



國立中山大學教育研究所碩士在職專班

碩士論文

國中三年級學生二元一次方程式解題策略及錯誤類型之研究



研究生：李憶琴撰

指導教授：梁淑坤

中華民國 96 年 6 月

## 誌 謝

本論文之完成，衷心感謝恩師梁淑坤教授的悉心指導與鼓勵。梁老師的言教及身教，給予我非常多的啟示。老師從無到有，包含提供文獻資料、幫我們建立正確觀念架構、以迄論文之撰寫，不斷地予以啟迪，更對初稿逐字斧正，使得本論文得以順利完成，師恩浩瀚無垠，我會一生感念。此外，口試老師楊淑晴教授、溫武男教授也給予許多寶貴的建議與指正，在此致以最深的謝意。

感謝學校裡諸多好同事給我的配合與協助，使我的學業得在二年內順利完成，併此申謝。另外孟惠和榮達則是這段期間配合度最佳的同窗兼戰友，在教學心理學這門課中的通力合作，是一輩子難忘的回憶。姿伶姐姐的努力及執著，則給了我很多的啟示與勇氣，一起拼論文的梁門師兄弟，還有其他共同奮戰二年的同學，若沒有你們的陪伴，我一定會走得更辛苦，特此一併致謝。

當然，我親愛的爸爸媽媽、婆婆和家人的鼓勵與支持是功不可沒的，尤其我親愛的公，雖然長期不在身邊，但他給我的心理支持大於一切，還有二個可愛的寶貝，俊呈和品萱，他們無限的包容我這個壞脾氣的媽咪，尤其是在沒日沒夜拼功課和論文的日子里，沒有他們的乖巧和懂事，就不會有今天的成果。衷心感謝所有愛我、及我愛的人，擁有你們，我真的很幸福。

李憶琴 謹識

中山大學教育研究所

中華民國九十六年六月

# 國中三年級學生二元一次方程式解題策略 及錯誤類型之研究

## 摘要

本研究以基本學力測驗試題為藍本改編進行施測，分析 207 位國三學生在二元一次方程式單元之解題策略及所出現的錯誤類型，再依據晤談內容，探究學生可能出錯的原因。

研究結果發現學生在計算題策略中，主要運用加減消去法。文字題則為組織並列式。計算題的錯誤類型主要為等量公理、分配律、及其他概念如正負數四則運算、指數律、分數的特殊計算型態（如約分）等概念上的錯誤。而文字題則以文字的轉譯和整合錯誤佔最多。經由晤談所分析的錯誤原因，在計算題上包含新舊學習經驗的互相干擾；算術和代數運算法則的混淆；或是以自行建構的錯誤概念計算等三項。而文字題部份，則包含了語言能力不足；文字題的整合及監控上的能力不足；以及解題策略有限，不會利用其他方法解題。

最後針對研究結果，提出三方面的建議，以作為未來研究之參考。也希望本研究能幫助教師在教學方式及內容上更加生動多元，引發學生學習興趣及提高師生互動品質，對學生的學習有所裨益。

**關鍵字：**二元一次方程式、解題策略、錯誤類型

# A Study of Problem-Solving Strategies and Errors in linear equations with two unknowns for Junior High School Students

## Abstract

This research referred to Basic Competency Test from 2001 to 2006 to construct test and analyzed 207 ninth-graders' problem-solving strategies as well as errors in solving linear equations with two unknowns. Furthermore, the investigator referred to the contents of interview, to investigate the factors that cause students' mistakes.

Results shows that the main strategy for solving equations is 'to add and subtract the elimination approach', while for solving application problems is 'organizing side by side'. The errors for solving equations are mistaking concepts including Equality Axiom, etc. The errors for solving application problems are mostly concerned about the translation and holistic mistake. Through analyzing data from interviews, the reasons for mistakes in solving equations are: mutual interference of experience; mixed up different operation rules; or, solving a problem with the wrong concept built by themselves. The reasons for mistakes in solving application problems are: insufficient language ability; the lack of the self-monitoring; and limitation in strategies for solving problems.

Finally, based on the results of this research, the researcher gave suggestions in three aspects. Hopefully, this research can assist teachers to have more variety in teaching methods heading towards an aim to benefit in students' learning.

