探討高中生求圓心的多元解法

梁淑坤[1]　吳慧文[1]

[1]國立中山大學教育研究所

十二年國教課程綱要數學領域呼籲有教無類，教師須提供學生適性學習的機會，人人皆有平等的受教權（教育部，2018）。因此，數學教學的內容及方向需符合此項目標。本研究目的藉由一道「求圓心」題目來探討異質學生們的多元解法。研究者以一題多解探究高中學生的多元解題，還有如何使用不同表徵與策略解題。高中生係指高職學生和一般高中生兩種。結果發現，兩組學生共有 15 種方法，依目前數學領域綱要內的教學順序，分屬七大組。並發現，一般高中生（96 人）提供 14 種方法之中有 7 種是高職生也採用之，但是，也有一種方法（角平分線法）是高職生（46 人）有提供卻是一般高中生沒有提出。顯示出一道「求圓心」題目能引起異質學生們多元解法。至於表徵方式，高職學生們共有三種：文字（65%）、圖片（5%）、文字和圖片（30%），一般高中學生則是兩種：文字（58%）、文字和圖片（42%）。在文字表達方面，一般高中學生用字更精闢，使用較多數學術語的詞彙以及解法較多元，但整體而言，兩組學生們都有能力提出國中小教導過的方法，且皆呈現多種解法。

關鍵字：一般高中學生、一題多解、求圓心、高職學生、解題技巧

壹、緒論

學生數學解題能力一直是國內外的數學教育群皆強調的重點，例如，美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）在歷年來所公布的課程標準、評量標準與教師專業標準中，一直將「問題解決」列為重點之一（NCTM, 2000）。國內十二年國民基本教育課程綱要數學領域（教育部，2018）的課程目標同樣也重視問題解決能力，希望學生能夠「培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力」。除此之外，108 綱要數學領域六項課程目標的第一項：「提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度。」，代表 108 課綱的精神重視人人有平等的機會學習。若要令人人都可以參與解題，題目就要允許異能力同學有多元的解法，令探究多元解題的本研究有討論的必要。可是，在教學進度緊張的情況下，如果一位學生已找到答案的話，學生就會停下來，詳見再花時間去考慮是否有其他解，或去參考其他同學使用的方法。可是，在參考其他多樣化過程的解法，會帶來更多學習。

由於現今的數學教育過度注重計算與熟練度，導致學生們解題方式往往單一化、只有固定模式，缺少多樣性。其實解題方式並不一定單一，不妨採用允許多元解題之數學題目，若是題目存在多種解法，教師可從多個解中能看出學生們的數學理解及變通性。因此，本研究以「找圓心」的一個題目，來探究高中生們的多元解題，並探究兩種高中生(一般高中、高職生)之多元解法，以及比較兩組學生的作法異同。

貳、文獻探討

一、多元解題相關研究

研究多元解題的出發點，就是要採用一個能允許多元解題的題目。例如，數彈珠題（如圖 1）圖中有 25 顆彈珠，由小學生來作答。Silver, Leung, & Cai（1995）文章以數彈珠的題目比較日本和美國國小學生對於數彈珠方式的一題多解，探討不同性別、不同國籍的學生彼此之間的解題差異。在這個數彈珠題目中，一題多解能力是使用不同的數學概念、使用不同的性質和使用不同的輔助結構的差異，以這些性質分類出不同種類的解題方法。該研究目的為找出學生常用的解題模式，題目形式為請問下圖中有多少個彈珠？盡可能用多種方式找到答案，並寫下你找到的過程與結果。研究者首先依策略方面編碼：（1）直接計數（Enumeration）使用點選（圈選）或是畫線方式計數量，一個一個

數或有規則方向性的計數彈珠，未指使用較特殊計數之方法。例如：使用劃記方式將所有彈珠個別點出計數，總共 25 個彈珠。（2）分組計數將彈珠有系統性的進行分類產生小組計數。（3）重新排列（Restructuring）打破原題目之框架，改變題目原給定樣式進行重排或增減後進行計數。之後，研究者以表徵編碼（包括圖示、文字/符號以及混合）同時分析策略及表徵。本研究參考 Silver 等人（1995）方式探究高職學生與一般高中學生的解題方式，並比較兩者的作法差異。

