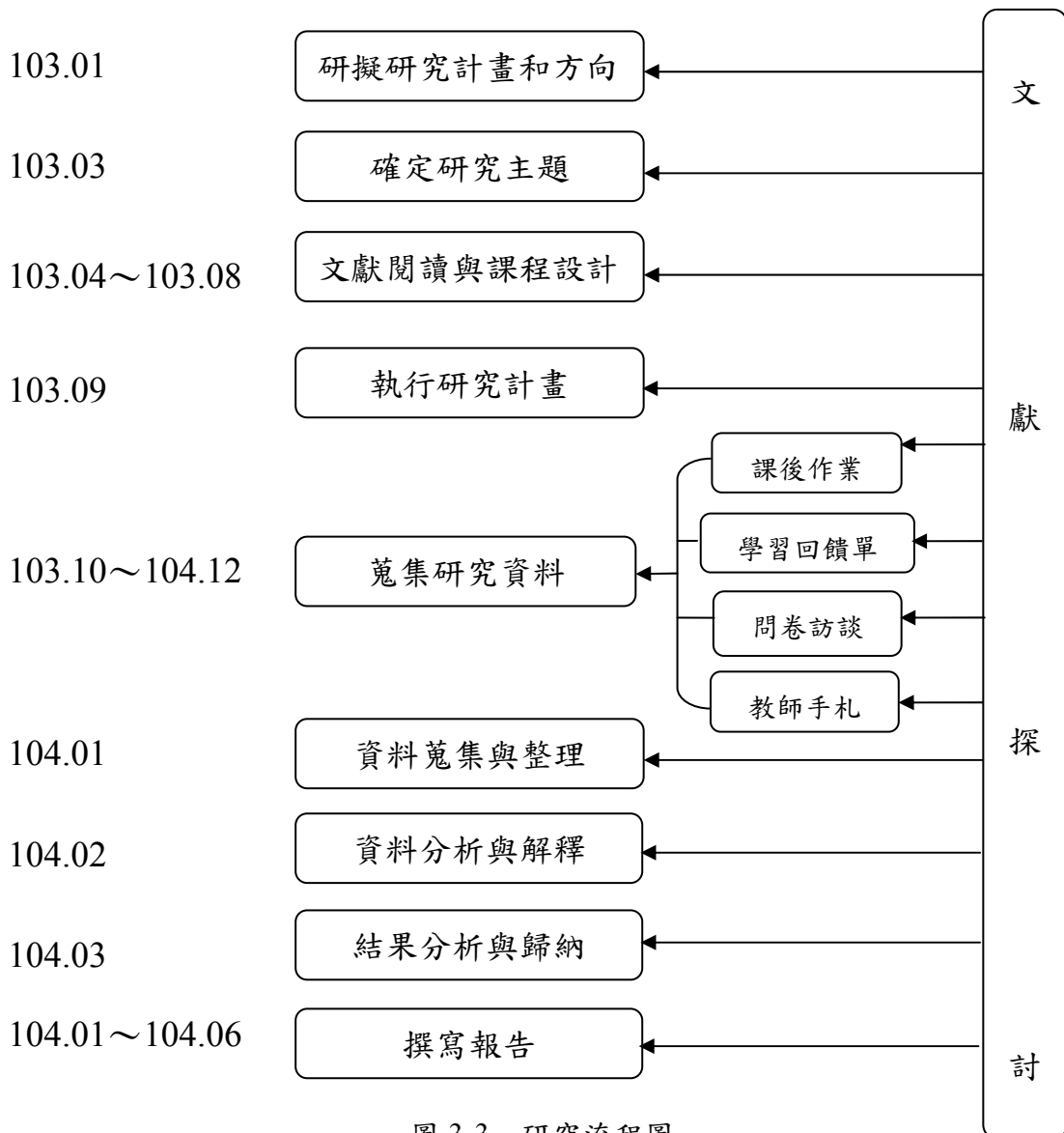


圖 3-3 研究流程圖

第五節 課程預試結果與省思

壹、課程預試對象

參與本研究的課程預試對象為高雄市某市立高中升高三的學生，自願參與者共 5 人，平均在班上的數學成績表現為中上，在課程預試的過程中皆熱烈參與討論並且給予研究者許多課程設計的啟發。

貳、教學預試結果

礙於時間與場地的限制，本研究預試於一週內進行，每天執行一堂課，共有四堂課程，每堂課的時間大約為 2 小時。其教學流程比照正式教學活動（如圖 3-2），茲將教學預試結果整理如下。

一、空間中的基本幾何概念—教學預試

本課程的目標為熟悉動態幾何軟體 GGB 操作介面，並且讓學生試著以動態幾何軟體 GGB 作圖觀察瞭解空間中點、線、面的交互關係。以下就蒐集而來的資料做分類與說明。

（一）課堂觀察：

在點線面的討論過程中可以瞭解到，學生們常常知道某種數學現象但卻不知道其構成的原因（例如說，他們都知道三點可構成唯一平面，但卻不知道為什麼）。透過教學者的引導討論，以動態幾何軟體 GeoGebra 融入教學，並且以動態圖像呈現空間概念，有增加學生對於問題的具體思考（1030714 札）。

（二）學生學習回饋與建議：

5 位學生在學習回饋單中皆表示，覺得課堂上隨堂例題「第 3 題

第(2)小題」是最難的一題。整理其原因發該題目為純文字題，沒有圖形輔助解題，學生必須憑空想像以紙筆畫圖求解。然而，多數學生表示，透過動態幾何軟體 GeoGebra 輔助畫圖，能快速幫助釐清圖像，並且清楚地解題。

P₁：令人印象最深刻的時候是利用 GGB 解題的時候！（1030714 單）

P₂：覺得能將數學軟體操作來教學是個很新奇的體驗，透過 GGB 操作，能使圖形更快呈現在腦中，並幫助想像。（1030714 單）

P₃：使用 GGB 作圖，可以更清楚地了解空間中的點線面。（1030714 單）

P₄：覺得程式很複雜...。（1030714 單）

P₅：原來圖形可以這樣轉轉轉，玩的很開心！（1030714 單）

二、三垂線定理與二面角—教學預試

本課程的目標為釐清學生對於空間中兩面夾角的迷思，並計算其兩面夾角的角度與位置關係。以下就蒐集而來的資料做分類與說明。

（一）課堂觀察：

隨堂例題中的第3題，該題圖形為一個正四面體內嵌一個正八面體，然而此圖在平面中較不好呈現，而A同學試圖想解釋給B同學看懂，卻發現不管用比的或講的，B同學似乎無法理解。在教學者主動提供以軟體 GeoGebra 所畫的正八面體給大家觀察後，那位本來一直都無法順利解題的學生，瞬間開竅了！（1030715 札）

（二）學生學習回饋與建議：

隨著題目的難度越高，圖形變得比較複雜，學生們比較沒有辦法直接憑空想像，有些學生可以用紙筆畫圖觀察就解決問題，但根據幾

位學生的說法，如果能用動態幾何軟體 GeoGebra 輔助畫圖會比較有效率。

P₁：利用 GGB 輔助學習三垂線定理令人印象深刻。(1030715 單)

P₂：希望能再有多一點的題目可以練習。(1030715 單)

P₃：透過 GGB 提供深入思考的基礎，對抽象的空間圖形想像很有幫助。

(1030715 單)

三、空間中的多面體—教學預試

本課程的目標為使學生能夠從圖形觀察中學會以幾何思維模式輔助文字思維模式解題。以下就蒐集而來的資料做分類與說明。

(一) 課堂觀察：

觀察學生在學習以動態幾何軟體 GeoGebra 畫各種「正多面體」圖形時，學生可以從中學學習到很多基本的幾何基礎知識（尺規作圖）並且將其妥善運用。例如，要如何畫出一個標準的正四面體？有一位學生使用的方式是利用「球」半徑等長的概念畫出來，這是出乎研究者意料之外的事情。研究者認為，如果能讓學生們自由發揮創造圖形，一來不會限制他們解題的思維模式；二來也可以讓學生用自己的方式建構屬於他們的知識（1030716 札）。

(二) 學生學習回饋與建議：

因為這一堂課主要是讓學生自行發揮畫圖並分享其圖形特性，因此學生們在過程中除了可以更熟悉介面操作之外，也順便解決了以前一些很難想像的圖形，例如：當年的指考題據說很難觀察的圖形「布丁形狀的多面體」，平面上很難觀察的圖形，以動態幾何軟體

GeoGebra 畫圖輔助並且做動態觀察，可以快速掌握解題要訣。

P₁：做四面體的時候覺得很好玩！（1030716 單）

P₃：GGB一開始不熟時覺得不好用，了解它的功能後覺得方便！

（1030716單）

四、空間中的坐標表示—教學預試

本課程目標為學生能夠自行建立空間中各點坐標並用以解決空間中直線與平面之相關題型。以下就蒐集而來的資料做分類與說明。

（一）課堂觀察：

可能是因為最後一堂課的關係，少數學生顯得慵懶，但整體來說，大家上課都還算認真，對於教學者的提問也都有回答到。然而，教學的過程中，有部分學生因為很快就把該堂課的隨堂例題寫完，進度一整個超前，導致他覺得很無聊，只好跟隔壁同學聊天，造成教學者在課堂中的一點小不安（1030717 札）。

（二）學生學習回饋與建議：

空間坐標系這個單元可以說是幾何與代數的結合，學生們在上課前認為這個單元比較簡單，應該不需要用到軟體輔助。然而，這個單元雖然不難，但學生們往往會因為題型過於複雜（一個題目需要3個以上的解題程序），不知道該從何角度去思考而做錯甚至放棄，研究者以 GeoGebra 軟體畫圖輔助並且適當地引導學生解題，在課後多數的學生皆表示 GGB 好玩的地方在於，可以透過動態模擬觀察出圖形特性與變化！

P₃：先傳統思維回答題目，再用 GGB 驗證，會加強加深印象。（1030717 單）

參、課程省思

整體而言，四個課程預試的學生（5 位）對於動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學課程皆持正向肯定，而他們也給予研究者許多課程的建議，研究者將其與教師省思整理如下。

- 1、部分學生因為不熟悉電腦軟體的操作，原則上第一堂課以熟悉操作介面為主要課程內容，建議日後如有類似課程，應該多出些幾何繪圖做練習，而非關注在試題練習
- 2、同儕之間相互學習總是會有許多意想不到的好結果，教師在教學過程中不應該設限教學方式與解題概念，適當地讓學生們自由發揮反而會有許多驚喜。
- 3、空間幾何概念不應僅是紙上談兵，以紙筆測驗評斷學生的能力，倘若資源充足，應以實作測驗，觀察學生的解題能力與思維模式及其方向。
- 4、程度好的學生有太多閒置時間，建議隨堂練習可以多出點進階題讓那些學生有多一點思考與練習的機會。

肆、教學設計修正

綜合上述課程省思，與現職教師的建議，研究者將課程設計做了部分的修改，整理如下。

一、空間中的基本幾何概念

- 1、刪除部分較難的題型練習，因為是第一堂課，主要還是以讓學生熟悉 GeoGebra 軟體操作為主（林老師建議）。

- 2、將敘述較為複雜的多選題改為簡潔明瞭的是非題，避免學生在作答時容易感到混淆因而失去信心（許老師建議）。

二、三垂線定理與二面角

- 1、增加平面垂線的迷思概念，並引導學生做分組討論，目的在於利用同儕間的互動，讓學生能夠自行建構概念知識（黃老師建議）。
- 2、修改題目敘述，以減少初學者在讀題上的困難（許老師建議）。

三、空間中的多面體

- 1、增加題目的層次感，讓程度好的學生有進一步思考的可能性（許老師建議）。
- 2、繪圖的部分可以讓學生先行嘗試，如有困難，教學者再予以協助。如此一來，可以增加學生的創造力與解題的豐富性(1030716 札)。

四、空間中的坐標表示

- 1、增加學生常見迷思概念內容，並且引導學生做討論(1030717 札)。
- 2、修改題目編排，從簡單至難，以降低學生的挫折感（許老師建議）。

第四章 研究結果與討論

本研究嘗試以動態幾何軟體 GeoGebra(GGB) 融入高中幾何課程做教學活動設計，希望學生能藉由在軟體輔助學習的過程中，將抽象的空間幾何概念思考轉化成為具體的圖像思維，並且增加學生在學習上的參與度。經教學實踐後，透過蒐集的相關資料進行分析，探究學生對於 GGB 融入數學教學後的接受程度。

研究結果將分為兩個部分呈現：第一個部分是各單元的教學試做，包括初版與再版兩個階段，前後的時間間隔約為一個月。研究者原本計劃需要三次的課程試做與修訂，但由於前兩次的課程試做大致上還算順利，在教材上並沒有做太多的修改，僅需注意在課堂上與學生的互動，並且瞭解學生的學習需求，因此在與指導教授討論後，決定取消第三次的課程試做。初版試做的上課時間均為每週二晚上，共有 3 位學生(T₁~T₃)參與；而再版試做的上課時間均為每週五晚上，共有 2 位學生(T₄~T₅)參與。試做進行以四個課程內容為主軸，分為四個小節來討論，分別為「空間中的基本幾何概念」、「三垂線定理與二面角」、「空間中的多面體」和「空間中的坐標表示」。

第二個部分是以四個課程於試做後的正式修訂版本再做一次大班教學的課程實施，上課時間是在寒假開始的第一天，參與人數共 48 人，其結果於第五節進行分析。最後，經指導教授與合作學校現職教師陳老師的建議，於第六節作整體課程的省思與修正。

第一節 「空間中的基本幾何概念」課程試做

壹、課程內容設計

一、課程主題內容的設計

「空間中的基本幾何概念」課程的內容設計主要先讓學生熟悉 GGB 操作介面，並且請學生試著以 GGB 作圖觀察瞭解空間中點、線、面的交互關係。經三位現職教師的建議後修改，將學習單內容原本是重點整理的學習形式，改為填充格的方式，讓學生在小組互動的過程中討論出答案，並且有多增加一些可以刺激學生進階思考的題型。而隨堂練習的部份，則改以是非題的形式，以避免題型過於複雜，對於初學者來說會造成讀題上的困擾。

二、課程試做的進行形式

預計教學時間為 75 分鐘（1.5 節課），課程進行主要分為兩個部分，前半段的設計是以 GGB 操作輔助概念建構，除了聽老師講解之外，學生之間主要是以小組討論的設計型態，希望學生可以藉由在互動的過程中，自行建構數學概念。而後半部分則是隨堂練習，在這個階段，原則上教學者先以不干擾學生解題思維為主，教學者主要是以引導的方式刺激學生共同討論並解題，於全數順利解題完畢之後，教學者最後再下整體的課程結論。

三、課程學習內容的特性

本課程設計與傳統板書的教學方式相比，最大的不同之處在於以往在講解學習概念時，教學者需要花費些許時間在板書上繪圖，然而

以 GGB 協助教學，教學者可以事先準備好課堂上可能需要的圖形，不僅可以節省在課堂上的教學時間，也可以讓學生在能夠自行操作圖形的環境下，建構其數學概念，並且增加在課堂上的參與感。

為了讓學生能夠快速上手 GGB 的操作，在本課程一開始，有個 5 分鐘的軟體操作基本介紹 (PPT)，並且於學習單中設計 5 到 10 分鐘的基礎練習 (畫點、線、面，如圖 4-1)，以順利銜接隨後的課程進行，直接進入空間中點線面的基本動態圖形觀察。而每一題的隨堂練習基本上都附有 GGB 繪製好的輔助圖形，如圖 4-2 為正立方體內嵌正四面體，藉以幫助學生解構進而重構其解題策略。

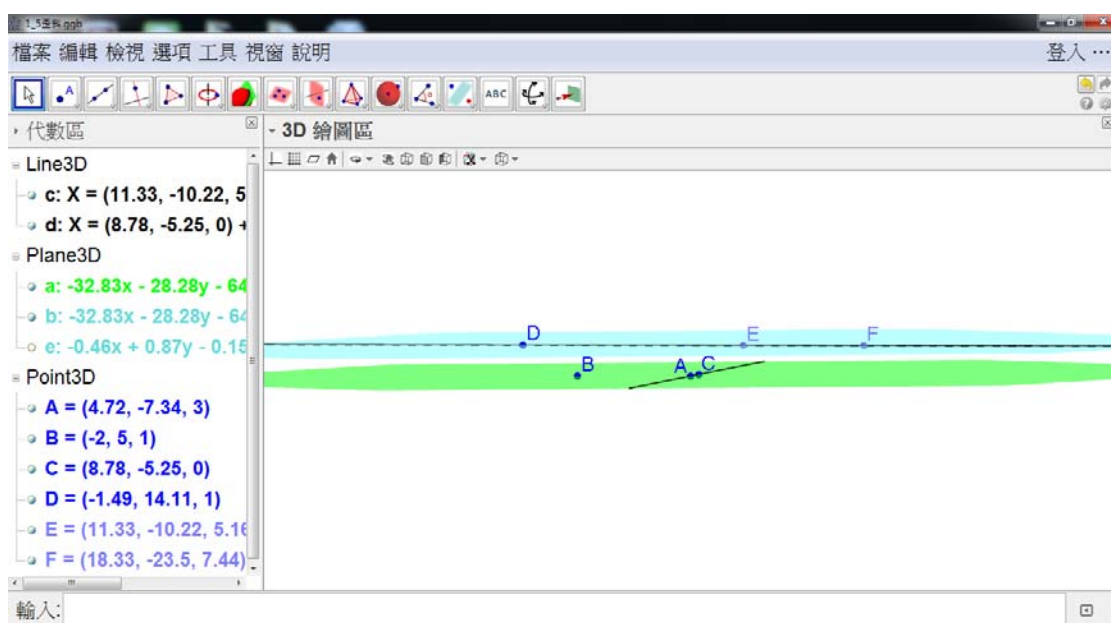


圖 4-1 空間中的兩歪斜線

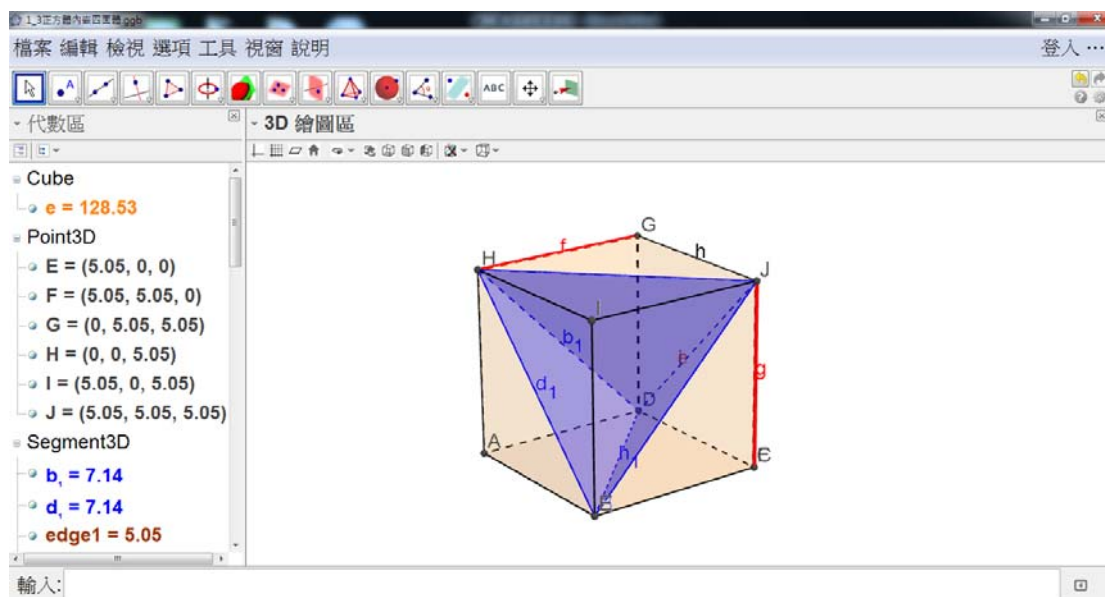


圖 4-2 正立方體內嵌正四面體

貳、課程的實施結果

一、教學教材之適切性

(一) 課程進行形式 (課堂觀察)