## **Keywords :**

**Linear equations with two unknowns, Problem-solving strategies, Errors.**

# 國中三年級學生二元一次方程式解題策略 及錯誤類型之研究

## 內容目次

<b>第一章 緒論</b> .....	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的與待答問題.....	5
第三節 名詞解釋.....	5
第四節 研究範圍及限制.....	7
<b>第二章 文獻探討</b> .....	8
第一節 文字符號概念 .....	8
第二節 方程式概念之相關研究.....	16
第三節 數學解題之相關研究 .....	20
<b>第三章 研究方法</b> .....	26
第一節 研究對象.....	26
第二節 研究設計及工具 .....	27
第三節 實施步驟.....	35
第四節 資料處理.....	37
<b>第四章 結果及討論</b> .....	38
第一節 二元一次方程式解題正確及錯誤百分比 ...	38

第二節 二元一次方程式之解題策略研究.....	43
第三節 二元一次方程式之解題錯誤類型.....	61
第四節 二元一次方程式之解題錯誤原因分析.....	84
<b>第五章 結論及建議</b> .....	<b>99</b>
第一節 研究結論.....	99
第二節 研究建議.....	104
<b>參考文獻</b> .....	<b>108</b>
附錄 A 二元一次方程式單元測驗預試試卷 .....	115
附錄 B 改編後試題與原基本學力測驗題之差異 .....	121
附錄 C 二元一次方程式單元測驗正式施測試卷 .....	131
附錄 D 晤談計畫 .....	135
附錄 E 學生在各類型中之解題正誤百分率統計表.....	137

## 附表目次

表 1-1	自 1977 至 2002 年 PME 代數研究的主要議題 .....	15
表 3-1	研究樣本班級之基本資料表.....	27
表 3-2	「二元一次方程式單元測驗」預試題目雙向細目表.....	31
表 3-3	「二元一次方程式單元測驗」正式試卷雙向細目表.....	34
表 4-1	所有題型答題正確與錯誤百分比統計.....	39
表 4-2-1	第 (1) 題所使用的解題策略.....	46
表 4-2-2	第 (3) 題所使用的解題策略 .....	47
表 4-2-3	第 (4) 題所使用的解題策略.....	48
表 4-2-4	第 (5) 題所使用的解題策略.....	51
表 4-2-5	第 (6) 題所使用的解題策略.....	53
表 4-2-6	第 (8) 題所使用的解題策略.....	55
表 4-2-7	第 (9) 題所使用的解題策略.....	56
表 4-2-8	第 (10) 題所使用的解題策略.....	58
表 4-3-1	第 (1) 題所出現的錯誤類型.....	64
表 4-3-2	第 (3) 題所出現的錯誤類型.....	65
表 4-3-3	第 (4) 題所出現的錯誤類型.....	66
表 4-3-4	第 (2) 題所出現的錯誤類型.....	69
表 4-3-5	第 (5) 題所出現的錯誤類型.....	70

表 4-3-6	第 (7) 題所出現的錯誤類型.....	73
表 4-3-7	第 (11) 題所出現的錯誤類型.....	74
表 4-3-8	第 (6) 題所出現的錯誤類型.....	76
表 4-3-9	第 (8) 題所出現的錯誤類型.....	77
表 4-3-10	第 (9) 題所出現的錯誤類型.....	79
表 4-3-11	第 (10) 題所出現的錯誤類型.....	81

## 附圖目次

圖 2-1	《九章算術》中的方程組.....	17
圖 2-2	天元術中的方程式表示法.....	18
圖 3-1	二元一次方程式之教材地位分析圖.....	28
圖 3-2	「二元一次方程式單元測驗預試」各題正確率統計圖.....	32
圖 3-3	實施步驟流程圖.....	37

# 第一章 緒論

## 第一節 研究動機

記得有一次，在國三的班上出了一份考卷，內容是 35 題選擇題，但是忘了配分，靈機一動，請同學幫忙算一算，每題 2 分或 3 分，滿分 100 分，那麼 2 分的有幾題？3 分的有幾題？這時只見底下愣了幾秒鐘，然後有人怯怯的問：「老師，妳在說什麼？．．．」從這個小插曲中，我發現了學生對於上課所學的數學知識和現實生活情境中所遇到的問題很難加以連結，雖然學了那麼多年的數學，在遇到生活中所出現的實際問題時，還是不知如何應用所學過的概念來解決，這實在是數學教育中很無奈的一件事。