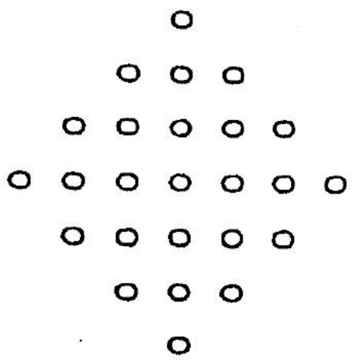


圖 1 數彈珠題

二、表徵形式的相關研究

每位學者對於「表徵」（representation）的定義都有不同的見解，在心理學的方面，「表徵」是相當重要的概念，因為認知心理學研究的重點在探討人類如何將原始訊息經由表徵歷程的轉換後，將資訊儲存於記憶中，又如何適時提取出來，「表徵」於心理學的定義為：「將外在現實世界的事物以另一種較為抽象或符號化的形式來代表的歷程」或「訊息處理過程中，將訊息經編碼後，轉換成另一種形式，以便儲存或表達的歷程」（張春興，1988）。

以數學的角度來看，Lesh、Post 與 Behr（1987）從溝通和解題的觀點來說明「表徵」的意義，他們指出「表徵」是將心智過程模式化時所使用的符號系統，換句話說，就是將想法轉化為外顯行為，如：實物情境、具體操作物、圖、書寫符號、口語符號。Kaput（1987） 則認為「表徵」在數學中主要為心智運作歷程及將心智活動的產物外在化。Moyer 等人（1984）將數學問題的以圖畫（drawn）、文字（verbal）、短語式（telegraphic）三種表徵方式，圖畫題型的表徵方式參考物體形狀繪製，主要以畫圖的方式呈現題目，文字題型的表徵方式為以應用問題的形式詳述問題，短語題型則是將文字題型以簡短幾句句子陳述，減少冗長文字，以短語的方式呈現問題。本研究以 Moyer 等人（1984）所

提出的圖畫、文字、圖畫與文字皆有的三種表徵方式來探討學生們的解題方式。

綜合以上,「表徵」指的是將心中所想的概念,用大眾能理解的方式呈現出來。在本研究中,表徵所代表的是解題者透過對題目資訊的傳遞,進行對數學概念所轉化的形式。

參、研究方法

一、研究對象及「求圓心」題目

本研究的參與者是高中生,高中生取樣方式為方便樣本並取高中及高職學生兩類,並經由老師同意下進行研究,其學業成績對老師來說是可以的,且老師認為有能力用不同方法解決圓心題目即可,而筆者的立場認為兩種樣本均能為求圓心想出多元解法,不是某一類同學來與另一類比較能力。學生人數總共是 142 位,一般高中學生 96 位,高職學生 46 位,以「求圓心」題來探討學生們對於開放性問題的多元解法。在本研究中,筆者表示其立場,兩種學生在提供求圓心的多樣性解法方面均有相同能力。本研究的目的在收集不同類型學校的想法,沒有在比較兩種的能力差異。

下列為高中學生和高職學生的求圓心題目:

一般高中學生版本:「請描述求圓心的方法,用你所知道的技巧,將其寫在紙卡上。」

高職學生版本:老師在求圓形的圓心時已經找到一個方法是:「在圓上取三點構成三角形,然後再於三角形求出外心,那個外心就是圓心了。請同學幫幫老師的忙,用其他方式來找出圓心。」

二、編碼方式

求圓心的解法類型有可行、不可行、還有未完成,研究者編碼將不考慮不可行解法及未完成解法。可行解法根據幾何做法可分為七大組,(一)圓的性質(1)、(二)代數:(國小階段學的內容,小三認識圓的基礎性質,小六則了解一元一次方程式的用法)、(三)尺規作圖、(四)圓的性質(2)、(五)三角形性質:(國中階段的數學範圍,國二懂得尺規作圖,國三理解各種圓的性質以及三角形三心用法),最後(六)射影、(七)橢圓性質:(射影和橢圓性質為高二的數學內容),此七大組編碼以國字數字表示,然十五項解法以阿拉伯數字編碼,下表為解法編碼。本編碼系統是先分析所有學生收回來的解法,再以解題策略的做法屬性,歸類為七組,出現順序依課程綱要及教材書出現順序。