本課程的重要學習概念之一是「歪斜」，因為是個全新的名詞出現在課程中，因此對高二的學生而言其實非常陌生。然而，在初版試做時，因為有學生已有相關的先備知識，所以整體而言討論起來算是非常順利 (1031028 錄、1031028 札)。

師：平面上兩直線有相交、平行、重合三種交會情形，那在空間中呢？還有其他的情形嗎？ (1031028 錄)

T₂：這樣嗎？ (用手比出歪斜情形) 我記得叫歪什麼的？ (1031028 錄)

T₃：哦！好像是耶！就沒有相交卻又不平行！所以那叫什麼？ (1031028 錄)

而再版試做時，雖然學生無法明確說出「歪斜」這個名詞，但是他們都嘗試用現有工具或實例說明「歪斜」的兩直線交會情形

(1031205 錄、1031205 札)，這點倒是令研究者覺得滿驚喜的。

師：平面上兩直線有相交、平行、重合三種交會情形，那在空間中呢？還有其他的情形嗎？(1031205 錄)

T₄：就那個啊！像平行可是又不是平行！！(1031205 錄)

T₅：我知道！像梯子那種（用手比出）！？(1031205 錄)

本課程的重要學習概念之二是「三面交會情形」。在初版試做時，其中兩位學生想到的是之前物理學過的三面鏡子成像，然而第三位學生無法想像其圖形，最後是以 GGB 繪圖畫出他們所想像的圖形（如圖 4-3）而達到共識（1031028 錄、1031028 札）。

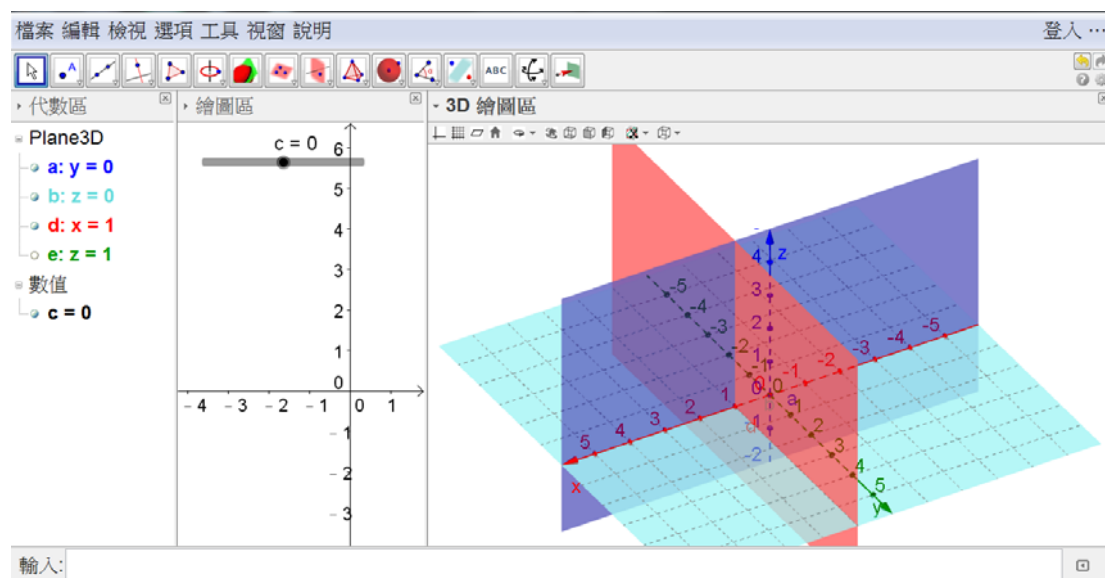


圖 4-3 三面交於一點（教學者引導學生繪圖用以觀察三面的交會情形）

而再版試做時，一開始兩位學生都毫無頭緒，透過教學者以 GGB 動態圖形引導後（如圖 4-4），學生可以自行解構三面的交會情形，並針對各種情形做分類（共 8 種）與統整（1031205 錄、1031205 札）。

T₄：用 GGB 畫出來之後可以看到這三個面交於一點耶！（1031205 錄）

T₅：這樣的話...還會有三面交於一線的囉？像這樣（用手比）(1031205 錄)

T₄：你移動一下，交於一線的還有這種，還有三個都疊在一起的勒！

(1031205 錄)

T₅：原來是這樣啊... (移動滑鼠) 那這樣不就是沒有交點 (1031205 錄)

師：所以...你們要不要認真數一下看三個面總共會有幾種交會的情形？可以分成三大類：恰一解(交於一點)、無限多組解以及無解。(1031205 錄)

T₄：交於一點的就一個嘛...無限多組的有...3 種... (1031205 錄)

T₅：我數完了！有 8 種，我確定！ (1031205 錄)

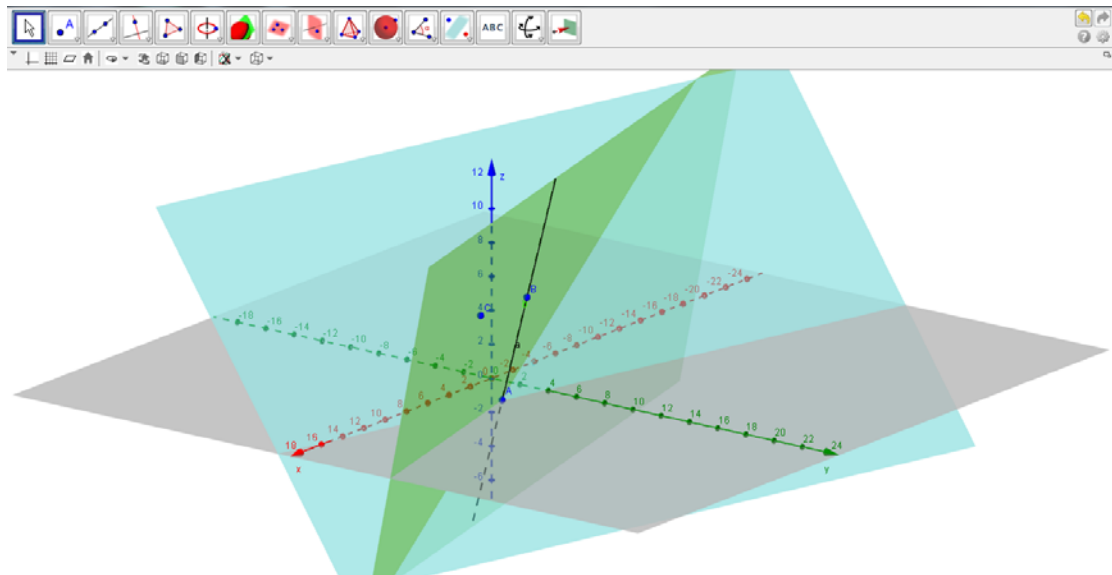


圖 4-4 thisisshuyu (學生自行繪圖用以觀察面與面的交會情形，檔名為學生自己的命名)

在兩次的課程試做中，可以看到小組討論的優勢是，同儕之間較能夠理解彼此的語言。整體而言，學生是學習的主體，教學者在課程的互動中僅是輔助者的角色。

(二)、學生對於課程內容的學習轉變 (課後作業)

在本課程的課後練習中，有學生表示，過去常常看到幾何的題目會覺得毫無頭緒，然而以 GGB 輔助學習可以讓抽象的圖形具體呈現，讓他比較不會排斥解題 (1031028 單)。經研究者觀察後也發現，學

生在練習時皆有嘗試畫圖作答，若是遇到較複雜的題型，學生們彼此之間也很樂於共同討論（1031104 札、1031212 札）。

研究者發現無論是初版或是再版試做的學生在練習的過程中較少使用到 GGB 軟體繪圖輔助思考（1031028 單、1031205 單、1031212 札）。經研究者簡單訪談後發現，學生認為在上課時操作圖形的過程中就已經建立其學習概念，練習題目時僅需要回憶圖形的樣子並作推論思考，並不需要再特別去繪圖，倘若在解題的當下有對圖形無法想像的情形，才會想使用 GGB 輔助繪圖想像圖形的樣貌（1031212 錄）。

二、學生對於課程之接受度（上課記錄、學習回饋單）

（一）有學生覺得 GGB 用處不大

初版試做時，有學生向教學者表示空間中的基本幾何概念有些其實用 GGB 繪圖反而是比較沒有明顯的優勢，與其畫圖不如直接用現成的工具（紙、筆或尺等）輔助思考即可（1031028 錄、1031028 單）。

（二）有學生認為人一多就容易分心

而另有學生向教學者表示，以小組討論的方式進行課程的確幫他建立了許多數學幾何概念。然而，過去的學習經驗告訴他，人一多的話，學生的心思其實很容易就不會專注在課業上，甚至開始與其他人聊天，他建議研究者應該要想個好一點的教學方法是能吸引全班多數人都願意參與課程的方式（1031028 錄、1031028 單、1031028 札）。

T₁：因為對空間沒啥概念，所以平常很少接觸這類的想法。用 GGB 可快速畫出所需圖形，不會受限於實體模型，這堂課收穫頗多（1031028 單）。

T₂：直線、平面關係，有些用 GGB 仍然看不出來，其實可以用筆代替（投

影 or 排列) 好像比較簡單 0.0 (1031028 單)。

T₃: 老師在教學時總是給予很多獨立思考的時間, 但是如果是在班級中上課的話不一定大家都會跟著思考與參與, 建議想個可以讓班上大家都願意參與的方式, 或許不能所有人, 但是至少是大多數... (1031028 單)。

(三) 有學生對於課程感到很新奇

再版的兩位學生對於本次課程內容感到很新奇 (1031205 單), 在課堂互動中也表現得非常積極, 並且在問題討論的過程中表現了許多推理與創造力 (1031205 札)。然而, 其中一位學生也提到與初版試做學生一樣的觀點, 他覺得這樣的教學方式雖然新穎, 但是不見得適合在大班教學 (1031205 錄、1031205 單); 而另一個學生則表示各有優缺點, 觀看教學者要如何取捨 (1031205 錄)。

T₄: 看起來滿好玩的! 現在好像開始流行用電腦上課! ? (1031205 單)

T₅: 與一般課程不同, 可以得到老師較多的關注, 比較能專心, 但可能不適合大班教學! ? (1031205 單)

研究者認為教學型態漸漸在改變, 不再是以往只能教師講、學生聽的方式, 反而是這種學生自行討論建構概念, 教師最後再統整下結論的教學方式, 可以讓師生有更多的互動空間, 也不會有讓學生覺得有無聊的空閒時間。

參、課程的總體性省思

透過學生的學習回饋單與課後作業練習可以看到學生在本次課程的學習過程中，最大的收獲就是學到了一個新工具可以用來輔助繪圖解題。有別於以往僅能紙上談兵，GGB 還可以讓學習者自行操作，並且以動態觀察刺激思考解題。

此外，研究者發現，先進行問答而不先把圖展示出來的好處是可以讓學生進行小組討論與思考。而研究者在師生互動的過程中也發現，教學者若能對學習者多一點提問，藉由互動所形成的學習共同體，明顯有效提昇學生在學習的參與度。

針對初版與再版試做學生提出的疑慮，研究者認為學習工具的使用其實是因人而異的，有些學生認為透過 GGB 繪圖的確可以幫助學習，但是對於自己本來就可以憑空繪圖的學生來說其實不盡然。相較於傳統板書的教學方式，以電腦輔助學習的方式對學生而言是新奇的，這樣的教學方式雖然不見得適用於每一個人，但是至少能帶給學生一個新的刺激思考的方式，加深學生的學習印象。

第二節 「三垂線定理與二面角」課程試做

壹、課程內容設計

一、課程主題內容的設計

「三垂線定理與二面角」的課程內容設計主要的課程的目標為幫助學生釐清對於空間中兩面夾角的迷思，並計算其兩面夾角的角度與

位置關係。經三位現職教師的建議後修改，將學習單中概念學習的部份增加一些 Q&A 的互動，希望能夠透過討論藉此消除學生學習本課程概念常見的迷思。另外，在隨堂練習的部分，其中有一題難度偏高，因此將其抽換至課後練習，僅供學生作為挑戰題。

二、課程試做的進行形式

本課程預計教學時間為 75 分鐘（1.5 節課），課程進行主要分為三個部分。首先是檢討上週課程的課後練習，檢討的形式以問答為主，倘若教學者已經確認學生沒有問題需要解惑時，教學者將以隨機抽問的方式檢視學生的學習情形。第二個部分是以 GGB 輔助概念建構，除了聽教學者講解之外，學生之間主要是以小組討論的設計型態，希望學生可以藉由在互動的過程中，自行建構數學概念。而後半部分則是隨堂練習，在這個階段，原則上教學者先以不干擾學生解題思維為主，教學者主要是以引導的方式刺激學生共同討論並解題，於全數順利解題完畢之後，教學者最後再下整體的課程結論。

三、課程學習內容的特性

與傳統板書的教學方式相比，本課程設計最大的不同之處是希望能藉由動態軟體的輔助讓學生能夠觀察圖形的變化與特性。教學者於本堂課中最重要的目標是要能夠引導學生們做圖形觀察與討論，並且讓學生能自行建構其數學概念與意義。

本課程的單元重點有三：直線與平面垂直、三垂線定理以及二面角。在講解概念的時候，教學者不需急著下課程結論，反而是先以引導的方式讓學生進行迷思概念的討論。如圖 4-5，教學者先開啟事先

做好的圖檔，然後說明有一直線 L 垂直此平面，但不直接講出垂線的定義，讓學生可以先透過操作圖檔做觀察。經學生熱烈討論後，教學者再整理大家的想法並下結論，讓學生可以用此方式自行建立其數學知識。

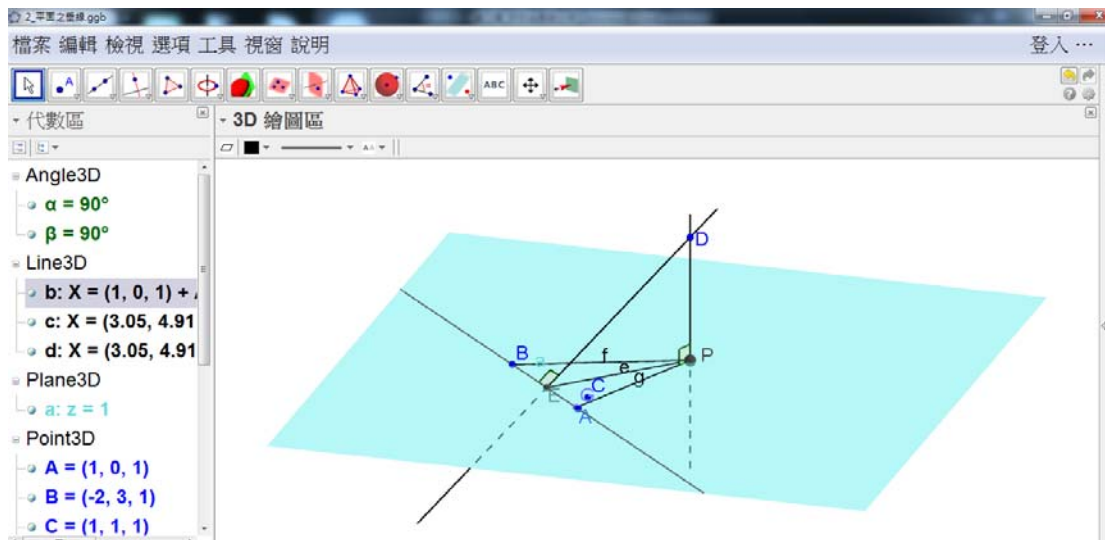


圖 4-5 平面上的垂線

貳、課程的實施結果

一、教學教材之適切性

(一) 課程進行形式 (課堂觀察)

