

遠哲西子灣數學教師成長工作坊成果分享： 認知負荷理論在數學教學上的應用

吳金聰

屏東縣復興國民小學

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

數學是學生們最感到困難的科目之一（邱上真、詹士宜、王惠川和吳建志，1995），也是不少教師們最頭痛的科目。筆者們於近期向小學教師與學生進行訪談，也獲得同樣的結果。為了解決學生學習數學困難，或者是為了改進數學教學，師資培育者及中小學教師們參加「遠哲西子灣數學教師成長工作坊」之後，共同研究及分享成果、獲得成長，並建立一個共同學習的機制。本報告是該工作坊的進階班的其中一份成果¹。

認知負荷早期稱「心智工作負荷」(mental workload)，原應用於軍事與企業，80年代 Sweller 引進教育界，方稱「認知負荷」(cognitive load)。「認知負荷」意指：將一特定工作加在學習者的認知系統時所產生的負荷 (Sweller, 1994)。認知負荷理論是認知理論的一環，是研究認知歷程和教學與教學設計之關係的重要理論之一，而且根據中外研究 (Paas & Van Merriënboer, 1994; Sweller, 1989) 發現，認知負荷對於教師的教與學生的學有很大的影響，且也有一些研究成果可供教學參考 (郭秀綏，2005；陳密桃，2003；Sweller, 1989)，這些研究中也有一些與數學的教學有關。故身為數學教育工作者宜加以重視，並進一步將其應用於數學教學。

基於認知負荷理論對數學教學有很大的影響，本文的主要目的，在探討認知負荷理論在數學教學上的意涵，及如何將此理論應用於數學教學。筆者蒐集有關認知負荷理論的文獻及研究，加以分析、探討，並融入自己的教學經驗及看法，供團體成員與數學教育工作者參考。

1 「遠哲西子灣數學教師成長工作坊」是由大學教授舉辦之教師成長團體，參與此團體除了要繳費和上課外更要將所學去實踐（帶領成長團體、舉辦學生營隊或執行教學研究）。實踐後更要進行研究報告，並確實學習書面報告的撰寫。而本文是繼「共同學習機制之建立：遠哲西子灣數學教師成長工作坊及分享創作成果」(梁淑坤、梁惠珍、曹潔如，2007) 一文後的另一篇研究報告。

本文第一部份陳述認知負荷的主要理論及其在數學教學上的意涵，第二部份敘述認知負荷理論的教學設計原則，第三部份陳述認知負荷理論在不同的數學教學活動如何應用，第四部份則將前三部分的理論與實務結合，再做一次回顧與總結。

壹、認知負荷理論及其在數學教學上的意涵

第一部份包括四方面的意涵：基本假定、來源、類型和相關研究。

一、認知負荷理論對認知架構的基本假定

認知負荷理論對人類認知架構 (cognitive architecture) 有四種基本假定 (Mousavi, Low, & Sweller, 1995)，即：運作記憶、長期記憶、基模建構和自動化。

在運作記憶 (working memory) 方面，一般人的運作記憶容量有限且很小，進行記憶時，須利用運作記憶將訊息加以處理，才容易保留以進入長期記憶。在運作記憶中，要素的交互作用會佔用運作記憶的容量，如果因而佔據過大的運作記憶容量，會產生較大認知負荷，造成學習困難。在長期記憶 (long-term memory) 方面，人類的運作記憶容量雖小，但長期記憶卻可保持很長的時間。就專家和生手而言，面對問題時，專家可以立刻從長期記憶中提取較好的解決方法，但生手卻須在短期記憶裡不斷的推理尋找方法，浪費運作記憶的空間，造成認知負荷。至於在基模的建構 (schema construction) 方面，知識是以基模的形式儲存在長期記憶中。知識經簡單到複雜，經歷粗糙到精緻的建構過程才以基模的形式存於長期記憶中；此過程也是專門知識的發展歷程。故基模在長期記憶中具有組織和儲存訊息的功能。另外基模在運作記憶中也可以與訊息融合成更複雜的基模，被當成一個處理單位，因而降低運作記憶的負荷。最後，在基模的自動化 (schema automation) 方面，所有的訊息處理都是透過控制處理與自動化處理進行。控制處理在運作記憶中進行，受意識所控制，運作時佔據許多運作記憶容量；但自動化處理，則藉由練習而將基模運作自動化，當自動化時，所需的記憶空間很少，相對的降低認知負荷。

從以上四種基本假定來看人類的學習，在數學教學上的意涵有三個啓示：

1. 由於運作記憶的容量小，勢必影響學習者的數學學習成效；因此，教

師須加以重視如何利用各種方法協助學習者吸收訊息，並加以認識、分析與理解。

2. 知識是以基模型態存於長期記憶中，且長期記憶容量是無限的。故教師須協助學習者形成及穩固各種數學概念、知識、技能之基模。
3. 基模自動化後可減少記憶空間，因此，教師都宜安排有效的練習，協助學生將學得的數學知識、運算技能等基模運作自動化，以降低認知負荷。

