教育學報，2015 年，第 43 卷第 1 期，頁 103–127

姿勢、言辭表徵與代數思考之研究

陳嘉皇

國立台中教育大學數學教育學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

本研究旨在探索學生在圖形樣式作業之一般化的表現，理解他們：如何利用姿勢與言辭對一般化各階段物件辨識出共通性；如何對樣式物件進行結構關係的連結；如何對一般化不同算式的等價進行認知；對代數的演變持何種觀點。本研究採用個案研究法進行探究，樣本來自台灣南部某公立小學兩名六年級學生；利用攝影、訪談與寫作方式蒐集資料，並採質性方法予以分析。研究發現，學生於：（1）發想階段運用視覺化圖形要素、比對分析物件變化的數量與配合項次數字形成規則，配合圖像的、直證的與比喻的姿勢知覺物件產出的共通性特質。（2）連結階段大多運用直證的和比喻的姿勢與語意做連結，配合數字、符號算式等對問題結構進行關係的連結。（3）以比喻的姿勢配合運算結果的驗證、算式結構的比對、物件關係的比對等策略，以作認知不同算式等價的基礎。（4）對一般化路徑中代數概念的演變，以指示樣式物件的數量、圖形項次的數字序號、與圖形結構關係的未知數等觀點持續發展。作者並針對學生一般化歷程代數概念發展與符號指示間的關係、多元表徵應用等議題提出建議，以作精進學生代數思考的教學參考。

關鍵詞：一般化；代數思考；姿勢；圖形樣式

研究動機與目的

發展代數思考，是協助學生對算術與代數間轉化的一種良好方法，並可用來評鑑解題時所用的方法是否合理、適當，促進對符號意義的理解（教育部，2008）。代數思考是甚麼？Kieran（1996）把它界定為使用多元表徵處理具數量關係問題的能力；Swafford & Langrall（2000）認為代數思考是對未知數進行運算的能力；Driscoll（1999）指出，代數思考是呈現數量的狀態，令變數間的關係變得更加明顯，以利解題；Cai &

Knuth（2005）認為代數思考超越算術和計算的流暢性，是對數學推理與解題更深層的表現。代數思考可從圖形或數列入門，亦具有不同的進程，如發想（abduction）、連結與歸納等，其歷程牽涉到變數關係發展與應用的能力，包含分析數量、彰顯結構、探討變化、預測、歸納、驗證等（陳嘉皇，2013；Rivera, 2010）。由於小學數學課室主要是以求出答案為教學導向，常忽略過程和關係，以致學生在代數議題上常產生困難（Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001）。Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest（2006）認為學生在代數方面產生困難的另一原因在於小學可銜接的數學材料和活動過於貧乏，建議提供樣式一般化（pattern generalization）作算術思考的基礎，並強化代數思考與符號之間的連結。學生把算術轉化到代數的歷程既然存在困難，如何化解而協助順利學習，自然成為數學教育者亟欲探索的議題，若能在代數思考的歷程提供相關的機制與技巧，將帶給師生解開代數思考困境的鎖鑰，有效轉化算術和代數間的關係。因此，探索與了解學生一般化議題的行動表現，是種合宜的方法，可提供代數思考教學有效的諮詢。

以樣式為主的教學可以發展學生代數思考，且可當成理解函數和變數概念的路徑（Kilpatrick et al., 2001; Mason, 1996; Radford, 2006）。Mason（1996）強調「進行歸納的表達」（expressing generality）是發展學生代數思考的重要路徑；美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics, 2000）則強調，發展學生對不同樣式的一般化能力才能促進學生的代數思考。為達成促進學生代數思考這種需求，數學教育界對學生一般化的策略和思考已進行廣泛探究（Radford, 2006; Rivera, 2010），但這些研究大多集中於中學生紙筆測驗產出的策略和論證，以及一些特殊性質表徵的解析。相較之下，研究如何令國小學生從算術平順地轉化至代數思考則較為欠缺。為弭平學生算術與代數之間的間隙，國小學生一般化表現的探究實為重要，頗值得深入探索。

代數思考一項重要的特徵是與符號化有關，Carraher et al.（2006）就主張符號是代數思考有價值的工具，因為學生利用符號表達一般化的規則，透過符號學的系統，採取不同類型的表徵（如文字、言辭、姿勢、圖像以至符號）處理規則或算式。教師應協助學生理解問題結構的關係，從具體、視覺的表徵轉化到抽象的符號以順利解題（Cai & Lester, 2005）。學校裏數學課室處理數學規則或概念時，依賴符號表達的方式以呈現數學問題變數的關係，在此歷程，學生常因不了解或誤解符號意義而產生學習困難（Kilpatrick et al., 2001; Radford, 2006）。Radford（2006）強調，解決學生代數思考的問題可從多元表徵的角度入手，鼓勵運用姿勢表情、肢體動作、言辭解說等示範，思考並說明代數問題。Kilpatrick et al.（2001）更強調，若能在課室裏配合應用圖表，它可作代數思考的有效工具。

圖形樣式一般化的作業適合國小學生代數思考的運作（Kilpatrick et al., 2001; Rivera, 2010），圖形樣式活動的設計重點強調情境、特徵、樣式和關係，有助於學生

一般化發想及塑樣（patterning）行動的產生，協助對所觀察項目作推理、歸納和演繹，形成有效的數學公式，強化擴展、臆測和證明的能力，提升對數學結構意義的理解。然而，小六學生如何利用姿勢和言辭對圖形樣式進行一般化？如何明白樣式中物件的共通性？如何將觀察所得的共通性轉化到整個作業的項次，其機制是甚麼？又如何對物件的關係進行結構的連結？若能將一般化牽涉的行動細節加以解密，將有助於了解小學生的一般化表現，掌握代數思考的重點，促進學習成效。為探討學生樣式一般化的行動，本研究從兩位六年級學生參與圖形樣式活動產出代數思考的動作和言辭表達加以分析，期望能獲得上述問題的答案。總結以上論述，本研究探索的問題如下：

1. 學生如何利用姿勢與言辭，知覺圖形樣式中物件產出的共通性特質？
2. 學生如何利用姿勢與言辭，對圖形樣式結構進行關係的連結？
3. 學生如何利用姿勢與言辭，對一般化產出的不同算式進行等價的認知？
4. 學生對一般化歷程中代數概念的轉變持有何種觀點？

文獻探討

圖形樣式一般化學習分析

一般化的表現依賴作業的複雜度和本質，伴隨着發想、連結與歸納等階段進行（陳嘉皇，2013），提供學生在面對作業時不同的分析機會和資源。因此要了解學生如何對樣式中的物件產生知覺，進而發想樣式結構，歸納樣式關係並演繹，非得探索其一般化歷程產出的代數思考不可。Rivera（2010）認為，學生一般化的過程和轉化，可從強調操弄的物件是以數字或圖像情境所產生的關係着手，路徑可分成：

1. 依賴數字物件處理與轉化——指一般化表現是以數字範例本身為分析重點，依照塑樣的情境來論證可否產生結構的結果。
2. 依賴圖像物件處理與轉化——指一般化表現是以圖像範例本身為分析重點，依賴塑樣的情境來論證可否產生結構的結果。處理和轉化發生於不具概念的物件。在這些情境產出的結構被視作是附加但有目的，屬處理一般化實務觀點的手段，包含計算特殊的結果。
3. 依賴數字關係處理與轉化——指一般化表現是以發想的數學結構伴隨相關的數字表徵作分析重點，具有相關結構關係的範例被視作能支持進行歸納。
4. 依賴圖像關係處理與轉化——指一般化表現是以發想的數學結構伴隨相關的圖像表徵作分析重點，具有相關結構關係的範例被視作能支持進行歸納。

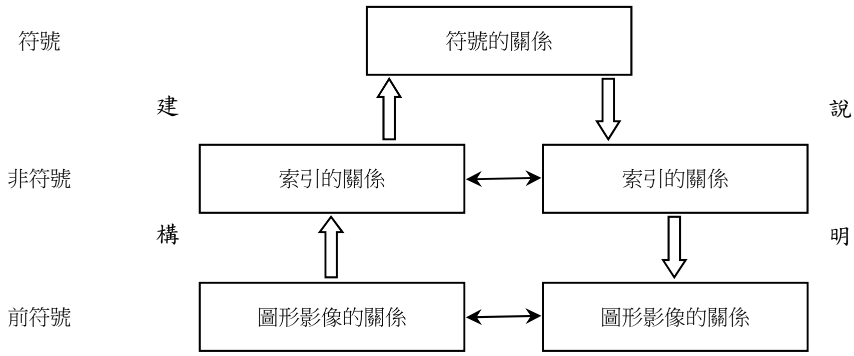
陳嘉皇（2013）針對圖形問題的特徵，將學生一般化行動整合建構出兩種路徑。第一種稱為「利用圖形結構一般化的解題模式」，其作業特質是一次函數性質的圖形，

