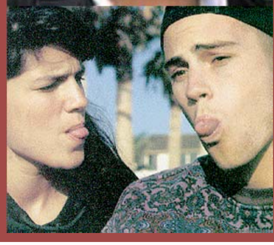
嘉義東石高中數學科教師專業研習
數學科教材教法

梁淑坤
國立中山大學教育所

101.12.20

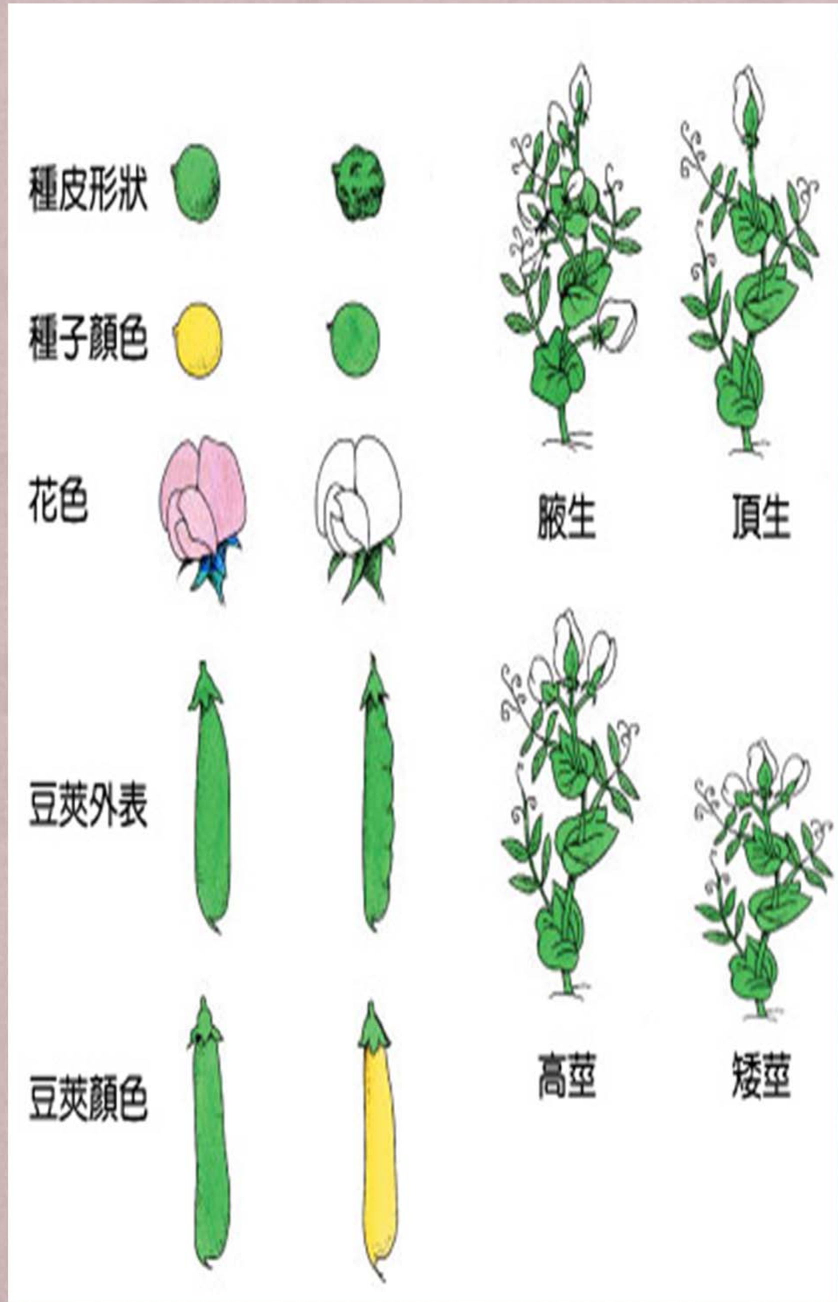
leung@mail.nsysu.edu.tw
http://www2.nsysu.edu.tw/leung/home.html

我們先統計一下我們班上...

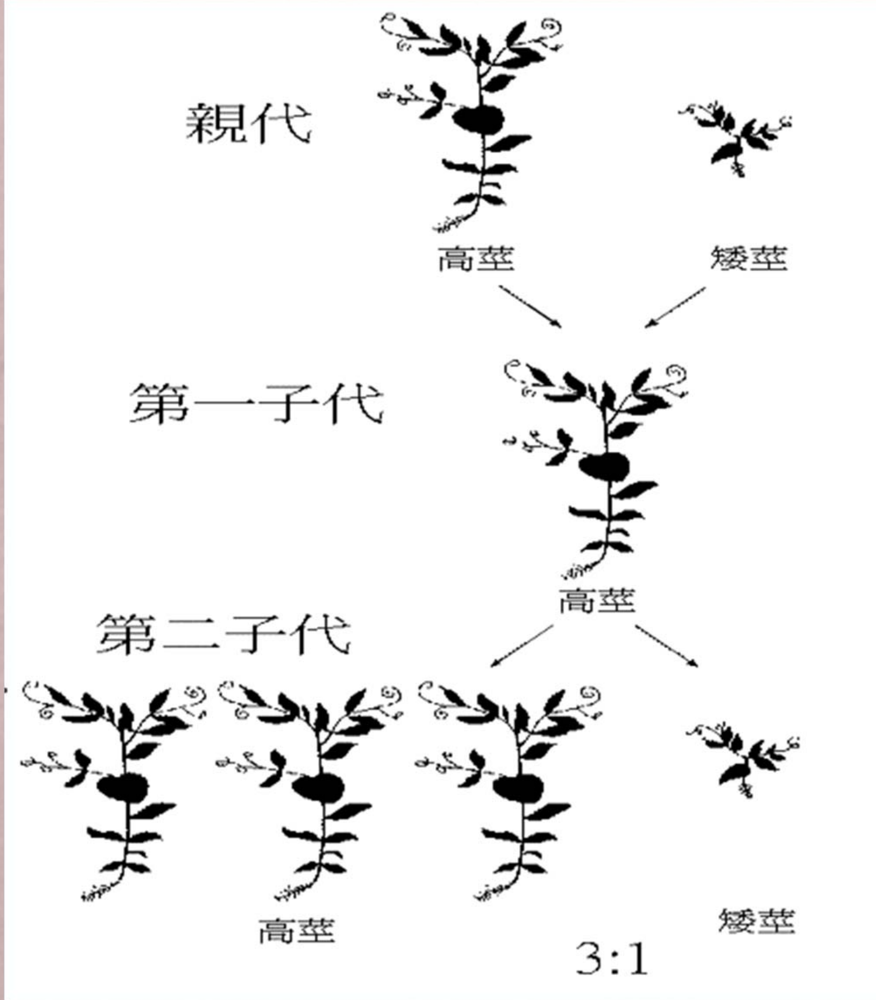
酒窩		下巴有酒窩	
耳垂分離		直拇指	
天生捲頭髮		彎小拇指	
可捲舌		第二腳趾比大腳趾長	

孟德爾的遺傳實驗

孟德爾發現空地上的的豌豆，有白花、黃花；有高莖、有矮莖；有豆莢豐圓、有的卻是乾扁。
孟德爾用長時間的觀察、比對，作有系統的統計，這些記錄的植物個體數超過二萬一千株以上。
孟德爾發現：如果長莖豌豆和矮莖豌豆交配，子代和孫代全部是長莖，一直到第四代，四株中才有一株是矮莖。



以純種的高莖矮莖為例



將一高莖和一矮莖進行雜交，所得到的第一代子代皆為高莖。

再將第一代子代互相交配得到第二代子代，

則觀察到第二代子代中有高莖也有矮莖，比例為3:1。

孟德爾遺傳學的整理

- 生物組織之內都有一個基因，透過這個基因，親代的特性可以傳給下一代 。
- 每一種單獨的特徵，例如：豌豆的顏色或高矮，都是由一對基因決定，而這對基因是由上一代的一對基因中，各繼承一個基因湊成一對。

孟德爾遺傳學的整理

- 子代繼承來的基因如果是有不同性狀的區別，例如：一個基因會顯現高莖的特性、另一個會顯現低莖，那麼只有強勢的特性會顯現出來（我們稱為**顯性**），這種現象叫做「**優性定律**」。

- 親代的基因經過分配，再傳給子代，哪個基因和哪個基因配成一對，完全是**隨機偶然**發生的。

孟德爾所作實驗之統計

第一代

雙親基因型	AA×aa		
		a	a
	A	Aa	Aa
	A	Aa	Aa
第一代子代基因型	（ 100 % ）		
第一代子代表現型	全顯		

第二代

雙親基因型	Aa×Aa		
		A	a
	A	AA	Aa
	a	Aa	aa
第二代子代基因型	AA：Aa：aa＝ 1：2：1		
第二代子代表現型	顯：隱＝ 3：1		

孟德爾的紀錄發現，不論是哪一種性狀都呈現出大約是3：1的比例。

白綿羊爸媽有可能生黑羊嗎?

- http://www.youtube.com/watch?v=4yBYDANZCXk

孟德爾所作實驗之統計

親代	第一子代	第二子代	比例
圓形種子×皺皮種子	圓形種子	5474圓形種子 1850皺皮種子	2.96：1
黃色種子×綠色種子	黃色種子	6022黃色種子 2001綠色種子	3.01：1
灰色種皮×白色種皮	灰色種皮	705灰色種皮 224白色種皮	3.15：1
飽滿豆莢×癟縮豆莢	飽滿豆莢	882飽滿豆莢 299癟縮豆莢	2.95：1
綠色豆莢×黃色豆莢	綠色豆莢	428綠色豆莢 152黃色豆莢	2.82：1
腋生花×頂生花	腋生花	651腋生花 207頂生花	3.14：1
高莖×矮莖	高莖	787高莖 277矮莖	2.84：1

孟德爾的第一定律—分離律

- 性狀的遺傳是由細胞中的某種因子所控制的(今天我們稱為基因)，控制一種性狀的因子有二種型式：一為顯性，一為隱性。
- 此種因子在細胞中是成對存在的，當形成精子和卵子時，便互相分離，各帶一個受精時，若顯性因子和隱性因子相結合，便表現出顯性性狀 。

孟德爾的第一定律—分離律

Aa

Aa

精 卵	A	a
A	AA (顯)	Aa (顯)
a	Aa (顯)	aa (隱)

例：如果一對父母皆為耳垂分離(Aa，A為顯性因子)，其子女可能性狀如下：

卵 精	A 母親卵子	a 母親卵子
A 父親精子	AA 耳垂分離	Aa 耳垂分離
a 父親精子	Aa 耳垂分離	aa 耳垂緊貼

血型

例：人類的 A, B, O 血型遺傳，這個性狀有三個因子(A、B、i)，A、B 相對於 i 為顯性基因。

- 又因為 A、B 之間為共顯性
(即共同表現而無顯隱性之分)

所以 AB 型的基因組合為 AB。

基因組合	
A 型	**AA 或是 Ai**
B 型	**BB 或是 Bi**
O 型	**ii**
AB型	**AB**

例：如果有一對父母，其血型的基因配對情形為 A (Ai) × B (Bi)，則其子女可能血型如下：

精 卵	A	i
B	AB (AB型)	Bi (B型)
i	Ai (A型)	ii (O型)

孟德爾的第二定律—獨立分配律

- 孟德爾提出解釋(假說)，控制不同性狀的成對因子都會獨立地分配到精子和卵子。

例如：

親代是黃色圓形種子(顯性；因子為YYRR)和綠色皺皮種子(隱性；因子為yyrr)

第一子代即為

黃色圓形種子(顯性；因子為YyRr)。精子或卵子即分配為YR或Yr或yR或yr。

則第二子代為

精 卵	YR		Yr		yR		yr	
YR	YYRR	黃圓	YYRr	黃圓	YyRR	黃圓	YyRr	黃圓
Yr	YYRr	黃圓	YYrr	黃皺	YyRr	黃圓	Yyrr	黃皺
yR	YyRR	黃圓	YyRr	黃圓	yyRR	綠圓	yyRr	綠圓
yr	YyRr	黃圓	Yyrr	黃皺	yyRr	綠圓	yyrr	綠皺

黃色圓形：綠色圓形：黃色皺皮：綠色皺皮 ＝ 9：3：3：1

同理

如果有三種特徵：
例如顏色有黃綠(二種選擇);
種皮有圓皺(二種選擇);
莖有高矮(二種選擇)，

所以父代及母代各有八種組合方式，
二者相配可以產生 64種情形。

其各種特徵子代的比例為
27:9:9:9:3:3:3:1

考慮以下問題：

有一個班有 20 個人，若考了 80 分，請問這個分數在班上算好嗎？

狀況一

如果 A 班的同學成績如下：

98, 91, 97, 90, 92, 98, 86, 79, 77, 99,
78, 85, 84, 84, 85, 75, 74, 96, 90, 80.

請問考 80 分在班上算好嗎？

狀況二

如果 B 班的同學成績如下：

29, 58, 61, 27, 93, 45, 93, 82, 21, 79,
40, 80, 29, 96, 97, 27, 74, 73, 69, 27.

請問考 80 分在班上算好嗎？

狀況三

如果 C 班的同學成績如下：

86, 48, 74, 66, 30, 58, 72, 38, 80, 71,
73, 75, 54, 39, 40, 42, 30, 90, 78, 56.

請問考 80 分在班上算好嗎？

把資料排序後…

A班： 74, 75, 77, 78, 79, 80, 84, 84, 85, 85,
86, 90, 90, 91, 92, 96, 97, 98, 98, 99.