在「直線與平面垂直」概念的講解中，於初版試做在觀察附檔「平面之垂線」時，有學生提問：「如果直線 L 沒有垂直於 E 平面，那麼角度不互相垂直的情況下，會不會造成三個交角都相等(1031104 錄、1031104 札)？」這是一個教學者事先沒有預料到的提問，然而藉由 GGB 的繪圖輔助 (如圖 4-6)，可以直接以內建小工具測量該角度予以學生做觀察，快速地幫了學生們解決這項疑惑。

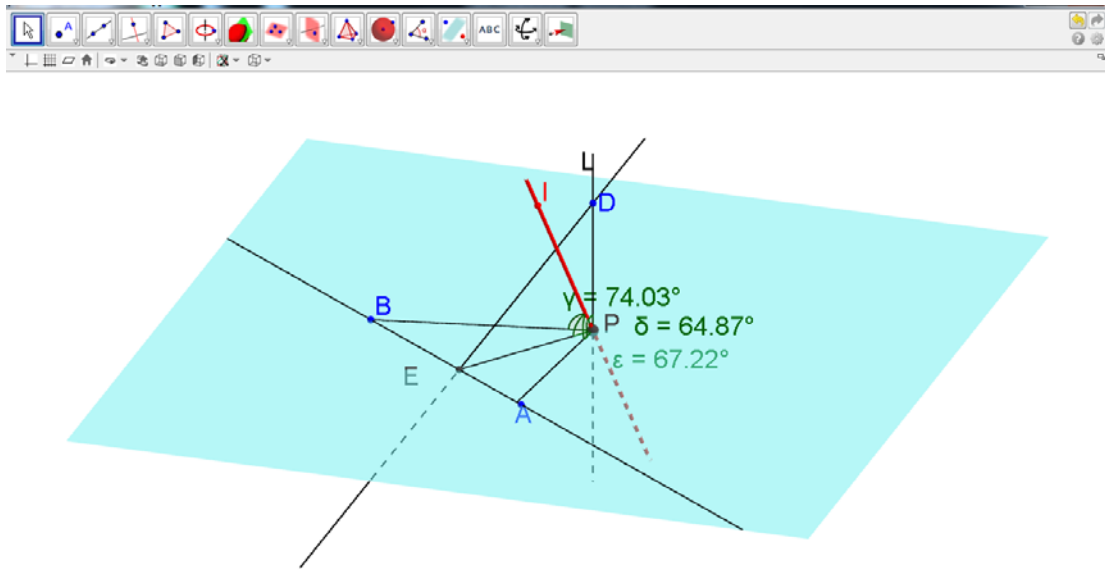


圖 4-6 平面上之不是垂線

而再版試做的學生則認為此概念是以直覺學習思考，並無任何迷思想法（1031212 錄）。

師：上一次試做時有同學提問：「如果直線 L 沒有垂直於 E 平面，那麼角度不互相垂直的情況下，會不會造成三個交角都相等？」（1031212 錄）

T₄：直線 L 就歪掉了，歪掉就沒有垂直啦！就只是都交於 P 點的四條直線。（1031212 錄）

T₅：我覺得它沒有很特別，就不會垂直啊@@（1031212 錄）

另外，在「三垂線定理」概念的講解中，於初版試做時，起初教學者並沒有打算要講解其證明過程，單純只是想讓學生們觀察其圖形特性(如圖 4-7)，僅以提示的方式要求學生於課後自行證明。然而，其中有位學生反應比較快，當教學者提示完畢之後，馬上在心中有了想法並且跟其他兩位同學做討論，於課堂上直接證明完畢（1031104 錄、1031104 札）。顯然，教學者無需侷限太多，讓學生有自行發揮的空間，往往會有許多意想不到的驚喜結果。

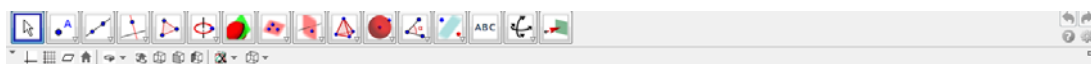


圖 4-7 三垂線定理

T₃: (動態旋轉附圖) 這兩條線真的是垂直耶！為什麼？(1031104 錄)

T₂: 老師有畫輔助線啊！我猜用畢氏定理或許就可以證明了？(1031104 錄)

因此教學者於再版試做時，試著讓學生思考其證明，過程中發現，雖然學生一開始會毫無頭緒，但是在教學者的引導下，再結合過去的學習經驗（畢氏定理），的確是可以順利地完成此證明歷程（1031212 錄、1031212 札）。

(二)、學生對於課程內容的學習轉變（課後作業）

研究者在觀察本次的課後練習中發現，學生在練習有關三垂線定理的相關題目時，總是能夠準確地立即判斷第三垂的位置（1031212 單），經研究者簡單訪談後瞭解到，學生們其實是對於課堂中操作三垂線定理的動態圖檔有深刻的印象，以致於在練習時能夠有好的解題方向（1031219 札）。

課後練習有三大題，研究者發現學生容易在第三題陷入膠著。經瞭解後發現是因為無法理解圖形的樣貌（1031111 錄、1031219 錄），除非以推理的方式去思考，否則很難從平面圖形上看出端倪。因此，

教學者於課後作業檢討時，提示學生可開啟先前附加檔案中的圖形，藉由動態觀察可以增加解題思維與策略（1031111 錄），如圖 4-9。透過 GGB 軟體的輔助，學生可以清楚地觀察到正四面體與正八面體的關係，讓學生於此課程概念的理解更上一層樓。

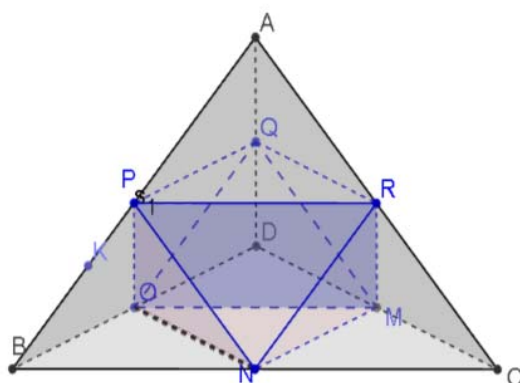


圖 4-8 正四面體內嵌正八面體

二、學生對於課程之接受度（上課記錄、學習回饋單）

（一）有學生認為進班恐有難度

於初版試做時，有學生提出，他認為像這樣一對三的軟體輔助教學很有效，但是如果進班的話恐怕有其難度，即使課程做的再好，恐怕也不是所有學生都會接受（1031104 錄）。他認為的理由如下：

- 1、電腦如果不控制畫面，學生的心很容易飛掉，教學者將不好掌握課程的進行。
- 2、熟悉軟體操作倒還是小事，如何吸引學生課程專注力才是大事。
- 3、課程進度會不會因此延宕？

（二）有學生認為平面圖形容易造成解讀迷思

另外，在初版試做的結果中值得一提的是，有學生開始反應平面圖形容易造成解讀上的迷思，如圖 4-8。圖 4-8 是隨堂例題 1 的圖形。

在圖形中，很容易會誤以為 $\overline{KB} \perp \overline{HF}$ 是正確的，而 $\overline{KB} \perp \overline{EG}$ 是錯誤的。然而簡單地推論後其實會發現，事實上是 $\overline{KB} \perp \overline{HF}$ 是錯誤的，而 $\overline{KB} \perp \overline{EG}$ 是正確的，學生也可以實際透過 GGB 軟體作圖觀察，用內建小工具測量角度證實此結論（1031104 錄、1031104 札）。

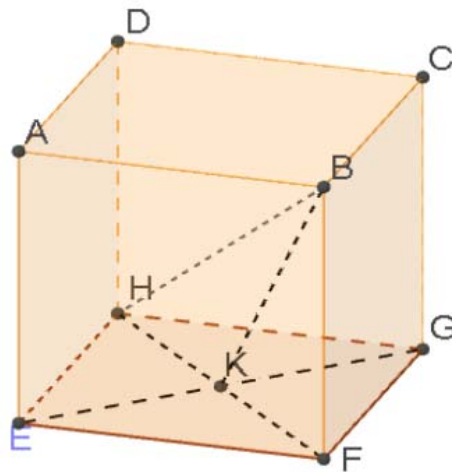


圖 4-9 正六面體圖形

T₁：利用 GGB 做動態輔助觀察，可以很快知道答案！而這次的課比上次容易一點，不再那麼抽象，不過空間的圖形很容易誤導人...(1031104 單)

T₂：可以旋轉 GGB 看各個不同的角度，再進行分析與討論=))(1031104 單)

T₃：有學到東西！而且每次舉日常事物都會令我更清楚。(1031104 單)

(三) 有學生利用過去學習經驗幫助思考

同樣是圖 4-8 的圖形衍生題目，再版試做學生除了用 GGB 觀察題型之外，也結合了過去的學習經驗，把圖形想像成有螞蟻在一個盒子上面爬行，進而推理出題目所要求的答案（1031212 錄）。

T₄：被騙了...把它想成國中常看到的螞蟻爬題型就好做多啦！（1031212 單）

T₅：以前的我要是看到這些題目，應該會覺得...不想算 XD（1031212 單）

參、課程的總體性省思

在本課程的試做後研究者認為，除了圖形需做修正以避免讓學生有誤解題目之外，其他並沒有發現什麼特別的內需要做修改。而在教學的過程中，要特別注意的是，學生常常會有令人意想不到得迷思概念，因此研究者認為，教學者除了要能夠隨機應變之外，可以事先多揣摩學生的各種錯誤迷思，以避免在上課時造成雙方無法相互理解的窘境。

關於有學生提出，這樣的教學方式若要進班恐有其難度。研究者於課程設計時也有考慮到這些狀況，進度的部份倒是不需要太擔心，因為課程設計包括時間的安排都是參考各家版本的教學進度所設計，因此不太會有課程進度落後的問題。而學生學習專注力的部分，研究者認為，這些情形其實在傳統教學的過程中也很常出現，因此教學是否能進行順利，端看教學者與學生之間的互動與默契。

值得思考的是，以平面繪圖呈現空間中的概念測驗真的很容易有陷阱，研究者不禁想問，這樣的出題方式真的適合用在空間教學及測驗嗎？然而，試做之後，研究者認為從另一個角度思考，可以瞭解到，其實這樣的出題方式可以考驗學生在圖形幾何上的推理能力，也算是一個好的考試策略。

第三節 「空間中的多面體」課程試做

壹、課程內容設計

一、課程主題內容的設計

「空間中的多面體」的課程內容設計主要目標是希望讓學生透過 GGB 的動態圖形輔助觀察，能夠從圖形觀察中學會以幾何思維模式輔助文字思維模式解題。經三位現職教師建議後修改，在隨堂例題中以相同的概念出題，增加進階思考題型，以避免程度好的學生因為提早將題目做完而有太多空閒的時間。而課後練習的部份則是將題目中原本有未知數的部分改以較好運算的數字代替。畢竟對學生而言，具體的數字總是比未知數較好理解；而對教學者而言也不會因為改了一個數字就無法檢視學生的學習轉變。

二、課程試做的進行形式

本課程預計教學時間為 50 分鐘（1 節課），在此單元中並沒有設計太多的教學概念，而是輔助學生熟悉各類型多面體常見的題型，因此課程進行主要分為兩個部分。首先是檢討上週課程的課後練習，檢討的形式以問答為主，倘若教學者已經確認學生沒有問題需要解惑時，教學者將以隨機抽問的方式檢視學生的學習情形。而後半部分則是隨堂練習，在這個階段，原則上教學者先以不干擾學生解題思維為主，教學者主要是以引導的方式刺激學生共同討論並解題，於全數順利解題完畢之後，教學者最後再下整體的課程結論。

三、課程學習內容的特性

課程首先一開始讓學生認識五種正多面體。一般傳統的教學方式是以模型作為輔助工具，然而考量到並不是每位教師都可以有相關的教材，因此研究者於此以 GGB 繪圖輔助設計出常見的三種正多面體：

正四面體、正六面體與正八面體，如圖 4-10。

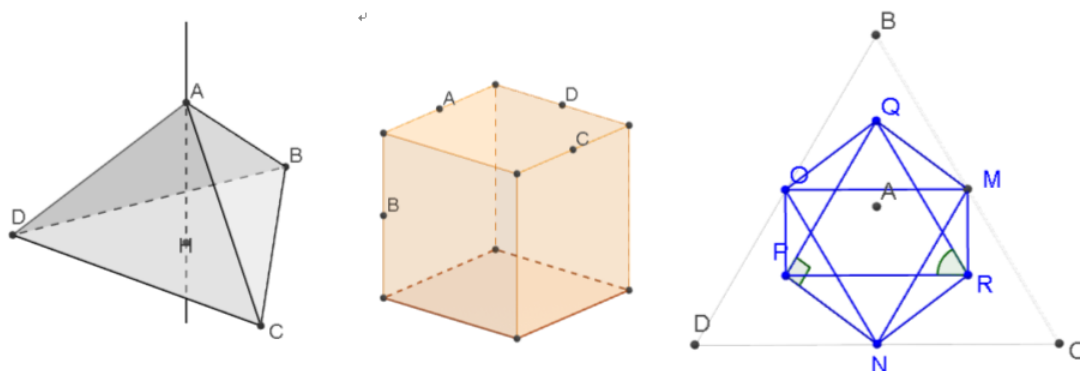


圖 4-10 三種常見的正多面體

(由左至右依序為：正四面體、正六面體、正八面體)

倘若時間允許，教學者可以利用閒置時間教導學生如何自行畫出簡單的立體圖形，尤其是針對一些特殊型的立體圖形（如圖 4-11），如果學生學會如何以 GGB 作為繪圖的輔助工具，那麼對於學生日後的解題會有很大的幫助。然而，由於過程中需要一些較複雜的幾何概念，因此這部份仍是視情況而定，原則上還是以既定圖形輔助學生做動態觀察為主要教學內容。

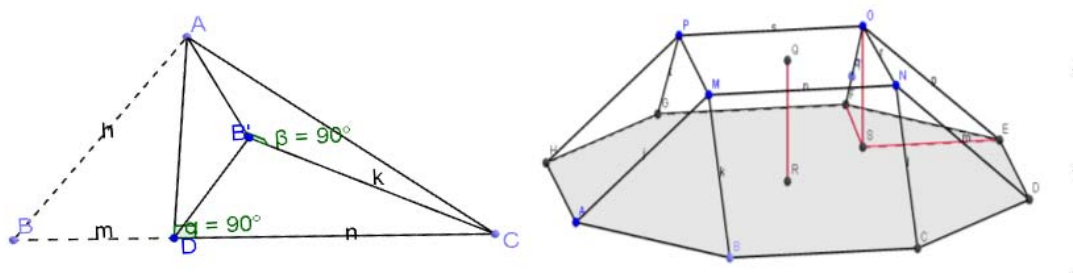


圖 4-11 特殊立體圖形

(左圖為折紙後所形成的一個三角錐；右圖為布丁形狀的立體圖形)

貳、課程的實施結果

一、教學教材之適切性

(一) 課程進行形式 (課堂觀察)

無論是初版或是再版的試做情形，此次的課程試做都顯得較前兩堂課流暢 (1031111 札、1031219 札)。研究者推測是因為本次課程的內容皆以解題為主，教學之前僅需確認學生的先備知識 (三角函數) 是否充足，再稍作前兩個課程概念的複習即可。

於初版試做討論到正八面體時，這三位學生似乎是因為化學課正好有教到結構式，學生常將這些多面體連想到化學課程內容 (1031111 錄)。研究者認為無論是對於數學課或化學課而言，都算是順便提昇了課程的廣度。

T₃: 正八面體的中間應該要是正方形...因為每個邊長都等長... (1031111 錄)

T₂: 可是四邊等長只能說是菱形，不一定是正方形吧... (1031111 錄)

T₃: 我記得化學裡有個結構跟它長得很像，是那個原子結構... (1031111 錄)

T₂: 那個... sp^3d^2 的混成! sp^3d^2 是 123456... (1031111 錄)

T₁: 它是在那三條的正上方， d 是混成軌域，所以是磷(P_6)嗎? (1031111 錄)

T₂: 硫是皇冠，磷是正四面體，正八面體是...氯化鈉晶體啦! (1031111 錄)

T₁: 嗯...所以正八面體的中間 (轉動附檔圖形) 是正方形啦! 其實就是兩個金字塔上下顛倒疊在一起的樣子。(1031111 錄)

而在隨堂例題 2 的部份，有學生提出，除了可以藉由 GGB 輔助繪圖理解之外 (如圖 4-12)，切蛋糕的思維方式也很容易讓大家去連結思考圖形的樣子 (1031111 錄)。

T₂: 你就想像拿著刀子在切蛋糕，你不可能切到一半把刀子留在蛋糕上吧？

(1031111 錄)