一些學生解題時會採用「整體圖形關係」基模建構完形圖形，例如利用面積公式思考解題；另一些學生則進一步轉化圖形要素的分析，或直接對圖形要素進行分析，例如找出高或邊長的數量，運用分割加總數量的方式解題，在這歷程中透過連結圖形相關物件的數目與圖次的關係，建立一般化的規則。第二種路徑稱為「利用圖形轉化數列一般化的解題模式」，其作業情境是提供二次函數性質的圖形，學生採取「部分結構要素」基模將圖形內部的物件予以分割計數或轉化物件成數字進行加總，分析圖形相關物件的數目與圖次的序號關係後，以符號或算式建構圖形物件與圖次關係的規則進而解題。陳嘉皇（2013）對一般化路徑的解析與 Rivera（2010）有相似洞見，能明瞭學生面對圖形樣式問題時，會因使用的心智模式不同而影響一般化策略的運用，然而這些研究發現是源自學生紙筆測驗的結果，在其他表徵上是否亦有這種表現則缺乏證據支持。Kilpatrick et al.（2001）認為，學生若理解某數學概念，便能對相關的表徵應用自如。學生除利用紙筆方式進行圖形作業解題外，是否可利用動作和言辭表達，發現物件的共通性，理解問題變數的關係，進而改變與擴展基模的發展，這議題頗值得探討。

一般化是種具結構性思考效果的活動，由於結構性的組合和步驟，促使對未知項次作推論，令一般化各階段之間的物件組合與配對產生一致性和具規則的特徵，進而應用等價概念轉化到符號的代數思考。Rivera（2010）指出，小學階段的代數思考活動可用前符號或非符號的方式進行：在「前符號」（pre-symbolic）階段，產生的行動是與其操弄的圖形物件和數量相連結；在「非符號」（non-symbolic）階段，對圖形各項次進行演繹行動並推論，以得出共通性。Radford（2010）認為學生進行一般化，最後階段需呈現案例的公式，但這歷程亦同時伴隨前符號的形式，既可以是結構性的圖形，亦可以是索引的（indexical）與非符號的，因此他提出學生在一般化歷程中將物件轉化成符號以建立變數規則的進程（見圖一）。

Radford（2010）主張一般化的活動，圖像最先產生，是種知覺性和運算性的理解，受到圖像相似形式（共通性）的影響；繼而經由空間的關係而產生索引，學生採用索引的方式洞察特殊符號與物件之間關係的邏輯結果，因此索引是一種代數結構的案例，可支持算術的產生，以作圖形樣式情境裏具體的變數。接着，學生可透過運算與規則的操弄發現相同的法則，歸納應用到共通類型的物件上，產生符號。Dörfler（2008）認為代數符號具有運算的本質，協助釐清「為甚麼」的問題。樣式一般化的前符號、非符號與符號，指出學生代數思考的概念可從具體到抽象進行改變，最後形成公式來傳遞樣式物件之間的關係；正如 Dörfler（2008）所指出：圖形想像的變數是推論的，是源於算術法則經驗歸納出的，因為是建構的算式，可從看見的圖形掌握特殊觀點，亦因為圖形的物件屬於可知覺的數量實體，因此可操弄他們所指涉的，而與相關的外在世界產生效用。例如本研究提供的扣條組合排列活動，學生從圖像排列

圖一：一般化歷程中物件轉化成符號建立規則的進程



（前符號）的線索，知覺到每增加一三角形圖形，需增加兩條扣條的數量，並將增加的扣條數量當成公差（非符號），與圖次的變化連結，並採用表列式產出關係的結構（符號），並在一般化歷程中驗證與擴展規則。

總結上述說明，作者依據符號發展的觀點，認為學生於一般化歷程中所呈現的代數思考，可以結構狀態、關係化約和圖形要素的概念等解釋和運用：

1. 代數思考視作描述圖形要素的概念——顯示相關物件的位置，在本質上是可合成產生，例如三根牙籤組成一個三角形。
2. 代數思考視作關係化約的概念——扮演結構或其外在的位值（placeholders）角色，例如連續三角形圖形，每增加一組三角形圖形，即會增加兩條邊。
3. 代數思考視作指定某結構狀態的概念——會透過產生的情境限制其意義，例如連續三角形所用的牙籤數目可以 $1 + n \times 2$ 表示，n 為圖形的項次。

透過代數觀念的演進可明瞭學生在一般化路徑上是否可對圖形形成推論的關係，即觀察的事物是否具結構、索引或符號的物件，並且可以顯示何種因素支持與阻礙結構與索引的一般化發展，最後能依據情境推論規則。

表徵與樣式結構意義的連結

表徵是符號、特徵、影像或物件的輪廓圖像，可「代表」或「呈現」某些事物。根據表徵的本質，「代表」或「呈現」可以多種方法說明，例如：對應（correspond to）、指示（denote）、描繪（depict）、體現（embody）、編碼（encode）、誘導（evoke）、標記（label）、解釋（mean）、產出（produce）、指涉（refer to）、建議（suggest）、符號化（symbolize）等（Goldin, 1998）。要具體呈現這些定義，則需要將「代表」或「呈現」所包含的實體加以區別，採取一些方式使某實體可代表另一實體。例如，可用符號、文字或動作表示可計算出的具體物件集合。

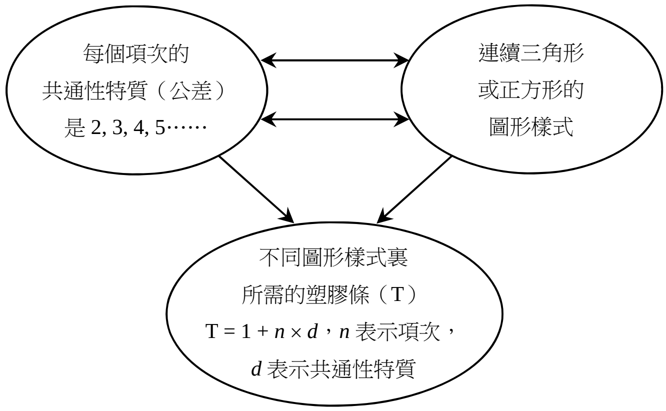
辨認一般化不同階段圖形樣式物件一致的特徵，並且擴展樣式，是種主觀建構的現象。觀察樣式作業裏物件的變化，辨識物件一致共同的特徵並進行詮釋，個體才能建構物件相關的結構。探索學生一般化的表現，基本的議題包含學生如何觀察樣式中物件的特徵，如何產出特殊關係的結構（即代數可用的一般化），以及審視建構的規則（發想與歸納）與論證（演繹）能否運用在一般化的不同階段。Duval（2006）認為一般化的歷程會同時進行知覺和運算兩個理解循環，以圖形樣式而言，學生在作業初始時就需要獲得不同階段圖像的特徵，從而形成和說明跟結構有關的解釋，隨後才能透過一般化初始創立的運算行為，從已知階段建構的步驟轉化到特殊少許的案例上，亦即是論述時須將物件的結構投射到較遠階段的樣式。從一般化發想階段開始，學生對圖像特徵的審視包含建構和論證代數可用的規則，包含各種表徵處理（processing）和改變（conversion）的認知行動，超越僅是視知覺而已。處理包含執行圖形運算及做圖形的轉化，而改變則包含變換一種表徵情境而成為另一種情境（結合言辭和圖像的描述再轉化成語意）。

表徵的應用和改變非常複雜，包含知覺的靈活性，能習得「看見幾個樣式並願意放棄一些無法證明代數可用的樣式」（Duval, 2006; Radford, 2006）。Duval（2006）認為，學生要明白如何選擇相關的物件特徵和有意義的改變，帶入基本的條件使其更加明確，形成可預期的類型，以順利達成解題的目標。因為圖形的處理必須能產出代數有用的結構，這種結構的產生和發展可用 Radford（2006）主張的「目標化」（objectification）情境與活動加以取代。Radford 認為學生在與他人合作的活動裏，會熟悉歷史建構的文化意義與推理行動的形式。目標化意味使某些事物明顯化，需要使用不同類型的訊號和人工製品（數學符號、圖表、文字、姿勢、計算器等），這些人工製品或訊號可稱為目標化知識的符號學手段。Radford 為支持一般化以產出代數符號，指出重點可注意特殊物件的共通性特徵，對隨後的項目進行歸納，提供建構算式有關要素的保證。Radford 明白產出規則的歷程需透過不同符號學的表徵系統，包括文字、圖像、表格、姿勢與符號等表徵的知覺，才能加以說明。