除了研究者在國內的教學經驗外，就其他國家而言，解決實際生活情境中數學問題能力的重要性也相當受到重視。早在 1980 年，全美數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，NCTM）就在其行動綱領中提出「問題解決（problem-solving）是 1980 年代裡數學教育發展的重要焦點」，到 1989 年 4 月 NCTM 又公佈了數學課程及評量的標準，其中解題擺在第一位。同樣的，我國教育部公佈的九年一貫數學領域課程中，不管在總綱或是課程目標、分段能力指標，與上述 NCTM 一樣，均強調要培養解決問題的能力。可見無論在國內或國外的觀點上，解題能力在數學教育上的重要性，毋庸置疑。

民國 92 年公佈的九年一貫課程綱要中，將國中數學領域分為數和量、幾何、代數、統計與機率、連結等 5 大主題，而在「代數」領域中，由方程式衍生出來的觀念及題型，在以上 5 大主題中屢見不鮮，方程式是其他許多數學概念的基礎，由此可見其重要性。有經驗的老師都知道，雖然在國一上學期，同學們已經接觸了一元一次方程式，也對所謂文字符號有了最基本的概念，但是大部份的同學只是用背誦的方式將解題方法記住，然後再經由不斷的練習去熟練技巧，這種方式因為對未知數的涵義只是一知半解，到國一下學期學習二元一次方程式時，便開始造成混淆不清的狀況。

以上國內學生學習方程式的困難，在國外也有類似狀況。根據全美國家教育進展評鑑（National Assessment of Educational Progress, NAEP）在 1992 年的研究中，歸納 13 至 17 歲學生的代數技能及理解情形，發現學生在解方程式及利用文字符號列出方程式方面，均存在學習上的困難，顯示出學生在學習文字符號時確實呈現較低成就（Carpenter et al., 1982），而且在未知數個數增加時，此困難更加顯著。在加拿大，多數學生則認為代數的觀念及技巧是記憶性的，尤其是關於解方程式的學習（Kieran, 1992）。因為學生在學習代數時，常被要求作一些零碎而沒有目的的練習，只是重複的演練枯燥，無意義的題目，最後對於方程式的概念卻依然似是而非。

由上所述，無論在國內外，學生初學代數的時期，對於方程式的例

行性運算規則和概念之間的關係，始終無法區分得很清楚。所以學生在學習方程式的解題時，如果一開始對於文字符號的概念和運算規則不夠清楚，那麼類化到之後的一元一次及二元一次方程式時便會發生顯著的困難。國中階段的二元一次方程式，除了是一元一次方程式的延續以外，也會往後延伸到直角座標系中的直線方程式。其兼具代數和幾何的特質，是很有趣也很重要的一個單元，研究者發現在實際教學中，同學在此會顯現出迥然不同的解題風格，有的迅速確實，手到擒來，有的則是千迴百繞，無所適從。這二者的差別主要在於解題時所運用的不同思考模式。

根據 Hiebert (1986) 所著「數學的概念性及程序性知識」(Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics) 中，定義概念性知識為具廣泛連結的特質，藉助不同訊息間之關係建立而成。而程序性知識則包含二種內涵，分別為數學符號表徵系統以及解決數學問題所需的律則 (law)、算則 (algorithms) 或程序 (procedures)。真正的數學理解必須建立在此二種知識的連結上。二者連結一旦建立，概念性知識使數學的符號表徵有意義，也使數學計算程序方便記憶，並有效應用。學生在初學「以符號代表數」時，先學習到將具體數字抽象化的概念，進而透過外在符號表徵出其思考模式，再經由解方程式之固定程序以完成解題，在這個環節中，運籌得當的同學解題便如魚得水，輕鬆自得。但是相反的，之前的認知概念如果不够清楚，在題型稍微變化後，便會打亂其思考模式，無法和

原有基模作有效連結，而導致挫折，而產生這種錯誤的原因是很值得探討的。

Schwarzenberger 認為錯誤的解答和正確的解答一樣重要（引自王如敏，2004）。當解題產生錯誤時，我們應該幫助學生釐清究竟是概念上還是程序上的錯誤，如果是同學在建構教師上課所給予訊息的過程中出現錯誤，那麼便要從重新給予正確概念著手，當然這個錯誤也有可能是因為學生不用功所導致的不熟悉計算過程所致。探討學生面對問題所引發的概念及解題策略，尤其是分析學生解題時發生的錯誤類型，可以了解學生在過去學習活動及經驗中所累積的種種認知錯誤，進而作為診斷及補救教學的依據，故其重要性不言而喻。