T₁: 哦！我用 GGB 畫出來了！是一個正六邊形！（1031111 錄）

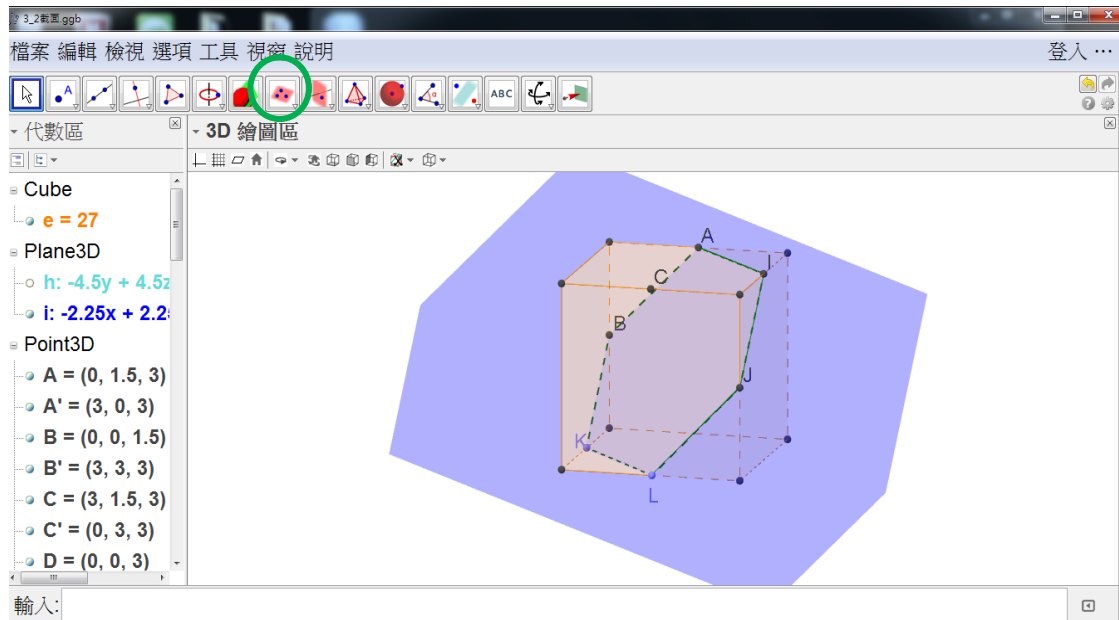


圖 4-12 正立方體中的截面圖形

於再版試做時，一樣是在隨堂例題 2 的部份，兩位再版試做的學生是用推論的方式（圖形有對稱）得到答案，GGB 軟體僅作為輔助驗證結果（1031219 錄）。延續上一節課試做結果的發現，平面圖形容易造成誤會，但其實善用邊角關係作推論，可以避免掉一些誤解。此外，研究者認為，雖然 GGB 不是萬能，但必要時會是一個很好用的解題工具。

T₄: 切下去一定是梯形！因為你把那些點連起來就是個梯形。(1031219 錄)

T₅: 可是要再繼續切下去啊！有對稱耶！所以兩個梯形合起來是正六邊形！

(1031219 錄)

(二)、學生對於課程內容的學習轉變 (課後作業)

本次的課後練習中的第一題，研究者在設計題目時並沒有給予圖形，僅有單純的文字敘述。研究者發現，幾乎每一個試做的學生都會自行嘗試以各個不同的角度去畫圖並且也順理解題成功(1031118 札)。因此，研究者認為，若是教學者能在課堂教學中，給予學生多接觸各種不同圖形的樣貌，對於學生而言也會有較多的圖形經驗以利解題。

在本次的課後練習中，研究者觀察到初版試做時有一位學生對於立體圖形的想像，相較於其他學生而言不是那麼的直接(1031118 札)。對於難度較高的題型，他在解題的時候一定得透過實體的輔助(例如以 GGB 繪圖操作動態觀察)才会有較具體的解題思維，在平面上繪圖作推理的方式對他來說是相對較困難的。而其他學生於課後練習的部份則是都能夠直接以平面繪圖作答，相較而言學習速度與理解能力是偏高的。

二、學生對於課程之接受度 (上課記錄、學習回饋單)

(一) 同儕之間互助學習

5 位試做的學生皆表示從 GGB 的操作中得到了適當的解題策略(1031111 單、1031219 單)。然而，初版試做的其中一位學生因為數學學習認知遠多於其他兩位學生，因此他在解完所以進階思考題後，仍然有多出來的空閒時間，這部份教學者當下的處理是請他協助另外兩位同學解題，藉由討論與互動的方式，希望能形成一個學習共同體，並且也減輕教學者在課堂上的教學負擔(1031111 札)。

T₁: 用 GGB 操作可以從不同角度就可以知道正八面體長怎樣(1031111 單)

T₂: 隨堂 5 用 GGB 看，效果說不定不錯，容易懂。(1031111 單)

T₃: 把多面體用 GGB 一直翻來翻去、俯視、剖面，各種圖形顯而易見～覺得很棒☺ (1031111 單)

(二) 有學生希望有實際模型可以相互搭配觀察

另外，有學生提到是否可以有實際的模型可以作為解題的輔助？其實有許多關於多面體的題目學生都可以自行摺紙而得，只是摺紙的過程中相對較花費時間，而且也不是所有的學校都配置有相關的立體模型教材。但研究者認為，不管是實際的立體模型，或是 GGB 的虛擬圖形，只要是能夠幫助學生建構知識的教具，在學習上都能夠有達到相輔相成的效果。

T₄: 觀察圖形有幫助到解題！但我想我得加強我的三角函數先(1031219 單)

T₅: 我覺得沒有圖我做不出來，但經過 GGB 的輔助與同學講解就會了。另外想問老師是否有模型可看？如果實際用摸的感受應該會比較深刻>”<
(1031219 單)

參、課程的總體性省思

研究者認為空間幾何圖形的想像其實是可以訓練的，但是得讓學生有先前圖像的經驗作連結，這部份光是靠一系列的平面繪圖仍嫌不足，建議在學習解題之前先讓初學者有模型經驗，再教導學生如何在平面上繪圖，會令學生在學習上印象較為深刻。此外，在隨堂練習的講解過程中，教學者需特別注意幾何概念的呈現，避免花費過多的時間在做無謂的數字計算，造成學習重點失焦。

以往在解決多面體題型的教學方式是讓學生先觀察期圖形模型的特性，藉以輔助思考解題策略。然而，以動態幾何軟體 GGB 繪圖，

對師生而言是多了一項新工具可以使用，並且能將其運用在較困難的圖形上，尤其像是特殊型的圖形，一時之間是很難找得到相對應的模型，若要立即以現有材料做一個，勢必也會花上不少時間。因此，研究者認為以 GGB 輔助繪圖學習，對數學教學來說無疑是一大進步。

第四節 「空間中的坐標表示」課程試做

壹、課程內容設計

一、課程主題內容的設計

「空間中的坐標表示」課程的內容設計主要目標為讓學生能夠自行建立空間中各點坐標並用以解決空間中直線與平面之相關題型。經三位現職教師的建議後修改，在學習概念重點整理的部份改以填空格的方式讓學生在小組互動的過程中討論出其概念構思，而隨堂例題的部份在題目的難度上有稍作修改與順序安排，以避免造成學生學習上的挫折。

二、課程試做的進行形式

本課程預計教學時間為 50 分鐘（1 節課），由於在先前預試的經驗中發現，學生在空間幾何概念的學習上到這個階段已經漸入佳境。因此，研究者認為本次課程不需要再有課後練習檢討的時間，若學生有疑問但在與同學討論過後仍然沒有辦法解惑，可於下課後再找教學者一一解決。本次課程進行主要分為兩個部分，首先是以 GGB 輔助學生建構常見的立體圖形概念，除了聽教學者講解之外，學生之間主要是以小組討論的設計型態，希望學生可以藉由在互動的過程中，自

行建構數學概念。而後半部分則是隨堂練習，在這個階段，原則上教學者先以不干擾學生解題思維為主，教學者主要是以引導的方式刺激學生共同討論並解題，於全數順利解題完畢之後，教學者最後再下整體的課程結論。

三、課程學習內容的特性

在講解學習概念之前，為了能讓學生理解空間坐標系的重要性，教學者首先會讓學生們討論，生活中哪些事情會應用到空間坐標系（例如：飛機是靠什麼指引而不會在空中相撞）？進而帶出坐標系統的概念並且說明空間座標系如何運用在解題上。

本課程設計與傳統板書的教學方式相比，最大的不同之處在於黑板僅能呈現二維平面（ xy 坐標）的內容，而 GGB 不僅可以呈現三維空間的立體感，並且能讓學生自行操作以更具體的方式動態觀察點坐標高低位置的不同（尤其是 z 軸方向的移動）。

貳、課程的實施結果

一、教學教材之適切性

（一）課程進行形式（課堂觀察）

在講解概念的部份，研究者於初版的課程試做中發現，改以填充格方式搭配 GGB 繪圖輔助學習，的確學生在學習上的效果比較好（1031118 錄、1031118 札），因為學生會為了填滿空格進而刺激動腦，同時也增加討論的樂趣。

T₁：投影點跟對稱點的關係是什麼？中點嗎？（1031118 錄）

T₃：我們來用 GGB 剛剛看到的對稱小工具來畫畫看！（1031118 錄）

T₂：例如點(1,2,3) 在 yz 平面 ($x = 0$) 上的投影點就是跟它對稱的點（畫圖找到(-1,2,3)）的中點，所以投影點就是(0,2,3)，耶！（1031118 錄）

然而研究者於再版試做中發現，雖然學生在圖形操作後在填表格（投影點、對稱點、距離）上會很順手，但是在隨機抽點問答相關概念時，他們還是會需要花一點時間去思考（1031226 錄）。值得一提的是，在常見迷思錯誤的討論中，可看到他們對於空間中圖形的想像其實會越來越具體。

T₄：這些對稱點跟原來點的關係好像可以找到一些規律耶！（1031226 錄）

T₅：像這個點要找跟它對稱於 x 軸的，就是 x 的位置不變，其他加負號？

（1031226 錄）

T₄：喔！所以說如果有一個點要找跟它對稱於 yz 平面的，那就是 yz 的位置不變， x 這個要加負號！（1031226 錄）

在提到「法向量」的幾何概念時，因為學生還沒有學過向量概念，所以他們當下的反應理所當然會感到困惑，而教學者也因為他們沒有向量概念而放棄引導學習，關於這點教學者於事後反省，認為當時應嘗試以簡單的方式去解釋「法向量」的概念，讓學生有個基本的認識（1031226 札）。

另外，在隨堂例題 4（圖 4-13）的解題策略有兩種：一是假設各線段長（按比例）；二是座標化求長度。兩種方式會回到同一個算式（餘弦定理）。但可能是因為剛開始接觸空間座標概念還不熟悉，因

此解題時學生還是習慣以傳統的幾何方式作答（按比例）為主（1031118 札、1031226 札）。

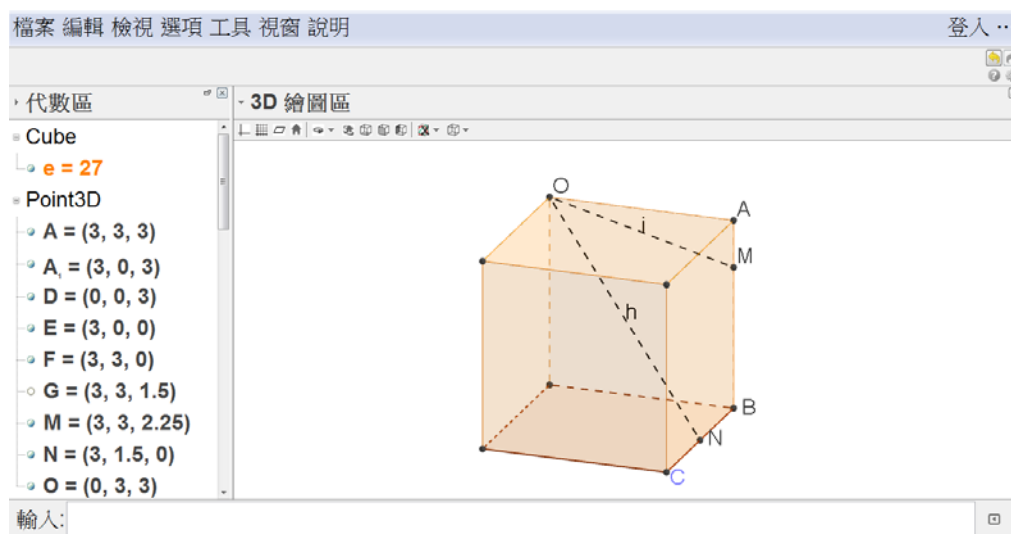


圖 4-13 正立方體中求角度的餘弦值

(二)、學生對於課程內容的學習轉變（課後作業）

研究者於本次課程的課後練習中發現，雖然學生是第一次接觸空間中的坐標表示，但是對於題目上坐標的假設卻沒有太大的失誤（1031118 札、1031226 札）。經研究者簡單訪談後瞭解，學生們表示在課堂上以 GGB 輔助學習到，確立原點位置後，再自行推理其他點的位置，就可以輕鬆寫出點坐標。

研究者在本次課程的課後練習中設計的一道題目略顯繁複，是因為此單元開始有代數觀點融入幾何學習，因此在題目練習的部份會較偏重數字運算。學生普遍認為較困難的一題是第 2 題（如圖 4-14），這是一個長方形摺紙問題，目標是利用長方形（ABCD）的特性求出 D 點的坐標（1031118 札、1031226 札）。研究者認為，學生會覺得這題很困難的原因是因為，題目給定的解題條件不明顯，有許多解題關鍵需要靠學生自行去推理運算。經研究者觀察後發現，學生透過動態

幾何軟體輔助學習後，對於圖形的理解逐漸有一定的基礎，因此檢討這道題目時其實教學者只需要稍做提醒，學習者便能自行解題。

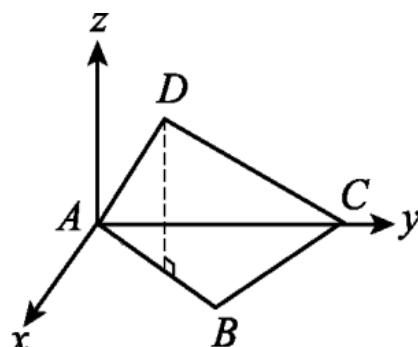


圖 4-14 長方形摺紙問題

二、學生對於課程之接受度（上課記錄、學習回饋單）

本次課程的進行無論是初版或再版試做大致上都還算順利，也於時間內結束課程。然而，在解題的過程中，研究者發現試做的 5 位學生已經漸漸不需要倚賴 GGB 輔助繪圖思考，就能自行憑空描繪並且以推理的方式進行解題。特別要注意的是，隨堂例題 5 稍有難度，因此研究者認為在往後的課程設計中應該要考慮改為進階難題挑戰。

T₁：這堂課複習了一年級學過的對稱、投影，並延伸到空間，沒有什麼斷層的感覺，很快就可以連接平面和空間的關聯（1031118 單）。

T₂：有學到東西，也有獨立思考 XD（1031118 單）

T₃：雖然需要用到較多的 GGB 以利看圖，但主要好像仍是純代數運算（1031118 單）。

T₄：用 GGB 上課其實滿有趣的，可是一直動腦超累的！（1031226 單）

T₅：GGB 確實有幫助理解，但還是需要多花時間整理與思考。（1031226 單）

參、課程的總體性省思

研究者在試做的過程中發現，學生的學習概念迷思往往比我們想像中的嚴重程度還要大，因此研究者建議在下一次教學的時候，教學者除了講解要清晰之外，整個概念的結構也要非常的清楚，以避免學生在理解上有所誤解。

對高二的學生而言，空間坐標系是一個從未接觸過數學概念，因此初學者容易在學習上出現迷思概念是可想而知的。而以動態幾何軟體 GGB 輔助學習的優勢是，許多圖形可以在電腦螢幕上讓學生做動態觀察，不需要費盡心思在腦海裡做抽象的想像。然而，研究者於此要特別提醒的是，由於目前的考試仍然是以紙筆測驗為主，因此學生在以 GGB 輔助理解圖形特性之後，教學者還是得帶領學生回歸到紙筆形式，練習在平面上繪圖，動態幾何軟體於此僅能作為學習的輔助工具。

第五節 大班教學課程實施結果與討論

本節是以四個課程活動於試做後的正式修訂版本再做一次大班教學的課程實施結果，參與學生人數一共 48 人。礙於時間與場地限制（電腦教室租借不易），本研究與合作學校協商之後，決議於寒假第一天進行這四個課程活動，教學時程與研究者原先預定計畫無異，唯課後作業練習需於開學後，另外要求學生繳回。茲將課程實施結果整理如下。

壹、「空間中的基本幾何概念」

一、課程進行形式之適切性（課堂觀察）

課程一開始，在學生熟悉軟體操作的部份所花費的總時數比研究者原先預計的時間多出了一倍（1040128 札），研究者初步猜測原因應該是上課人數比預期的多，加上師生之間是第一次認識，在沒有任何默契與明確操作指令的情況下，學生會比較顯得不知所措。然而在課程一進行到第二部分的時候，學生的學習漸入佳境，情況明顯改善許多，唯有少數學生容易沉浸在 GGB 軟體中，雖不回應老師的各種提問與互動，但在操作上也仍是持續朝引導方向前進（1040128 札）。

本課程的重要學習概念之一是「歪斜」。其實「歪斜」這個名詞對初學者來說雖然陌生，但是「歪斜」的兩直線交會性質在生活中卻處處可見。由於教學者已有先前的試做經驗，瞭解到先進行問答而不展示圖檔的教學優勢，藉由提問可以刺激學生的圖形想像，進一步再讓學生自行思考其定義。因此，在本次課程中，教學者同樣也得到許多有創意的回應（1040128 札），茲將對話（1040128 錄）整理如下。

師：想想看，生活上看過哪些情形是歪斜（用手指比出歪斜）？

小帥：高速公路！

小音：兩支手電筒朝不同方向照出來的光線，而且要錯開，不可以疊在一起。

小孟：眼睛脫窗的時候（全班大笑）！

師：大家打開圖檔觀察一下，你們會如何向同學說明「歪斜」的幾何意義？

小帥：錯開的兩條直線但不是平行。

小雄：在互為平行的兩平面上，畫出的任意兩條不平行的直線，就是歪斜。

本課程的重要學習概念之二是「三面交會情形」。教學者於先前試做經驗中瞭解到，要求學生憑空想像進而完整說出共八個分類是一件不容易的事情，因此教學者得先明確引導學生作圖思考。一開始大家都是安靜的，經教學者不斷引導刺激後才陸續有學生回應(1040128札)。圖 4-15 為研究者蒐集學生畫的八種「三面交會情形」。