本研究利用語言和姿勢作研究工具（Fauconnier & Turner, 2002; McNeill, 2005; Presmeg, 1997），主張人類的思想（包含數學思考）可透過多元的層次（包括影像、身體動作和姿勢）加以體現，是反映一系列以經驗和存在的理解為基礎與無意識的心智配對的動態結構，在這架構裏一項重要的機制是心智空間的概念整合。Fauconnier & Turner（2002）將概念整合視為：將輸入的空間配合選擇某計畫成為組合的空間，然後發展成顯著的結構。例如圖形樣式的觀念就是組合空間，由兩個輸入空間導引出，即每個圖形項次的共通性特質與稱為圖形結構的影像和知識；這組合從輸入的空間描述特定的元素和關係，創造新的實體稱為樣式，其基本要素如圖二所示。

以排列三角形扣條為例，學生運用扣條排列三角形圖形，形成一規則圖形的變化

圖二：圖形樣式一般化的概念組合



即是組合空間的行動。在組合空間的歷程裏，發現圖形變化與使用扣條的數量、項次之間關係，發現導出共通特質的公差，並藉由言詞和姿勢動作以說明扣條排列數量和組合的三角形圖形樣式之間的關係，最後以數學的表列式呈現問題的結構概念，進而擴展解題。

Parrill & Sweetser（2004）將姿勢界定為：運用手部動作以呈現支持的心智表徵，它們的關係可從姿勢和伴隨的言辭表現加以推論。本研究為了對姿勢建構合理說明，並未直接評量姿勢的心智表徵，而是把運用語言及姿勢視作概念的組合加以分析。這組合利用個體對身體動作與所處環境的調整而產出知識，即透過手、手臂、身體及圍繞的物件和物理空間而提供建構知識的要素。McNeill（2005）將姿勢分成圖像的（iconic）、比喻的（metaphoric）、跳動的（beat）、直證的（deictic）四個層面：。

1. 圖像的 —— 呈現具體物或行動影像的姿勢，這些姿勢是關於動作的形式或是呈現具體圖像的語意學相關的事物內容。
2. 比喻的 —— 指呈現抽象的影像，包含運用形式的比喻，例如說話者出現握住某物件並把它呈現，但未呈現物件的意義，而是持某個觀念或記憶或一些抽象的事物，具有圖像的元素與某種比喻。
3. 跳動的 —— 是種不精細的正式姿勢，他僅是手部上下或來回輕打，看起來似乎與言辭的旋律配合，但其意義可能是複雜的，指示說話者感覺到是重要論述中談論某些事物的短暫焦點。
4. 直證的 —— 直證的姿勢是指不經思索，伴隨手指擴充某物件可補充的意義，而身體各部分或所持物件都可用作補充指示。

McNeill（2005）對姿勢的分類雖有獨特且明顯的特徵可依以作判斷分析，然而本文作者認為學生進行圖形樣式一般化的解釋時，因應要說明由算術轉換成代數的

複雜度以及所欲表達物件的理解程度，在歷程上可採用多種模式，例如應用單一姿勢配合言辭表達物件的意義，亦可採取兩種以上姿勢配合言辭加以說明，或只利用姿勢或言辭個別表達。

過往曾有研究檢驗姿勢和數學之間關係，包括體積的觀察（Alibali, Kita, & Young, 2000）、學習計數（Alibali & DiRusso, 1999）、解決簡單的方程式（Goldin-Meadow, 2003）、教室的溝通（Goldin-Meadow & Singer, 2003）與合作解題（Reynolds & Reeve, 2002）。這些研究強調身體在數學思考和學習，及對其他情境動作的強化作用，例如姿勢和言辭可相互包裝成資訊互補的形式，透過說話者的運用以支持其思考或解題（McNeill, 2005; Radford, 2006）。研究亦發現，在學生能藉由言辭表達之前，可透過姿勢表達對新概念的理解，且表達的訊息是「錯誤配對」或「非重複」時，經由姿勢和言辭可對學習某新概念形成某種指標或有一定準備度（Alibali et al., 2000; Goldin-Meadow, 2003）。

本研究將檢驗把特殊姿勢和言辭表徵視作學生參與圖形樣式一般化的證據。理解知覺表徵的困難之一是輸入與輸出的資訊產生相互混淆的現象，其二是理解及傳遞論證與解釋規則時難有合適的符號系統。對學生而言，一致相似的圖形樣式意味具有一種可說明的共通性特徵，在不同階段和擴展樣式時可保留與分享。由於進行一般化時，學生尚未有正式經驗，要發現意義以傳遞其一般化的具體本質，皆須依賴選擇和發展的意圖，這些物件產生的特定標記和印象會直接連結到學生發展的知覺性理解、運算的假設和期待，以及對樣式知覺動作的行為，因此會透過運用姿勢、圖像、文字、數字，配合先備經驗與情境將圖形特徵組合起來。

從上述可見：學生若要成功完成一般化，從作業初始即須辨識物件的特質，建構規則與關係，才能擴展樣式的應用。適切應用表徵是產出數學概念的基本能力，但要具備效果和力量，則需要能支持建構數學關係的一般化。依賴圖形物件關係的處理與轉換，配合姿勢與言辭的表達協助整合結構關係，令推論的關係和結構目標化，是本研究欲探索的議題。

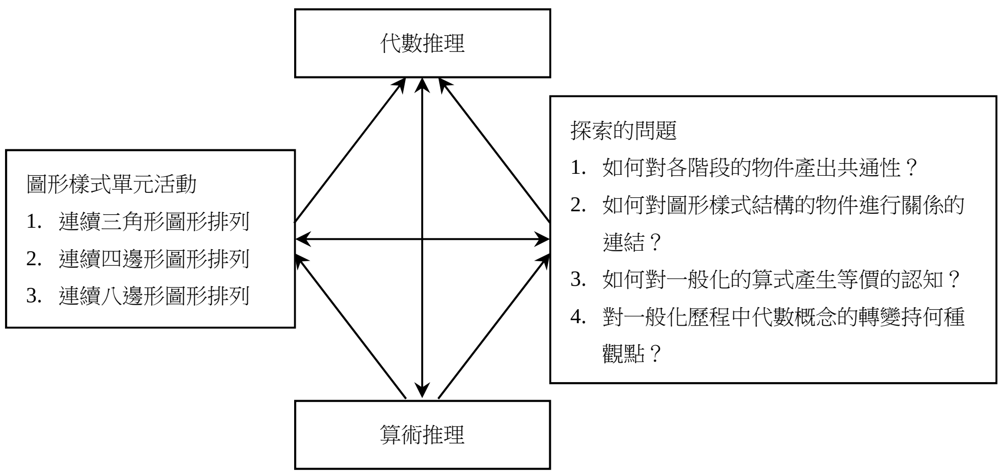
研究步驟與方法

本研究旨在檢驗學生運用姿勢與言辭進行一般化的溝通和解題，因此蒐集一般化相關的姿勢與言辭表現資料，選擇圖形樣式進行一般化的議題在於協助學生成功進行代數思考和數學推理，然而有關數學一般化的本質迄今仍存在爭議（Blanton & Kaput, 2002; Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Radford, 2006），因此藉由非紙筆測驗的方式探討以擴展一般化的理解；另一目的在於發展合適的分析架構，以理解姿勢與言辭表達如何應用於圖形樣式和抽象變數的思考和溝通。

研究資料來自作者主持的國科會計畫，計畫目的是協助教師提升數學教學能力，發展有效教導代數思考所需的知識。第一年計畫內容主要在於進行教師代數思考教學訓練，探討學生代數思考學習的策略與模式，及影響教師教學的因素；第二年則鼓勵教師創發有關學生代數思考的活動與素材，進行教學實驗，探討代數思考的有效模式，本文所呈現的為第二年研究的結果。本研究將一般化視作銜接與溝通算術推理至代數推理之間的橋樑，綜合學者對一般化的定義及數學知識建構的觀點，研究架構如圖三所示。

在架構裏，作者將重點放在學生參與一般化活動產出的行動。該活動主要以連續多邊形排列的圖形樣式問題為核心，期望在解題的過程能夠透過學生的姿勢和言辭說明，了解下列研究問題：（1）如何對各階段的物件產出共通性？（2）如何對問題結構中的物件進行關係的連結？（3）如何對一般化的算式產生等價的認知？（4）對一般化歷程中代數概念的轉變持何種觀點？

圖三：研究架構



研究樣本

本研究採個案研究方式進行，個案為台灣南部地區某公立小學六年級兩名學生（小信與小建，假名），皆為 12 歲，同一班級；該班共有 31 名學生，學生家庭社經地位屬中等程度，父母親大多從事商業活動，部分為公教人員。小信的父母經商；小建的父親為公務人員，母親則從事補習業。兩人的父母親皆重視子女教育，平日會安排孩子參加各項活動，如書法、英語和數學課業補習。兩人皆參與學校羽毛球社團，熱愛運動，在田徑項目與球類比賽皆有優異表現；學業方面，小信成就表現位於全班第 5 名，小建為第 10 名，兩人皆喜愛數學、科學活動，會主動探索問題，表達與溝通能力尚佳。選擇這兩位學生的原因在於一位採用「整體圖形關係」基模