表 1

求圓心解法組別及名稱

組別	編號及名稱
一、圓的性質（1）	1 直徑法
二、代數	2 未知數法
三、尺規作圖	3 弦中垂線法
	4 角平分線法
四、圓的性質（2）	5 切線法
	6 平行弦法
	7 內切法
	8 直角三角形法
	9 內接四邊形法
五、三角形性質	10 外心法
	11 內心法
	12 重心法 1
	13 重心法 2（物理法）
六、射影	14 正射影法
七、橢圓性質	15 橢圓法

肆、研究結果

一、高職學生解法

46 位高職學生中，扣除 4 人沒有作答、14 人未完成或不可行，剩下 28 人寫出可行解法，高職學生的解法又傾向以國中小學過的內容來求圓心。高職學生的解題表徵方式可分為三種形式，分別是文字（65%）、畫圖（5%）、畫圖與文字（30%），學生解題方式以文字敘述最多，其次是以圖形來輔助文字說明，最少的為只利用畫圖方式來說明。而學生們總共寫出了八種可行解法、三種不可行解法（兩種為創新解法，分別是四邊形法 1 和四邊形法 2，另一種則為解法 3：弦中垂線法）和兩種未完成解法，以下分別做說明。

學生的可行解法：

該校學生解題可行的方式有八種，共四組解法，以（五）三角形性質最為多人使用

（表 1 的 10、11、12），共佔 35.7%（10 人），另外還有使用的可行方式為（一）、（三）、（四）組（表 1 的 1、3、4、5、9）。

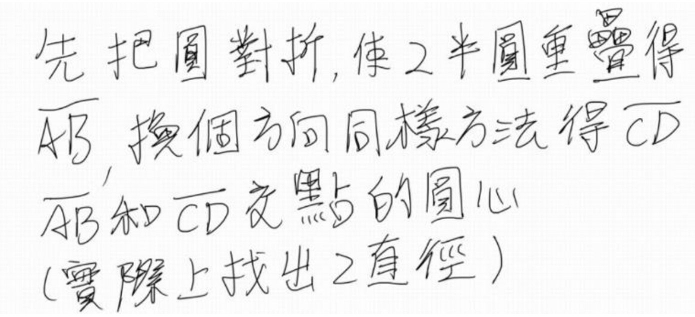
首先是直徑法利用找出圓的基本性質—直徑來求出圓心，如將圓對折或是找出圓最長的弦。其次為弦中垂線法、角平分線法、切線法，利用尺規作圖和圓的性質、圓與直線的關係求出圓心。接下來則是內接四邊形法，利用圓內接四邊形，以正方形求其兩對角線交點。最後則是外心法、內心法、重心法，利用三角形外心、內心、重心找出圓心，此三種是除了直徑法外最為簡單的方式，因為題目已給外心的提示，所以可以得知能利用三角形三心求出答案。而外心法是最多學生使用的方法，但是此方法已於題目中提過，學生可能不知道找中垂線就是求出外心，抑或是題目沒看清楚，以為是詳加說明找外心的方式。

下列為高職一年級學生們所書寫的八種方法：

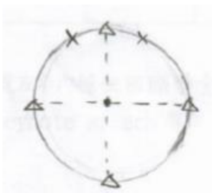
（一）圓的性質（1）

解法 1：直徑法

先把圓對折，使 2 半圓重疊得$\overline{AB}$，換個方向同樣方法得$\overline{CD}$，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$交點得圓心（實際上找出 2 直徑）。