B班： 21, 27, 27, 27, 29, 29, 40, 45, 58, 61,
69, 73, 74, 79, 80, 82, 93, 93, 96, 97.

C班： 30, 30, 38, 39, 40, 42, 48, 54, 56, 58,
66, 71, 72, 73, 74, 75, 78, 80, 86, 90.

有沒有比較清楚呢？

資料量少還可以用排序來看

若資料量大呢？排序？不一定有用！

有一些統計量可以幫助瞭解資料的分布：平均數、變異數與標準差

對於一組資料 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 來說，這組資料的平均數為

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{N}$$

這組資料的變異數為

$$S_X{}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{N}$$

而這組資料的標準差就是變異數開根號，也就是 S_X

由公式可知：

平均數可看出資料大略的集中位置；

標準差可看出資料的分散情況。

標準差越大表示資料越分散，標準差越小表示資料越集中。

狀況三

如果 C 班的同學成績如下：

86, 48, 74, 66, 30, 58, 72, 38, 80, 71,
73, 75, 54, 39, 40, 42, 30, 90, 78, 56.

請問考 80 分在班上算好嗎？

把資料排序後…

A班： 74, 75, 77, 78, 79, 80, 84, 84, 85, 85,
86, 90, 90, 91, 92, 96, 97, 98, 98, 99.

B班： 21, 27, 27, 27, 29, 29, 40, 45, 58, 61,
69, 73, 74, 79, 80, 82, 93, 93, 96, 97.

C班： 30, 30, 38, 39, 40, 42, 48, 54, 56, 58,
66, 71, 72, 73, 74, 75, 78, 80, 86, 90.

有沒有比較清楚呢？

資料量少還可以用排序來看

若資料量大呢？排序？不一定有用！

有一些統計量可以幫助瞭解資料的分布：平均數、變異數與標準差

對於一組資料 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 來說，這組資料的平均數為

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{N}$$

這組資料的變異數為

$$S_X{}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{N}$$

而這組資料的標準差就是變異數開根號，也就是 S_X

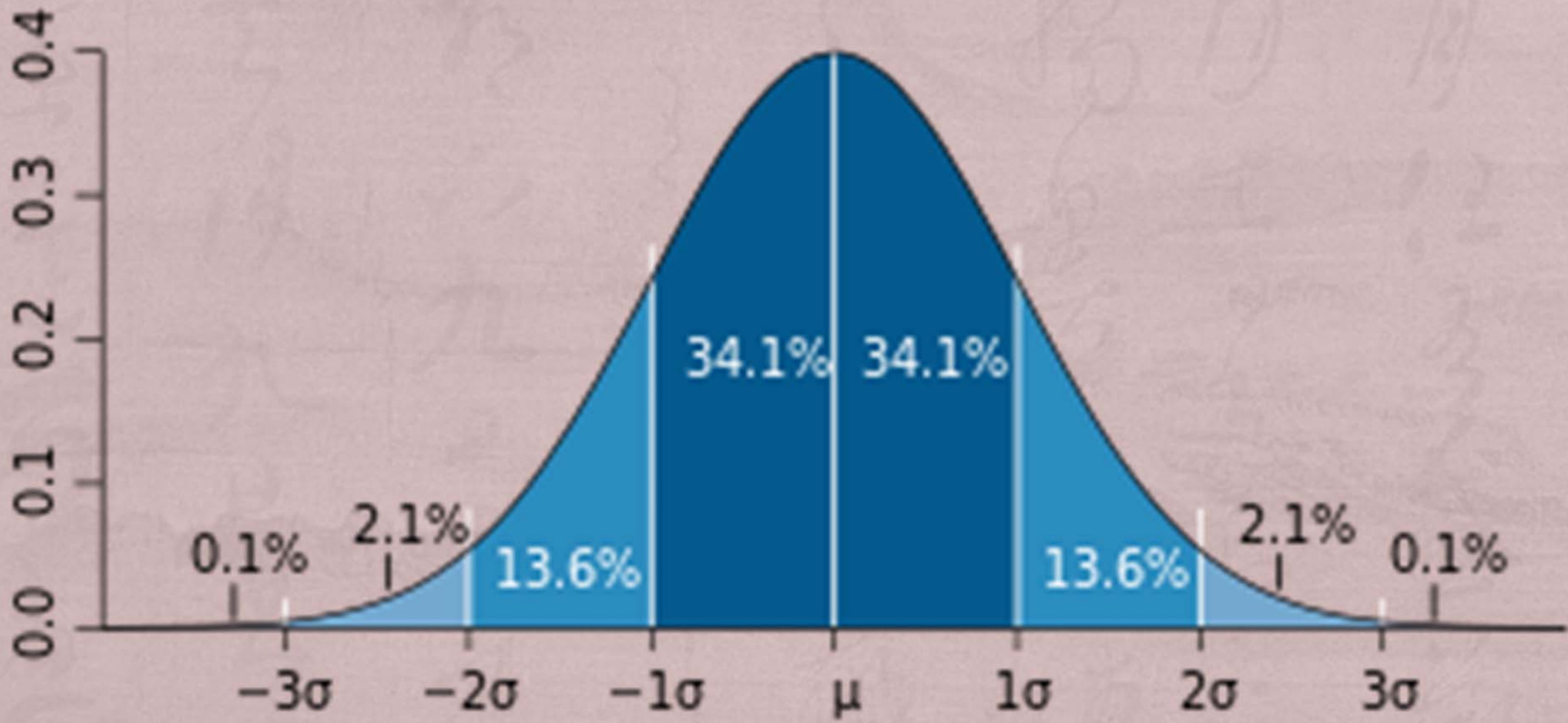
由公式可知：

平均數可看出資料大略的集中位置；

標準差可看出資料的分散情況。

標準差越大表示資料越分散，標準差越小表示資料越集中。

常態分佈Normal Distribution



有 68% 的資料在 $\bar{X} \pm S_X$

有 95% 的資料在 $\bar{X} \pm 2\ S_X$

有 99.7%的資料在 $\bar{X} \pm 3\ S_X$

關於 A, B, C 三班的成績可整理如下：

班級	A	B	C
平均數$\bar{X}$	86.9	60	60
標準差S_X	8.143	27.02	18.97

再利用常態分佈圖的概念即可知道，考 80 在 C 班已經大於平均數的 1 個標準差以上，所以考 80 分在 C 班算是較好的

SYMMETRY

只要稍微注意一下，就會發現自己生活在一個充滿對稱的世界裡

雪花晶體

蝴蝶雙翼

symmetry

請舉例說明你所認識的對稱

The simplest symmetry is Reflection Symmetry (線對稱 ，鏡射)

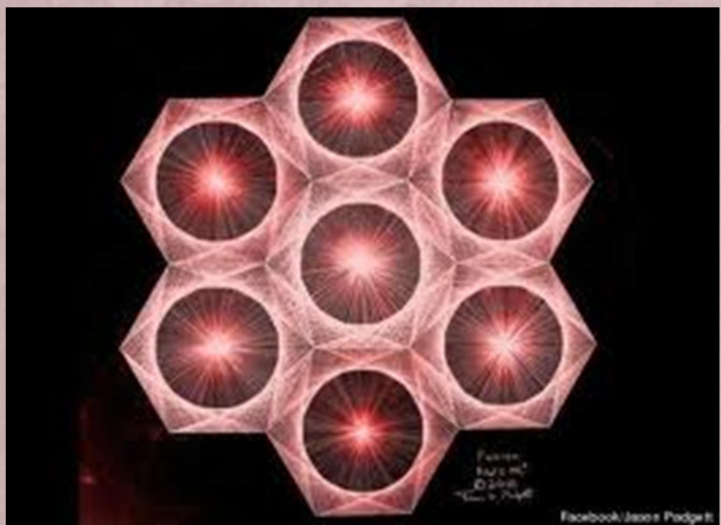
It is easy to recognise, because one half is the reflection of the other half.