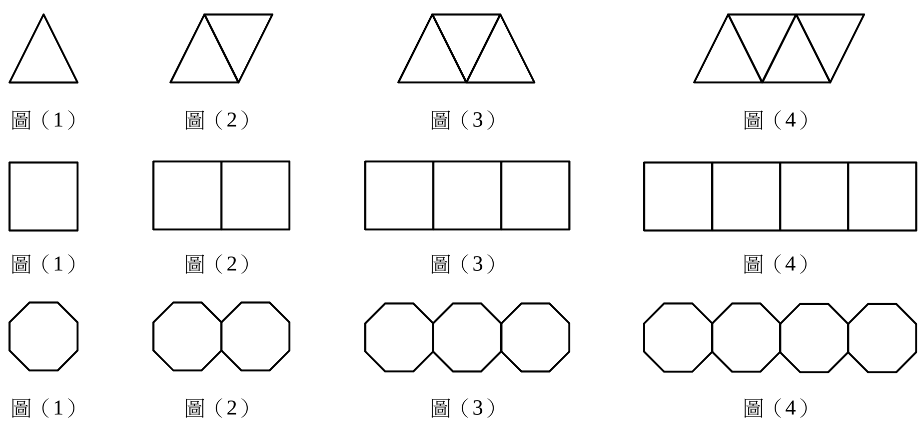
建構完形圖形，利用整體圖像的方式進行解題；另一位則轉化「圖形要素」的分析，運用分割加總數量的方式解題。雖然發想與推理歷程的策略不同，但他們組合三角形排列指涉的概念卻相同，即利用不同的言辭和姿勢動作呈現公差、表列式的結構，並透過溝通交流進行等價概念的詮釋，可比較其代數思考的理解。這兩位學生先前已經學習如何辨認圖形樣式及不同的代數表徵（數字表格、圖像與符號公式），完成作業並與同學討論其觀察後，站在黑板前面對同學，成功進行操作並說明如何進行一般化。

一般化問題設計與分析

為確切了解學生一般化的表現，包括行動產出的說明與策略，本研究預先設計有關圖形樣式一般化問題的單元，名為「怎樣解題」。該單元依序介紹「圖形排列規律」、「數列」、「三角形數」、「正方形數」等活動。分析的情節為學生如何理解與探索「連續三角形排列」所需牙籤數量的規則，並擴展、應用此規則至「連續正方形排列」及「連續正八邊形排列」的問題（圖四）。

設計與選擇這問題為學生代數思考分析的情節，主要有以下考量：（1）學生可先透過視覺對圖形的物件變化加以推理、歸納，進而導出規則，利於算術至代數思考的

圖四：連續三角形、正方形、正八邊形圖形排列的樣式



A. 圖（1）的樣式由多少根牙籤組成？畫圖並加以說明。
B. 圖（2）的樣式由多少根牙籤組成？畫圖並加以說明。
C. 以 n 表示圖次的數字，以 T 表示所需的牙籤數字，用公式表示它們之間的關係，並解釋你是怎麼發現這個答案的。
D. 如果確定此公式是正確的，請透過此公式解釋上述圖形樣式的意義。
E. 如果此公式可以擴展應用至更遠的圖次，那麼 76 根牙籤組成的連續三角形是第幾個圖次？解釋你是怎麼發現這個答案的。

銜接；（2）連續圖形排列的問題可刺激學生運用多元表徵方式（如語言或身體的動作姿勢）呈現，利於了解學生對問題的思考與解釋；（3）連續圖形排列問題（三角形、正方形、正八邊形）之間具同構的特質，利於學生發現算式的等價關係，有助研究者了解學生是否具備代數思考的能力。

為激發學生產出代數思考，進行上述問題時，要求教師遵循下列教學程序：

1. 佈題——將題目呈現於學習單，要求學生了解題意與目的後解題。
2. 觀察——要求學生注意問題中各數字的特徵與變化情形，推想該如何處理。
3. 尋找解題方法——着學生尋找解題方法並加以記錄，詢問使用這方法的原因。
4. 討論與檢驗——檢驗產出的策略或方法並加以討論，詢問從紀錄中發現它們具有何種相同特徵，解釋理由，將所發現的方法擴展、論證。

在程序 4，教師分派學生至黑板前藉由操作扣條，說明如何獲得圖形一般化的概念，着全班同學討論及分享其解題策略。本研究分析的資料即為程序 4 中兩位學生的說明與表現。學生從介紹如何辨識圖形樣式開始，利用說明及動作表現解釋其如何進行一般化，進而導出公式並應用解題。這程序可提供學生分享和理解塑樣與一般化的機會，獲得正式代數思考的算式，並探索算術至代數之間數學模式的轉化。

資料蒐集與分析

為了解學生一般化的表現，茲以學生解題活動的情節為資料蒐集與分析的重點。作者於教學現場前後配置共兩部攝影機以蒐集師生互動資料，確保能記錄所欲洞察的行動，並配合教學現場觀察所做的札記、教學歷程師生互動的對話、學生筆記作比對分析，最後進行文字稿轉譯，採質性分析加以詮釋。對於觀察到的姿勢和言辭，透過 McNeill（2005）的類型記錄與分類，並以 D、M、I、B 等編碼代號分別代表直證的、比喻的、圖像的和跳動的四種行動類型。

為使研究具良好信度與效度，在信度上採用兩種策略：（1）資料的真實性——對資料的呈現盡量以教學互動原始記錄為依據，詳實轉譯成逐字稿；（2）與研究人員討論修正——作者於研究過程中與兩位教師進行討論修正，以避免主觀偏見。效度的提升則採取：（1）研究人員的三角檢定——研究過程中及資料蒐集後的轉譯分析，作者與其他成員持續針對資料進行分析討論，以提供不同面向的思考，減低疏失及主觀偏見，並取得共識；（2）資料來源的三角校正——交叉比較與檢驗轉譯稿資料、錄影（音）、學生作業表現、現場記錄，期望能運用豐富及多元的資料檢驗學生一般化的表現。

實施步驟

研究於 2010 年 3 月至 5 月期間進行，該期間數學課程教導有關代數思考一般化的單元活動「怎樣解題」。本研究於完成該單元教學後實施，提供「神奇的十字數列」、「三角形數」等六道問題（總計 12 小時），本研究僅取「連續三角形圖形排列」等問題加以分析，教學時數為兩節課，活動皆予錄影（音），並轉譯成文字稿，以作日後結果分析比對之用。

研究結果與討論

本節針對一般化的歷程，從（1）知覺圖形樣式物件的共通性，（2）圖形樣式物件結構關係的連結，（3）一般化算式的等價認知，及（4）代數概念轉變等層面，分析研究結果。

知覺圖形樣式物件共通性分析

一般化最重要的工作在於初始階段，能從圖形眾多紛雜的線索中尋找具有相同特徵的物件，以塑造合適且有效的規則來解題。因此學生面對圖形時，需能利用視覺觀察物件特殊的性質，抽離可用的資訊，然後與圖次的發展加以連結，形成結構，最後擴展成數學算式解題。以下為小信和小建兩位學生發現物件共通性的行動敘述：

> 小信將桌上 3 根扣條〔藍色〕拿起來，放在黑板上先組成 1 個三角形，轉身告訴同學：〔用手指着圖形並繞着圖形輪廓畫出此三角形〕這個三角形有 3 個邊，可以組成 1 個三角形〔I〕；接着拿起 2 根扣條放在三角形的旁邊，組出第 2 個三角形，他指着這 2 根扣條說，這兩個邊和三角形的這個邊合起來成另 1 個三角形，然後又拿起 2 根扣條按照前例組出第 3 個三角形〔I〕；接着，他指着黑板上組出的整個圖形說：第 1 個三角形有 3 根扣條，加上右邊的 2 根扣條後變成 2 個三角形，總共是 $3 + 2 = 5$ 根扣條，然後再加上 2 根扣條，就是 $3 + 2 + 2 = 7$〔I〕，是第 3 個三角形〔在黑板上用手指在第 3 個三角形右邊的位置，然後比出 2 根扣條形成第 4 個三角形〕，有 $3 + 2 + 2 + 2 = 9$〔D〕；第 1 個三角形有 3 根扣條〔指着黑板的三角形並繞着圖形一圈〕，變成 2 個三角形就要加上 2〔指着 2 根扣條〕；變成 3 個三角形就要加上 2 再加上 2〔再指着 2 根扣條〕，也就是每增加一個三角形就需要補上 2 根扣條，轉身說 10 個三角形排列時增加 9 個三角形〔用手指在第 4 個三角形右邊連續畫出幾個虛擬的三角形〕，要補上 9 個 2 根的扣條〔比出 2 根手指〕，是 $3 + 2 \times 9 = 21$〔I &M〕。