抓相近的兩個點，然後繼續抓到相距最遠的，另一邊也重複同樣的步驟，就可以求出圓心了。



1. 用繩子繞步道一圈，得圓周。
2. 直徑：周長÷ π，算出直徑。
3. 取出一段和直徑等長的繩子。

4. 令繩子兩端都在圓上。

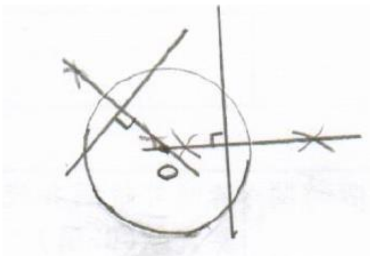
繩子一半的地方就是圓心。

評註：此解法為找出圓的特性之一—直徑，運用直徑為圓的最長的弦，以及直徑中心點為圓心的性質求出圓心。

（三）尺規作圖

解法 3：弦中垂線法

找兩條繩子相割於圓上且兩條繩子可在圓外相交於一點，兩條繩子在圓內的距離中點做垂直線，相交的點為圓的圓心。



評註：此解法為任意畫兩條割線或兩條不平行的弦，運用尺規作圖，作其中垂線，此中垂線分別交於圓的兩點，將這兩點連線，此線段便是直徑，故求出兩中垂線交點。

解法 4：角平分線法

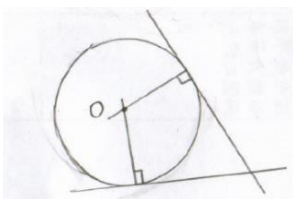
可以先找兩條切線相切，然後畫角平分線，再找兩條切線相交，然後再畫角平分線，兩條交平分線相交於一點，那個點就是圓心。

評註：利用圓外一點與圓兩端相切的線段，求出兩角平分線的交點。

（四）圓的性質（2）

解法 5：切線法

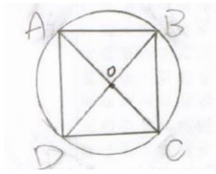
兩條直線相切於圓，且兩條直線可在圓有相交點，直線和圓相切於一點，在一點作直線的垂直線，兩條垂直線在圓內的交點為圓的圓心。



評註：此解法為運用圓的切線性質—圓心到切點的連線必垂直切線，此一特性求出圓心。

解法 9：內接四邊形法

在圓形步道上取 4 個相同距離的點並連成正方形，正方形的對角線的相交處就是圓心。



註解：此解法為利用正方形外接圓的對角線交點即為圓心的性質。

（五）三角形性質

解法 10：外心法

在AB弧上找一點C，連接AC 、BC，分別做AC 、BC的垂直平分線，平分線的交點就是圓心。

在AB弧上找一点C,連接AC、BC,
分别做AC、BC的垂直平分線,平
分線的交点就是圓心

評註：此解法為運用圓內接三角形，並求出三角形各邊中垂線的交點—外心，也就是圓心。

解法 11：內心法

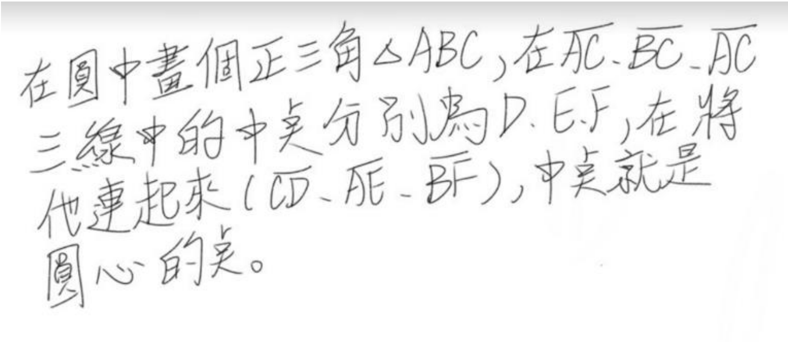
隨意取圓形步道的三條切線，這三條切線會構成三角形，取三角形的內心（三內角平分線的交點），即為圓心。

隨意取步道的三條切線,這三條切線会
構成三角形,取三角形的内心(三内角平
分線的交點),即為圓心。

評註：此解法為運用圓外切三角形，求出其內心同時也是圓心的特性。

解法 12：重心法 1

在圓中畫個正三角$\varDelta ABC$，在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三線中的中點分別為D、E、F，在將他連起來（$\overline{CD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BF}$）中點就是圓心點。


在圓中畫個正三角$\triangle ABC$，在$\overline{AC}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$三線中的中点分別為D.E.F，在將他連起來($\overline{CD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BF}$)，中点就是圓心的点。