二、認知負荷理論的來源

認知負荷是一多向度的構念，此構念包括「因果因素」與「評估因素」(Paas & Van Merriënboer, 1994)。因果因素是造成認知負荷的來源，包括學習者特性、任務與環境及其交互作用(Paas & Van Merriënboer, 1994)。而因果要素包括學習者的特性和任務與環境。學習者特性指學習者本身的認知能力、認知型態、先備知識與經驗(陳密桃, 2003)、年齡等。至於任務與環境是指時間壓力、噪音、溫度、複雜度、學習內容、資訊展現方式、教材編排方式、學習程序等。此二者之交互作用包括績效、動機、激勵。

而評估因素是認知負荷所導致的結果，其包括心智負荷、心智努力、表現，藉此三因素可測量、評估學習者的認知負荷(Paas & Van Merriënboer, 1994)。心智負荷：以工作為核心的層面，是工作或環境需求所造成，其與內在或外在特性有關。心智努力：以人為核心的層面，是學習者為了完成任務所需的努力，屬於心智控制處理。表現：學習者的表現是心智負荷、心智努力、及上述的因果因素的反映。

從認知負荷的來源來探討學習，在數學教學上有兩個啓示：

1. 學習者的特性會影響認知負荷。故要有好的學習表現，必得克服這些特性所造成的影響。例如，教學前，先補足學習者的先備知識、經驗，瞭解其認知型態，以協助其降低認知負荷。
2. 任務與環境對於認知負荷有很大影響。因此教師宜想辦法排除。例如將學習內容依難易程度加以計劃安排；將教材資訊作適當的呈現；漸進安排教學或學習活動；給予學生適度的學習時間；布置無噪音干擾的舒適學習環境供學生學習，這都將有助認知負荷的降低，促進學習。

三、認知負荷的類型

Sweller 等人就教學設計的觀點，將認知負荷的來源分為三類(郭秀綏，2005；陳密桃，2003；Sweller et al., 1998)：內在、外在和增生。

內在認知負荷 (intrinsic cognitive load) 屬於單獨學習內容的內在本質，含教材特質、學習者的程度及二者之交互作用。教材特質：內在認知負荷主要受到教材本身要素間相互關聯程度的影響，是教材本身的內在特性(難易程度)，不會因教材呈現方式的不同而改變，也就是不受教學設計者的影響。當學習者面對要素間相互關聯性低的教材時，其內在認知負荷較低；反之，關聯性高的教材，其內在認知負荷較高。學習者的程度：學習者的專門知識、先備經驗的不同程度也造成不同程度的內在認知負荷。學習者若將訊息與自動化的基模加以整合，將可降低工作記憶的負荷。

至於外在認知負荷 (extrinsic cognitive load) 主要受教材呈現方式及教學方法、教材設計、或活動本身的影響，此種負荷是外加的，不同於內在認知負荷是無法改變，是認知負荷的核心，可由教學設計者控制。其可藉由訊息呈現、訊息組織等設計而降低。

最後，在增生認知負荷 (germane cognitive load) 方面，增生認知負荷與外在認知負荷有關，也與基模建構有關。其藉由教學設計來吸引學生的注意力以建構基模。所以，適當的教材呈現方式，不但可降低外部認知負荷，也可幫助學習者專心學習與建構基模。

從上述共三類認知負荷得知，內在認知負荷可經由基模的獲得和自動化來降低。外在認知負荷可藉由更有效的教學設計來降低，但如果內在認知負荷是低的，外在認知負荷就較不重要；當內在認知負荷高時，外在認知負荷就顯得重要 (Sweller & Chandler, 1994)。當外在認知負荷降低時，學習者就有能力來增加增生認知負荷。不過，所有的總認知負荷量（含內在、外在、增生認知負荷）不能超過工作記憶負荷的限制 (陳密桃，2003；Van Merriënboer & Sweller, 2005)。

上述認知負荷類型的探討，在數學教學上有四個意涵：

1. 要素關連性低的教材認知負荷低，反之則高。但要學生學通數學知識，又非得安排要素關連性高的教材不可時，上課前，宜逐步將教材由易而難，由簡而繁加以分析安排，以減輕學習者的認知負荷。

2. 學習者的先備知識會影響內在認知負荷。故教師教學之初，宜先檢驗學生的數學先備知識；若發現學生的先備知識不足，宜加以補救。
3. 外在認知負荷受教學方法、教材設計影響，教學方法不妥、教材安排不當都會造成過重的認知負荷。所以教師宜視學生的程度、教材的性質（內在認知負荷），選用合適的教學方法及進行適度的教材呈現（外在認知負荷），以引導學生降低外在認知負荷；而呈現教材與教學引導時，鷹架理論可加以應用，也就是在可能發展區內幫學生搭鷹架。
4. 增生認知負荷與基模的建構有關，有益學生學習。所以教學後教師宜透過有系統的練習，讓學生將所學的知識、技能自動化或形成基模，以產生增生認知負荷。