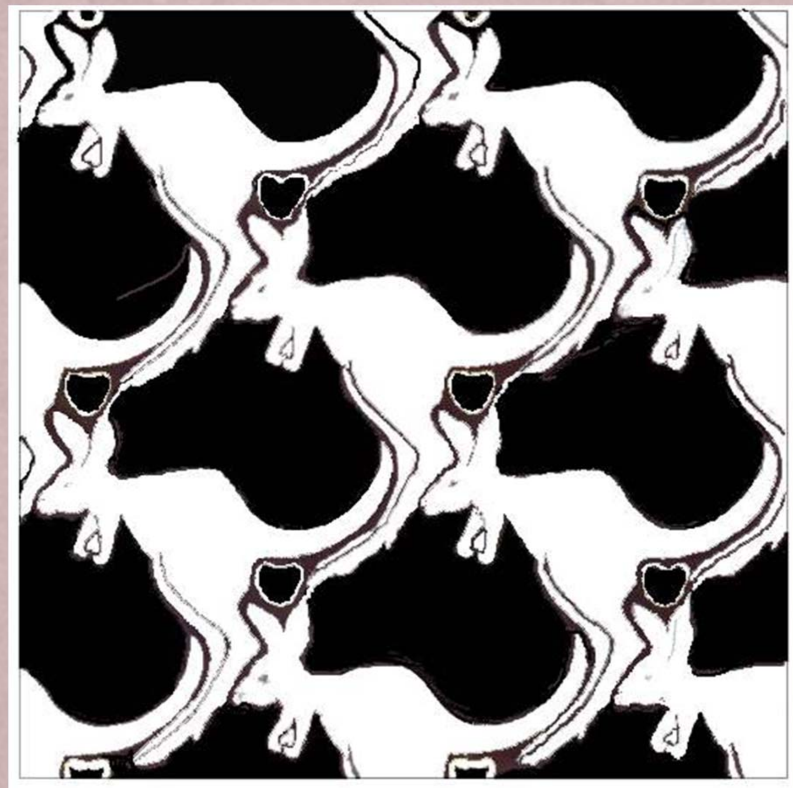
碎形FRACTAL

碎形幾何圖形的主要特性：

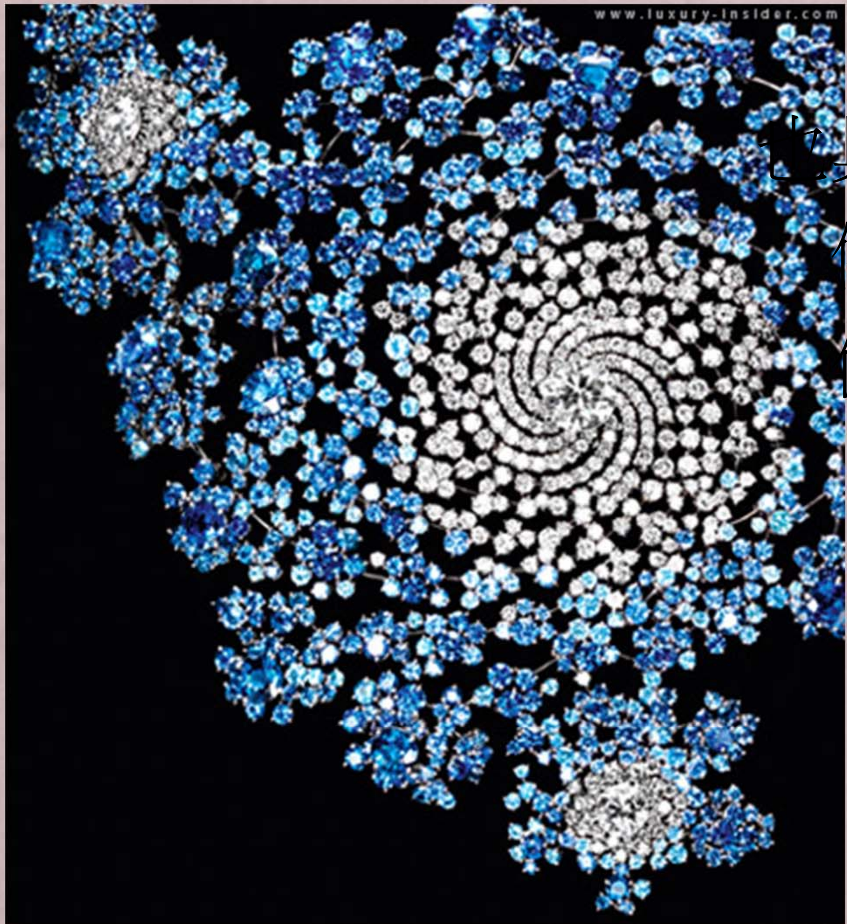
在有限區域以自我規則複製的一種

無限過程



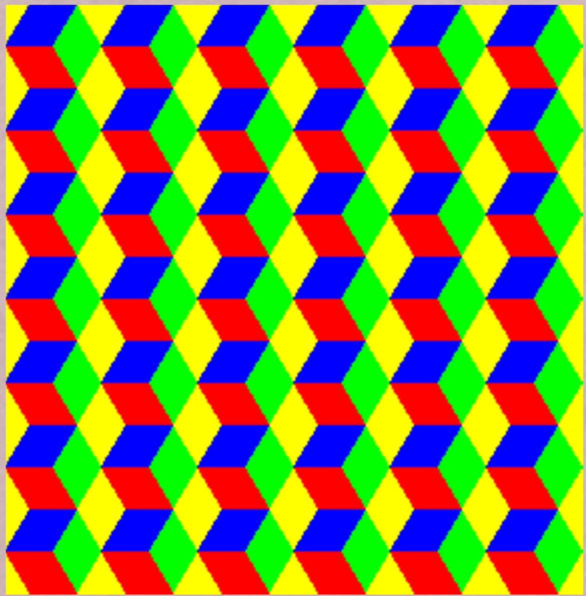


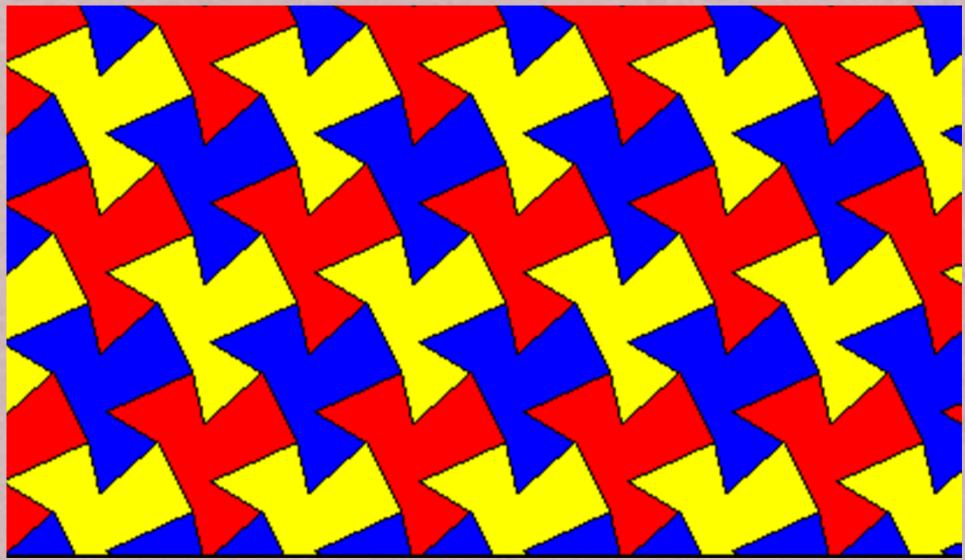
碎形



這些圖型除美觀之外，
也具備某些有趣的數學性質，
例如雖然他們是平面圖形，
但其空間維度卻不是二維，
而是分數維度

碎形





動手做碎形

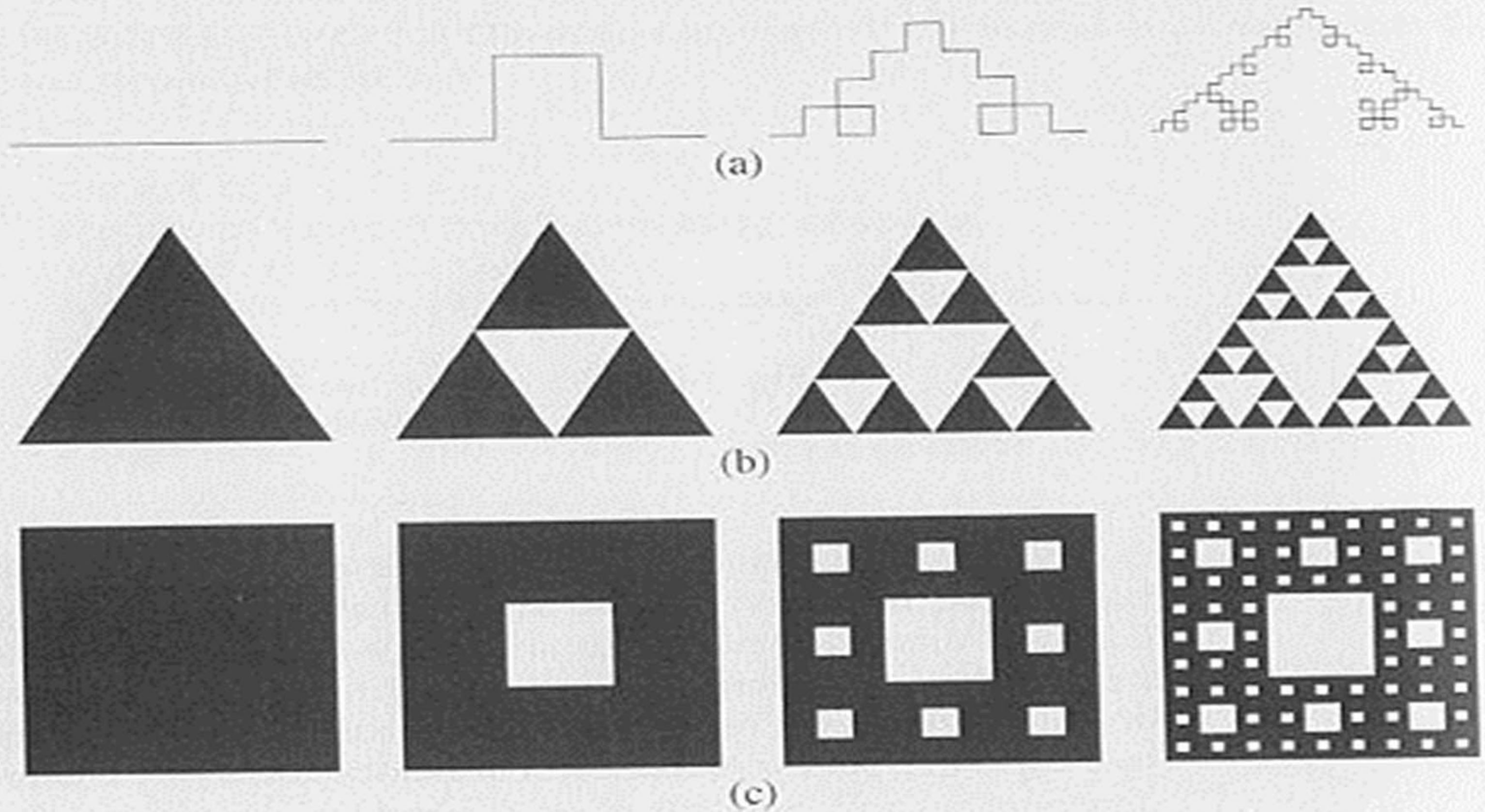
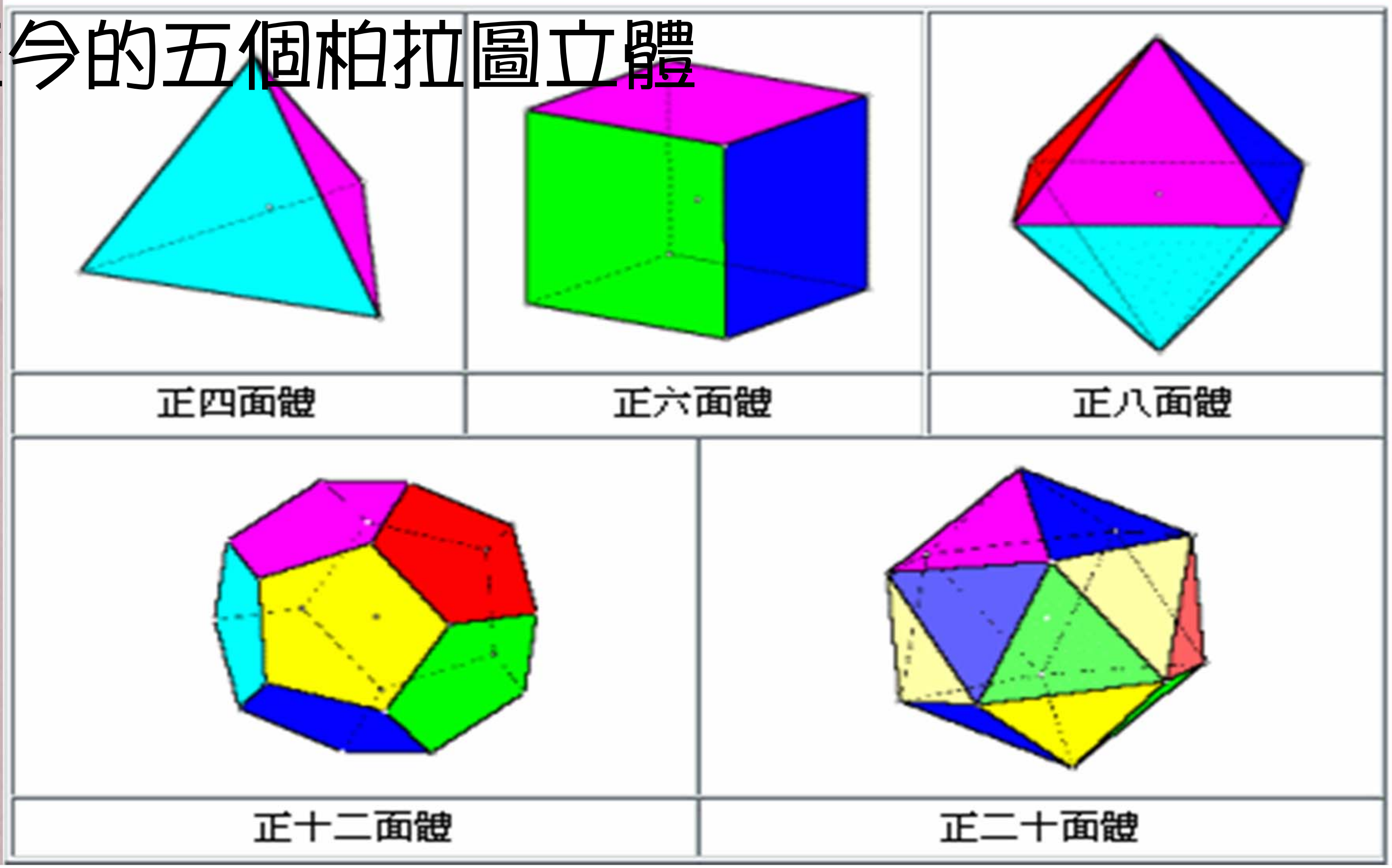


Fig. 14.7 (a) The first few iterations of the quadric Koch curve; (b) The first few iterations of the Sierpiński gasket; (c) The first few iterations of the Sierpiński carpet.