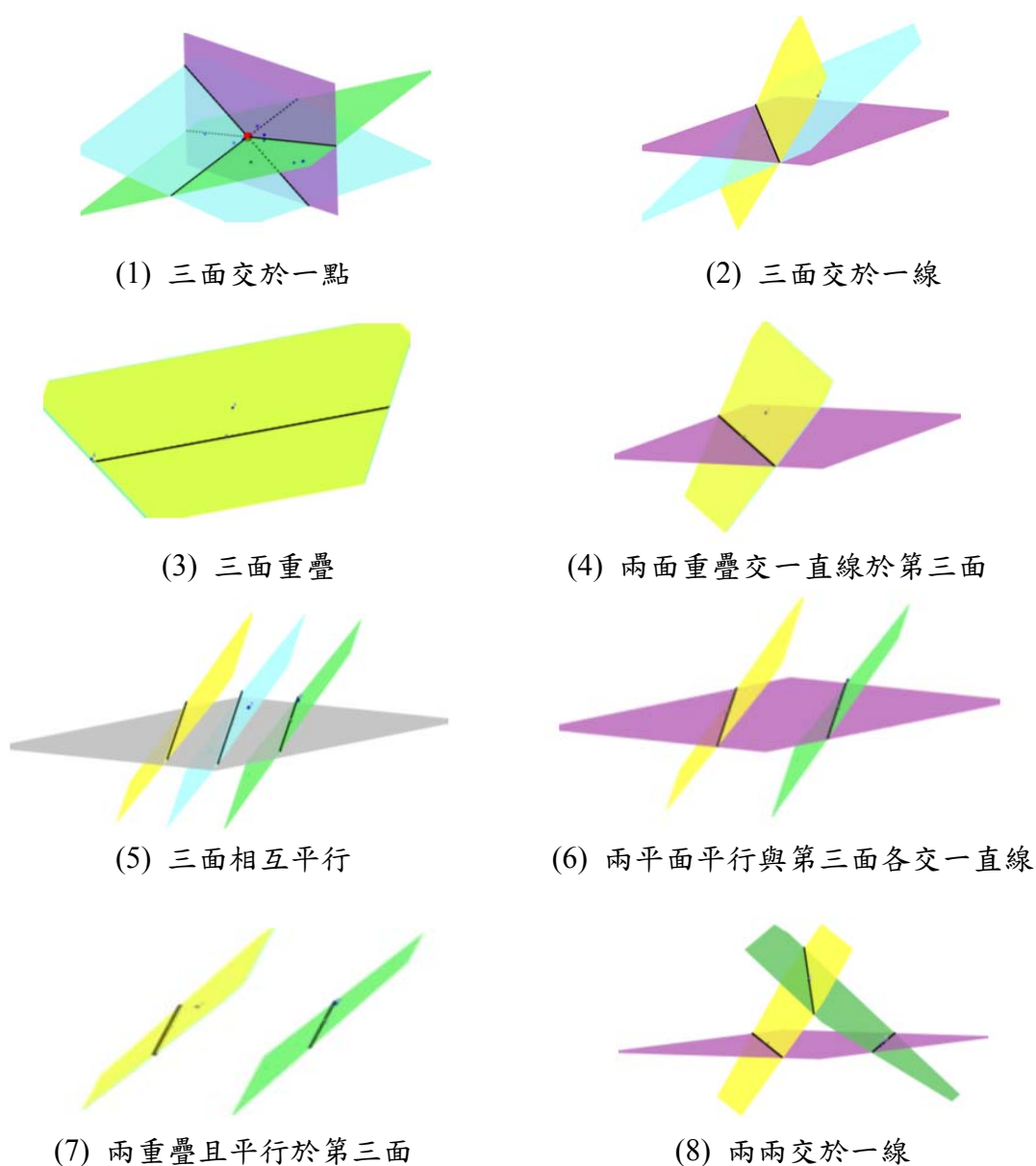


圖 4-15 八種三面交會分類情形

二、學生對於課程之反應（上課記錄、問卷回饋）

從問卷中的回應來看，可將大家印象較為深刻的學習概念分為五類：加強空間概念（點線面）、立體圖形模擬、歪斜、面與面交會情形與其他（1040128 卷）。整體而言，大部分的學生認為，透過 GGB 的確有助於了解此單元的概念學習，尤其是在加強空間概念（點線面）的部份覺得很有幫助，茲將整理如表 4-1。

表 4-1 學生對於課程一的學習印象

課程一	有幫助(42/48)					沒有幫助(6/48)	
概念 類型	加強空間概念 (點線面)	立體圖 形模擬	歪斜	面與面 交會情形	其他	聽不懂	其他
總人數	15	7	7	5	8	1	5

呼應先前試做結果可以瞭解到，藉由 GGB 軟體的輔助教學可以增加學生對於空間中點線面概念的結構。此外，由於課程是讓學生自行操作軟體，因此也增加了學生在課程上的參與度，顯得更願意投入學習。

另外，研究者於大班教學的觀察中發現，如同先前試做的學生所述，大班教學的缺點就是：因為人多，教學者無法在課堂上滿足每位學生的學習需求，因此常常會忽略掉少數學生的學習權益。

S₇：透過 GGB 有助於加強我對空間中的抽象圖形概念以及對於形狀理解的判斷力。（1040128 卷）

S₃₅：透過 GGB 有助於空間上直線與立體圖形的計算，並且可以尋找垂直關係，從另一個角度看圖形。（1040128 卷）

S₄₂：透過 GGB 有理解歪斜與三平面在空間中的關係。（1040128 卷）

S₁：透過 GGB 有助於觀察三平面的八種相交情形。（1040128 卷）

S₁₆：透過 GGB 有助於釐清一些中文敘述的題目。（1040128 卷）

貳、「三垂線定理與二面角」

一、課程進行形式之適切性（課堂觀察）

在先前試做結果中發現，學生對於「直線與平面垂直」概念的理解，常常會有一些教學者意想不到的迷思（1040128 札）。因此，在此次概念的講解中，教學者僅先提問，試圖引導學生讓他們自行操作 GGB 觀察圖形後（如圖 4-5、圖 4-6），可以思考並釐清其迷思想法。

師：大家試著想一下，是不是只要找到任意一條直線 L 跟平面 E 上的某一條直線垂直，那麼直線 L 就會是平面 E 的垂線？（1040128 錄）

小音：不是，只有一條確定是有垂直的，那還不一定。（1040128 錄）

師：所以如果今天直線 L 歪掉了，它並沒有跟平面 E 上的每一條直線都垂直，那麼直線 L 還會是平面 E 的垂線嗎？（1040128 錄）

小樂：歪掉的話就不一定會跟平面 E 上的任一直線垂直了！（1040128 錄）

師：請大家再看一次講義上的敘述，是否更理解它的意思呢？（1040128 錄）

小帥：突破之前沒發現的盲點（對平面上 no 垂線有誤解）！（1040128 錄）

另外，在「三垂線定理」的概念講解中，研究者發現，用 GGB 的好處是學生們動手轉個角度就可以看到第三個交角的確是呈現垂直的狀態。然而，當教學者提到該如何證明時，大家一開始都顯得毫無頭緒的樣子，直到教學者畫出輔助線後，就有學生提出用「畢氏定理」就可以做，再經引導後完成此證明（1040128 錄）。

師：大家先觀察一下，圖中兩直線的關係會是呈垂直的嗎？

小雄：一定是啊！轉過來看一下就知道是了！

師：哦？有何說服力？只用「看」的恐怕不夠喔！

民民：量出來是 90 度啊！！（註：GGB 中有一個內建工具箱可以量角度）

師：要不要試著寫一下證明（畫出輔助線）？會更有說服力喔！

小帥：直角三角形耶...用畢氏定理就可以啦！

最後，在「二面角」的概念講解中，大家似乎對於講義上的文字理解都很直覺，沒有太多的疑問。然而，當教學者提問：「為何要找交線又找垂直」？多數學生的反應是楞住，然後開始陷入沉思（1040128 札）。經教學者引導討論後，很開心有學生直接回答到問題核心，他認為需要找交線又找垂直的原因是因為這樣在二面角的定義上才會有其唯一性（1040128 錄）。

師：看來大家對二面角的定義都還滿清楚的，但是大家試著想想看，為什麼在找二面角的時候，都需要先找交線上的一點再做出垂直的兩射線呢？

提摩：嗯...就定義啊！？看起來滿合理的@@

師：定義這麼定會有其原因吧？大家可以試著移動圖中的動點去觀察一下～

小帥：嗯...是因為這樣的角度才會是唯一的嗎？不然隨便畫也都有夾角啊！

二、學生對於課程之反應（上課記錄、問卷回饋）

從問卷中的回應來看，可將大家印象較為深刻的學習概念分為五類：三垂線定理、二面角、角度關係、平面與垂線與其他（1040128 卷）。整體而言，大部分的學生認為，透過 GGB 的確有助於了解此單元的概念學習，尤其是對三垂線定理的證明覺得很有幫助。茲將整理如表 4-2。

表 4-2 學生對於課程二的學習印象

課程二	有幫助(38/48)					沒有幫助(10/48)	
概念 類型	三垂線 定理	二面角	角度 關係	平面與 垂線	其他	聽不懂	其他
總人數	11	9	8	2	8	3	7

呼應先前試做結果可以瞭解到，藉由 GGB 軟體的輔助教學可以增加學生對於空間中圖形的想像與邊角關係（畢氏定理）的推論。此外，在此次課程施做中也發現與先前試做一樣的狀況，在隨堂例題 1 的部份，有少數學生被平面圖形給誤導，然而多數的學生是以幾何推論的方式或者直接觀察 GGB 上所畫的圖形，避開圖形迷思進而回答問題（1040128 札）。

S₄₂：透過 GGB 有助於理解三垂線定理的證明。（1040128 卷）

S₁₅：透過 GGB 有助於理解二面角的圖形定義。（1040128 卷）

S₂₈：透過 GGB 有助於觀察角度是否垂直。（1040128 卷）

S₃₅：透過 GGB 有助於理解平面與垂直的關係。（1040128 卷）

S₁₈：透過 GGB 有助於思考對圖形、形狀的想像。（1040128 卷）

參、「空間中的多面體」

一、課程進行形式之適切性（課堂觀察）

本課程的學習目標偏重對多面體的觀察與理解，較重視學生在空間中的解題策略。研究者發現，多數學生對於正四面體與正六面體較為熟悉，而有少數的學生則反應沒有看過正八面體（1040128 札）。

經教學者引導討論後，學生們表示對於正八面體有較深度的理解，並且也學會以 GGB 的內建工具輔助解題。

師：大家先試想一下，正八面體的任意兩稜線夾角為何？（1040128 錄）

熊熊：60 度或 120 度！？（1040128 錄）

師：哦？60 度是因為正三角形對吧？那 120 度是為什麼呢？（1040128 錄）

拉拉：因為中間看起來是一個菱形， $180 - 60$ 是 120。（1040128 錄）

師：好的，大家現在可以打開做好的圖檔，去旋轉觀察看看。（1040128 錄）

熊熊：中間是一個正方形！所以正八面體就是兩個金字塔嘛！（1040128 錄）

師：說的很好！那大家再進一步找找看正八面體的任意兩面夾角為何？

（1040128 錄）

小智：前一個單元有學，先找出兩面的交線，然後畫垂直，再用小工具量就可以知道大概是 104 度。（1040128 錄）

師：可以用算的嗎？（1040128 錄）

小雄：可以啊！算出三邊長再用餘弦公式就可以啦！（1040128 錄）

另外，在隨堂例題 1 的部份，1-1 其實直接用看的或用 GGB「不共線三點構成唯一平面」的小工具輔助繪圖都會得到答案。然而 1-2 因為題目多打一個字母，本來教學者想事先做修正，卻有少數幾位同學就先發現题目的矛盾之處，令教學者著實感到驚喜（1040128 札）。

小雄：老師！1-2 那一題怪怪的，「這四個點不共平面啊！怎麼會有截痕？」

（1040128 錄）

師：本來要講的，卻被你們先發現了！所以你們覺得老師原本是想問什麼？

（1040128 錄）

民民：應該也是要我們練習「三點構成一面」找截痕吧！（1040128 錄）

小帥：都可以先畫畫看想一下啊！不過看後面答案老師應該是想問 A、B、D 這三個點吧！？（1040128 錄）

小音：有圖形輔助稍微好想像，也可以印證自己的推論～（1040128 錄）

小樂：如果是 B、C、D，圖形畫出來是超人 S 外面那個形狀！（1040128 錄）

二、學生對於課程之反應（上課記錄、問卷回饋）

從問卷中的回應來看，可將大家印象較為深刻的學習概念分為四類：圖形判斷與理解、多面體的變化、立體圖形解構與其他（1040128 卷）。整體而言，大部分的學生認為，透過 GGB 的確有助於解決空間中所遇到的數學幾何問題，尤其是在圖形判斷與理解的部份覺得很有幫助，茲將整理如表 4-3。

表 4-3 學生對於課程三的學習印象

課程三	有幫助(42/48)				沒有幫助(6/48)	
概念 類型	圖形判斷 與理解	多面體 的變化	立體圖 形解構	其他	不太懂	其他
總人數	16	13	6	7	1	5

呼應先前試做結果可以瞭解到，藉由 GGB 軟體的輔助教學可以增加學生對於空間中圖形的理解以及對於各種題型的解題策略。就隨堂例題的幾個練習題來看，這些多面體其實在生活中很常見，尤其是正立方體。然而，研究者認為，考試的題目千變萬化，若是沒有事先去畫過、去了解過，其實很難在解題時能夠立即有想法。

S₄₄：透過 GGB 有助於判別平面圖形以及角度與邊長的關係。（1040128 卷）

S₂₇：透過 GGB 有助於推論正八面體的角度。（1040128 卷）

S₂₀：透過 GGB 有助於認識立體圖形的結構。（1040128 卷）

S₃₂：透過 GGB 有助於了解圖形的切割面。（1040128 卷）

肆、「空間中的坐標表示」

一、課程進行形式之適切性（課堂觀察）

本課程的學習重點有別於先前的幾何圖形觀察，開始加入代數觀點，因此教學者要求學生在解題之前，得先學會空間中「點坐標」的表示方法。然而，在投影點與對稱點的討論中，多數學生表示不知道該如何想像去完成講義上的表格。教學者原先認為，投影點與對稱點是學生們應該要有的先備知識（1040128 札），但卻忽略掉多了第三個軸，難度也隨之提高很多的這個情形。所幸，經過 GGB 的輔助繪圖與講解，大家都有陸續完成表格並且學會以座標化解決問題。

師：我們現在要加進代數觀點，學會用坐標化解數學題。請大家先試著用以前學過的平面座標經驗，完成以下表格～（1040128 錄）

熊熊：這有點抽象，太難了☹（1040128 錄）

師：嗯...那我先確認一下，之前有學過什麼是投影點吧？那你們知道投影點跟對稱點的關係是什麼？（1040128 錄）

安娜：投影點是中點嗎？（1040128 錄）

師：是的！投影點會是對稱組的中點，所以我們先以點(2,1,3)來畫畫看（以 GGB 繪圖），它對應 x 軸的對稱點是...(2,-1,-3)，所以投影點是(2,0,0)，觀察一下，這兩個點跟原先的點有什麼變化？（1040128 錄）

艾莎：對稱點除了 x 位置數字不變之外，其他兩個都變號了！（1040128 錄）

安娜：然後那個投影點就是 x 不動，其他是 0！（1040128 錄）

熊熊：所以 xy 平面的對稱點就只有 z 的位置會變號，投影點就是把 z 的位置寫 0 囉！？（1040128 錄）

二、學生對於課程之反應（上課記錄、問卷回饋）

從問卷中的回應來看，又可將大家印象較為深刻的學習概念分為四類：對稱點與投影點、坐標與圖形的關係、方程式的意義及其圖像與其他（1040128 卷）。整體而言，大部分的學生認為，透過 GGB 的確有助於了解此單元的概念學習，尤其是在對稱點與投影點的部份覺得很有幫助，茲將整理如表 4-4。

表 4-4 學生對於課程四的學習印象

課程四	有幫助(35/48)				沒有幫助(13/48)	
概念 類型	對稱點 與投影點	坐標與圖形 的關係	方程式的 意義及其圖像	其他	不太懂	其他
總人數	15	7	6	7	5	8

呼應先前試做結果可以瞭解到，藉由 GGB 軟體的輔助教學可以有利於學生對於空間中的抽象思考轉化成為具體圖像思考，也順帶釐清先前的學習錯誤迷思。

S₄₂：透過 GGB 有助於了解投影點與對稱點的關係。（1040128 卷）

S₂₉：透過 GGB 有助於了解座標與其圖形的關係。（1040128 卷）

S₃₆：透過 GGB 有助於了解方程式意義與其在空間中的分佈情形。

（1040128 卷）

S₃₂：透過 GGB 可旋轉圖形對想像有更深入的理解。（1040128 卷）

第六節 課程設計的省思與修正

本研究目的是以動態幾何軟體 GeoGebra (簡稱 GGB) 融入高中幾何課程做教學活動，經課程實施後，以下將研究結果分為兩個部分做分析：一是學生對於四個課程的接受程度，二為研究者對於四個課程設計的省思與修訂。

壹、學生對於課程的接受程度

一、試做學習者對於課程的滿意度

依據 5 位試做學習者於學習回饋單中的回答，研究者將學習滿意度分類為：非常滿意 (5 分)、滿意 (4 分)、普通 (3 分)、不滿意 (2 分)、非常不滿意 (1 分)，茲將結果整理如表 4-5。

表 4-5 試做學習者對於四個課程的學習滿意度

編碼 / 課程	一	二	三	四
T ₁	5	5	5	5
T ₂	4	4	5	4
T ₃	5	5	5	5
T ₄	5	5	5	5
T ₅	5	5	4	5
平均	4.8	4.8	4.8	4.8

整體而言，5 位試做學習者對於四個課程的學習滿意度皆達滿意程度，學生同時也建議教學者，在課堂上應給予學生多一點獨立思考的空間與時間，這樣在學習上也會比較有學習成就感。