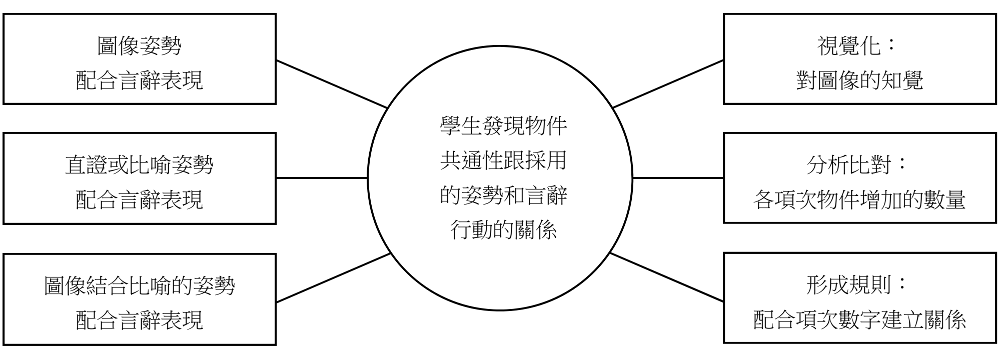
> 小信解釋 101 根扣條可組成多少個三角形的問題：101 根扣條先減掉第一個三角形的 3 根扣條剩下 98 根〔指着黑板上的第 1 個三角形〕〔I〕，$98 \div 2 = 49$〔連續指着第 1

個三角形右邊的 2 根扣條〕，因為形成 1 個三角形要加上 2 根扣條，表示這個圖形增加 49 個三角形，加上第 1 個三角形，知道他是由 50 個三角形排列而成〔I &M〕。

小建指着黑板上的三角形圖形，依次從第 2 個指到第 4 個圖形，說明每增加 1 個三角形需增加 2 根扣條，然後轉回到第 1 個三角形圖形再用手指將第 1 個三角形圖形分成兩個部分，分別指出並說明此三角形是由左邊 1 根扣條和其右邊 2 根扣條組合成，這 2 根扣條和後面三角形增加的扣條數目都一樣〔將手指指示後面的三角形〕〔I〕；2 個三角形需要 1 + 2 + 2 = 5 根〔指着圖形說明〕；3 個三角形需要 1 + 2 + 2 + 2 = 7 根〔指着圖形說明〕〔I〕；4 個三角形需要 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9 根；10 個三角形需要 1 + 2 × 10 = 21 根〔指出前面三角形之前 1 根扣條，再用手指連續比畫出 2 根扣條〕。100 個三角形只要將 1 + 2 × 100 = 201 就可以了〔M〕。小建回答 101 根扣條可以組成多少個三角形的問題，他先將手指向第 1 個三角形前面的扣條說：將 101 – 1，然後除以 2〔指着第 1 根扣條右邊的 2 根扣條〕，100 ÷ 2 = 50，因為每個三角形都有 2 根扣條，所以 101 根扣條可以組成 50 個三角形〔I &M〕。

以上敘述說明了兩位學生進行物件共通性的探索時，能尋找樣式發展的規則。小信採用「整體圖形關係」基模建構完形圖形，利用整體圖像的方式進行塑樣，即以三角形（或多邊形）的幾何圖形為基礎，藉由排列時增加的相同物件為樣式發展比對分析的要素，從中發現每增加 1 個三角形，需補上 2 根扣條變化的共通性；小建進一步轉化圖形要素的分析，運用分割加總數量的方式解題，即以圖形左邊的 1 根扣條為基礎，分別在右邊加上 2 根扣條則可組成另 1 個三角形，圖形變化的共通性特徵亦是 2 根扣條。這項發現與陳嘉皇（2013）的研究結果一致，即學生會透過「整體幾何圖像」與「部分圖形要素」的基模進行物件共通性特徵的辨識。學生發現 2 根扣條的數量可作共通性的單位，單位的倍數數量與圖次的數字有關，例如小信發現 5 個連續的三角形可用 3 +（5 – 1）2 = 11 求得扣條的數量；小建則採取 1 + 5 × 2 = 11 的方式求得答案；最後，兩位學生皆連結圖形變化的公差與各圖次數字，形成一般化規則。學生發現物件共通性與採用的姿勢與言辭行動之關係歸納如圖五。

圖五：學生發現物件共通性跟採用的姿勢和言辭行動的關係



雖然兩位學生於發想階段指涉的物件不同，但可同時觀察到圖形的特徵與物件的變化，從視覺化到發現物件的共通性歷程，兩位學生先透過圖像的姿勢配合言辭說明圖形樣式的特徵，以視覺化產出對圖像特徵的知覺；隨後利用分析比對各項次物件增加的數量（公差），抽離出圖形物件變化的規則，進一步採用直證和比喻的姿勢配合言辭說明較大圖次物件的變化。當在逆算問題探索圖形數量時，則利用物件的共通性特質同時採取圖像與比喻的姿勢，配合項次的數字建立關係，說明其解題的論點。這行動一方面藉由圖形要素顯示其推理的來源，另一方面根據其對圖形物件變化抽離的共通性規則以論證其圖形樣式的一般化，進而確定其產出的推理是有效的代數思考。

圖形樣式物件結構關係連結分析

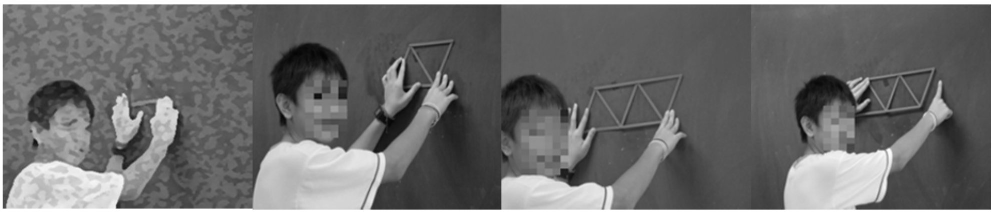
表徵在一般化的歷程扮演指示物件的意義和表達問題結構的關係，學生如何運用姿勢和言辭進行物件關係的連結以促進算術轉化至代數的思考，兩位學生的行動配合圖六與圖七說明如下：

> 小信繼續對三角形圖形一般化進行解釋〔圖六中 6.1 至 6.4〕，他透過手指指出三角形、正方形各有 3 個邊、4 個邊的圖形特徵〔I〕，然後借助手指重複指出三角形圖形增加的共同差異值〔每 1 個圖形增加的 2 根扣條，即公差〕〔D〕；當要求說明需用幾根扣條組合三角形圖形時，他轉回第一個圖形，用手指指出 2 根扣條〔公差〕，並將圖形樣式的結構關係用手勢將圖形的形狀和公差一一組合起來〔用手指畫出三角形圖形，再比出 2 根手指代表 2 根扣條〕，總結說出所欲三角形圖形所需的扣條為：邊數 3 +（圖次的數目 − 1）× 2〔公差〕〔M〕；小信亦利用他的手勢配合說明，指出圖形結構之間公差與三角形圖形數量的關係，倒過來利用扣條求可組成多少圖形的排列時，而順利解出答案〔M〕。

> 小建亦透過手指指出三角形圖形〔圖七中 7.1 至 7.4〕具有 3 個邊的特徵〔I〕，借助手指分離出第 1 個圖形兩個重要的要素：1 根扣條和右邊增加的 2 根扣條，描述三角形圖形增加的共同差異值〔增加的 2 條扣條，即圖形之間的公差〕之特徵〔D〕；當要求回答需用幾根扣條組合三角形圖形時，他將注意力轉回到第 1 個三角形圖形，用手指指出圖形和 2 根扣條，並將三角形圖形的結構關係用手勢一一呈現出來，總結說出所欲圖形所需的扣條為：圖形最前面的扣條 1 +（圖次的數目）× 共同差異值 2〔圖形每次增加的扣條〕；小建亦利用手勢指出圖形結構變數之間的關係，倒過來利用扣條求可組成多少個三角形圖形，順利解出答案〔M〕。

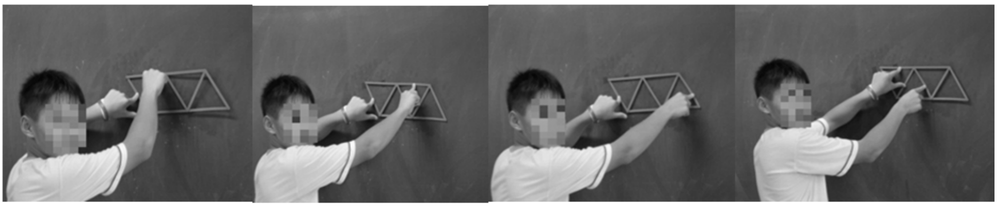
上述兩位學生在圖形結構關係連結的行動，首先運用姿勢，將手指動作與語意連結，「代表」和「呈現」圖形的結構特徵，接着利用直證的姿勢指出圖形的結構與