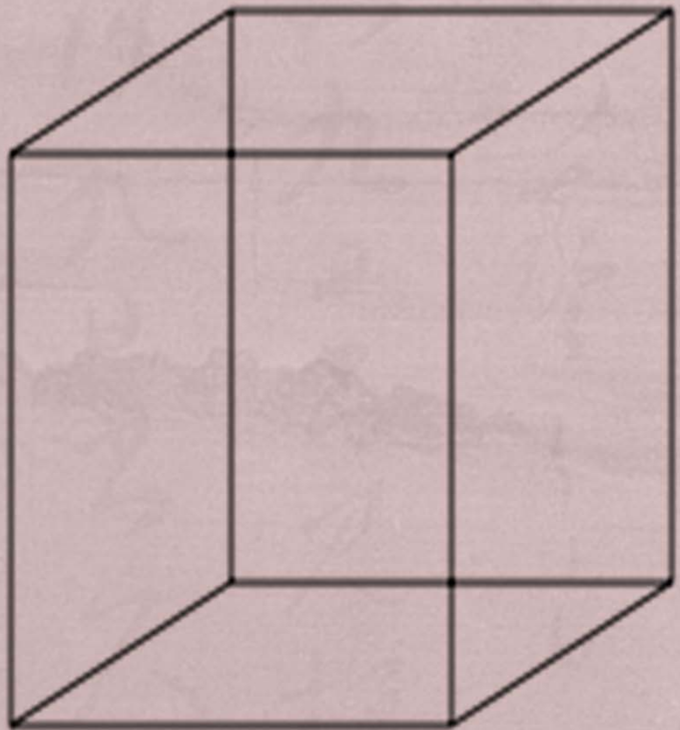
柏拉圖立體

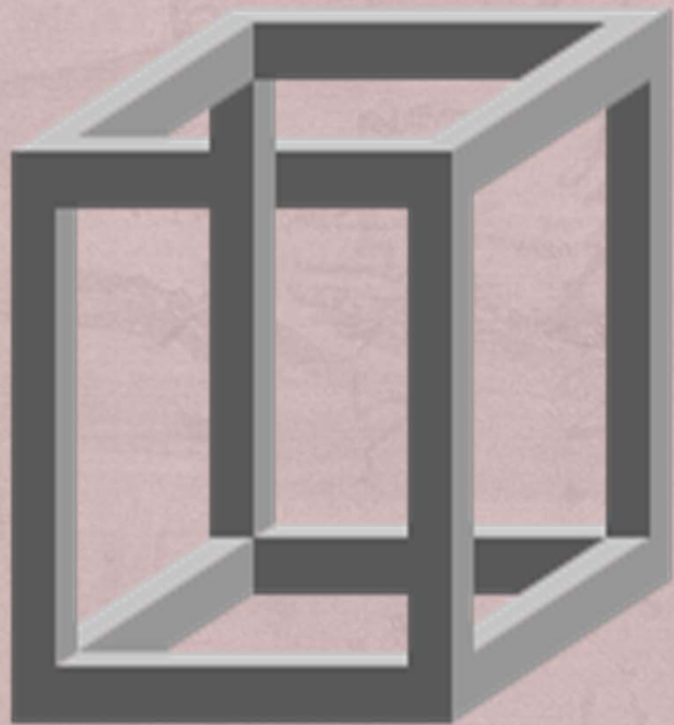
講到數學立體藝術當然不能錯過從古希臘流傳至今的五個柏拉圖立體



正四面體	正六面體	正八面體
正十二面體	正二十面體	

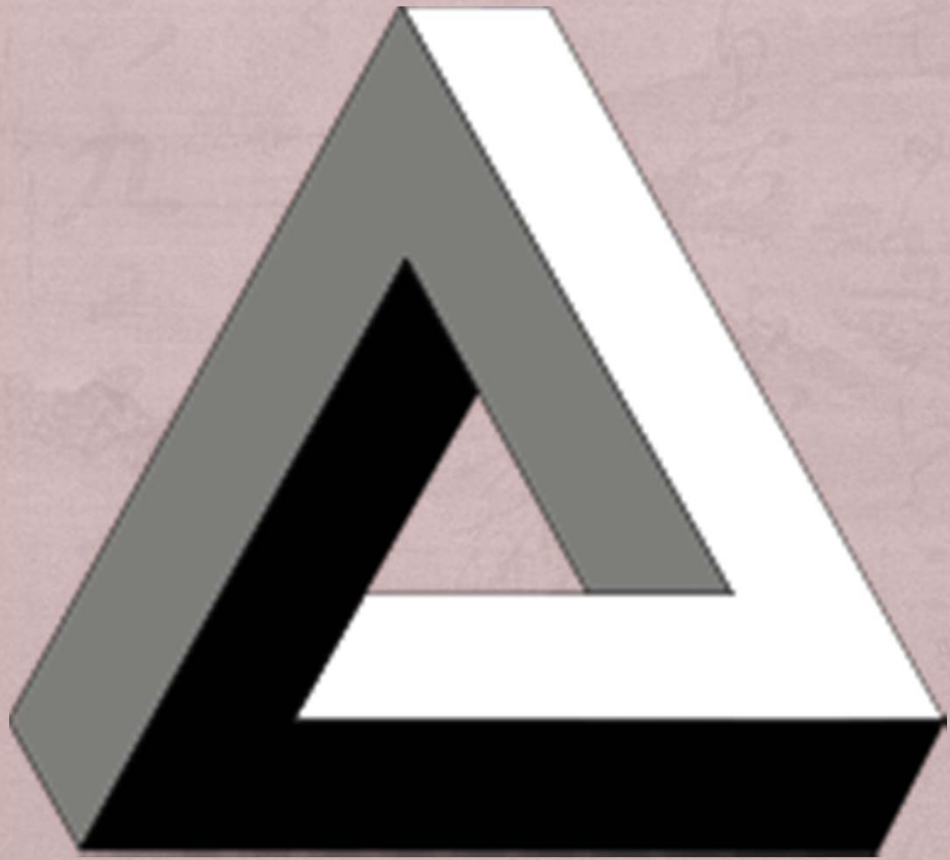
内克方塊Necker cube





潘洛斯三角

PENROSE TRIANGLE

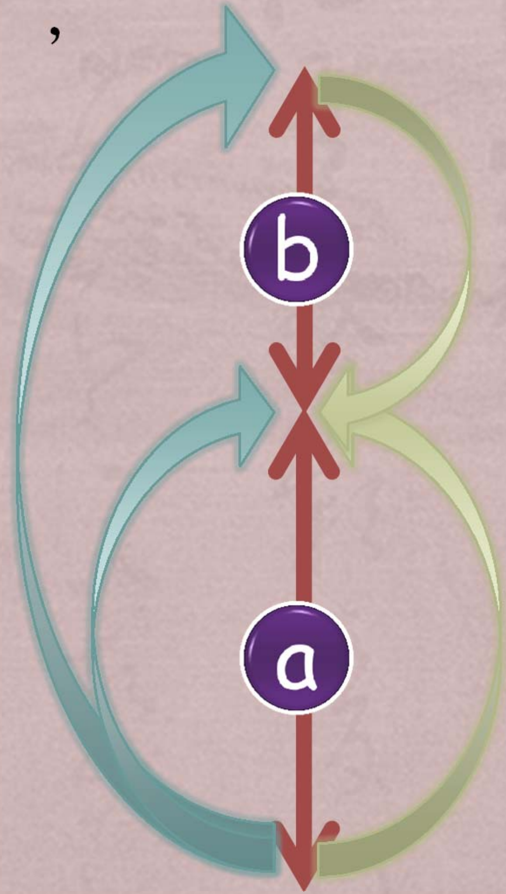


PENROSE TRIANGLE

什麼是黃金比例

古希臘人把它認為是最完美的比例而活用於視覺造形中，
而其分比例的基本方法是把一條線分割成大小二段時，
「全段長：長段長＝長段長：短段長」，
這種比例分割方法就是黃金比例，
此數據為1.6180339…是個無窮小數，
在文藝復興時代，
義大利以神聖比例來稱呼它，
認為黃金比例是最完美的比例。

a+b：a ＝ a：b
＝ 1.6180339：1



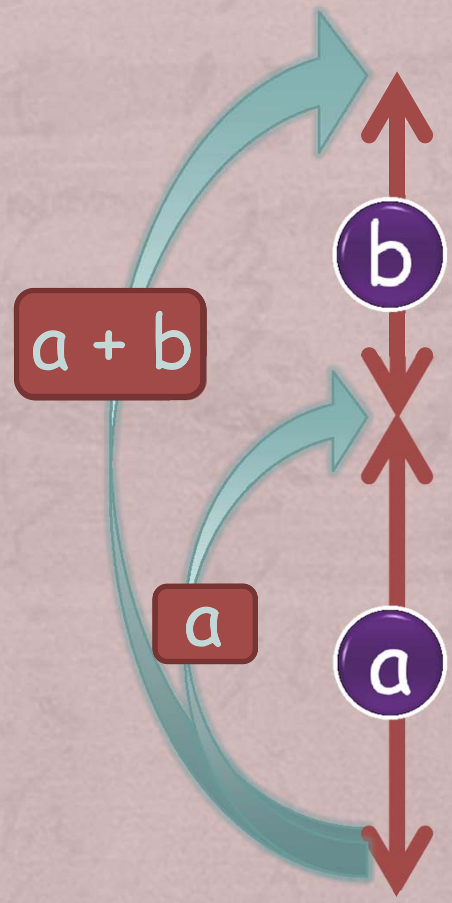
美麗又神奇的1.618

$$\frac{a+b}{a} = 1.618$$

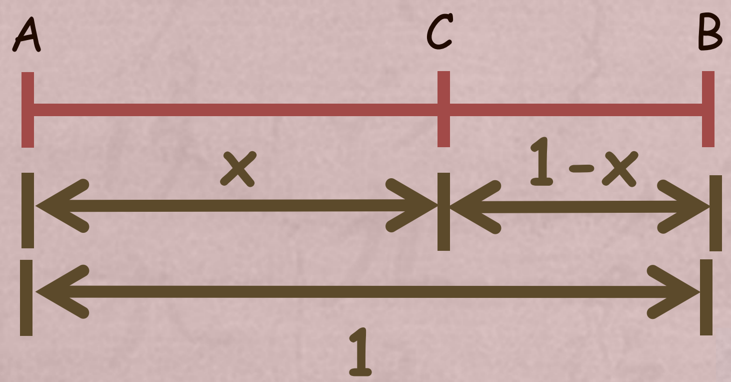
設 $L = a + b$

在黃金比例切割下，
長段會占全段的多少呢?

$$\frac{a}{L} = 0.618$$



用數學來說黃金比例



給一線段 $\overline{AB}$ ，
如何找到一點 C ，
使得 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$ ？
(全段：長段 = 長段：短段)

把 $\overline{AB}$ 設為1 ；
則 $\overline{AC}$ 為 x 、$\overline{BC}$ 為 1-x

則 1 ： x = x ： (1-x)

內項相乘 = 外項相乘

➔ $x^2 = x(1-x)$

➔ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.618$

（ 負不合 ）

$$\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$

造就黃金比例的視覺效果

在人體軀幹與身高的比例上，肚臍是理想的黃金分割點。

如果我們的身高與下半身長度（腳底到肚臍）的比值是 1.618，就是最完美的身材

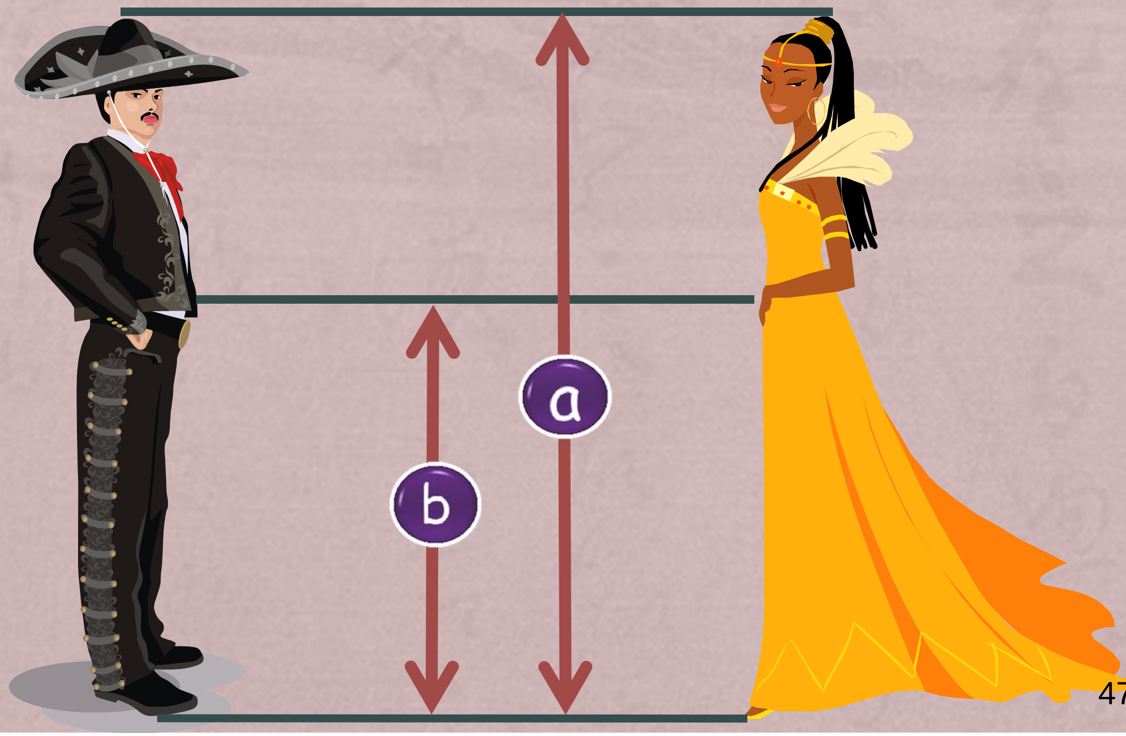
$$\frac{a}{b} = 1.618$$

$$\frac{a}{b} > 1.618$$

下半身太短

$$\frac{a}{b} < 1.618$$

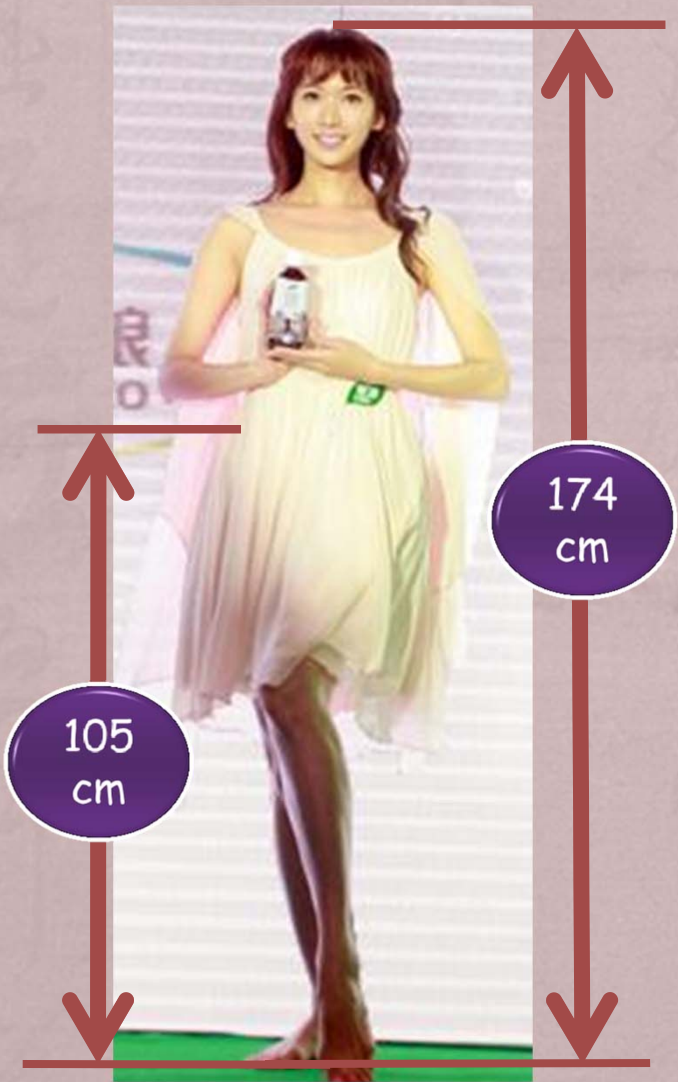
上半身太短



班上同學誰最接近黃金比例

請兩人一組互相幫忙量出身高與下半身長度（腳底到肚臍）的比值

想想看…



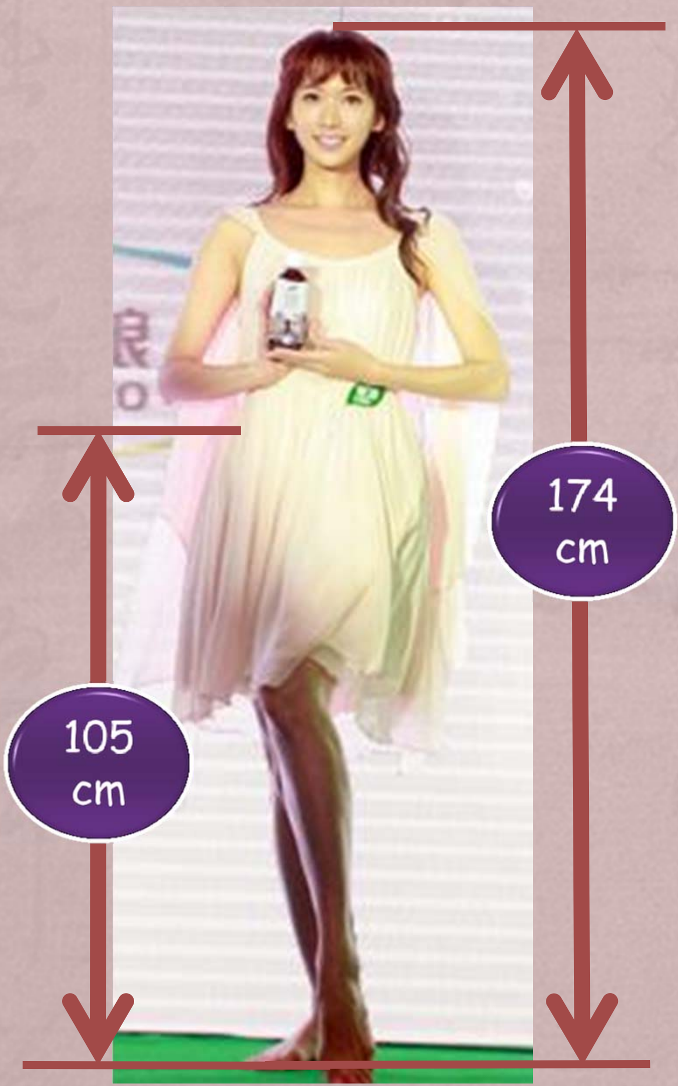
身高174cm的志玲姊姊，
如果她的下半身長105cm，
那麼她擁有黃金比例的
身材嗎?
如果沒有，該如何改善
呢?