T₁: 真的很容易被平面圖形誤導，需要多一點時間思考與觀察，GGB 是個好用的工具。(1031118 單)

T₄: 用 GGB 可以輔助思考，自己獨立思考後而獲得的知識，真的是有學到東西！(1031226 單)

T₅: 我覺得有些題目沒有圖的話我絕對做不出來，但是透過 GGB 還有同學的獨特見解+解釋就比會了，這要想比較久一點。(1031226 單)

T₂: 可以先旋轉 GGB 看各種不同角度，再進行分析與討論☺(1031118 單)

T₃: 對空間沒啥概念的人，用 GGB 可快速畫出圖形，不會受限於實體模型
(1031118 單)

二、大班教學研究對象對於課程的接受度

依據大班教學研究對象於學習心得問卷中的回答，研究者將學生對於四個課程的排序，經分類後整理如表 4-6。

表 4-6 大班教學研究對象對於四個課程的排序

排序 / 課程	課程一	課程二	課程三	課程四
1	9	6	21	8
2	9	17	9	6
3	12	12	9	5
4	11	5	1	21
0 (無填答)	7	8	8	8

以課程一來看，多數的學生認為課程一的受用程度應排在第三名的位置。依此類推，課程二的排序是在第二名，而課程三的排序是在第一名，最後課程四的排序則是在第四名。按此結果，研究者認為，以 GGB 融入高中數學幾何課程而言，課程三「空間中的多面體」的教學內容對學生來說是最為受用的。

S₃₂：我覺得課程三最受用，因為立體空間的切割難想像，可用 GGB 幫助。

另外，為何沒有比正 20 面體以上的正多面體？（1040128 卷）

S₄₇：我覺得課程二很受用，因為用 GGB 輔助可以增加印象。（1040128 卷）

S₂₈：我覺得課程一很受用，因為用 GGB 簡單操作可看出面與面的交會情形。

（1040128 卷）

S₃₆：我覺得課程四算是受用，因為多了 z 軸，覺得要會畫實際的圖比較好想。

（1040128 卷）

另外，根據大班教學研究對象於學習心得問卷最後「非講不可」的填答狀況(如表 4-7)可以瞭解到，有相對高比例的學生認為以 GGB 融入高中數學幾何課程是有正向積極作用的，並且也很感謝研究者對於教材設計的用心。然而，無填答人數的比例也不低，經研究者追溯其問卷填答狀況後發現，雖然這些學生在「非講不可」的部份沒有作答，但是他們在其他項目都有熱切的回饋，因此研究者推測應該是因為此題為開放式問題，很多同學在不知道寫什麼內容的情況下，只好放棄作答。

表 4-7 「非講不可」的分類情形

分類	覺得 GGB 非常受用	謝謝老師☺	覺得課程太難	其他	無填答
對應人數	13/48	14/48	4/48	1/48	16/48
對應比例	27%	29%	8%	2%	33%

S₁₄：GeoGebra 是一個很實用的軟體☺（1040128 卷）

S₁₄：雖然對電腦不熟，但這套軟體對學習空間有很大的幫助☺（1040128 卷）

S₁₉：開始對空間有興趣！（1040128 卷）

S₁₅：謝謝老師提供這麼棒的軟體，真的獲益良多！（1040128 卷）

S₄₈：學到新的有用軟體。感謝老師，3 個小時一下就結束了！（1040128 卷）

S₄₃：謝謝老師，老師很用心準備^^（1040128 卷）

貳、課程設計的省思與修正

一、課程省思

左台益（2012）在過去文獻中，以 Donald 認知演化四個階段與 Shaffel 及 Kaput 的虛擬文化觀為基礎，提到動態幾何軟體具備三個基本功能：概念性的工具、人機互動關係與動態表徵。研究者將依此三項基本功能作為本研究 GGB 融入高中數學幾何課程的省思參考。

（一）概念性的工具

GGB 軟體的作圖工具是符合歐式幾何作圖概念，學生在操作時容易受到數學思維所規範，因此也較容易被激發出許多數學想法。以課程三為例，當教學者要求學生思考正八面體中的任意兩稜線之夾角為何時，學生在經由操作的過程中可以瞭解到正八面體其實就是兩個以正方形為底座的金字塔。另外，在課程四的部分，學生也因為有親自動手操作過，而對投影點與對稱點之間的關係有更深刻的印象。

（二）人機互動關係

學生在操作軟體時，透過 GGB 內部自主性的計算所呈現的物件軌跡，可以激發出學生自發性地去思考其呈現原因。以課程一為例，當教學者要求學生思考三面交會情形時，雖然一開始大家顯得毫無頭緒，但是經引導後，陸陸續續開始有學生可以畫出各種交會情形，甚

至有學生可以自行憑空想像歸類出八種分類情形。此外，在課程二的部份，像是垂線的定義與三垂線定理，也都因為學生有自己去畫過，對於課程概念也會比較瞭解。

（三）動態表徵

學生在 GGB 的動態操作環境中，容易將情境式的問題賦予其數學意義。以課程二為例，教學者要求大家觀察圖檔後去思考關於二面角的定義陳述，學生可以從觀察的結果推論出，會這樣定義其實是因為需要有「唯一性」。另外，在課程一的部份，透過動態操作與觀察，也可以讓學生更理解歪斜的意義。

總結上述三點，四個課程教材設計皆滿足此三項基本功能，讓學生能有自主性學習與思考的機會。整體而言，以 GGB 融入高中幾何課程做教學活動對學生來說具有正面的影響力。然而，無論是課程試做的學生或是大班教學研究對象皆有少部分的學生對於這四個課程有否定的情形，研究者將這些否定情形依研究結果中的討論分為三類：「對於軟體操作不熟悉」、「覺得課程太難」以及「認為不需要倚賴 GGB」，茲將結果說明如下。

（一）對於軟體操作不熟悉

在先前課堂觀察中發現，有少數同學在軟體操作方面相較於其他同學而言，反應是比較慢的。於此，研究者認為，除了在課程一開始有 5 分鐘的教學引導 PPT 之外，要再多留 10 至 15 分鐘的時間讓大家熟悉軟體介面。此外，如果時間允許的話，可以考慮上課前事先訓練幾個反應比較快的小助教，以避免在課堂上，教學者要忙著講解課程概念又要忙著回應學生軟體操作的問題。

（二）覺得課程太難

在先前課堂觀察的討論中有提到，覺得課程太難的這些學生認為，可以的話，希望老師能再給他們多一點時間思考。於此，研究者認為，在進度不趕的情況下，應給予學生思考空間，否則一開始就跟不上大家的進度，更不用說後面的學習狀況了。

（三）認為不需要倚賴 GGB

在學習回饋單與心得問卷中發現有少數的學生認為空間概念的學習不一定要靠 GGB 輔助，有些學生其實自己憑空用想的就可以學得很好，而有些學生覺得軟體操作太困難不如實際模型觀察來的直接。於此，研究者認為，以 GGB 融入數學幾何教學雖然不見得適用於每一個人，但是至少可以介紹大家一個新工具的使用，讓以往在空間概念有學習困擾的學生，多了一個管道可以多元嘗試學習，也加深了學習的印象。

二、課程設計修正

綜合上述課程省思與指導教授和現職教師的建議，研究者將課程設計做了部分的修改，整理如下。

（一）空間中的基本幾何概念：

- 1、將學習單內容〈動手做做看〉與〈重點整理〉位置交換，讓學生可以自行先操作過後，再建構其學習概念（陳老師建議）。
- 2、將所有隨堂例題的答案寫於學習單最後，避免讓學生先看到答案會有針對答案做結果推論的疑慮（指導教授建議）。

(二) 三垂線定理與二面角：

- 1、針對「直線與平面垂直的定義」的討論，需避免將錯誤迷思概念呈現在學習單上，以避免學生誤以為寫在講義上的文字就是正確的概念知識（指導教授建議）。
- 2、搭配「三垂線定理」的 GGB 附檔，建議先不要急著將輔助線畫出，可以先讓學生自行觀察何謂第三垂，再逕行講解（陳老師建議）。

(三) 空間中的多面體：

- 1、學習單中正四面體的附圖在講解時可特別引導學生做討論，否則只看圖會誤以為這個正四面體是三面相互垂直的三角錐（林老師建議）。
- 2、隨堂例題 1-2 可延伸為三種題型，分別對 ABD、ACD、BCD 三點個別做討論，可刺激學生對於空間中圖形的思考（許老師建議）。

(四) 空間中的坐標表示：

- 1、在要求學生探索投影點與對稱點之前，得先有個前置引導教學，否則直接要學生完成表格對他們來說太困難了（許老師建議）。
- 2、隨堂例題 4 的部份建議可註明使用坐標化解題或是找出邊長的對應關係，讓學生可以彼此去討論不同的解題策略（陳老師建議）。

第五章 結論與建議

本研究之主要目的是設計出動態幾何軟體 GeoGebra (GGB) 融入高二學生學習幾何概念之教學活動。本章根據第四章研究結果與發現，提出以下結論與建議。

第一節 結論

根據本研究的結果及相關文獻，歸納回答以下問題：「GeoGebra 融入數學幾何概念教學教材的適切性」，「分析學生對於 GeoGebra 融入數學教學後的接受程度」，「探討執行實施 GeoGebra 融入數學教學試作後，研究者對於課程設計的省思」。

壹、GGB 融入數學幾何概念教學教材的適切性

一、操作 GGB 可以讓學生從中學習數學幾何概念。

郭重吉(1997)在過去研究中指出，在設計電腦輔助學習課程時，必須參考相關的學習理論與教學理論，方能設計出真正有益於學生學習的電腦學習環境。本研究的教學教材是搭配 GGB 的特性所設計出來的，左台益(2012)在過去文獻中提到，動態幾何軟體具備有三個基本功能：概念性的工具、人機互動關係與動態表徵。因此使用 GGB 輔助空間學習的優勢是，許多圖形可以在電腦螢幕上讓學生做動態觀察，不需要費盡心思在腦海裡做抽象的想像。

二、解題前需先讓學生有圖像經驗

有別於以往的傳統學習方式僅能紙上談兵，GGB 可以讓學習者自行操作，並且搭配小組討論與思考，以動態觀察刺激思考進而建構知識用以解題。Hohenwarter et al. (2008) 認為，使用電腦套裝軟體可以輔助學生做觀察式學習，在課堂上的數學概念操弄會使學生受到視覺化圖像變化的刺激，進而協助學生在觀察學習過程中做出有意義的猜測。因此研究者認為在學習解題之前須先讓初學者有圖像經驗，再教導學生如何在平面上繪圖，會令學生在學習上印象較為深刻。

三、GGB 融入數學幾何教學改變學生的學習型態

考慮到學生使用 GGB 學習優勢的同時，也須考慮到學生的學習目標。Bussi (1996) 認為教學活動的核心是產生在「數學討論」時，透過發現學習的教學活動設計的目的，是將課程學習的經驗轉換為數學知識的建構。因此，在本研究 GGB 融入幾何教學的課程設計，除了能增加學生在課程上的學習認知之外，也能更確實地看到學生於學習後由被動學習轉為主動學習的改變。

貳、學生對於 GGB 融入數學教學後的接受度

一、多數學生對於 GGB 融入數學幾何教學持正向看法

根據研究結果發現，多數學生認為動態幾何軟體 GeoGebra 融入數學教學是有正向積極作用的，同時也提高了對課程學習的參與意願。如林宜臻 (2013) 所說，GeoGebra 不只扮演板書數位化，除了將課程內容呈現，其設計也讓學生有動腦思考的時間與空間。

然而有少數學生反應，透過 GGB 繪圖的確可以幫助學習，但是對於自己本來就可以憑空繪圖的學生來說其實不盡然。研究者認為，其實在幾何的探索中，個體通常會透過圖像操作和邏輯論述進行幾何思考，只是每個人圖像操作的方式有所不同，並不代表 GGB 輔助學習在他們身上沒有產生任何的影響。如同許舜淵、胡政德（2014）在過去文獻中提到，我們需要的是更多的比較研究，以量的去探究一般性，而質的則是去探究歷程上的差異。

二、學生從 GGB 所得的學習經驗較具學習遷移的效果

動態幾何軟體 GGB 繪圖，對師生而言是多了一項新工具可以使用，並且能將其運用在較困難的圖形上。游正祥（2011）於研究結果鐘發現藉由學生操作 GeoGebra 的圖像表徵所得到的學習經驗比傳統教學更具學習遷移的效果。而本研究結果中也發現，學生因為在上課的過程中就已經建立其圖像概念，練習題目的時候僅需要回憶圖形的樣子並作推理思考，並不需要再特別去繪圖想像。

三、GGB 輔助教學較傳統教學較能夠影響學生學習

此外，有學生認為使用電腦上課如果沒有適當的教學策略，學生會很容易就分心。關於學生學習專注力的部分，研究者認為，這些情形其實在傳統教學的過程中也很常出現，因此教學是否能進行順利，端看教學者與學生之間的互動與默契。整體而言，電腦輔助教學是比傳統教學較能夠影響學生學習，但若混何使用，其效果會特別顯著（Dalton & Hannafin, 1988）。

參、實施 GGB 融入數學教學後，研究者對教材設計的省思

一、GGB 的介入會改變師生在教學互動上的模式

依據本研究的結果可以發現到，電腦軟體 GGB 的介入會改變師生在教學互動上的模式。因為在電腦輔助教學的環境下，它迫使使用者激發出數學想法，讓學生較能夠自主學習。這種人與資訊科技的互動方式從人機主從關係可能轉化成雙方各自具自主意識的雙向互動關係，且數學係為其共同的溝通語言（左台益，2012）。然而，學生在初學空間向量的過程中，由於學科知識概念尚未足夠，容易造成學習上的錯誤迷思。因此，教學者除了要能夠隨機應變之外，可以事先多揣摩學生可能發生的各種錯誤迷思，以避免在上課時造成雙方無法相互理解與溝通。

二、使用 GGB 可以協助學生解決數學問題

心理學家發現學習者的內在認知結構與建構知識的過程才是學習成功的關鍵（余艷惠，2002）。然而，空間向量課程的出現，對高二學生這個學習階段來說已經不是單純的平面問題，而是較為複雜的空間問題。為了避免學生在學習的理解上有所誤解，研究者認為在教學的過程中需特別注意幾何概念的呈現，避免花費過多的時間在做無謂的數字計算，造成學習重點失焦。Duval(1995) 在過去研究中提到，幾何活動是複雜的認知過程，包含了構圖、視覺化與推理，發展視覺表徵與推理能力有利於各種不同的認知歷程的交互作用。因此，透過 GGB 的操作可以協助學生釐清對於數學的迷思想法，使學生較能結合文字、圖像的表徵，思考更恰當的解決方法。

三、僅憑紙筆測驗無法測驗出學生在空間方面真正的能力

此外，許舜淵、胡政德（2014）在先前文獻中提到，雖然多數研究顯示動態幾何環境能夠增進與支持重要的學習活動，但是在目前的研究中不知道增加幅度的影響，更不知道在動態幾何環境下學習與在紙筆環境下學習如何不同。研究者認為，現在的教學講求多元化，無論是在動態幾何環境下學習或是在紙筆環境下學習都可有其優缺點，端看教學者如何取捨。只是，值得令人省思的是，既然學習趨向多元，那麼測驗也仍然採用紙筆的作答方式嗎？研究者在教學互動的過程中發現，有些學生對於空間中的圖像想像能力非常豐富，這些能力不是僅用單純的紙筆測驗或練習就能夠看出來的。

第二節 建議

壹、對動態幾何軟體 GGB 融入高中數學教學的建議

在研究的過程中，研究者不斷地進行課程設計的評估與修正，希望能夠藉此提供一個適當的教材來幫助學生學習空間幾何。以下根據在教學過程中，所作的觀察記錄和省思，歸納出7點建議。

一、教材設計方面

- 1、教材內容盡可能以互動式（例如填充格、Q&A）的方式呈現，而非單調的陳述式呈現，讓學生能有多一點的刺激和引導思考的機會，增加對於學習的興趣。

- 2、要注意使用GGB時，所呈現畫面的訊息量，必須盡量簡化避免多餘的干擾妨礙學生的思考。在立體轉譯平面幾何的概念時，得簡單、明瞭，單純地提供學生可以觀察、實驗、操作、猜想、測試，達到學會問題解決的目的。
- 3、需特別注意GGB圖檔的顏色深淺配置，尤其是各教室投影設備不一，難免會有色彩偏差的情形，在圖形呈現上可能會容易造成學生誤會。
- 4、研究者認為以紙筆形式的測驗方式無法完全測出學生在空間概念的學習成效。然而現行測驗仍以紙筆形式為主，因此研究者建議，出題應偏重學生對於概念的理解，而非繁雜的計算考題。

二、教學輔助方面

- 1、事前培訓電腦小助教，於課堂進行時，透過小助教可以隨時了解學生可能的學習需求，並且即時予以協助。
- 2、教學者在講解的過程中，需注意課程的整體架構以及口語表達上的鋪陳，以避免造成學生多餘的誤會形成不必要的錯誤迷思。
- 3、在課堂上盡可能讓學生有獨立思考與小組討論的時間，不能因為需要趕課而讓學生錯失了許多釐清錯誤迷思的機會。
- 4、資訊輔助教學不應該僅是教師的教材設計而已，應該要讓學生主動自行操作，而教師的角色是引導學生去觀察作推理，如此對於學生長期的學習影響會是正向的。

貳、對未來研究的建議

研究者希望能藉由 GGB 融入數學幾何教學，讓學生在學習的歷程中，透過 GGB 的輔助特性、功能等，能夠自行操作進而自行建構其數學幾何概念。然而，由於研究者本身的限制，本研究僅先對一個空間向量單元實施四個教學活動，使得研究結果目前無法做一般教學的推論，但仍可做相關研究或課堂設計之參考。因此對於未來研究的建議有以下 2 點：