四、認知負荷理論的相關研究

Sweller 提出認知負荷理論後，陸續有許多學者提出相關的研究，本文就這些研究中，摘取幾個與數學教學有密切關係的研究稍加介紹。

Gerjets & Scheiter (2003) 發現教學設計要考慮教師目標，以及學習者的目標與處理策略；因為教師目標不但影響學習者活動，也影響學習者活動所產生的外在認知負荷和增生認知負荷的歷程。學習者活動包含學習者目標和處理策略。專門知能 (expertise) 影響內在認知負荷與處理策略 (陳密桃 2003；Gerjets & Scheiter, 2003)。

Valcke 在 2002 年提出後設認知負荷 (meta-cognitive load) 的概念，其重視先備知識在認知負荷理論脈絡中的地位，也強調監控活動在訊息處理歷程中的重要性。任務環境影響外在認知負荷，外在認知負荷包含內在認知負荷，影響學習者的先備知識，先備知識影響增生認知負荷；增生認知負荷包含認知負荷的處理與後設認知負荷 (引自陳密桃，2003)。

Paas, Tuovinen, Van Merriënboer & Darabi (2005) 研究指出，動機是決定學習成功的重要面向。就動機的觀點提出心智努力和表現的關係：學習者的心智努力程度低、學習表現也差時，會投入較少的工作行為；反之，學習者的心智努力程度高、學習表現也佳時，會投入較多的工作行為。因此，學習動機可增加學習者的增生認知負荷。

Kalyuga, Ayres, Chandler & Sweller (2003) 研究指出，在某些狀況下，

當充分呈現教材時，對較有經驗的學習者而言，部分或整個教學引導可能是重複的；相對而言，對較少經驗的學習而言，教學引導可能是必須的。而沒有重複引導的教學，對較有經驗的學習者可能是最好的教學；但重複引導的教學，對初學者可能是必須的。所以，當教學方法 (techniques) 對沒有經驗的學習者有很高的效率時，其對很有經驗的學習者可能沒有效率，甚至產生負面的結果。這就是所謂的專門知能的逆轉效應 (expertise reversal effect)。

上述的認知負荷理論的相關研究，不但證實認知負荷理論在教學中的重要性，也擴展認知負荷的理論架構；例如 Gerjets 和 Scheiter 的研究重視學習者的歷程，認為學習者的目標和處理策略是教學設計與認知負荷之間的中介因素。Valcke 的研究強調監控活動在訊息處理過程中的重要性，結合後設認知的理論，認為增生認知負荷包含認知負荷的處理與後設認知負荷。Paas 等人的研究則轉向學習動機，強調動機會增加學習者的增生認知負荷。Kalyuga 等人的研究則注意到教學方法對於不同學習經驗的學生可能產生逆轉效應的問題。這些研究讓認知負荷的理論更完整，對教學更有貢獻。故其在數學教學上有如下的意涵：

1. 專門知能和處理策略會影響認知負荷。所以教學過程中，應教學生「如何學習」的策略與後設認知策略，以產生增生認知負荷，進而成爲專家。
2. 學習動機可增加學習者的增生認知負荷。所以如何增進學生的學習動機，是教師須重視的。

貳、認知負荷理論的教學設計原則

Sweller 等人 (1998) 根據各學科的研究成果，提出一些教學設計原則，共七項效應，如下：

1. 示例效應 (worked example effect)

示例效應是指教程序性知識前，先呈現適當的例子供學生參考，可降低外在認知負荷。

2. 完成問題效應 (completion problem effect)

完成問題效應是指呈現一半解法，剩下由學習者完成，可降低外在認知負荷。

3. 型態效應 (modality effect)

型態效應是指，處理訊息時，可經由多重管道，分別處理不同的性質的訊息，而非單一模式。運作記憶區有二套訊息處理系統——視覺（如：動畫）與聽覺（如：旁白），二者同時出現可降低短期記憶負荷。

4. 開放目的效應 (goal-free effect)

開放目的效應是指，讓學生不受限制表達自己的思考過程的任一步驟和成果。

5. 分散注意力效應 (split-attention effect)

分散注意力效應是指，面對多重訊息時，這些訊息須加以整合，最好同時、同位置呈現，才能達到學習。若不同位置或不同時間呈現，注意力分散，便增加負荷。

6. 重複效應 (redundancy effect)

重複效應是指，面對多重訊息，但訊息自身可獨立呈現不須整合就能理解，若同時、同位置呈現，便增加運作記憶負荷。

7. 變化效應 (variability effect)