圖六：小信對連續三角形圖形排列的說明



6.1 6.2 6.3 6.4

圖七：小建對連續三角形圖形排列的說明



7.1 7.2 7.3 7.4

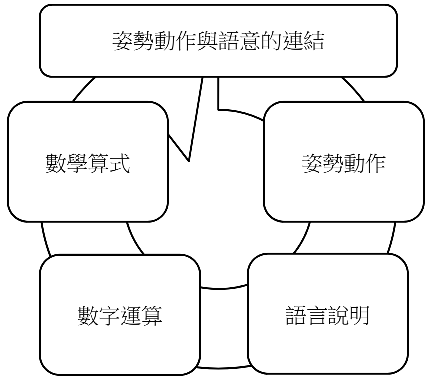
變化的公差（共通性），並透過手指將差異值以單位的方式呈現說明，最後利用比喻的姿勢說明各項次、公差與整個結構之間的關係，以及一般化代數式的意義與概念。這階段學生採用的姿勢和言辭表達與前階段顯著不同之處，在於學生描述整個圖形結構物件關係時，因已明瞭物件公差的變化與整個圖形樣式結構的關係，所以毋須再回顧存在的圖形要素，直接可採用比喻的姿勢說明圖形樣式結構的意義。

手部姿勢和言辭表達協助學生發現圖形物件的意義以傳遞其一般化的具體本質，這些姿勢和語言產生的特定標記和印象直接連結到學生發展的知覺性理解、運算的假設和期待，以及對樣式知覺動作的行為，最後建構並解釋一般化的規則應用。這與Duval（2006）的發現一致：學生在作業初始時就獲得圖像的特徵，形成與說明結構有關的解釋，隨後從近至遠透過一般化初始建立的運算行為，從已知階段建構的必要步驟轉化到特殊的少許案例上。從一般化發想階段開始，學生對圖像特徵的審視包含建構和論證代數可用的規則，這樣的審視包含姿勢的處理和改變的認知行動，包含執行圖形運算，結合姿勢、言辭和圖像的描述轉化成數詞和算式。歸納學生應用姿勢、言辭與圖形樣式結構關係的連結如圖八。

從圖八的運作歷程可提供代數思考教學的啟示：

1. 傳統上代數思考的教學着重於代數符號與算式的表現，解釋和呈現問題的結構關係，然從研究發現，若提供機會給予學生解題，他們可藉由姿勢連結語意，思考與說明圖形物件的意義和結構中變數的意義，對於深化理解圖形樣式一般化的本質具有助益，因此在一般化的歷程可鼓勵學生藉由姿勢與言辭等多元表徵指示其所觀察的事物。

圖八：表徵與一般化問題結構關係連結的關係



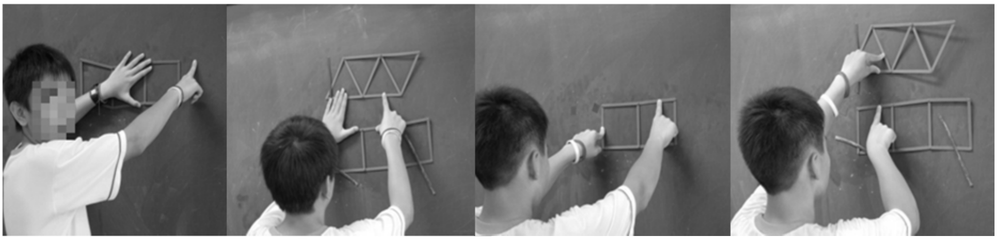
2. 姿勢與語意的連結可作算術思考（數字運算）至代數思考（符號算式）之間良好轉換的工具，透過姿勢與語意連結的應用，可協助學生比對、轉化與整合變數之間的關係，其對於學生代數思考具有顯著功效，值得融入一般化教學應用。
3. 將學生於一般化發想、連結和歸納歷程採用之姿勢和言辭的類型加以分析，學生會因本身對圖形樣式的理解與知識基礎而採用不同的姿勢和言辭表現，從其行動可判斷學生對一般化的程度，而得知其學習狀況，進而可掌握其學習進程。

一般化不同算式等價認知分析

一般化的目標在於使學生能夠發現問題中物件的共通性，歸納形成有效的算式解題，並將這規則應用擴展至其他情境，因此把問題算式之間等價關係的辨識、理解視為代數思考教學的重點。兩位學生如何應用姿勢和言辭對一般化規則的等價進行認知，其行動敘述如下：

> 小信用手指上下來回指着黑板的三角形與正方形圖形進行比較說明〔圖九中 9.1 與 9.2〕〔B〕：每增加 1 個三角形需增加 2 根扣條〔指着第 1 個三角形右邊的 2 根扣條〕，然後將手指指向正方形，說明每增加 1 個就要多用 3 根扣條〔指着第 1 個正方形右邊的 3 根扣條〕，然後轉過身說：我推想五邊形的圖形，增加 1 個五邊形右邊應該會多 4 根扣條，也就是每增加 1 個圖形所增加的扣條和他的圖形的形狀有關，每次增加的扣條是這個圖形的邊數字減掉 1，三角形增加 2 根，正方形增加 3 根，五邊形增加 4 根，八邊形會增加 7 根〔I & M〕。10 個八邊形用 8 + 7 × 9 = 71 根就可以，前面的八邊形有 8 根扣條〔用手指畫出類似八邊形的圖形〕〔D〕，每增加 1 個八邊形就多 7 根，後面 9 個八邊形就多 9 個 7；106 根扣條可以組成幾個八邊形，就將前面的八邊形 8 根扣條減掉，106 – 8 = 98，然後 98 再除以 7 = 14，14 個增加的加上前面的，14 + 1 就是 15 個八邊形〔M〕。

圖九：小信與小建對圖形排列等價關係呈現的姿勢與說明



9.1 9.2 9.3 9.4

小信說明他與小建的策略不一樣之處：我的方法和小建的不同，因為我們看到的條件不一樣，所以想法不一樣，但是都可以找到答案，而且答案都一樣，我是以第 1 個圖形為主，每增加 1 個三角形需要再補 2 根扣條，2 個就需補上 2 × 2 = 4，3 + 4 = 7，表示排了 3 個三角形；但是小建是將第 1 個三角形圖形分成 1 根和 2 根扣條，以 1 根為基礎，每個圖形都有 2 根，3 個三角形排列就用 1 + 2 × 3 = 7 算出需要的扣條，答案都是 7〔用手指來回指着三角形〕〔D & M〕。我也看到跟小建一樣的規則，每增加 1 個圖形所增加的扣條和圖形的邊數有關，每次增加的扣條是圖形的邊數減 1，三角形增加 2 根，正方形增加 3 根，五邊形增加 4 根〔M〕。但是我的是從 3 根開始〔指着第 1 個三角形圖形的扣條〕，每次增加 2 根，而小建是從第 1 個三角形 1 根開始加 2，我的開始是從 3，跟他的不一樣〔I〕。

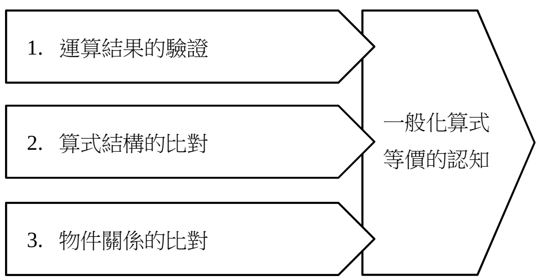
小建指着正方形圖形〔圖九中 9.3 與 9.4〕，用手指頭圈出第 1 個正方形前面的 1 根扣條和另外 3 根扣條，說明此正方形可以由 1 + 3 根扣條的方式組成，第 2 個正方形再增加 3 根扣條〔I〕，變成 1 + 3 + 3；第 3 個正方形再增加 3 根扣條，變成 1 + 3 + 3 + 3；第 10 個正方形就是 1 + 3 × 10 = 31，然後宣稱：第幾個正方形圖形要用的扣條，就用圖形前面的 1 根扣條 + 幾個正方形 × 3 就能算出答案〔I & M〕。要如何算出八邊形圖形排列所需的扣條，他說：像正方形一樣，八邊形可以由 1 + 7 根扣條的方式組成，第 2 個八邊形再增加 7 根扣條，變成 1 + 7 + 7；第 3 個八邊形再增加 7 根扣條，變成 1 + 7 + 7 + 7；對於 121 根扣條可以組成幾個正方形？他轉向第一個正方形，用手指指着說，121 先剪去這前面這一根扣條，120 再除以 3〔指着後面正方形，他們都增加 3 根〕，等於 40，所以可以組成 40 個正方形〔I & D〕。