- 1、擴增教材內容：本研究的課程內容設計僅作為空間向量單元的入門教材，然而 GGB 還有更多的功能特性等待著被開發，例如：圓錐曲線、積分（上和、下和、曲線下的面積）、對函數求導數、對多項式函數求極值等，甚至其他需要大量圖解進行觀察之單元（函數、指數、統計等）都能以 GeoGebra 呈現。研究者希望未來有一天能夠有機會將 GGB 廣泛地運用至課堂教學上，讓學生能夠從動態操作中學習數學概念知識。
- 2、加長研究期程：本研究比較可惜的是僅能有一次入班的試做機會，比較無法立即看出學生的學習轉變。倘若合作學校方面可允許，建議入班教學至少要擴增至一次段考的教學期程，藉此更可以觀察學生在長期以 GGB 學習空間幾何的環境之下，其學習成就是否將受到影響。

參考文獻

一、中文部分

- 王全世 (2000)。資訊科技融入教學之意義與內涵。資訊與教育，80，23-31。
- 左台益 (2012)。動態幾何系統的概念工具。中等教育，63 (4)，6-15。
- 左台益、胡政德 (2009)。準教師從真實情境中建構教學模式的認知因素分析與機制。當代教育研究季刊，17 (4)，61-101。
- 左台益、梁勇能 (2001)。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。師大學報：科學教育類，46 (1、2)，1-20。
- 左台益、蔡志仁 (2001)。高中生建構橢圓多重表徵之認知特性。科學教育學刊，9 (3)，281-297。
- 余姿瑩 (2013)。使用 GeoGebra 動態幾何軟體對國三學生數學學習成效及教師 TPACK 之影響。國立臺南大學教育學系課程與教學碩士班學位論文，未出版，台南市。
- 余麗惠 (2002)。高雄市高職學生運用 GSP 軟體學習三角函數成效之研究。國立高雄師範大學數學系碩士學位論文，未出版，高雄市。
- 沈中偉 (1995)。多媒體電腦輔助學習的學習理論基礎研究。視聽教育雙月刊，36 (6)，12-25。
- 林保平 (2008)。科技融入數學課程與教學的意涵及實例。科學教育，312，19-31。
- 林宜臻 (2013)。自由軟體 GeoGebra 等在國高中數學教學之應用。國家教育研究院研究報告。
- 邱貴發 (1996)。情境學習理念與電腦輔助學習：學習社群理念探討。臺北市：師大書苑有限公司。
- 姚如芬 (1993)。高雄地區高中一年級學生數學學習態度與其數學學習成就之相關研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。
- 姚如芬 (1993)。高雄地區高中一年級學生數學學習態度與其數學學習成就之相關研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士學位論文，未出版，高雄市。

- 洪慈徽 (2008)。GeoGebra 輔助教學成效之研究 -以高中三角函數圖形為例。中華大學應用數學系碩士學位論文，未出版，新竹市。
- 南一書局企業股份有限公司 (2013)。普通高級中學數學第四冊。台南市：南一。
- 徐新逸 (2003)。學校推動資訊融入教學的實施策略探究。教學科技與媒體，64，68-84。
- 翁瑞禛 (2012)。網路討論區結合 GeoGebra 功能融入國中數學教學之行動研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士學位論文，未出版，彰化縣。
- 高中學科資訊科技融入教學資源網。上網日期：2014 年 8 月 20 日，取自 <http://hsmaterial.moe.edu.tw/hsit.php>。
- 教育部 (2013)。普通高級中學必修科目「數學」課程綱要。臺北市：教育部。
- 教育部 (2013)。普通高級中學數學科課程綱要補充說明。臺北市：教育部。
- 教育部 (2009)「高中資訊科技融入教學成果發表暨資訊教育交流會議」實施計畫。教育部電子計算機中心。臺北市：國立臺灣師範大學。
- 教育部電子報 453 期 (2011)。資訊融入教學—掌握科技之先。上網日期：2014 年 8 月 20 日，取自 http://epaper.edu.tw/topical.aspx?topical_sn=547。
- 張春興 (2011)。現代心理學-重修版。臺北：東華書局。
- 郭重吉 (1997)。迎接二十一世紀的科學教育。教學科技與媒體，33，3-11。
- 陳俊廷 (2002)。高中學生空間向量學習困難的診斷測驗工具發展研究。雄中學報，5，123-162。
- 許舜淵、胡政德 (2014)。動態幾何環境下大學生幾何探索之研究。臺灣數學教育期刊，1 (1)，49-77。
- 彭建勛 (2010)。在動態幾何環境下空間直線與平面之教學實驗。國立臺灣師範大學數學系碩士學位論文，未出版，臺北市。
- 游正祥 (2011)。動態幾何系統GGB運用於高中數學教育之策略探討。國立交通大學理學院科技與數位學習學程論文，未出版，新竹市。
- 游惠美、孟瑛如 (1998)。電腦輔助教學應用方式對國小低成就兒童注音符號補救教學成效之探討。特殊教育與復健學報，6，307-347。

- 黃楷智 (2011)。動態幾何系統 GeoGebra 對數學學習成效與認知診斷影響之研究-以簡易二次函數圖形為例。國立交通大學理學院科技與數位學習學程學位論文，未出版，新竹市。
- 楊淑芬 (1992)。數學史在數學教育中的重要性。數學傳播，16(3)，539-545。
- 楊舜傑 (2011)。以 PBL 和 GeoGebra 融入中學幾何教學。逢甲大學應用數學系碩士學位論文，未出版，臺中市。
- 龍騰文化事業股份有限公司 (2013)。普通高級中學數學第四冊。新北市：龍騰。
- 魏麗敏 (1996)。影響國小兒童數學成就之自我調節學習與情感因素分析及其策略訓練效果之研究。國立臺灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士學位論文，未出版，臺北市。
- 戴文雄 (1998)。不同正增強回饋型式電腦輔助學習系統對不同認知型態與空間能力高工學生機械製圖學習成效之研究。行政院國科會委託專案研究報告 (NSC86-2516-S-018-010-TG)。

二、英文部分

- Alessi, S. M., & Trollip, S. R. (1991). *Computer-based instruction: Methods and development*. Prentice Hall Professional Technical Reference.
- Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). *Computer-based learning environments in mathematics*. International handbook of mathematics education (pp. 469-501): Springer.
- Burns, P. K., & Bozeman, W. C. (1981). *Computer-assisted instruction and mathematics achievement: Is there a relationship*. Educational Technology, 21(10), 32-39.
- Bussi, M. G. B. (1996). *Mathematical discussion and perspective drawing in primary school*. Educational Studies in Mathematics, 31(1-2), 11-41.
- Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2, 843-908. Charlotte: IAP.

- Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2008). *Learning by viewing versus learning by doing: Evidence-based guidelines for principled learning environments*. *Performance Improvement*, 47(9), 5-13.
- Dalton, D. W., & Hannafin, M. J. (1988). *The effects of computer-assisted and traditional mastery methods on computation accuracy and attitudes*. *The Journal of Educational Research*, 27-33.
- Denzin, N. K. (1989). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods (3 ed)*. New York: McGraw-Hill.
- Duval, R. (1995). *Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings*. *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education (pp. 142-157)*: Springer.
- Fischbein, E. (1993). *The theory of figural concepts*. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.
- Janvier, C. E. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Kaput, J. J. (1992). *Technology and mathematics education: The first 25 years in the JRME*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 676-684.
- Mayer, R. E. (2002). *Multimedia learning*. *Psychology of Learning and Motivation*, 41, 85-139.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- Paivio, A. (1990). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford University Press.
- Yakimanskaya, I. (1991). *The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren*. *Soviet Studies in Mathematics Education*. Volume 3: ERIC.

附錄

附錄一、教材內容

《學習單一：空間中的基本幾何概念》

(本學習單需搭配動態軟體 GeoGebra 操作)

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

〈重點整理〉

◎ 空間中相異兩點決定一直線。

〈Think〉試著說說看：空間中兩條直線的交會情形？

◎ 空間中決定一平面的條件：

(1)不共線相異三點；(2)一線及線外一點；(3)兩平行線；(4)兩相交直線。

◎ 空間中直線與平面的交會情形：(將各種交會情形填入下方空格處)

(1)兩直線：_____、_____、_____或_____。

(2)一直線與一平面：_____、_____或_____。

(3)兩平面：_____、_____或_____。

〈動手做做看〉

1、打開附檔 1_5，觀察兩直線的特性，並且與組員討論後寫在下方空白處。

特性：

〈Think〉生活中可以看到的歪斜有哪些？

2、在新的頁面上開啟 3D 繪圖區，在指令欄上分別任意輸入兩個點，將這兩個點連成一條直線。接著，在 3D 繪圖區空白處任意點出第三個點，此三個點可行成唯一平面。

☆ 試說明：「不共線相異三點可決定唯一平面」的理由。

理由：

3、依上述操作自行創造任意兩平面，觀察其交會情形，並與組員討論後寫下來。

特性：

☆ 延伸思考：如上所述，若有任意三個平面，其面與面的交會情形為何？

特性：

隨堂例題

請同學依據觀察 GGB 操作的結果，回答以下問題。

1、是非題：下列關於空間的敘述何者正確？（可參考附檔 1_1、1_2、1_5）

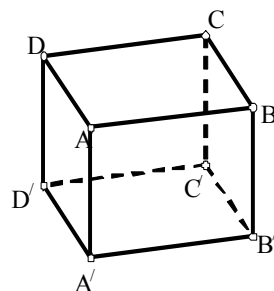
- () 通過已知平面外一點，恰有一平面與此平面垂直。
- () 通過已知直線上一點，恰有一平面與此直線垂直。
- () 通過已知直線外一點，恰有一平面與此直線平行。
- () 通過已知直線外一點，有無限多個平面與此直線平行。
- () 空間中兩相異直線若不相交，則一定平行。
- () 空間中任意兩相異直線一定有公垂線。
- () 垂直於同一直線的兩相異直線必平行。
- () 兩歪斜線在一平面上之正射影為相交兩直線。
- () 相異兩平面 E、F 交於一線 L，若 L 垂直一平面 G，則 E、F 均垂直於 G。
- () 若 L1 與 L2 是歪斜線，L1 與 L3 也是歪斜線，則 L2 與 L3 亦為歪斜線。

2、如圖， $ABCD-A'B'C'D'$ 為立方體的八個頂點，

試問下列那些線段會與線段 $\overline{A'B}$ 共平面？

（可參考附檔 1_4）

- (A) $\overline{BC'}$ (B) \overline{AC} (C) $\overline{DB'}$ (D) $\overline{DD'}$ (E) $\overline{CD'}$



3、二歪斜線在同一平面上之射影可能為下列哪些選項？

- (A) 一直線 (B) 二相交直線 (C) 二平行直線
(D) 直線及線外一點 (E) 一點。

〈挑戰題〉

請依下列步驟求正立方體中任兩頂點連線，所有連線中成歪斜線之對數。

（可參考附檔 1_3）

- (1) 考慮任一不共面四點所成的四面體，其稜線中恰有幾對歪斜線？
- (2) 正立方體共有八個頂點，任取四個一組再扣除共面者，即為不共面四點，試求正立方體所有頂點中不共面四點共幾組？
- (3) 由以上兩小題可知正立方體任兩頂點連線，所有連線中成歪斜線者有幾對？

參考答案

1、XOXOX OXXOX 2、(A) (E) 3、(B) (C) (D) 〈挑〉(1) 3 (2) 58 (3) 174

《學習單二：三垂線定理與二面角》

(本學習單需搭配動態軟體 GeoGebra 操作)

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

〈重點整理〉

1、直線與平面垂直的定義

若直線 L 和平面 E 相交於 P 點，平面 E 上通過 P 點的每一條直線都和 L 垂直，則稱直線 L 垂直平面 E ，以 $L \perp E$ 表示，此時直線 L 稱為平面 E 的垂線。

Q：打開附加的 GGB 檔案，觀察 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PE} 是否垂直 \overline{PD} ？

如果直線 L 沒有垂直平面 E ，則 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PE} 個別與 \overline{PD} 的關係為何？

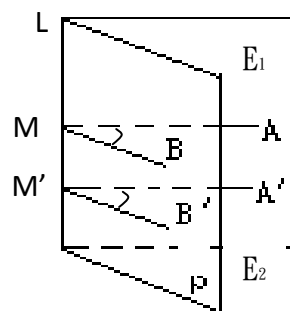
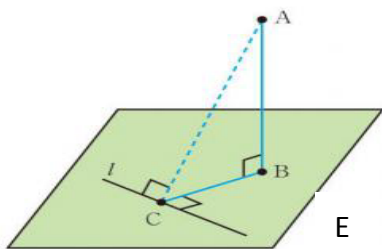
與組員討論後，試說明原因，並且寫下來☺

〈上課筆記〉

2、三垂線定理

設直線 \overline{AB} 與平面 E 垂直於 B 點，直線 L 在平面 E 上，直線 \overline{BC} 垂直 L 於 C 點

⇔ \overline{AC} 與 L 垂直於 C 。如左下圖：



3、二面角

平面 E_1 、 E_2 相交於直線 L ，在 L 上任取一點 M ，分別在平面 E_1 、 E_2 上做一射線 \overline{MA} 、 \overline{MB} 與交線 L 垂直，則兩射線夾角的度量 θ 正好為一個二面角，如右上圖。

註：觀察動態軟體幾何 GeoGebra 附檔中，二面角的動態模擬圖形，說說看你發現了什麼？與組員討論後，試說明原因，並且回答下列問題☺

Q1: 〈Think〉 $\angle BAC$ 與 $\angle BDC$ 何者最能夠代表這兩個面的夾角？

Q2: 為何一定要找與交線上任一點之垂直線？

Q3: 打開附檔「正四面體」，試問 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 之兩面夾角在哪裡？

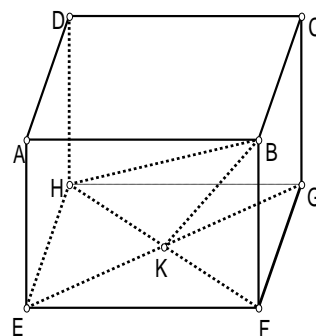
隨堂例題

請同學依據觀察 GGB 操作的結果，回答以下問題。

1、如圖，正立方體 $ABCD-EFGH$ 中，(可參考附檔 2_1)

\overline{HF} 與 \overline{EG} 交於 K 點，則下列敘述何者正確？

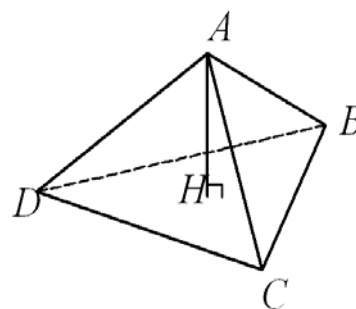
- (A) $\overline{EB} \perp \overline{BG}$
- (B) $\overline{HF} \perp \overline{EG}$
- (C) $\overline{KB} \perp \overline{EG}$
- (D) $\overline{KB} \perp \overline{HF}$
- (E) $\overline{KB} \perp \overline{BC}$ 。



2、下圖是一個三角錐， $\triangle BCD$ 是邊長為 6 的正三角形

且 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 5$ ，從頂點 A 對底面 BCD 作垂線 AH 交底面於 H 點，則：(可參考附檔 2_2)

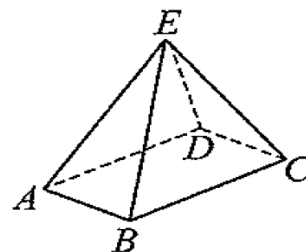
- (1) 高 \overline{AH} 的長 = _____。
- (2) 設側面 ACD 與底面 BCD 所夾的二面角為 θ ，求 $\cos \theta$ 的值 = _____。



3、如圖，一個每邊長均為 4 的正四角錐，其中 $ABCD$

為正方形，其餘四個三角形均為正三角形。設底面 $ABCD$ 與側面 ABE 所夾的二面角為 θ ，

則 $\cos \theta =$ _____。



參考答案

1、(B) (C) 2、(1) $\sqrt{13}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

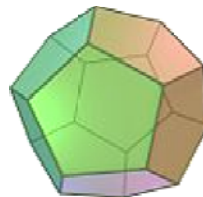
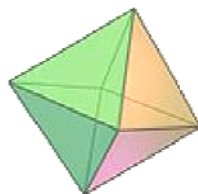
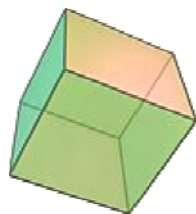
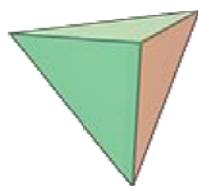
《學習單三：認識空間中的多面體》

(本學習單需搭配動態軟體 GeoGebra 操作)

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

〈常見多面體〉

- 1、正四面體 2、正六面體 3、正八面體 4、正十二面體 5、正二十面體



〈想一想〉正八面體中，夾在中間的任意兩相鄰稜線的夾角為幾度？

(與同學討論後，寫下答案並說明你的理由。)

答：

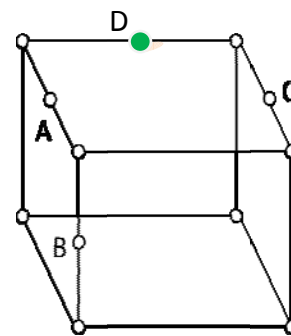
理由：

隨堂例題

請同學依據觀察 GGB 操作的結果，回答以下問題。

- 1-1 右圖為一正立方體，A、B、C 分別為所在的邊之中點，通過 A、B、C 三點的平面與此立方體表面相截，問下列何者為其截痕的形狀？ (可參考附檔3_1)

- (A) 直角三角形 (B) 非直角三角形 (C) 正方形
(D) 非正方形的長方形 (E) 六邊形。



- 1-2 通過 ABD 四點的平面與此立方體表面相截，請問其截痕的形狀可能為何？

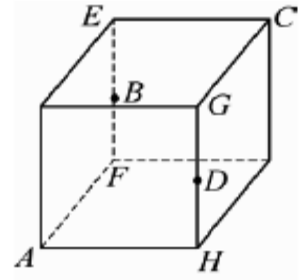
答：

- 2、在空間中，一平面與一正立方體相截，若在平面的兩側各有正立方體的4 個頂點，則其截面的形狀可能是下列哪種圖形 (複選)？ (可參考附檔3_2)
- (A) 三角形 (B) 四邊形 (C) 五邊形 (D) 六邊形 (E) 八邊形。