首先…

$$\frac{174}{105} = 1.657$$

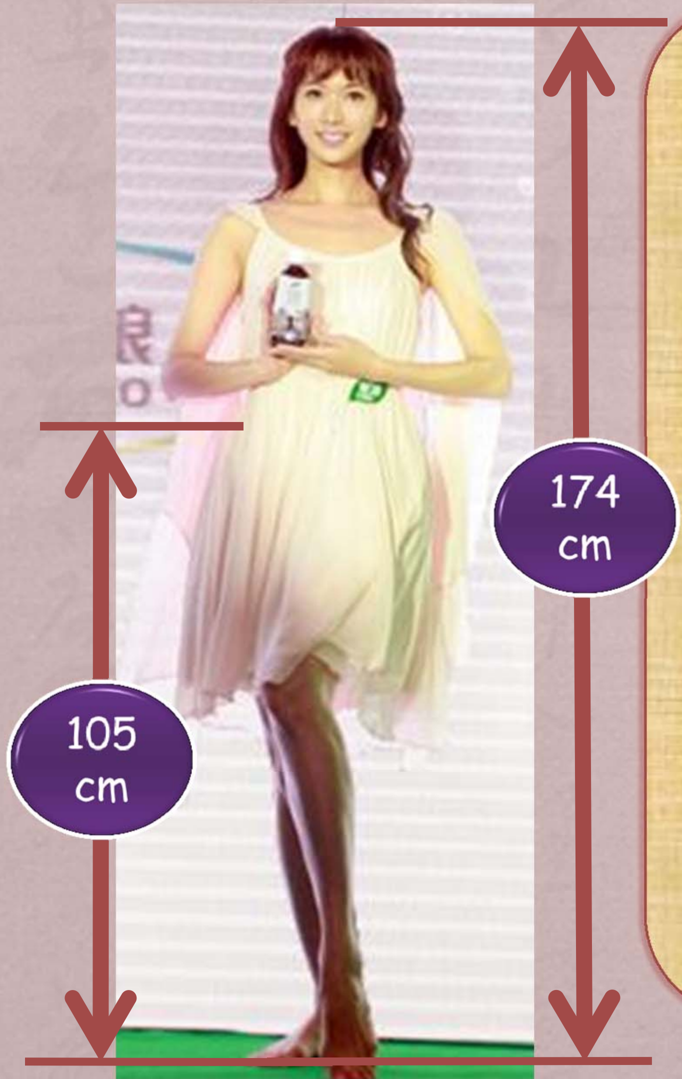
>1.618

下半身太短



該挑多高的
高跟鞋呢?

假設鞋跟高為 x



$$1.618 = \frac{174 + x}{105 + x}$$

→ $1.618 \cdot (105 + x) = 174 + x$

→ $169.89 + 1.618x = 174 + x$

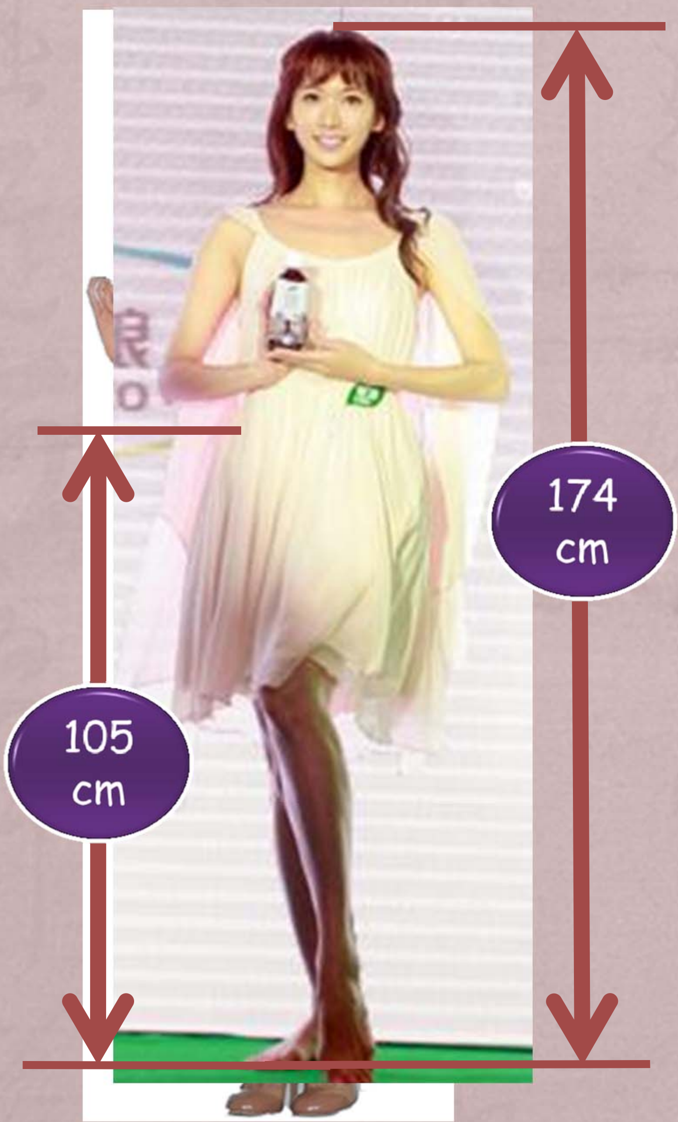
→ $1.618x - x = 174 - 169.89$

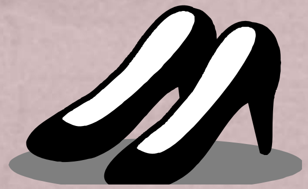
→ $0.618x = 4.11$

→ $x = \dfrac{4.11}{0.618} \fallingdotseq 6.65$

所以…

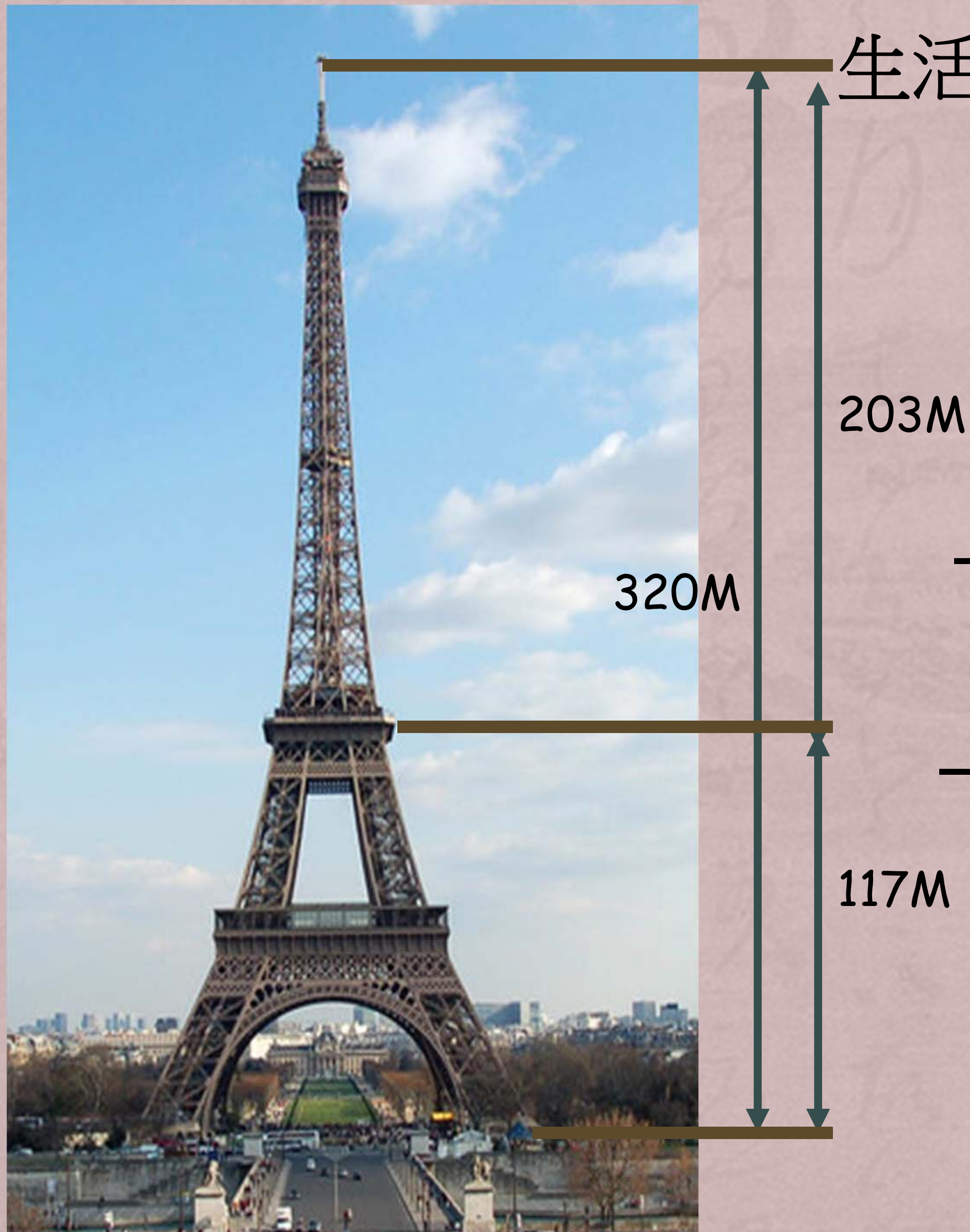
穿上了6~7公分的高跟鞋後
就接近完美的黃金比例了!
或者改穿高腰洋裝也可以
達到相同效果