變化效應是指，進行解題練習時，變換不同的問題狀態和情境，其雖然會造成認知負荷，但能促進學習遷移，有助於基模的建立與發展。

上述七種效應也可做為數學教學設計的原則。可運用於數學教學活動設計與教學實務，也可以運用於數學課本、習作、教學媒體的選擇，甚至可運用於自編數學教材，以及簡報、學習單、教學媒體等的製作。

參、認知負荷理論在數學教學上的應用

從前述的認知負荷理論來看，認知負荷對於學生的學習有深遠的影響。但是在一個班級中，學生的程度差異大，同一問題對於不同的學生可能產生不同的認知負荷，尤其低成就者，其能承受的認知負荷能力勢必比一般學生還要低。因此凡有助降低認知負荷的教學，都是數學教學設計與教學過程中可加以運用的。筆者現根據上述理論的教學意涵及所提的教學設計原則、相關教學文獻，考慮自己的教學經驗，在本文中提出教學階段應用的策略、方法及建議。這四項建議可以應用在不同的活動：準備活動、發展活動、結束活動及評量活動。

一、準備活動

學習者不同程度的專門知識、先備經驗也造成不同程度的內在認知負荷。是以教學之初，教師最好能進行檢驗學生是否已具有先備知識，若未具備則予以補救或協助，以降低學習時的內在認知負荷，此時即使外在認知負荷稍高，學生也可順利學習。例如進行小學三年級乘法「直式算則」教學時，學生須具有「倍」與「位值」的概念、加法計算能力、熟練乘法表。所以教學之初最好能進行「倍」、「加法計算能力」、「乘法表」等先備知識、技能的檢驗或複習，尤其二年級才學過乘法概念，少部分學生尚未完全熟練乘法表，對於無法熟練乘法表的學生，可暫時允許其查看乘法表解題，但也須利用額外時間讓其熟練乘法表。

二、發展活動

教學活動進入發展活動，表示已進入主要教學目標的學習階段。此時，教師可視時機進行下列的策略，降低學生的認知負荷，提升學生的學習。

教學時使用能降低外在認知負荷的教材

Sweller 等人根據各學科的研究成果，提出開放目的、示例、完成問題、分散注意、形態、重複、變化等效應，做為降低外在認知負荷的教學設計原則 (Sweller, et al., 1998; Van Merriënboer & Ayres, 2005)，可應用於數學教學活動設計及實際教學活動：

1. 示例效應的應用

課本或習作若沒有先呈現適當的例子供學生參考，教師教學或教學設計可加以應用。例如，進行四則運算練習、解題策略的應用、勾股定理、多項式運算，可多舉類似題目供學生演練。

2. 完成問題效應的應用

課本或習作若沒有呈現一半解法，剩下由學習者來完成時，教師教學時可加以使用。例如，除法直式教學 $455 \div 7$ 時，第一步驟（商用 6）可由教師示範與講解完成，第二步驟（商用 5）由學生求解完成解答（商 65）。比較複雜的算式（如四則運算）或文字題，亦可用此法。

3. 變化效應的應用

課本或習作中，若沒有變換不同的問題狀態和情境（尤其是與主要概念有關的非例行性的問題），教師教學時可加以使用。例如，在加減法文字題方面，比較型減法教學時，應多呈現不同情境的問題供學生練

習：「紅彩帶 23 公分，綠彩帶 9 公分，誰比較短？短多少？」或「小新有 28 顆彈珠，小牛有 19 顆彈珠，誰比較多？多多少？」等。

4. 型態效應的應用

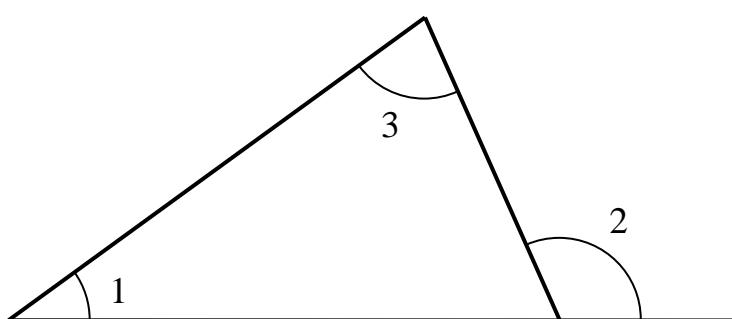
處理訊息時，可經由多重管道，分別處理不同的性質的訊息，二者同時出現可降低記憶負荷。所以，教師教學設計或教學時可加以運用。例如，當教師進行文字題教學時，圖示可以搭配口語解釋進行教學。

5. 開放目的效應的應用

開放目的效應是讓學生自由表達思考自己的自然想法的過程和成果。此效應在數學教學上的應用就是允許學生以其自然想法解題。例如，教小學二下學生解：「一條口香糖有 7 片，買 4 條有幾片？」的乘法問題時，學生尚未建立乘法概念，也未熟練乘法表，教師可暫時開放學生使用任何合理的自然想法解題（如：利用連加解題），待乘法概念穩固，乘法表熟記後，再要求使用乘法策略解題，此時產生了增生認知負荷，內在認知負荷已降低，已能承擔較高的外在認知負荷。