評註：此解法為以幾何方式，先畫圓內接正三角形，利用其三心一點的性質，且求出任意一心皆能代表圓心，此為以重心求出圓心。

以上的八種算法為可行的解法，而這八種算法也有一些學生沒有成功解出來，或是作法未完成，如（三）尺規作圖組的解法 3：弦中垂線法，有學生因方向錯誤因而未成功求出答案。此外，也有學生另創解法「四邊形法」，此四邊形法與（四）圓的性質（2）的解法 9：內接四邊形法有相同之處，皆利用圓內接或外接四邊形，以其對角線交點的方式求得，但學生們並未考慮到此方法需要準確地找出四邊形才行。以下分為不可行和未完成來做說明。除此之外，有 14.3%（6 人）的學生其解法方向正確，但未詳細敘述，導致未完成，如有 5 人想使用解法 1：直徑法，但只簡單帶過未說明清楚。另外，也有學生因為只用圖形表示，並不能完整看出其使用的解法。

不可行：

1：弦中垂線法

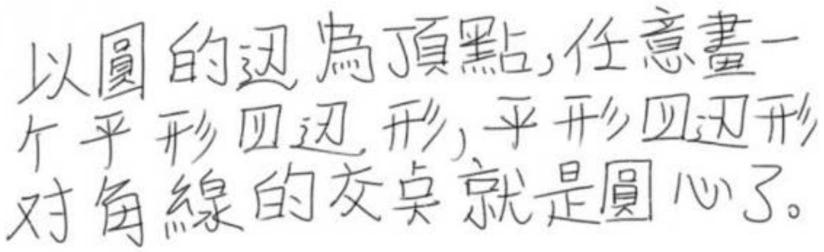
原因：能看出該名學生想利用弦中垂線法求出圓心，但未清楚呈現線段與線的差別，線是無限長的，並無法判斷其中垂線。

先隨意畫出兩條不互相平行的割線，再找出兩條割線的中垂線，並延長直到兩條中垂線相交的點為圓心。

2：四邊形法 1

原因：利用平行四邊形對角線交點，但是必須很準確的找出來，不能隨意亂找。

以圓的邊為頂點，任意畫一個平形四邊形，平形四邊形對角線的交點就是圓心了。


以圓的边為頂點，任意畫一个平形四边形，平形四边形对角線的交点就是圓心了。

3：四邊形法 2

原因：利用正方形找圓心，與第九種正方形法不同的是正方形法使用的是圓內接正方形，而這是圓外接正方形，與上述的平行四邊形一樣，必須準確找出來，且並沒有使用到正方形的性質。

在圓的外圍框一個正方形，對角線連起來，交叉的點即是圓心。

未完成：

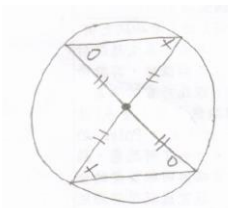
1：直徑法

原因：只說找出直徑，並未說找出如何找直徑。

找出直徑÷ 2（最長的線為直徑）。

2：直徑法或解法 6：平行弦法

原因：由圖形得出學生使用直徑法，但並未說明是否是使用直徑法抑或是找出兩相等且平行的弦，利用其找出全等三角形。



小結：

以上看出，一道允許多種解法的題目，刻意在高職學生呈現為「幫幫老師想出其他方式求圓心」，成功引起同學的好奇心，能提供學生適性的學習機會，符合 108 綱要精神，令人人平等參與，可以求出圓心。

二、一般高中學生解法

一般高中學生們的解法，是由學生自己想出如何求圓心的方式，並把方法寫在小紙上，結果，學生們得出的解法有十三種，共七大組，並沒有不可行解法，更沒有未完成

解法，皆為可行解法。一般高中學生之可行解法，以（四）圓的性質（2）最為多人使用，有 33.7%（35 人）的學生，利用國中內容圓的相關性質求圓心，其次則為（五）三角形性質，有 28.8%（30 人）利用外心、內心、重心求得圓心，第三種最為多人使用的解法是（一）圓的性質（1），有 18.3%（19 人）利用折半或是求得直徑的方式求圓心。另外，高中學生的表徵方式有兩種，分別是文字（58%）、畫圖和文字（42%）。