生活中的黃金比例

舉世聞名的巴黎鐵塔—艾菲爾鐵塔

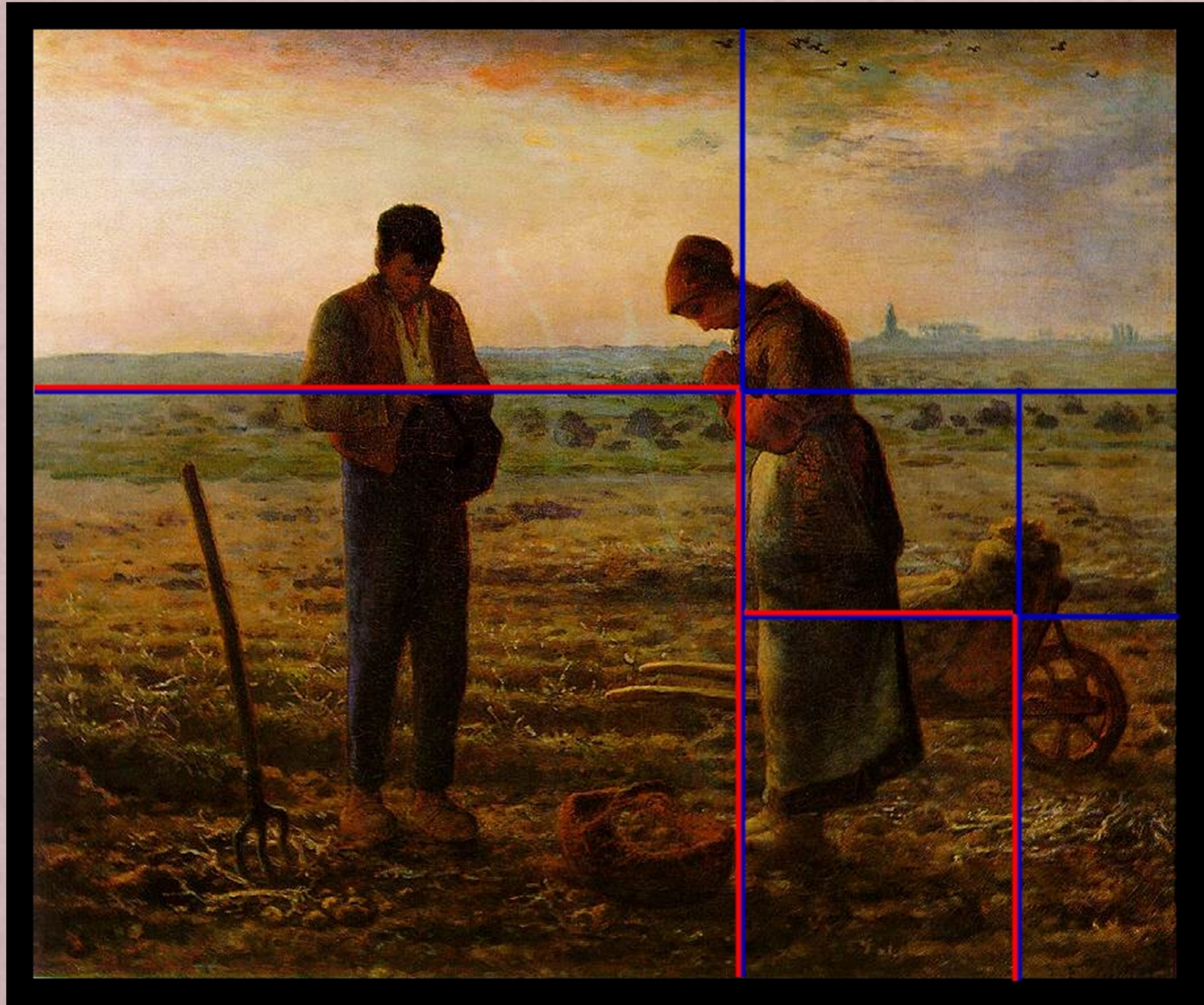


$$\frac{117}{203} \fallingdotseq 0.576$$

$$\frac{203}{320} \fallingdotseq 0.634$$

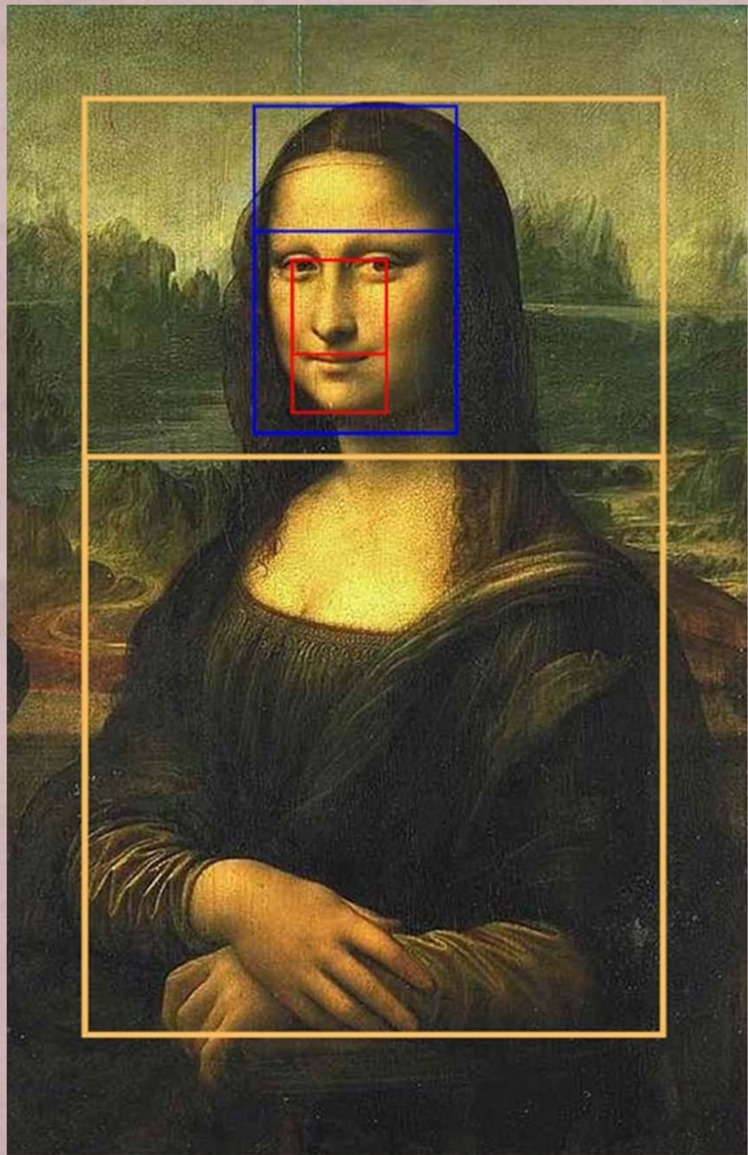
米勒畫筆下的黃金比例

【晚禱】



※圖中的每一線段，藍線與紅線之比皆為黃金比例

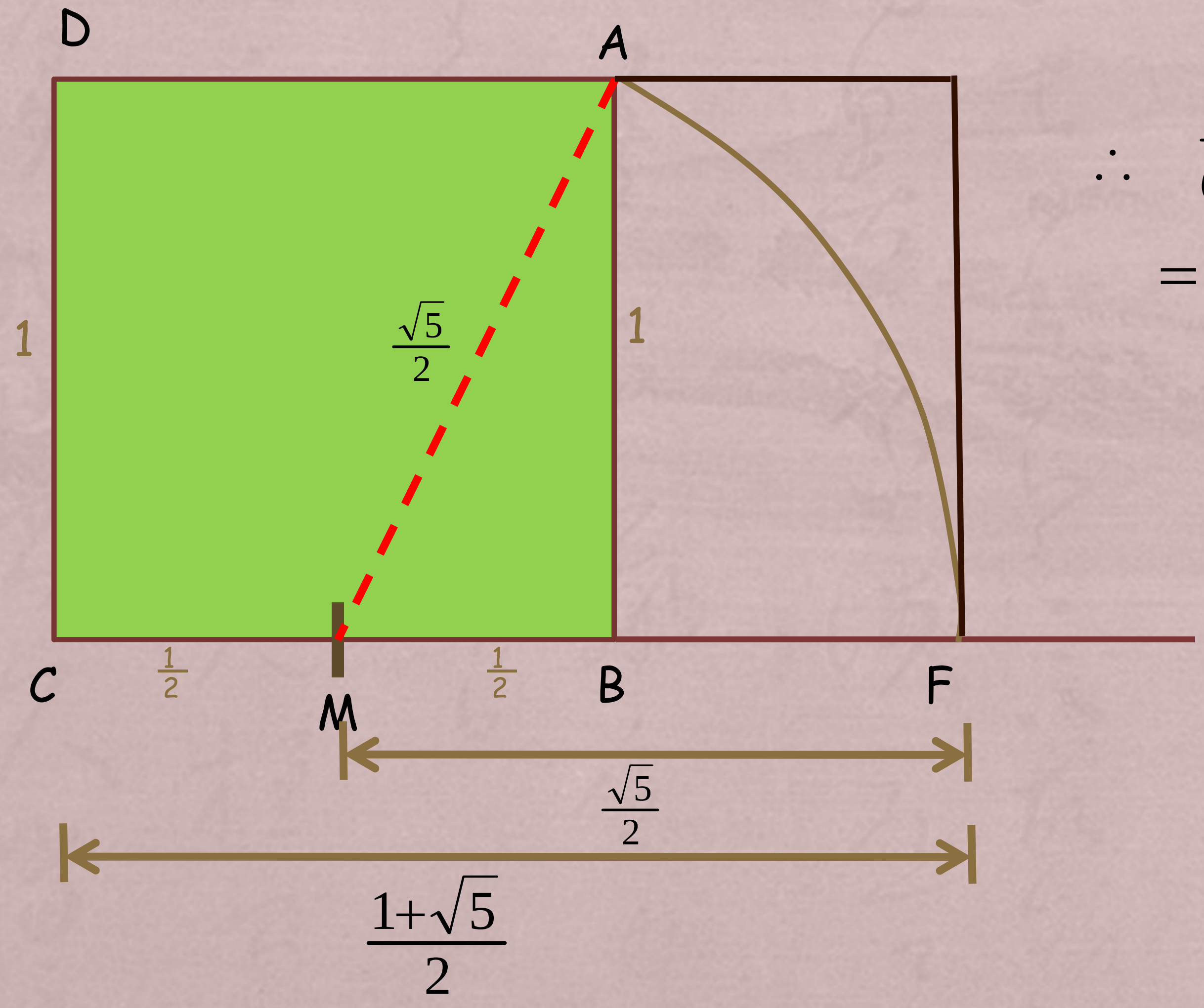
Golden proportion in art



達文西作品：蒙娜麗莎的微笑

※圖中不同顏色矩形皆為黃金矩形

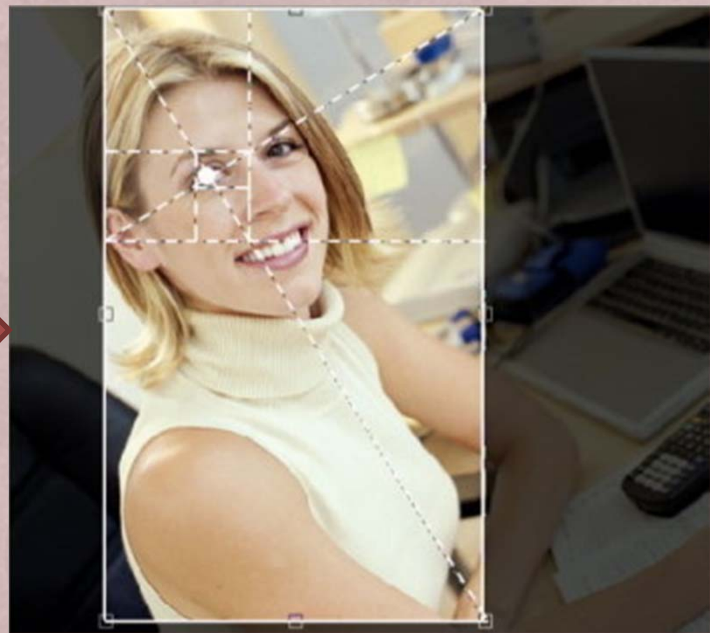
如何畫出黃金矩形…



$$\therefore \quad \overline{CD} : \overline{CF}$$
$$= 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