6. 分散注意力效應的應用

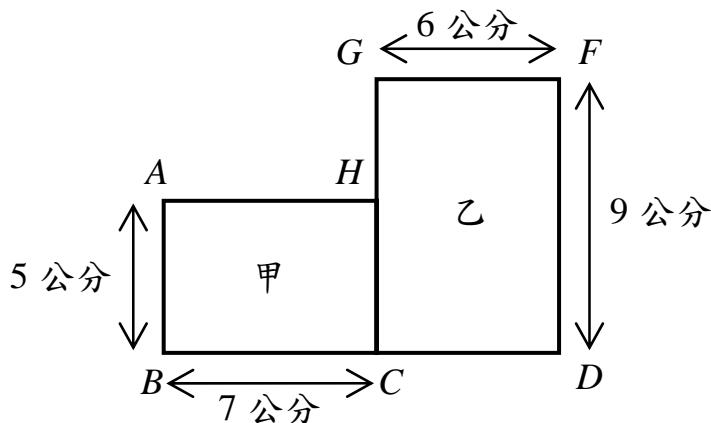
分散注意力效應雖應用於課本中的訊息呈現，但教師進行教學或評量命題時，也宜注意此效應的問題。如果所選用的課本與評量題目已出現此類問題，教師也宜教導學生如何統整這些訊息，將此問題加以排除。例如，在三角形的角度問題，：「下圖的 $\angle 1 = 36^\circ$ ， $\angle 2 = 114^\circ$ ，請問 $\angle 3$ 是多少度？」



此問題的圖和問題的訊息 ($\angle 1 = 36^\circ$ 、 $\angle 2 = 114^\circ$) 分開，有時甚至隔頁（須翻頁）呈現，此時，可指導學生 36° 與 114° 的數字直接寫在圖中，這樣寫下去，使一一對應的角度呈現，可以馬上降低認知負荷。

7. 重複效應的應用

重複效應也應用於課本中的訊息呈現，但教師進行教學或評量命題時，也宜注意此效應的問題。如果所選用的課本與評量題目已出現此類問題，教師也宜教導學生如何排除。例如，在面積問題：「甲長方形的長 $AB = 5$ 公分，寬 $BC = 7$ 公分；乙長方形的長 $DF = 9$ 公分，寬 $FG = 6$ 公分，請問二長方形面積和是多少？」



此問題中，文字或圖中所提供的訊息，都足以解題，實不須同時出現二種訊息。當出現此類問題，可指導學生只選擇其中一訊息（足以解題的訊息）或排除不必要的訊息進行思考就好。但應用此效應時，須注意逆轉效應的問題。

教學生使用學習策略與後設認知策略學習概念或解題

Gerjets 和 Scheite 認為學習策略可促進增生認知負荷。Valcke 認為後設認知策略是增生認知負荷的一部份。所以，教學時宜使用且教學生使用學習策略、後設認知策略幫學生學習。相關文獻包括：涂金堂和林佳蓉 (2000)、Gagne, Yekovich & Yekovich (2005) 及 Montague (1992)。從研究者的經驗歸納出可供應用的策略包括：

1. 運用組織化 (organization) 策略強化記憶或概念

「組織」歷程是把訊息分成次級群組，然後指定出這些群組之間的關係歷程 (Gagne, et al., 2005)。它可以增強在提取時管理有限容量的工作記憶，同時也可提供有效的提取線索。而在數學知識、概念中，也有類似組群關係，學習者亦可加以應用。例如：教三角形概念，可讓學生繪製三角形的組織架構圖：依角度可分鈍角三角形、直角三角形、銳角三角形；依邊長可分等腰三角形、正三角形、一般三角形；同時

和角與邊有關者為等腰直角三角形。再從架構圖中去區分各個三角形的特徵，以強化概念與增強記憶。

2. 使用詳細論述（elaboration）策略強化記憶或概念

「詳細論述」是去增加已學得知知識的歷程。此歷程可以是一個推論、補續、例子、細節、心像、或是其他可以連結訊息的事物（Gagne, et al., 1993/2005）。簡單的說就是將訊息與長期記憶的相關記憶連結。例如：進行線對稱教學時，可讓學生試著說明為何稱之為線對稱？生活中有哪些東西是屬於線對稱圖形？甚至讓學生繪製線對稱的圖形，讓學生擬題等，都可達到詳細論述的效果。