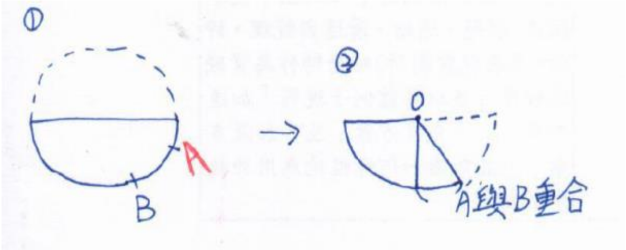
高中學生最多人使用的是解法 1：直徑法，利用對折的方式求出圓心，是大多高職學生使用過的手法，高中學生只有解法 4：角平分線法以及解法 12：重心法 1 未使用，學生們使用的是解法 13：重心法 2（物理法），利用物理方式求出物體（圓）的平衡點重心即圓心的物理法，其他手法皆有用到。高中的學生比起高職學生使用的手法來的多元且複雜，像他們有使用直角三角形法，利用圓與三角形的基本性質求出。另外，也有人以兩平行弦的性質求出圓心的平行弦法，以及利用圓與圓之間的距離關係求出圓心的內切法，也有學生以畢氏定理求出圓心的未知數法，而甚至有人還利用投影法，利用向量投影的方式求出答案，最特別的是還有學生利用摺紙的方式在圓內摺出橢圓，此橢圓其中一個焦點便是圓心，此方法為橢圓法。

（P.S.與高職學生相同的解法無評註）

（一）圓的性質（1）

解法 1：直徑法

1. 將圓對折後，如圖。
2. 將任意弧邊與另一弧重疊。
3. 則頂點 O 即為圓心。



（二）代數

解法 2：未知數法

找圓心方法：

將$\overline{AB}$延伸為x，O為圓心 。

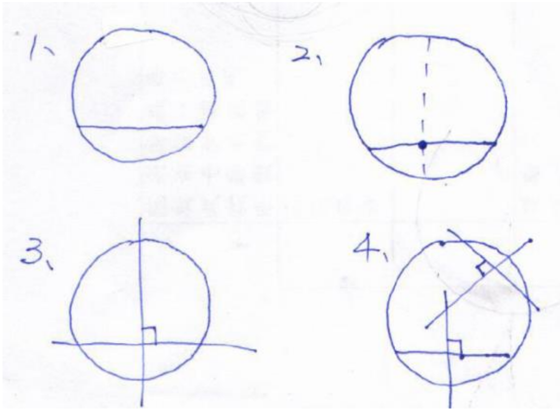
設半徑x得$\overline{AB}$，$\overline{BC}$長度（量）找出x。

評註：此解法為假設半徑為x（斜邊），以摺紙方式先摺出兩股，再利用畢氏定理求出x。

（三）尺規作圖

解法 3：弦中垂線法

1. 作出一弦。
2. 取弦中點。
3. 作垂直線。
4. 作二次取交點，即圓心。



（四）圓的性質（2）

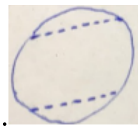
解法 5：切線法

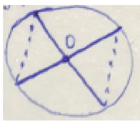
圓外一點做 2 條切線，2 個切點做垂線交點即為所求。

解法 6：平行弦法

求圓心策略：等長平行弦的對稱性

1. 摺二條等長平行的弦
2. 再用尺分別連接弦的兩端點，二線段的交點即為圓心

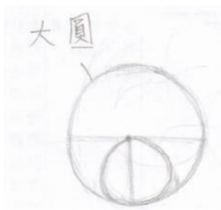
1. 

2. 