像專家一樣使用黃金比例來剪裁相片

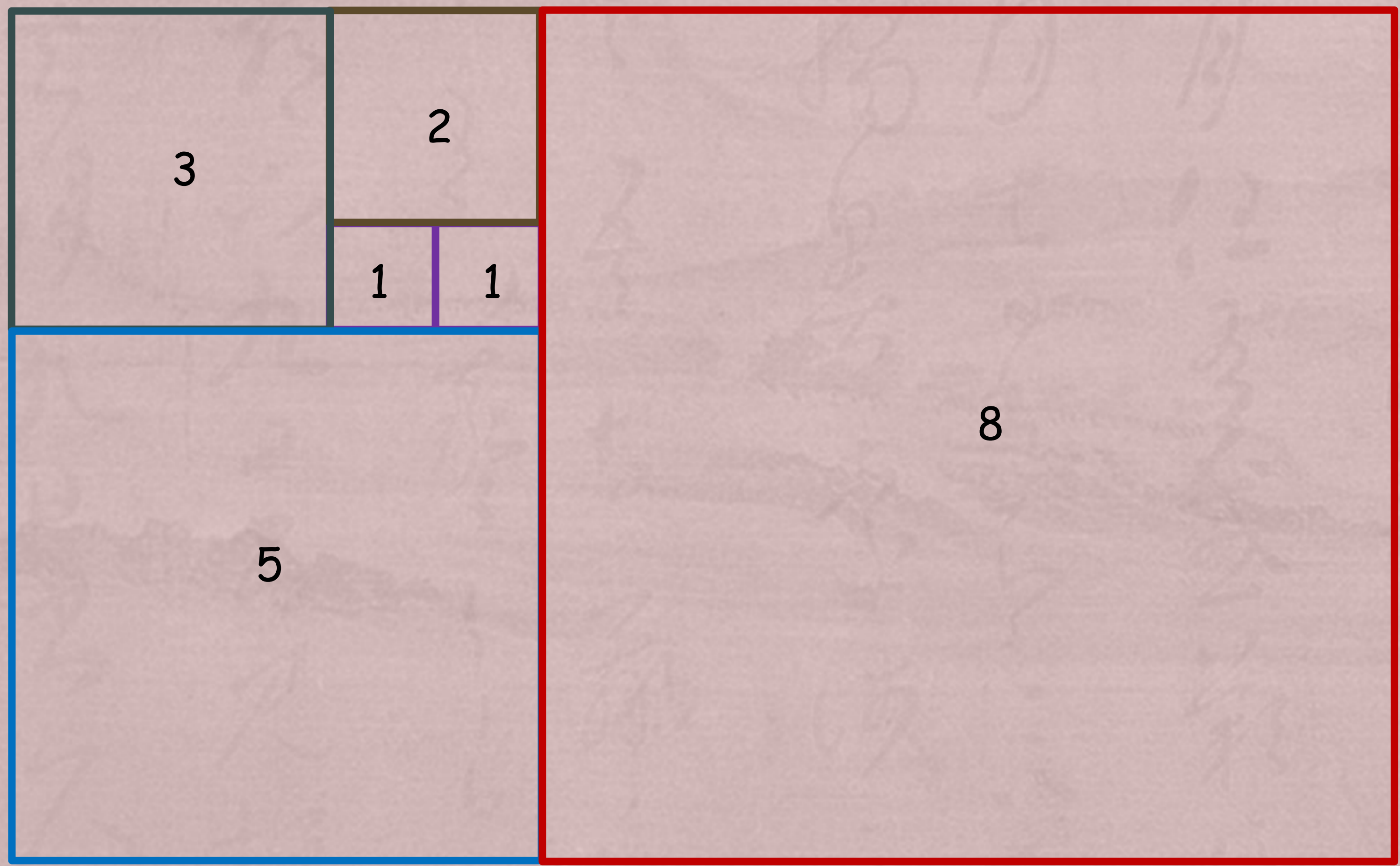
– PhotoImpact的應用



像專家一樣使用黃金比例來剪裁相片

- PhotoImpact的應用

逼近黃金比例的數列

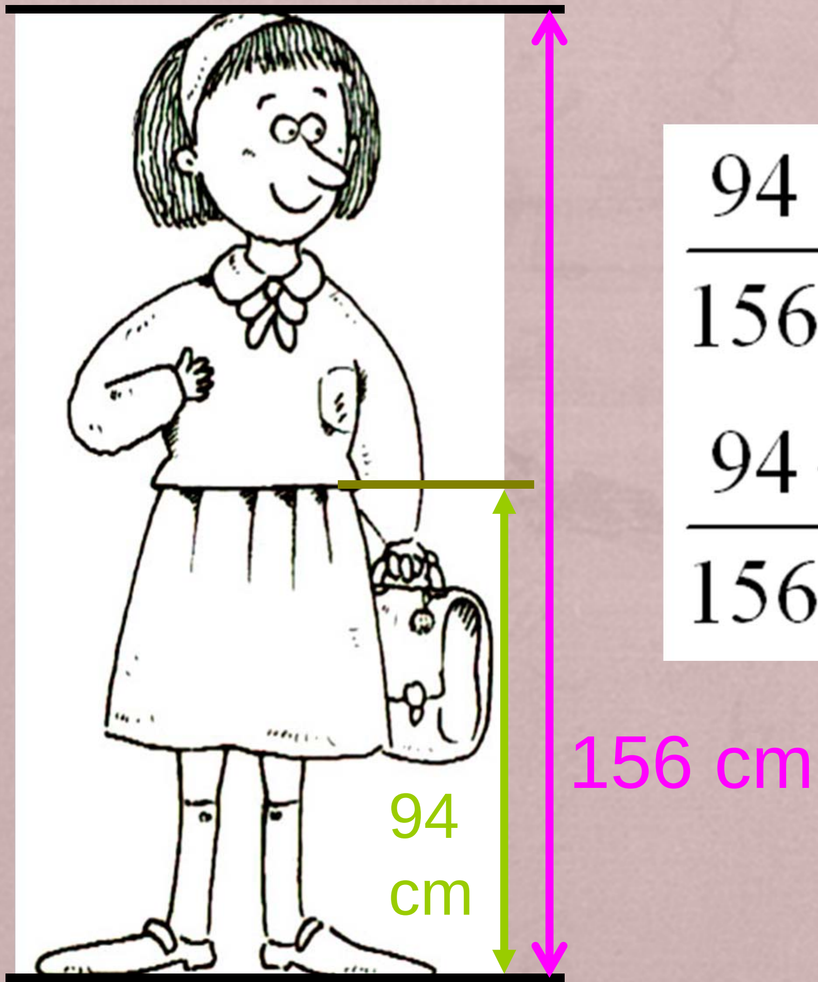


費波納奇數列 (Fibonacci Progression)

1，1，2，3，5，8，...