3. 利用類比策略穩固知識

類化（analogy）是指兩種相似情境、問題或概念的關係；而類比推理是將兩種情境放在一起做比較，找出其間的相似與差異（Ashcraft, 2004）。小學階段有關量的單位知識學習，長度單位有公厘、公分、公尺、公里；重量單位有公克、公斤、公噸；容量單位有公撮、公升、公秉。這些知識的學習學生容易混淆，而造成日後學習的認知負荷。但三種單位量，其各自的單位換算都有比例上的結構關係。例如，在測量重量的教材中， $\text{公克} : \text{公斤} : \text{公噸} = 1 : 1000 : 100000$ ；公撮、公升、公秉，以及公厘、公尺、公里也有同樣的比例關係；而這些關係與金錢的 1 元硬幣、千元鈔票、百萬元之關係相同。所以，教師教學時，就可將已熟悉的知識來類比，增加連結，以降低認知負荷。譬如，學生進行「公克、公斤、公噸」之換算學習時，學生若已熟練「1 元硬幣、千元鈔票、百萬元」的關係，教師就可引導學生進行類比教學：「公克相當於 1 元錢幣，公斤就相當於千元鈔票，公噸就相當於百萬元」；而重量與容量也可做類似的類比。這種利用既有的知識結構類比新知識的學習，可降低學生學習時的認知負荷。

4. 教導學生使用後設認知策略解題

後設認知策略是一種用來評量向目標前進的策略，對學習者本身所使用的方法進行監控，以達目標的策略；此策略可降低學生的認知負荷。

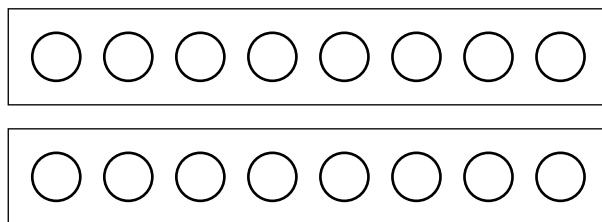
4.1 教導學生利用刪去多餘訊息或圈選重要訊息瞭解題意

文字題中，有時會有無關的訊息阻礙學生掌握題意；可教導學生依問題把不要的語句刪除。例如，在高度問題：「爸爸高 170 公分、重 72 公斤；媽媽高 160 公分，重 48 公斤，請問爸爸比媽媽高幾

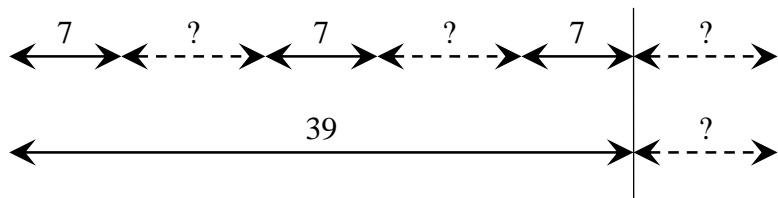
公分？」。可以教學生刪除多餘訊息(重量)以協助學生掌握題意，或把重要訊息(高度)圈起來，亦可達到相同的結果。

4.2 教導學生透過操作(半)具體物、畫線段圖理解題意與解題

文字符號若能透過具體物或圖像(半具體)加以表徵，要比純文字還要令人容易理解。所以，教導學生以簡單的圖形(花片或線段)表徵題意，學生更容易掌握題意。例如，在倍數問題：「一盒巧克力糖有 8 個，2 盒巧克力糖有幾個？」可用下圖來表徵題意，有利學生瞭解與解題。



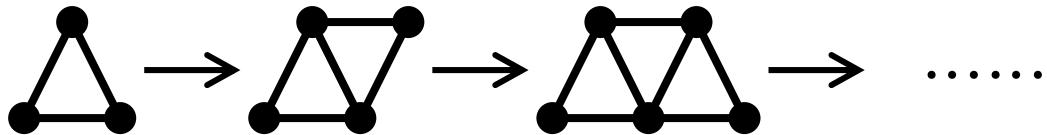
又例如：「妹妹今年 7 歲，媽媽今年 39 歲，幾年後，媽媽的年齡是妹妹的 3 倍？」，學生如果沒有學過一元一次方程式的解法，光從語意來思考，是很難尋找出解題方法；如果教學生利用線段圖表徵問題，再從線段圖思考解題方法就容易多了：



從線段圖可輕易瞭解媽媽今年的年齡(39)，剛好是妹妹今年年齡(7)的 3 倍加上 2 倍「幾年後」，所以從「 $(39 - 7 \times 3) \div 2$ 」就可求出答案。

4.3 繪製表格以尋找規律

有些數學題目其問題中有一些規律關係存在，但光從文字題意，甚至圖解表徵中都不易發現其規律，此時勢必增加學生解題時的認知負荷；若把這些關係繪製成表格，學生可藉由表格中數字的規則呈現來降低認知負荷，而求得解答。例如，在找火柴數字規律的問題中：「如下圖，拿火柴棒排三角形，當排出 20 個三角形時，總共需要幾根火柴棒？」