此外，學生是否能合宜的運用不同的策略解決問題，也是研究者想探討的一個問題。因為一個好的解題策略，可使解題者有效率的解決問題，反之，一個不適宜的解題策略，除了無法獲致正確答案以外，有時也會使解題者誤入解題方向並因而浪費許多時間。

研究者認為，數學教育目標，首要在培養同學以數學觀點及思維解決生活中可能遇到的種種問題。在從具體的數字運算到抽象的符號表徵這種課程安排之下，我們深切期望學生能由所遇到的問題中自行建構其規則，並能轉換為數學模式表達並解決問題。如果能釐清同學在此單元所遇到的瓶頸，探討其正確解題策略或是錯誤原因，作為教學參考及改進依

據，相信對教師和學生都會有莫大助益，此為本研究動機所在。

## 第二節 研究目的及待答問題

基於以上研究動機，本研究之研究目的為

- 一、 國中學生對於二元一次方程式所展現的不同解題能力。
- 二、 國中學生在二元一次方程式單元所運用的解題策略研究。
- 三、 國中學生在二元一次方程式所出現的錯誤類型及原因分析。

而待答問題為

- 一、 國中學生在二元一次方程式的解題能力有何差異？
- 二、 國中學生解二元一次方程式所使用的解題策略為何？
- 三、 國中學生解二元一次方程式所產生的錯誤類型及原因為何？

## 第三節 名詞解釋

本研究所探討的名詞解釋如下：

- 一、 二元一次方程式 (linear equation in two unknowns)：指形如  $ax+by=c$  的方程式，其含有  $x$ ， $y$  兩個未知數，且未知數次數均為一次的數學等式。
- 二、 迷思概念 (misconception)：學習者於學習某一數理概念之前或學習之後，由於與環境交互作用，可能對此一概念，已經自行建構出另一套與科學界公認之詮釋不同的涵義，此種異於科學界公認之詮釋

涵義，謂之對應於此一概念之「迷思概念」(Schoenfeld, 1987)。

- 三、 概念性知識 (conceptual knowledge)：有多種說法，可以視為對主題領域所擁有的知識，包含學習者對於特定主題的了解和熟悉程度 (Resnick, 1987)。本研究則界定其為數學的定義及無爭論性的引理。
- 四、 程序性知識 (procedural knowledge)：程序性知識，學者也給予多種說法，其主要是指瞭解事情要如何做的知識，包括動作技能、認知技能與認知策略等方面 (Newell & Simon, 1972)。在本研究上，則界定其為數學的語法、演算規律，也就是推導或證明出數學事實及引理的演算步驟。
- 五、 解題歷程：Mayer (1992) 從認知心理學的觀點，將數學解題分成四部份：包括問題轉譯，問題整合，解題計畫及監控，解題執行。而本研究的解題歷程是指學生在面對解二元一次方程式的問題情境時，從假設到以未知數列式，並選定不同的方法 (策略) 求出正確解答的過程。
- 六、 解題策略：在數學解題的歷程中，對於不同的問題擬出適當的解題計畫，並完成解題(Polya, 1945)。在本研究中研究者將其分為解二元一次聯立方程式計算題的解題策略及解二元一次方程式文字題之解題策略兩個部分。

七、錯誤類型：在數學計算式中產生錯誤的解題步驟，依據其錯誤關鍵，分成幾種類型稱之（Kathleen, 1987）。本研究所討論的錯誤類型，是經由本研究之「二元一次方程式單元測驗」正式施測試卷及與學生面談資料分析歸類所得之錯誤類型。

#### 第四節 研究範圍及限制

一、研究範圍：本研究以高雄市、高雄縣、屏東縣各一所國中，共 207 位國中三年級學生為研究對象。

二、研究限制：

1、因為僅以高雄市、高雄縣、屏東縣地區各一所國中作研究，故所得結果只能推論到相同地區，若要作擴論，則須進一步研究。

2、本研究僅探討國中學生在二元一次方程式的解題上所產生的概念迷思及錯誤想法，至於其他變項如地區（城鄉差異）、性別、不同教師教學方式等，雖然也可能對學生解題產生影響，但此些變項並不在本研究探討之列。

## 第二章 文獻探討

### 第一節 文字符號概念

文字符號，在數學的學習內容中是一個基礎的概念，也是代數方程式的入門，尤其在算術過渡到代數的學習過程中，從引進並施行適當的運算，進而解決問題的學習上，更扮演著相當重要的角色。一套簡潔的符號系統在代數中能夠準確、深刻地表達某種概念、方法和邏輯關係，亦能把複雜的文字及數字的關係表達出來。這也就是代數課程在中學數學教育中被視為「廣義算術」