小建說明與小信策略不同之處：我的發現每增加 1 個圖形所增加的扣條和他的圖形邊數有關，每次增加的扣條是圖形的邊數減 1，三角形增加 2 根，正方形增加 3 根，八邊形增加 7 根〔M〕。但是我的是從 1 根開始〔指着第 1 個三角形最左邊的扣條說明〕，每次增加 2 根，而小信是從第 2 個三角形開始加 2，他開始的數字是從 3，然後再加上去〔I & D〕。

上述兩位學生經由前階段圖形樣式關係的建構後，以圖像空間變化與數字為索引，利用直證與比喻的姿勢配合言辭，解釋不同圖形之間等價關係和一般化規則的應用，符應 Radford（2010）主張利用知覺和運算的理解，首先會產生圖形影像，再由空間和數字關係而產生索引，成為洞察特殊符號與物件之間關係的邏輯結果，接着透過一些算術運算與規則的操弄發現相同的法則，歸納應用到共通類型的物件上，產生一般化的符號。這行動亦呼應 Dörfler（2008）之一般化歷程中物件轉化成符號建立規則的進程。兩位學生的姿勢在一般化歷程各階段運用的類型有所不同：前符號階段是種知覺和運算的理解，受到圖像相似形式（共通性）的影響，因此需大量運用圖像和比喻的姿勢配合言辭以說明物件的共通性；而在非符號的階段，學生須經由空間關係產生索引，然後採用索引的方式成為洞察特殊符號與其物件之間關係的邏輯結果，因此採用直證與比喻的姿勢配合言辭作索引工具，呈現代數有用結構的案例，支持算術的產生，成為圖形樣式情境裏具體的變數；最後在符號階段，為形成公式傳遞樣式物件之間的關係及探索其等價關係，除運用跳動的姿勢連結圖像特徵的比對外，學生大多採用比喻的姿勢說明物件的等價關係與解題應用。

學生建立一般化算式等價關係採取的策略可歸納為（1）運算結果的驗證，（2）算式結構的比對，及（3）物件關係的比對等三種（如圖十）。

圖十：學生一般化算式等價認知採用的策略



1. 運算結果的驗證 —— 將同一圖形排列問題所需扣條數目計算得出的結果加以比對，得知解題的想法和方式不同，但結果仍一樣。
2. 算式結構的比對 —— 藉由圖形排列的發展，發現每次增加圖形所需的扣條與圖形形狀的邊數有關，皆能解釋增加的數目是圖形形狀的邊數減掉 1，且排列的圖形（除第 1 個圖形外）所需扣條數目可採用「圖形形狀邊數減掉 1 × 圖次的數字」獲得，理解圖形排列的同構性質。
3. 物件關係的比對 —— 分別以整體幾何圖像和抽離圖形結構要素的方式為解釋解題公式的基礎，並比對其間規則異同之處，而明白圖形排列的解題可採用不同方法運算，最終仍能獲得相同結果。

兩位學生採用不同策略協助對算式等價性質的理解，亦從比對分析的歷程明白不同算式之間等價的關係。對於促進代數思考所欲建立的目標：利用表列式描述問題結構的關係並擴展應用解題，是教學上可以思考運用的資源，教師可針對學生的特質採用這些策略增進一般化的能力。

代數概念轉變分析

算術至代數思考之間是否能平順轉化，可由一般化過程中學生如何對物件的指示加以分析而理解。兩位學生如何將圖形的物件、結構關係透過代數思考呈現與指示其意義，可從以下敘述加以探討：

小信說：變成 4 個三角形就要加上 3 個 2〔用手指畫出 2 根扣條形成一三角形，然後從第 2 個三角形開始依次指到第 4 個三角形〕；變成 5 個三角形就要加上 4 個 2〔用手指畫出 2 根扣條形成一三角形，然後從第 2 個三角形開始依次指到第 5 個三角形〕；如果要找出 10 個三角形需要幾根扣條？就用 $3 + (10 - 1) \times 2 = 21$ 就可以找到答案；15 個三角形就用 $3 + 14 \times 2 = 31$ 找到，因從第 2 個三角形開始，每增加一個三角形，就得增加 2 根扣條〔D〕。

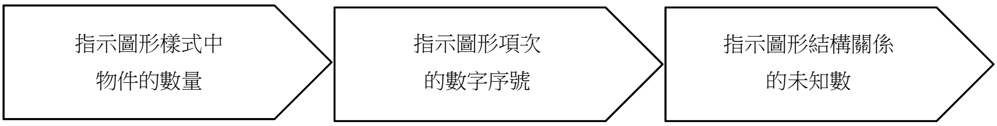
51 根扣條可以組成多少個三角形？小信指着黑板的圖形說：只要先將第 1 個三角形 3 根扣條減掉 $51 - 3 = 48$，然後用手指着 2 根扣條並把他圈起來當成一個單位，對着同學說：大家看！增加 1 個三角形就要增加 2 根扣條，總共增加了 48 根扣條，除以 2 就是增加了 24 個三角形，$48 \div 2 = 24$，$24 + 1 = 25$！加上第 1 個三角形，總共就是 25 個三角形〔I & M〕。

小建從桌上拿起 4 根扣條〔紅色〕組成 1 個正方形，再拿起 3 根扣條放在第 1 個正方形旁邊，指着說：要形成第 2 個正方形就需要增加 3 根扣條，隨後組出 2 個相連的正方形，總共是 $1 + 3 + 3 = 7$ 根扣條；再加上 3 根扣條就可以變成 3 個正方形，指着黑板的圖形說 $1 + 3 + 3 + 3 = 10$，$1 + 3 + 3 + 3$ 再加上另外 3 根扣條就可以形成 4 個正方形，所以每增加 1 個正方形就增加 3 根扣條，組成 10 個正方形就將 1 加上 3 一直加 10 次，所以總共要 $1 + 3 \times 10 = 31$ 根扣條〔I & M〕。

61 根扣條可以組成幾個正方形？小建指着黑板圖形的第 1 個正方形說：先將 $61 - 1 = 60$，然後再除以 3，因為增加 1 個正方形需用到 3 根扣條〔指着後面正方形圖形的 3 根扣條〕，用 $60 \div 3 = 20$，可以知道排列了 20 個正方形〔D〕。

上述說明可將學生的代數概念轉化，歸納如圖十一所示，其意涵如下：

圖十一：圖形樣式作業之一般化歷程代數概念的發展



1. 指示圖形樣式中物件的數量——在一般化的過程中，學生首先將發現的物件共同性（圖形變化的公差）視為一個單位量加以運算，此單位量是一定數，指示着圖形排列時，每增加一單位量（2 根扣條）即可再組成另一三角形。
2. 指示圖形項次的數字序號——隨後發現圖形排列所需的扣條數目，可連結圖次數字序號乘以圖形變化產生的公差（單位量）獲得，第 n 個圖次所需的扣條數量（可組成相同圖形排列）即採取 $n \times d$（單位量）即可。
3. 指示圖形結構關係的未知數——最後學生正確地以其一般化建構的算式，呈現圖形樣式排列所需扣條數目，此公式是連結問題結構中相關物件的關係，可擴展應用至更遠的圖形項次，當欲求更遠圖形項次所需扣條數目，或從扣條數目逆算幾個圖形，皆可利用此公式進行解題。

上述學生一般化歷程中代數概念的發展就像 Rivera（2010）與 Radford（2010）的主張：學生會以前符號、非符號與符號的模式進行，先採取知覺和運算的理解，利用物件來進行推論。此時，學生採用非符號的姿勢，看成洞察特殊符號與其物件之間關係的邏輯結果。再者，透過算術（如運算與規則的操弄）發現相同法則，產生符號以歸納應用到普遍共通的物件上。依據符號的發展，學生在樣式一般化歷程中呈現的代數本質，可作結構的狀態、關係的化約和圖形要素的描述等進行解釋和運用。

學生於一般化歷程中展現的代數概念轉化，不僅為圖形物件和結構關係賦予意義，同時亦呈現運算思考的方式：例如當代數指示樣式中物件的數量時，學生對於所欲探索圖形排列的扣條數量，採用公差累加運算求得其解；另外當代數的概念指涉圖形項次的數字序號時，則利用乘法關係思考運算求得其解；而當代數指涉圖形結構的未知數時，會利用結構關係思考運算求得結果。代數概念的發展，與一般化路徑各行動的展現息息相關，可將學生的表現加以整理如表一所示。