此類問題，可以依題意繪製成下面的表格：

三角形個數	1	2	3	4	5	6
火柴棒總數	3	5	7	9	11	13

從表格中，很容易發現，火柴棒的總數剛好是三角形的個數的「2倍 + 1」；也就是「三角形個數 $\times 2 + 1$ 」。所以，排出 20 個三角形需「 $2 \times 20 + 1 = 41$ 」根火柴棒。又例如：「 2^{100} 的個位數是多少？」也可利用此法求解。

教學生使用促進基模精鍊的策略

基模的精鍊可降低內在認知負荷。基模的精鍊可採用下列的策略：同時呈現基模的例子與非例子、選擇相似的非例子、建立差異事件 (Gagne, et al., 2005)。例如，進行正方形教學時，要呈現大小、顏色不同的各類正方形的例子之後，緊接著呈現不是正方形的非例子，如正三角形、四邊形、梯形、平行四邊形；接著呈現一個與正方形相似的菱形、筝形、長方形的非例子供學生選擇，讓其找出這些與正方形很相似的非例子圖形；最後比較這些例子與非例子的差異。

三、結束活動

結束前進行歸納總結以穩固基模

進行一節課的數學知識或概念學習，不管教師是採用講述教學或小組討論教學，學生在最後所形成的知識尚不清晰、不穩固，尤其是透過小組討論學習者，學生的數學知識或概念更有可能是錯誤的。因此，在一節課或一單元結束之前，教師最好能針對該節課或該單元的主要教學目標（重點）進行歸納總結，讓學生所形成的基模更為清楚、穩固。

課後熟練基模與自動化技能

藉由練習而將基模、技能運作自動化，可減少運作時所需的記憶空間，也降低認知負荷。尤其是加減計算技能的熟練，是眾多學科知識、技能的

學習基礎。自動化的教學策略有：精熟次技能或先備程序、促進組合、促進程序化等三個歷程。例如，進行加法計算技能學習時，先透過具體操作（積木）讓學生理解「不進位」加法的道理，再讓學生獨自解題；然後，同樣的過程進行「進位」加法學習；接著綜合練習不進位與進位的練習；最後進行有系統的複習以熟練計算。但有關算則練習、心算、乘法表的熟練，可融入遊戲或出有思考性的問題。例如，在解等差數列的總和問題中：「 $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = (\)$ 」，宜提問「還有沒有其他更便利的解法？」來促進學生思考，以避免反覆練習所造成的疲乏、厭倦、及心理定勢的問題。

四、評量活動

評量依教學順序大概可分診斷、形成性、總結性的評量；就呈現方式而言，最常見的有紙筆和口頭的評量。所以，本文所稱評量階段，不光只是總結性評量或紙筆評量。

整合圖文與排除多餘的訊息

上述「分散注意力效應」與「重複效應」在評量時也可加以運用，如何應用請見上文。

幫學生搭鷹架減輕學生的認知負荷

上課教材或習作、學習單、評量等，題目的呈現方式若過於簡略，將造成認知負荷；若藉由逐步減化問題，也就是將問題依序分成幾個次問題（郭秀緞，2005），幫學生搭鷹架，將可降低問題的難度。例如，在重量化聚問題：「一包黑糖 480 克，5 包有多少公斤？」，學生要成功解題，須先進行乘法計算，再化成公斤，才能解題成功，學生的思考做二次轉折，難度較高；此題若是評量或學習單的題目，可改成「一包黑糖 480 克，5 包有多少克？也可以說多少公斤？」藉多個次問題協助解題。若是教學中所布的問題，可逐步提問「5 包有多少克？」、「1 公斤有多少克？」、「2400 克是多少公斤？」的問題，來幫助學生搭鷹架，以減輕認知負荷。但筆者亦認為，教師是否幫助學生搭鷹架，宜視個別學生及不同的時機而定，否則可能產生逆轉效應；但當學生達到學習目標後，則要逐漸撤退鷹架，直到不須鷹架（Van Merriënboer, Kirschner & Kester, 2003）。

肆、理論與實務的結合

澳大利亞學者 Sweller 以人類如何接受訊息、處理訊息的認知觀點，陳述人類學習時的限制，及如何改善這些限制的理論，因而提出認知負荷理論。筆者們在本文率先考慮認知負荷理論的基本假定有：工作記憶的容量是有限的、長期記憶的容量是無限的、知識是以基模型態存於長期記憶中、基模自動化可降低工作記憶的負荷量等，這些假定點出人類知識學習的限制與展望，及突破限制的方法，教師宜瞭解學生學習數學上的限制，並致力於開發突破限制的方法。另外介紹認知負荷的來源，包括因果要素與評估要素，因果要素影響學生的學習，因此教師進行數學教學或設計時須注意這些要素對學習的影響；而評估要素則可做為瞭解學生學習數學時的負荷。以教學設計的觀點來分類認知負荷的來源，其可分內在、外在及增生等認知負荷；內、外在認知負荷妨礙學習，增生認知負荷卻是適當的負荷，有益學習，但三者的負荷總量不能超過工作記憶負荷量的限制，教師在負荷總量下，盡量降低內、外在認知負荷，多增加增生認知負荷。而與數學教學有密切關係的認知負荷理論研究有：增加學習策略與後設認知負荷、學習動機對認知負荷的影響、專門知能的逆轉效應，這些研究擴充了認知負荷理論。認知負荷理論的教學設計原則，是由 Sweller 等人根據各學科的研究成果所提出，這些原則有開放目的、示例、完成問題、分散注意、形態、重複、變化等效應，前六項可降低認知負荷，最後一項雖增加負荷卻有利基模的建立，這些效應可做為教學設計與教學時的參考原則。本文就認知負荷理論的探討，提出其在數學教學上的意涵。