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

軀幹比身高



$$\frac{94}{156}=0.6\ldots$$

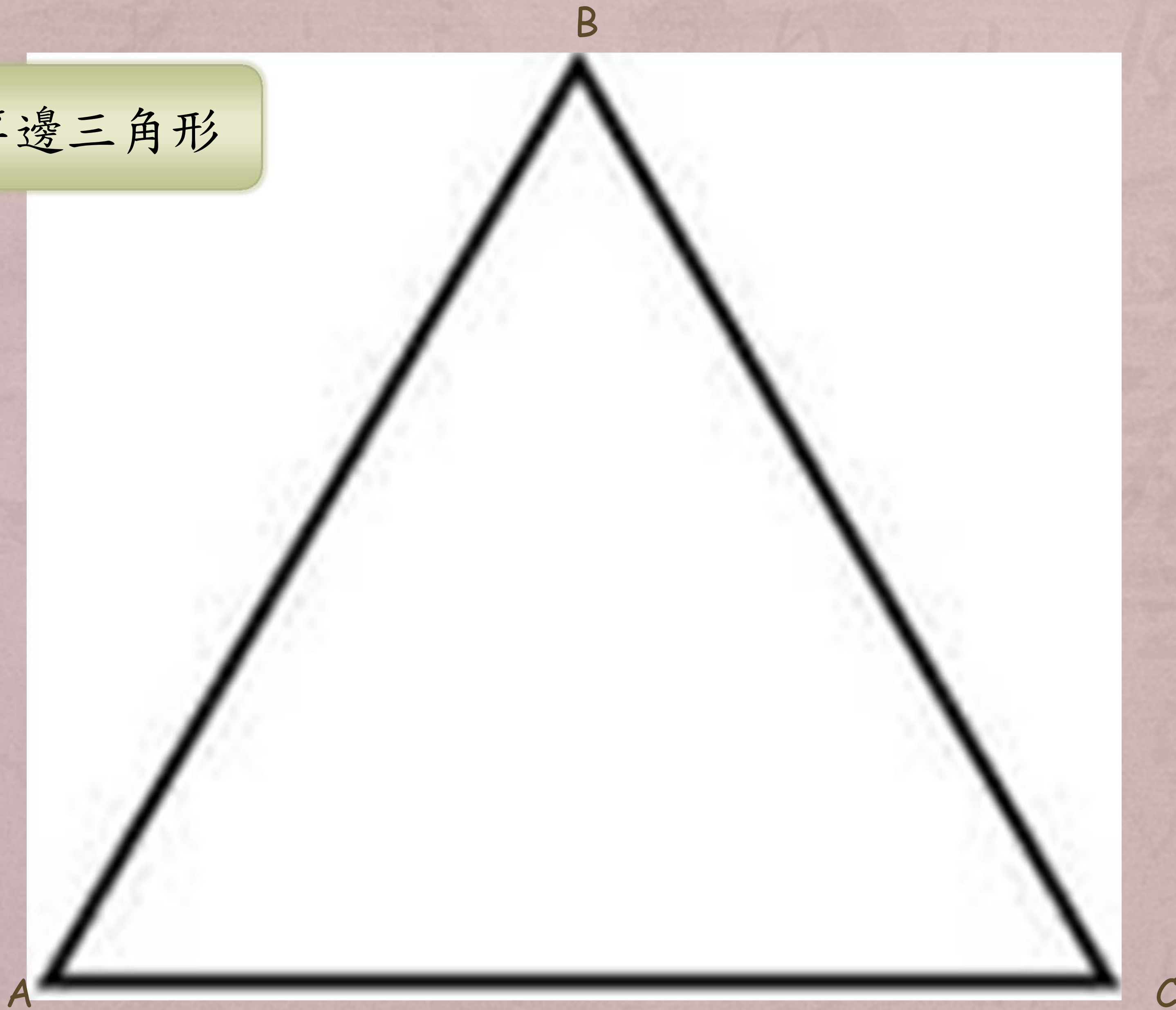
$$\frac{94+6}{156+6}=0.617\ldots$$

★黃金分割

不一樣的三角形

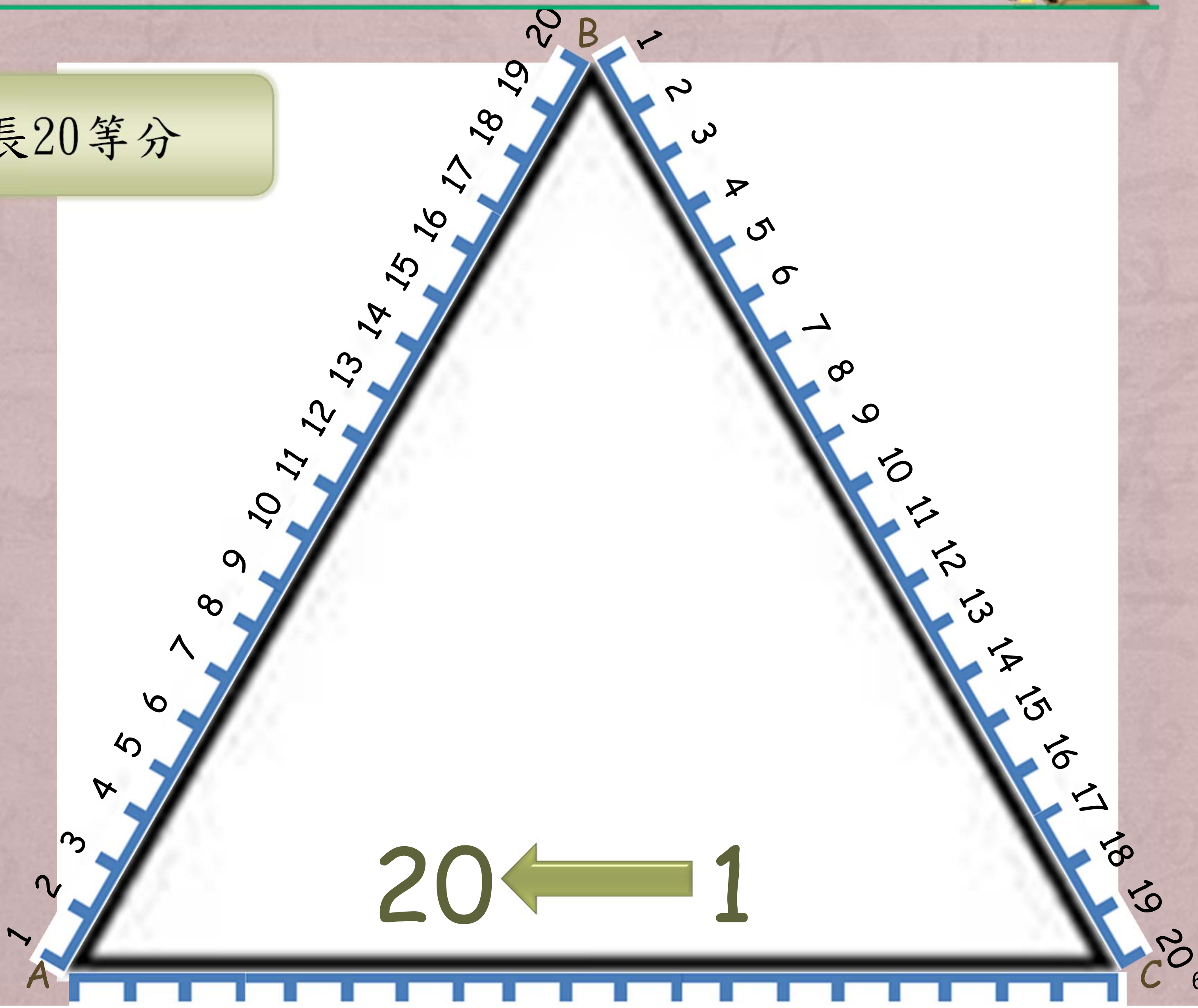
△中的盧羅克斯三角形

①畫一個等邊三角形



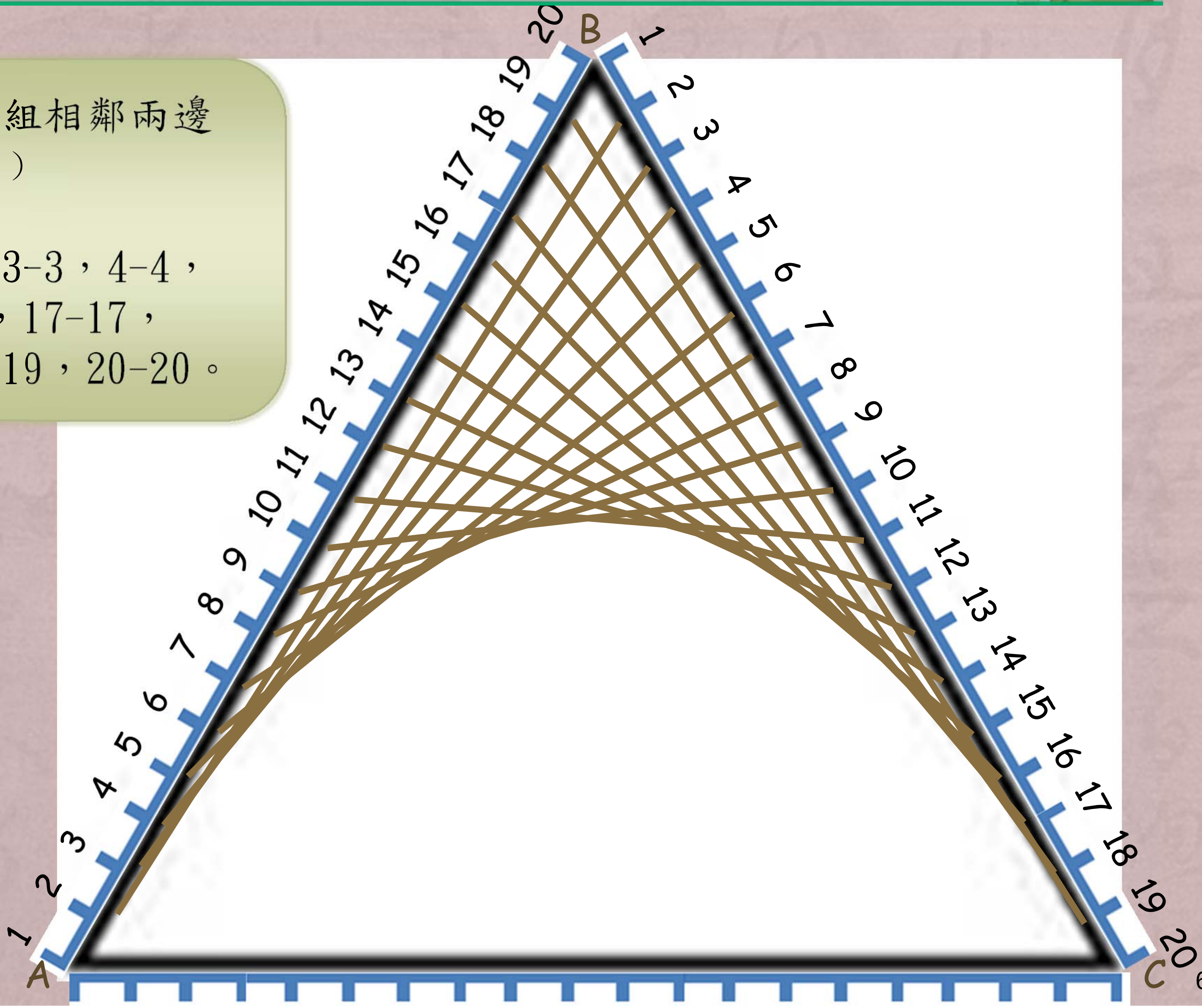
△中的盧羅克斯三角形

②把各邊長20等分



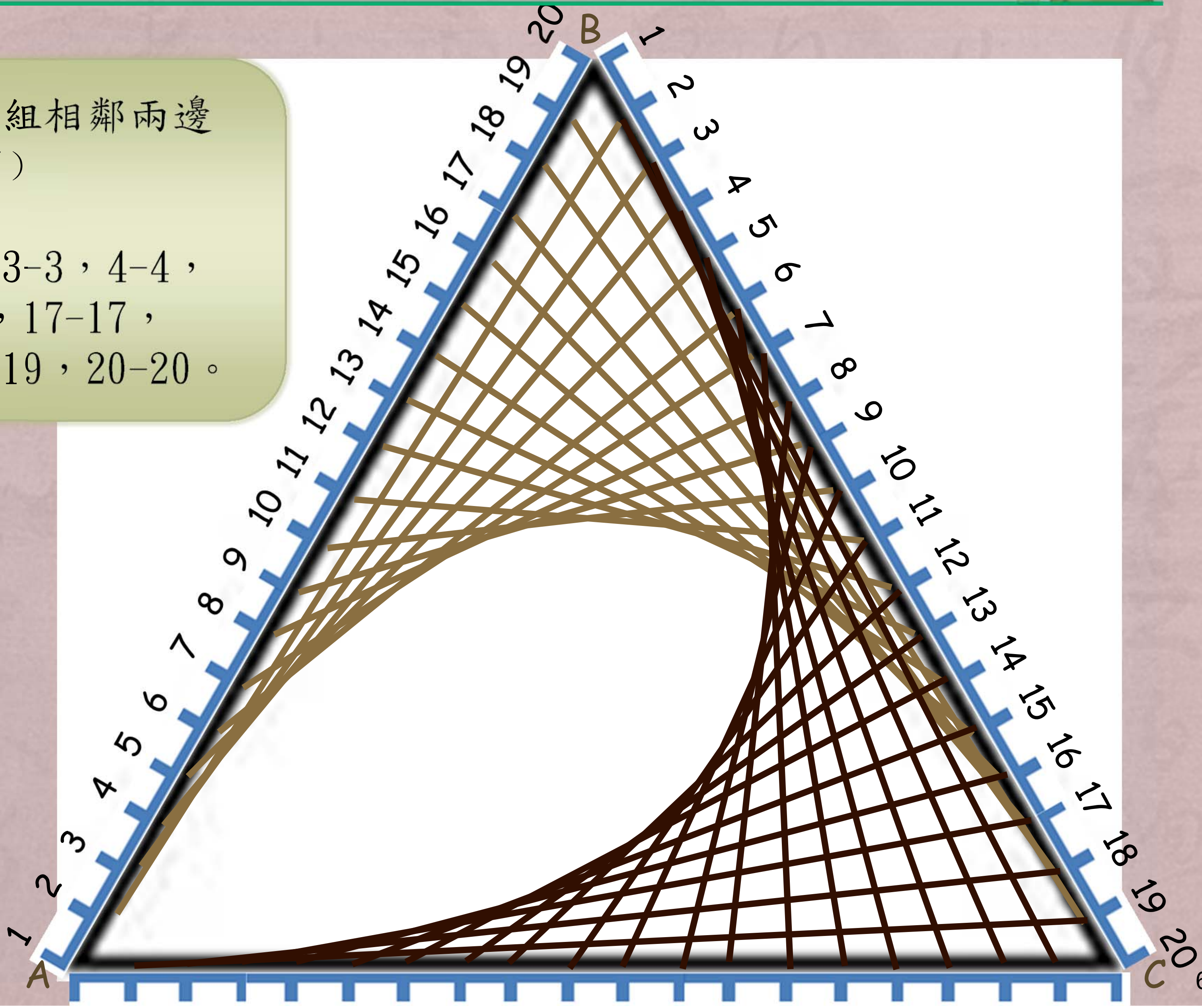
△中的盧羅克斯三角形

③選取第一組相鄰兩邊（$\overline{AB}, \overline{BC}$）
用直尺連接
1-1，2-2，3-3，4-4，
5-5，……，17-17，
18-18，19-19，20-20。



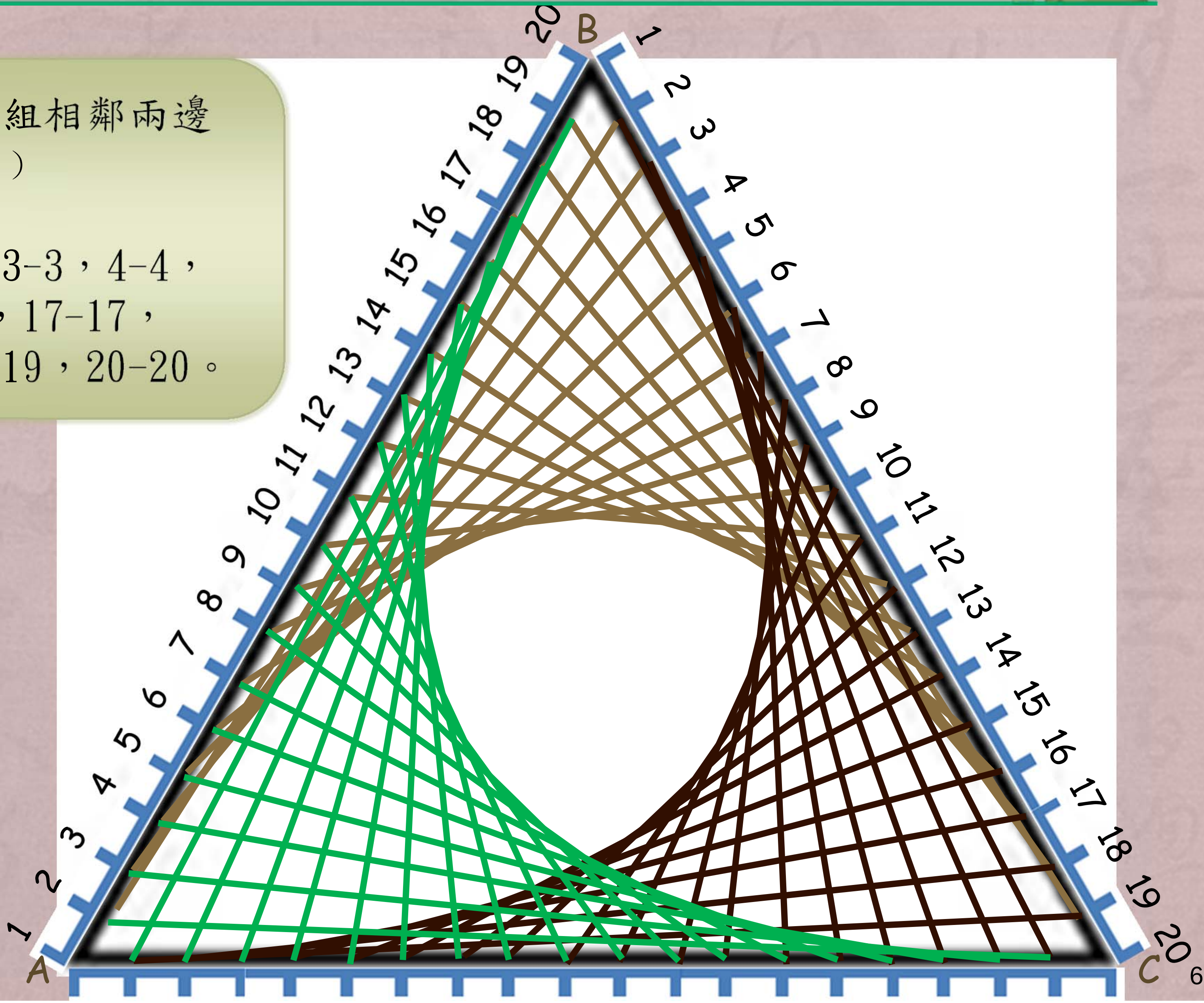
△中的盧羅克斯三角形

④選取第二組相鄰兩邊（$\overline{AC}, \overline{BC}$）
用直尺連接
1-1，2-2，3-3，4-4，
5-5，……，17-17，
18-18，19-19，20-20。



△中的盧羅克斯三角形

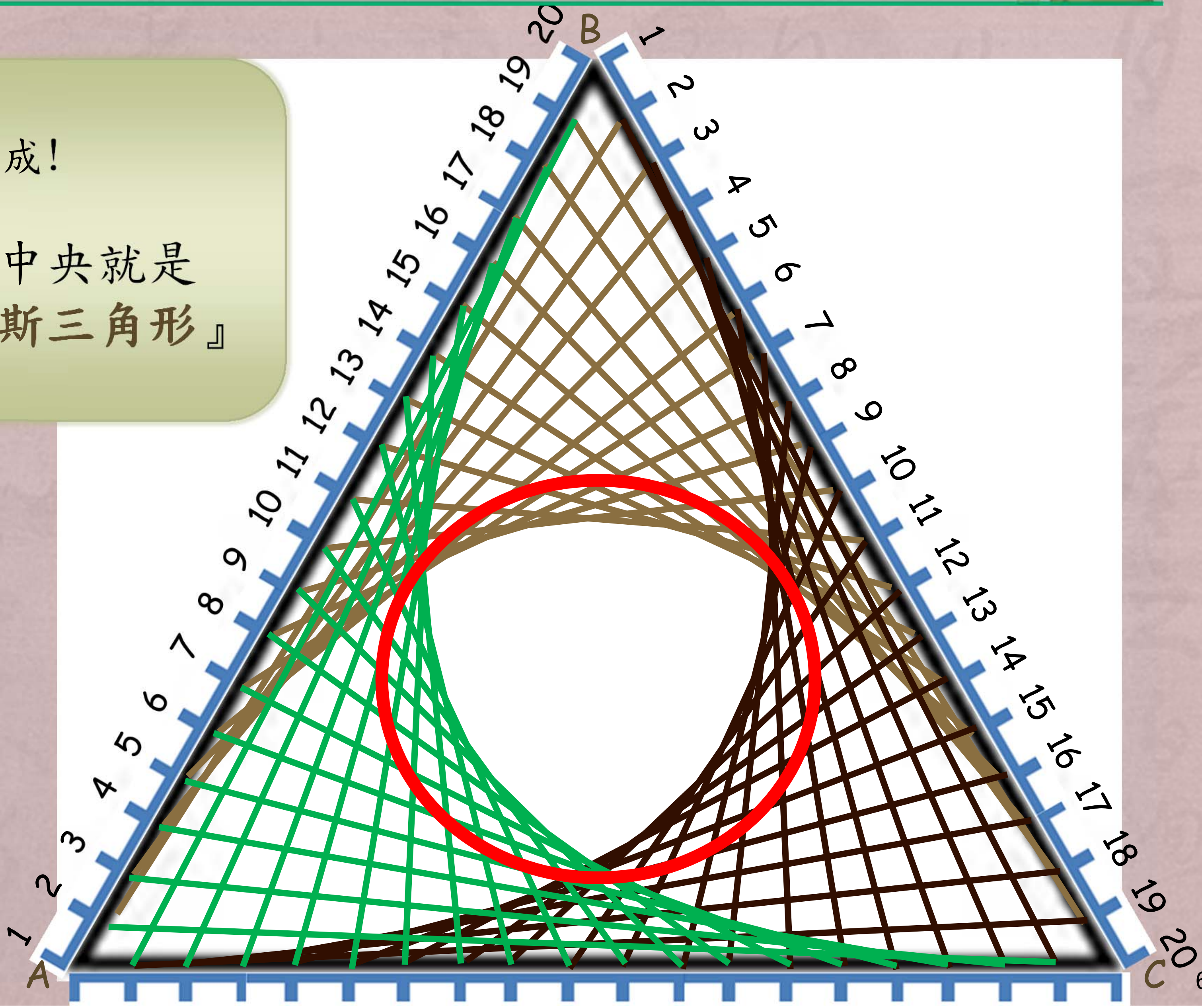
⑤選取第三組相鄰兩邊（$\overline{AB}, \overline{AC}$）
用直尺連接
1-1，2-2，3-3，4-4，
5-5，……，17-17，
18-18，19-19，20-20。



△中的盧羅克斯三角形

⑥三角網完成!

三角網中央就是
『盧羅克斯三角形』



THE REULEAUX TRIANGLE ROTATING INSIDE A CONSTANT SIZED SQUARE

http://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle

盧羅克斯三角形的應用