評註：此解法為利用兩平行弦的對稱性質求得圓心。

解法 7：內切法

作一大圓，使直徑與圓內切且點與大圓圓心&圓（原本的）上的點重合=>直徑=>圓心。

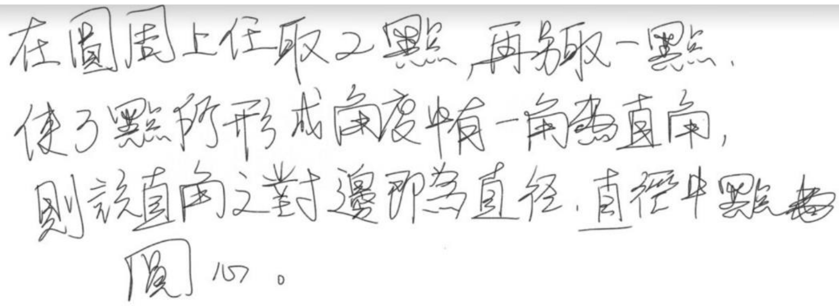


在圓內畫四個相交於一點的同大小圓，交點為圓心。

評註：此解法為利用圓與圓內切的距離關係求出圓心，或是找出與大圓內切且大圓直徑為小圓的切線，以此方式求出圓心。

解法 8：直角三角形法

在圓周上任取 2 點，再另取一點，使 3 點所形成角度中有一角為直角，則該直角之對邊即為直徑，直徑中點為圓心。



在圓周上任取2點，再另取一點，使3點所形成角度中有一角為直角，則該直角之對邊即為直徑，直徑中點~~為~~圓心。

評註：此解法是利用圓內接直角三角形的邊即為直徑的性質。

解法 9：內接四邊形

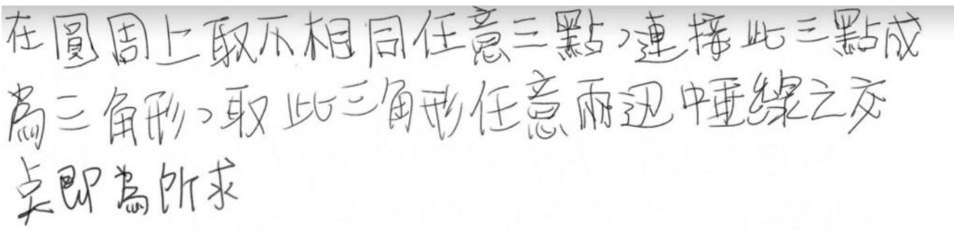
畫一長方形，兩對角線交點即為圓心（長方形愈大愈好）。

評註：此解法為利用圓內接矩形的對角線交點即為圓心的性質。

（五）三角形性質

解法 10：外心法

在圓周上取不相同任意三點，連接此三點成為三角形，取此三角形任意兩邊中垂線之交點即為所求。



在圓周上取不相同任意三點，連接此三點成為三角形，取此三角形任意兩邊中垂線之交點即為所求

解法 11：內心法

做出此圓的外切三角形，再求出此外切三角形的內心，即得此圓圓心。

解法 13：重心法（物理法）

在圓上找任一點掛一重物，拉一線，二線交點即為圓心。

在圓上找任一点掛一重物，拉一線，
二線交点即為圓心。

評註：此解法為利用重心（亦是圓心）為物體（圓）的平衡點，以掛重物的方式找出使物體達到靜力平衡的重心。

（六）射影

解法 14：正射影法

折出正四面體，頂點垂直至底面為圓心。

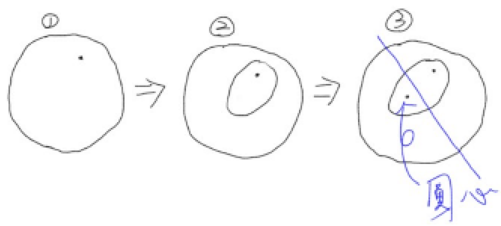
折出正四面体，顶点垂直至底面为圆心

評註：此解法為利用求向量的正射影的方式求圓心。

（七）橢圓性質

解法 15：橢圓法

1. 在圓上任點一個點。
2. 將圓周對到點上折，如此可出現一橢圓。
3. 橢圓出現後，將橢圓對折，使點對至橢圓上另一點，此點即為圓點。



評註：此解法為先在圓中找一點，將圓摺疊使圓弧上任意一點與標記的點接觸形成割線，摺疊多次後，圓內便形成橢圓，而此橢圓的兩個交點便是所標記的點和圓心。

小結：

以上看出，若是在時間允許之下，同樣「求圓心」的題目，也可以安排「一題多解」或不限作答次數，鼓勵學生提供更多想法，如此一來，不僅增加數學解題的難度，也不會因為已找到一個解就不再探究，符合了 108 課綱適性學習的精神，藉由多元解題，增加數學學習的機會。