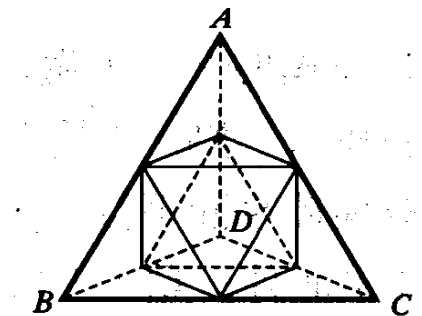
3、如右圖，一個邊長為 1 的正立方體， B, D 分別為 \overline{EF} ， \overline{GH} 中點，則四邊形 $ABCD$ 的面積為何？(可參考附檔 3_3)

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\sqrt{3}$

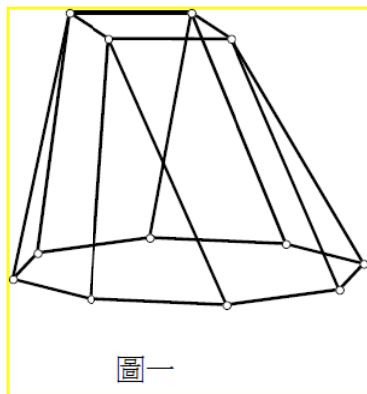
Hint：先試想四邊形 $ABCD$ 為何種形狀？



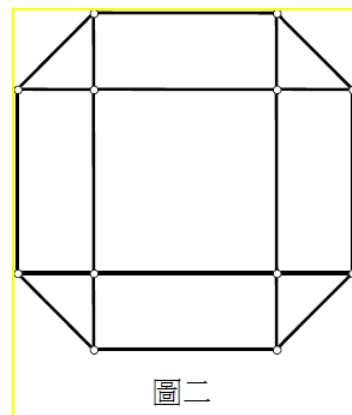
4、將一個正四面體的四個面上的各邊中點用線段連接，可得四個小正四面體及一個正八面體，如圖所示。如果原四面體 $ABCD$ 的體積為 12，那麼此正八面體的體積為 _____。(可參考附檔 3_4)



5、有一鋼架結構，其底面的邊長為 2 單位的正八邊形，上面為邊長 2 單位的正方形，側面有四個正方形及四個正三角形(如圖一)。從此鋼架上方向正射影，可得圖二所示的圖形。則此鋼架的高度為 _____ 單位。(可參考附檔 3_5)



圖一



圖二

參考答案

1-1、(D) 1-2、正六邊形 2、(B)(D) 3、(A) 4、6 5、 $\sqrt{2}$

《學習單四：空間中的坐標表示》

(本學習單需搭配動態軟體 GeoGebra 操作)

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

〈想一想〉

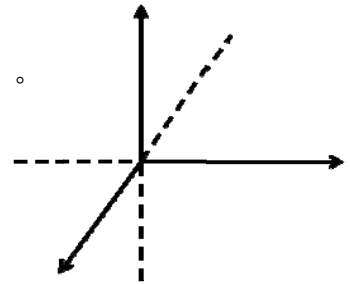
每天的一個時間點，上空有許多架飛機，它們是如何能夠確保彼此不會相撞？

〈重點整理〉

1、空間坐標系：

原點 O 、 x 軸、 y 軸、 z 軸 (其中 x 軸、 y 軸、 z 軸兩兩垂直)

與單位長組成空間直角坐標系，簡稱空間坐標系，如右圖。



[註₁] 在空間坐標系中，由 x 軸與 y 軸、 y 軸與 z 軸、 z 軸與 x 軸所決定的平面分別稱為 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面，統稱為坐標平面。

[註₂] 三個坐標平面把整個空間區分成八個部分，每一部分稱為一個卦限，規定： $x > 0$ 、 $y > 0$ 、 $z > 0$ 為第一卦限。

2、若在空間坐標系中，有任意一點 $P(a, b, c)$ ，請試著以 GGB 做探索，完成下表。

	投影點	對稱點	距離
x 軸	$(a, 0, 0)$		
y 軸	$(0, b, 0)$		
z 軸	$(0, 0, c)$		
xy 平面 ($z = 0$)	$(a, b, 0)$		
yz 平面 ($x = 0$)	$(0, b, c)$		
zx 平面 ($y = 0$)	$(a, 0, c)$		

〈概念釐清〉

在空間中：

(1) $x = 1$ 代表的意義是：_____；

同理， $y = 1$ 、 $z = 1$ 代表的意義是：_____。

而 $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ 代表的意義是：_____。

(2) $x + y = 1$ 代表的意義是：_____；其法向量：_____。

隨堂例題

請同學依據觀察 GGB 操作的結果，回答以下問題。

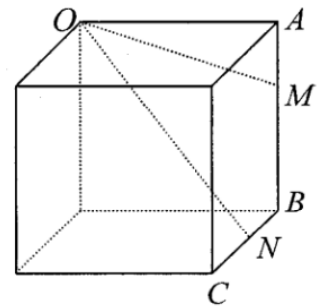
1、已知 $A(4, 1, -3)$, $B(-2, 3, 1)$ 為坐標空間中兩點， P 為 x 軸上一點且 $\overline{AP} = \overline{BP}$ ，求 P 點坐標？（可參考附檔4_2）

2、設 $P(1, 3, 4)$, $Q(4, -5, 8)$ ，則：（可參考附檔4_4）

(1) P 點對於 y 軸的投影點坐標為？(2) \overline{PQ} 在 zx 平面的投影線段長？

3、設 $P(x, y, z)$ 為第一卦限上的點，已知 P 點到 x, y, z 軸之距離分別為 $\sqrt{41}$ ， $\sqrt{34}$ ， 5 ，則 P 之坐標為？（可參考附檔4_3）

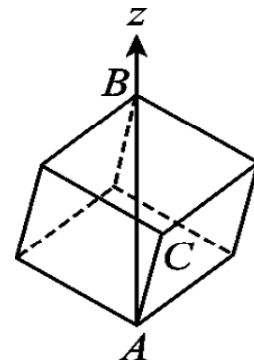
4、圖為一正立方體，若 M 在 \overline{AB} 線段上， $\overline{BM} = 3\overline{AM}$ ， N 為線段 \overline{BC} 之中點，則 $\cos\angle MON = ?$ （可參考附檔4_5）



〈挑戰題〉

如右圖，有一邊長為1的正立方體，
今置頂點A於空間坐標系中之原點 $(0, 0, 0)$ ，
頂點B於正 z 軸上，則頂點C之 z 坐標為。

（可參考附檔4_1）



參考答案

1、 $(1, 0, 0)$ 2、(1) $(0, 3, 0)$ (2) 5 3、 $(3, 4, 5)$ 4、 $\frac{10\sqrt{17}}{51}$ 〈挑〉 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

附錄二、學生課後作業練習

《課後練習：空間中的基本幾何概念》

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

◎ 請同學回答以下問題並說明作答原由，必要時可自行操作 GGB 軟體作為輔助。

1、試說明：「兩平行線可決定唯一平面」的理由。

2、下列有關空間的敘述那些是正確的？

- (A)過已知直線外一點，「恰有」一平面與此直線垂直。
- (B)過已知直線外一點，「恰有」一平面與此直線平行。
- (C)過已知平面外一點，「恰有」一直線與此平面平行。
- (D)過已知平面外一點，「恰有」一平面與此平面垂直。
- (E)過已知平面外一點，「恰有」一平面與此平面平行。

參考答案：(A) (E)

3、下列有關空間的敘述那些是正確的？

- (A)垂直同一直線的兩相異直線必定平行。
- (B)兩相異直線 L_1 、 L_2 ，必定存在另一直線 L_3 使得 $L_3 \perp L_1$ 且 $L_3 \perp L_2$ 。
- (C)若兩相異平面 E_1 、 E_2 ，不可能有相異兩直線 L_1 、 L_2 同時在 E_1 和 E_2 上。
- (D)在空間中，兩相異平面 E_1 、 E_2 交於一直線 L ，若直線 L 垂直於一平面 M ，則 E_1 、 E_2 均垂直於 M 。
- (E)在空間中，兩歪斜線 L_1 、 L_2 及一平面 E ，若 $L_1 // E$ ，則 $L_2 // E$ 。

參考答案：(B) (C) (D)

4、下列有關空間中的敘述，哪些是正確的？

- (A)空間中，若兩相異直線不相交，則他們必定平行。
- (B)長方體中的四條平行稜線，被一平面恰截出四個點，則連接四點的四邊形必成為平行四邊形。
- (C)空間中，若兩相異直線同時垂直固定的一條直線，則此兩相異直線必平行。
- (D)設直線 AB 垂直於平面 E 於 B 點， L 為平面 E 上但是沒有過 B 點的一條直線，若直線 AC 垂直 L 於 C 點，則直線 BC 垂直 L 。

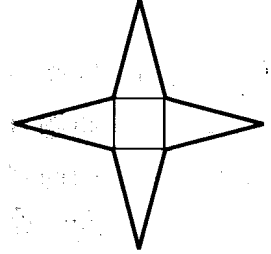
參考答案：(B) (D)

《課後練習：三垂線定理與二面角》

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

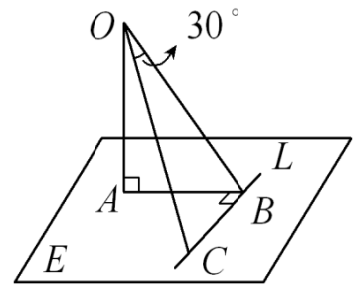
◎ 請同學回答以下問題並說明作答原由，必要時可自行操作 GGB 軟體作為輔助。

- 1、如右圖的四角錐展開圖，四角錐底面的邊長 2 的正方形，四個側面都是腰長為 4 的等腰三角形，則此四角錐的高度為_____。



參考答案： $\sqrt{14}$

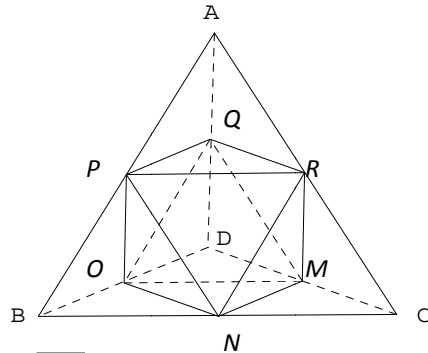
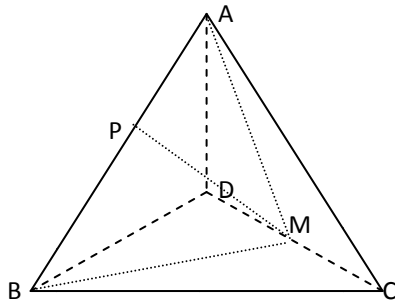
- 2、設 \overline{OA} 垂直平面 E 於 A 點，直線 L 在平面 E 上， \overline{AB} 垂直 L 於 B 點， C 為 L 上一點。若 $\overline{OA}=6\sqrt{3}$ ， $\overline{AB}=6$ ， $\angle BOC=30^\circ$ ，則：



- (1) \overline{BC} 長度為_____。
- (2) 設 $\triangle OAB$ 所在平面為 E_1 與 $\triangle OAC$ 所在平面為 E_2 ，且 E_1 與 E_2 的夾角為 θ ，則 $\sin \theta =$ _____。

參考答案：(1) $4\sqrt{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

- 3、如下圖，已知四面體 $ABCD$ 是邊長為 4 的正四面體，則：(可參考附檔 2_3)



- (1) 若 M 為 \overline{CD} 的中點， P 為 \overline{AB} 的中點，則 \overline{PM} ；
- (2) 已知將正四面體各邊中點用線段連接，可得四個小正四面體與一個正八面體，如下圖所示。若正八面體 $MNOPQR$ 中，相鄰兩平面 PON 與 ONM 的夾角為 θ ，則 $\cos \theta$ 。

參考答案：(1) $2\sqrt{2}$ (2) $-\frac{1}{3}$

《課後練習：認識空間中的多面體》

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

◎ 請同學回答以下問題並說明作答原由，必要時可自行操作 GGB 軟體作為輔助。

1、設一正四面體各稜長均為1，則：

(1)頂點A到底面BCD的距離為何？

(2)此四面體的體積為何？

(3)求直線AB、CD的距離為多少？

參考答案：(1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2、如圖，正六面體 $ABCD-EFGH$ ，其中 M 、 N 分別

為 \overline{HG} 、 \overline{HD} 的中點， O 點為 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交點，則下列
角度有哪些是直角？

(1) $\angle MNO$

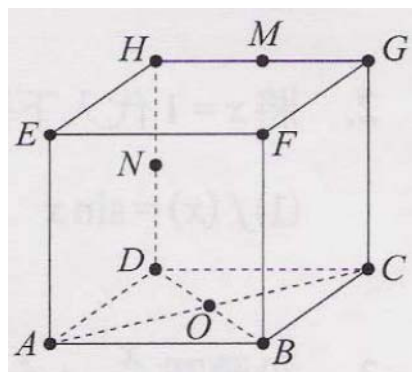
(2) $\angle NOA$

(3) $\angle GOD$

(4) $\angle ENM$

(5) $\angle EDB$

參考答案：(1) (2) (3)



《課後練習：空間中的坐標表示》

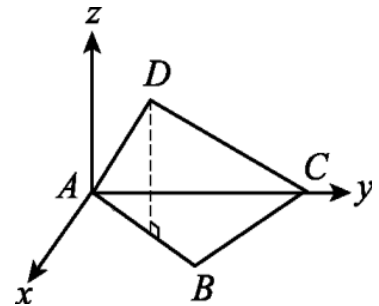
學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

◎ 請同學回答以下問題並說明作答原由，必要時可自行操作 GGB 軟體作為輔助。

1、若正三角形 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(6, -1, 4)$ 、 $B(1, -5, 3)$ 、 $C(2, y, z)$ ，則 C 點為？

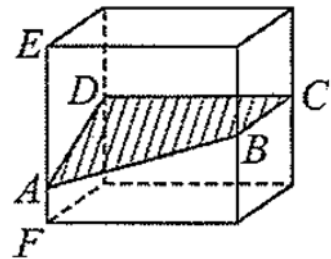
參考答案： $(2, 0, -1)$ 或 $(2, -\frac{42}{17}, \frac{151}{17})$

2、將長方形 $ABCD$ 沿對角線 \overline{AC} 折起，並置於空間坐標中（如圖）。已知 $\triangle ABC$ 在 xy 平面上， D 在第一卦限， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BC}=\sqrt{3}$ 。若 D 在 xy 平面上的投影恰巧在 \overline{AB} 上，求 D 點坐標？



參考答案： $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$

3、如圖，一個正立方體，其被一平面截出一個四邊形 $ABCD$ ，其中 B 、 D 為所在邊的中點，且 $\overline{EA}:\overline{AF}=5:1$ ；試求 $\cos(\angle DAB)=$ _____。



參考答案： $\frac{1}{10}$

附錄三、學生學習回饋單

《今日上課心得與想法》

一、今天的數學活動中，你印象最深刻的是什麼？

二、在今天的隨堂例題中，你覺得最困難的題目是哪一題？

覺得困難的點在於？

透過動態幾何軟體 GGB 操作觀察與教師講解後，是否有解惑？

三、你對今天的課程還滿意嗎？請在下列空格打勾。

非常滿意 滿意 普通 不滿意 非常不滿意

*為什麼？請寫下你對於課程的建議：

附錄四、學生學習心得問卷

《學習心得問答》

各位同學們好：

這份問卷是想瞭解同學們對於今日課程的看法與建議，沒有所謂的標準答案。大約花費同學們五分鐘的填答時間，請依照你的直覺反應回答即可。此問卷所取得的資料，將僅作為日後課程設計的修改依據，所有姓名相關資料都不會被公開，敬請放心填答。

敬祝：學業順利！

教學者：陳采姿老師

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、在今天這四堂課之前，你有使用過任何數學相關應用軟體嗎？

沒有。

有，_____

二、在今天四堂課結束之後，你對於動態幾何軟體 GeoGebra 的操作是否熟悉？

還是不太熟悉，尤其是_____

普通，_____

還滿上手的，尤其是_____

三、在「空間中直線與平面關係」課程一：透過動態幾何軟體 GeoGebra 是否有助於了解此單元的概念思考？

有，尤其是在_____很有幫助。

沒有，對於_____還是不太熟。

四、在「三垂線定理與二面角」課程二：透過動態幾何軟體 GeoGebra 是否有助於了解此單元的概念思考？

有，尤其是在_____很有幫助。

沒有，對於_____還是不太熟。

五、在「空間中的多面體」課程三：透過動態幾何軟體 GeoGebra 是否有助解決空間中所遇到的數學問題？

有，尤其是在_____很有幫助。

沒有，對於_____還是不太熟。

六、在「空間中的坐標表示」課程四：透過動態幾何軟體 GeoGebra 是否有助於了解此單元的概念思考，並且能自行運用坐標系做出任何點、線或面？

有，尤其是在_____很有幫助。

沒有，對於_____還是不太熟。

七、在這四堂課中，整體而言，你認為哪一堂課最受用？其次是哪一堂？為什麼？（幫老師做個排序，最好的是 1，依序為 1、2、3、4）

() 課程一，因為_____。

() 課程二，因為_____。

() 課程三，因為_____。

() 課程四，因為_____。

八、最後，上完今日的課程後，有沒有「非講不可」的話呢？



感謝你的填答，祝福你未來學習愉快順利 ☺

附錄五、教師教學手札

《教師教學手札》

課程進度：	日期：	時間：
今日進度：		
上課觀察到的事件：		
課後省思：		