例如在一般化路徑發想階段，學生利用視覺化整體圖形或圖形要素，知覺圖形物件的共通性，此知覺是以具體物件變化的特徵為基礎，透過姿勢、語言解釋說明物件的意義，如何求出答案則採用公差累加運算方式，得到圖形排列所需扣條數量。所以一般化歷程中變數概念的轉化能否成功，需與路徑中各行動所需的概念和運算基模配合才能完成，即學生一般化要能成功，路徑中對圖像物件共通性的知覺、物件共通性的描述、表徵的應用、運算思考方式及代數概念的轉變等各項能力均相輔相成，缺一不可。

表一：學生於樣式一般化路徑表現與代數概念轉變的行動

一般化路徑	對圖像物件共通性的知覺	知覺物件共通性的描述	表徵的應用	運算思考方式	代數概念的轉變
發想階段	視覺化整體圖形或圖形要素	以具體物件變化的特徵	姿勢、語言	運用公差累加運算	指示樣式物件的數量
連結階段	比對分析物件變化的數量	轉換成數字作物件變化的臆測	數字、語言	利用乘法關係思考運算	指示圖形項次的數字序號
歸納階段	配合項次數字形成規則	採用表列式呈現變數結構的關係	數學算式、語言	利用結構關係思考運算	指示圖形結構關係的未知數

結論與建議

本研究旨在探索學生如何在圖形樣式的問題中利用姿勢配合言辭進行一般化，理解他們如何對一般化各階段物件辨識出共通性，對物件進行結構關係的連結，對產出不同算式的等價進行認知，對一般化路徑中代數概念的轉變持有何種觀點。總結發現可歸納以下結論：

1. 學生於一般化發想階段運用視覺化整體圖形或圖形要素，比對分析物件變化的數量與配合項次數字形成規則等方法，配合圖像的、直證的與比喻的姿勢辨識一般化各階段物件產出的共通性。
2. 學生於一般化連結階段大多運用直證的和比喻的姿勢與語意做連結，配合數字、符號算式等多元表徵，對問題結構進行關係的連結。
3. 學生以比喻的姿勢配合運算結果的驗證、算式結構的比對、物件關係的比對等策略，以作一般化產出之不同算式等價認知的基礎。
4. 對一般化路徑中代數概念的演變以指示樣式物件的數量、圖形項次的數字序號、圖形結構關係的未知數等觀點持續發展。

本研究的發現整合與驗證了先前 Rivera（2010）與 Radford（2010）的研究觀點（見表一），可提供對學生一般化歷程展現的行動更加完整與細緻的理解，包含學生如何運用姿勢配合言辭呈現圖形樣式各階段物件的共通性，如何解釋與表達圖形結構中物件關係的意義，藉由知覺和運算的理解，利用物件進行推論獲得不同算式間等價的認知，且將代數當作指示結構狀態、關係化約和圖形要素描述等符號進行解釋和運用。這些發現可一窺學生一般化歷程的全貌和進程，協助教師掌握圖形樣式教材的特徵，安排適當的教學軌道，提升教師「代數思考的眼睛和耳朵」之專業能力。

另外，本研究運用姿勢配合言辭來分析學生一般化的架構，從中了解一般化表現與姿勢之間的關係（表二），可協助學生有力轉移算術至代數思考，其應用可增進學生代數思考的能力。

表二：姿勢與一般化行動的關係

姿勢	運用時機說明
圖像的	敘述圖形重要特徵或舉例說明共通性特質，適合單一圖次物件特徵的描述
直證的	說明圖形整體結構或補充說明某補充條件，適用於跨越兩個圖次以上物件結構變化的描述
比喻的	對較遠圖次結構說明或對圖形樣式歸納的算式進行解釋，適合對整體一般化規則的描述
跳動的	比較分析具同構性質或規則但不同形狀的圖形，適合對兩種以上圖形樣式產出一般化規則比較分析的描述

再者，學生成功完成代數思考所呈現的多元策略，包括用於知覺各階段物件產出的共通性、對問題結構進行關係連結、對不同算式等價的認知等策略，以及指示代數概念的演變，皆可提供教師平順轉移學生算術至代數思考有效的資源，並可用於促進學生解題的表現；學生提供的多元策略與解題方法亦可令教師省思、理解如何引導學生學習代數思考，弭平算術至代數之間的縫隙，順利銜接。

由學生一般化歷程展現的行動，得知成功的代數思考須包含物件共通性特質的辨識、代數概念的轉變、等價的認知等，其中最有趣的是 Rivera（2010）與 Radford（2010）等學者提出的前符號、非符號與符號的概念模式，這些進展牽涉到學生對於指示物件和結構意義有關代數概念的發展。本研究初步發現學生在圖形樣式一般化的歷程中，會將代數當作結構狀態、關係化約和圖形要素描述等符號進行解釋和運用；這符號指示與代數概念的發展具有何種關連，日後可再深入探討，相信對學生代數學習有關符號應用的問題將能迎刃而解。

另外，學生應用姿勢、語言、數字、符號、算式等解釋與說明一般化的行動，除具有協助其表達對問題的認知、轉化概念的意義、連結結構關係等功能外，還可協助教師從其表徵的應用了解學生如何進行和思考算術至代數間的轉化，以及是否真正理解問題，對促進師生概念交流與互動具有正面效果與價值，因此建議教師教授代數思考時，應充分提供機會鼓勵學生應用多元表徵，相信代數思考教學對教師將不再是難題。

參考文獻

教育部（2008）。《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》。台北，台灣：教育部。

陳嘉皇（2013）。〈國小六年級學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究〉。《教育科學研究期刊》，第 58 卷第 1 期，頁 59−90。doi: 10.3966/2073753X2013035801003

Alibali, M. W., & DiRusso, A. A. (1999). The function of gesture in learning to count: More than keeping track. *Cognitive Development*, *14*(1), 37−56. doi: 10.1016/S0885-2014(99)80017-3

Alibali, M. W., Kita, S., & Young, A. J. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. *Language and Cognitive Processes*, *15*(6), 593–613. doi: 10.1080/016909600750040571

Blanton, M., & Kaput, J. (2002, April). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper represented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, U.S.

Cai, J., & Knuth, E. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional, and learning perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* [International Journal on Mathematics Education], *37*(1), 1–4. doi: 10.1007/BF02655891

Cai, J., & Lester, F. A. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and U.S. classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3–4), 221–237. doi: 10.1016/j.jmathb.2005.09.003

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87–115.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM*, *40*(1), 143–160. doi: 10.1007/s11858-007-0071-y

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6–10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Fauconnier, G., & Turner, M. (2002). *The way we think: Conceptual blending and the mind's hidden complexities*. New York, NY: Basic Books.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137–165. doi: 10.1016/S0364-0213(99)80056-1

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gesture: How our hands help us think*. Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University Press.

Goldin-Meadow, S., & Singer, M. A. (2003). From children's hands to adults' ears: Gesture's role in the learning process. *Developmental Psychology*, 39(3), 509–520. doi: 10.1037/0012-1649.39.3.509

Kieran, C. (1996, July). *The changing face of school algebra*. Invited lecture conducted at the 8th International Congress on Mathematical Education, Sevilla, Spain.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65−86). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Parrill, F., & Sweetser, E. (2004). What we mean by meaning: Conceptual integration in gesture analysis and transcription. *Gesture*, *4*(2), 197–219. doi: 10.1075/gest.4.2.05par

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 267–279). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2–21). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2–7. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/20749442

Reynolds, F. J., & Reeve, R. A. (2002). Gesture in collaborative mathematics problem-solving. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(4), 447−460. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00091-3

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297–328. doi: 10.1007/s10649-009-9222-0

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students’ preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 89–112.

Study of Gestures, Verbal Presentation and Algebraic Thinking

Chia-Huang CHEN & Shuk-Kwan S. LEUNG

Abstract

This study investigated how students generalize graphic patterns, aiming to understand how they utilize words and gestures at each phase of generalization, how they identify links between problems and recognize the equivalence of generalized equations, and how their understanding of algebra evolves. We conducted a case study of two sixth-grade students from a public elementary school in southern Taiwan, using video recordings, interviews and writing to collect data, which was then analyzed qualitatively. The study found that: (a) In the concept phase, students form rules by using visual graphics to compare changes in objects and item numbers, in accordance with the common elements of iconic, deictic and metaphoric gestures and perceptions. (b) In the linking phase, most students use deictic and metaphoric gestures and semantics, along with numbers and equations, to identify relationships in the problem structure. (c) Students employ strategies such as verifying metaphoric and computational outcomes, and comparing equation structure and object relationships, to comprehend the equivalence of different equations. (d) Students continue to develop their understanding of algebraic concepts based on item numbers, numbering of symbols, and the unknowns of relationship diagrams. Recommendations on diverse permeation and the relationship between development of algebraic concepts and symbol indication were provided. They can serve as references in advancing algebraic thinking.

Keywords: generalization; algebraic thinking; gesture; graphic pattern