伍、討論與建議

本研究發現高中職學生，總共有十五種可行解法，共分七大組。高職學生和一般高中學生有七項雷同的解法，兩種學生都能提供多元解題。可是，在雷同的解法中細節上有所不同，例如解法 1：直徑法，高職學生們除了利用對折方式找出直徑外，另有以測量圓周方式求出圓心，或是利用圓上兩點慢慢延伸找出最長的弦。可是，筆者分析，一般高中學生以對折方式找出直徑居多，但對折方式頗多元的，有些學生是折半兩次找出交點，有些則是將圓折半後做成圓椎，圓椎的頂點便是圓心，或是折半後利用尺規作圖找出直徑的中點。另外一個例子是解法 4：重心法，高職學生是以幾何方式，先畫圓內接正三角形，利用其三心一點的性質，求出重心，而一般高中的學生，則是以物理方式，利用垂釣或是掛重物等方式，找出圓的平衡點-重心，同時也是圓心。

學生們在回答時採用表徵方式和表達方式，高職學生比起高中學生較為多樣化，有文字（65%）、圖片（5%）、文字和圖片（30%）三種表達方式。一般高中學生，只有兩種，就是文字（58%）與文字和圖片（42%）兩種。但整體的解答表達以一般高中學生較為完整，有 42%一般高中學生答案不僅只有文字敘述，還以圖形輔助，高職學生則是 30%的學生另加圖片說明，雖然高職學生表達多了一種「圖片」類，不過單以畫圖來作答的（沒有以文字為輔）解法多屬未完成，無法看出以何種方式求出圓心。最後，用文字遣詞方面，以一般高中學生更為精闢、豐富，更有在求圓心之答案上出現較多數學術語，例如解法 1：直徑法，高職學生以文字符號或是線段來表示直徑居多，而一般高中學生會用「最長的弦」來稱呼直徑。惟有少數高職學生們提到圓的性質之專有名詞，例如解法 10：外心法，僅少數學生提到（弧）。

本研究以一題「求圓心」探討高中同學參與解題後產出的多元解法，發現在教師刻意安排下（或要求），令一道「求圓心」題目，可以引導出不同背景下同學們的好奇心，並用自己的想法去找出圓心。另一面，在時間允許之下，同一題目「求圓心」，也可以安排「一題多解」或不限作答次數，鼓勵更多想法的加入，令數學解題更有挑戰性，不因

題目的解找到一個就停下來不再繼續探討。既然 108 綱要鼓勵適性學習的機會，數學領域之學習機會，不妨由多元解題入手，而多元解題，不能只有單一解法的題材，宜加入一些如「求圓心」的題目，並鼓勵同學多元解題。就算時間緊迫之下，只能一題一解，也可以在同學提供一題一解之後，全班交出的所有解互相交流討論，令數學解題能加深加廣，共同成長。

本研究的兩種學生，在提供求圓心的解法見多元策略及表徵，光只是求圓心，高中學生們就用了十五種方法，因此教師在教學上可以多給學生能擴散性思考的題目，不再只侷限於聚斂性的題目，上課時也須多向學生介紹不同解法，讓學生了解到一個題目並不是只有單一解法，不僅幫助學生多方向思考，亦能幫助學生統整訊息，學習內容更完整。最後，在時間充裕及有能力的班級，教師不妨安排空白、未完成或是錯誤之想法的互助互動修改使其完成及正確，才是因材施教，提供學生適性的學習機會，人人平等，共同成長。

誌謝

感謝審查者提供寶貴意見、助理潘薇心小姐協助文書處理以及科技部經費上之補助（計畫編號：MOST 108-2410-H-110-026-MY2）。本文內容僅代表作者看法而非補助單位之立場。

參考文獻

張春興（1988）。**知之歷程與教之歷程：認知心理學的發展及其在 90 教育上的應用**。行政院國家科學委員會認知與學習研討會專集論文。

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要—總綱**。臺北：作者。

Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and standards for school mathematics: A guide for mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, *47*(8).

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 19*, 26.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Moyer, J. C., Sowder, L., Threadgill-Sowder, J., & Moyer, M. B. (1984). Story problem Formats:

Drawn versus verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 342- 351.

Silver, E. A., Leung, S. S., & Cai, J. (1995). Generating multiple solutions for a problem: A comparison of the responses of US and Japanese students. *Educational Studies in Mathematics*, *28*(1), 35-54. doi:10.1007/BF01273855