筆者們就認知負荷的觀點及其在數學教學上的意涵，數學教學的準備活動、發展活動、結束活動、評量活動，提出教學方法、策略或建議，組織團隊試教及分享，於本文報告成果。進行準備活動時，宜進行先備知識的檢驗或複習，可降低學生學習數學的認知負荷。實踐發展活動時，宜使用能降低外在認知負荷的教材呈現策略（如：示例、完成問題、變化、型態、開放目的、分散注意力、重複等效應之應用），以降低數學教材安排的負荷；可教學生利用「學習策略」與「後設認知策略」學習知識、概念、技能、解題，以增加學習成功的機會；可利用「促進基模精鍊的策略」穩固數學知識與概念。實施結束活動時，宜促進基模與技能的自動化，增加學生的專業知能；評量活動，宜幫學生搭鷹架減輕學生的外在認知負荷。

最後，筆者們期望本文分享的理論與實務結合成果，對數學教育工作者有所助益，更希望學生不再認為數學是困難的科目。

參考文獻

- 邱上真、詹士宜、王惠川、吳建志（1995）。解題歷程導向教學對小學四年級數學科低成就學生解題表現之成效研究。《特殊教育與復健學報》，4，75－108。
- 涂金堂、林佳蓉（2000）。《如何協助學生解決數學應用問題》。高雄：復文。
- 陳密桃（2003）。認知負荷理論及其對教學的啓示。《教育學刊》，21，29－51。
- 郭秀緞（2005）。以認知負荷的觀點探討數學問題設計的適切性。《教育研究》，13，169－182。
- 梁淑坤、梁惠珍、曹潔如（2007）。共同學習機制之建立：遠哲西子灣數學教師成長工作坊及分享創作成果。《數學教育》，25，31－43。
- Ashcraft, M. H. (著), 陳學志 (主譯) (2004)。《認知心理學》。台北：學富。
- Gagne, E. D., Yekovich, C. W., & Yekovich, F. R. (著), 岳修平 (譯) (2005)。《教學心理學 — 學習的認知基礎》。台北：遠流。
- Gerjets, P., & Scheiter, K.(2003). Goal configurations and processing strategies as moderators between instructional design and cognitive load: Evidence from hypertext-based instruction. *Educational Psychologist*, 38(1), 33－41.
- Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J.(2003). The expertise reversal effect. *Educational Psychologist*, 38(1), 23－31.
- Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, 25, 230－248.
- Mousavi, S.Y., Low, R., & Sweller, J.(1995). Reducing cognitive load by mixing auditor and visual presentation modes. *Journal of Educational Psychology*, 87(2), 319－334.
- Paas, F., Tuovinen, J.E., van Merriënboer, J.J.G., & Darabi, A. A.(2005). A motivational perspective on the relation between mental effort and performance: optimizing learner involvement in instruction. *Educational Technology Research & Development*, 53(3), 25－34.
- Paas, F., & Van Merriënboer, J.J.G.(1994). Variability of worked examples and transfer of geometrical problem-solving: A cognitive load approach. *Journal of Educational Psychology*, 86(1), 122－133.

- Sweller, J. (1989). Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology*, 81, 457 – 466.
- Sweller, J., (1994) . Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, 4 (4), 295 – 312.
- Sweller, J., & Chandler, P. (1994). Why some material is difficult to learn. *Cognition and instruction*, 12(3), 185 – 233.
- Sweller, J., Van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251 – 296.
- Van Merriënboer, J. J.G., & Ayres, P. (2005). Research on cognitive load theory and its design implications for e-learning. *Educational Technology Research & Development*; 53 (3), 5 – 13.
- Van Merriënboer, J.J.G., Kirschner, P.A., & Kester,L.(2003). Taking the load off a learner' mind: Instructional design for complex learning. *Educational Psychology Review*, 38(1), 5 – 13.
- Van Merriënboer, J.J.G., & Sweller, J.(2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Educational Psychology Review*, 17 (2), 147 – 177.

作者電郵：
wu52@ms9.hinet.net
law@mail.nsysu.edu.tw