（generalized arithmetic）的原因（Booth, 1988）。但是，代數符號系統並非天然，不是人生來即具備，所以探討學生在數學學習中的文字符號概念，是過去許多學者一直不遺餘力的學者針對此主題加以研究的原因（袁媛，1992）。

#### 一、文字符號發展的歷史背景

若以歷史演進的觀點來看代數的發展，可以一窺代數語言符號化的過程。國內王懷權（1987）就指出符號的功能，在於使數學家將繁長的敘述化成簡短的式子，此功能正是數學語言威力最顯著的根源之一。而符號在國外的研究中，Kieran（1992）則是依西方數學不同時代的發展特徵，將代數符號的發展分為三大階段如下：（Harper, 1987; Kieran, 1992; 趙文敏，1985; 王懷權，1992; 方吉雄，2001）

### (一) 文辭代數階段 (rhetorical algebra stage)

文辭代數階段指的是在古代希臘數學家丟番圖 (Diophantus, 公元 246~330 年) 提出運用符號之前。這階段的特徵是使用一般語言敘述一些特殊問題的解決方法, 但缺乏對未知數的符號或特殊記號 (sign) 的使用。這個時期是代數的開始, 雖然文字符號的發展尚未成熟, 且各個民族的表示方式也不同, 但大部分都是為了解決日常生活的問題。如兌換錢幣、交換商品、計算長度面積、在商業或農業上計算都有著相當大的用處, 所以代數在此階段著重於其實用的層面 (列志佳、簡珮華、黃家鳴, 2000)。

### (二) 簡單代數發展階段 (syncopated algebra stage)

丟番圖是第一個自覺地運用數學符號的人, 他寫了一部有 13 卷的《算術》(Arithmetica)。在書中他運用了未知數, 創設了代表未知數的符號。自他開始, 至 16 世紀末左右被稱為簡單代數發展階段。簡單代數發展階段這個名稱並非指那些數學問題簡單, 而是說代數學已經發展至利用符號及較簡單的符號來代替文字, 以表達複雜的代數關係。如文藝復興時期使用 p 代表加 (plus), m 代表減 (minus) 等, 但當時只求特定方程式的解, 並沒有求出方程式的一般解, 例如, 把  $axx+bx=c$  和  $axx+c=bx$  和  $bx+c=axx$  視為三個不同的方程式。到此時, 代數的發展開始脫離文辭的階段。

### (三) 符號代數階段 (symbolic algebra stage)

這個階段大概始於韋達 (Francois Vieta, 法國, 1544-1603) 在 16 世紀用字母來替代給定量。它的特徵除了代數方程的係數以文字符號表示, 符號可如數字般化簡運算之外, 方程式的任何一端也可以置零。例如以  $axx+bx+c=0$  代表所有的一元二次方程式。

其後笛卡兒 (Rene Descartes, 1596-1650) 也開始看到代數的巨大潛力, 他認為代數學應該在數學其他各分支的最前列, 是邏輯的引申。他在《算法》(Le Calcul) (1638) 一書中把代數學看作一門獨立學科, 但當時還未形成一個完整的符號體系以表達高度抽象的數學材料。他的代數式中, 以  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ……表示已知數,  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ……表示未知數, 這種記法在十六、七世紀的歐洲逐漸發展普及。至此, 數學的基本符號體系從古至今花了三千餘年的時間才終於形成。

## 二、符號體系學習之概念

符號體系發展至今, 有很多學者根據學生學習狀況提出不同見解, 例如 Sfard (1991) 建議可以用程序性和結構性兩種不同的方式形成抽象的數學概念; Kieran (1992) 更進一步從歷史性的分析將代數的發展看做一種程序性到結構性的週期, 而學校代數的學習則可以理解為一系列的過程-客體 (即程序性-結構性) 的調整, 其中程序性指的是作用在「數」上的運算, 而結構性可以泛指實施在「代數式」上的運算。將二者敘述並舉例於下:

- (1) 程序性 (procedural) — 使用算術運算，以實際數字取代文字符號並求得代入後的結果值。例如在多項式  $3x-8y$  中， $x$ 、 $y$  分別代入 2、1 來求得其值為  $-2$ 。
- (2) 結構性 (structural) — 強調對代數運算規則的熟練運用。例如多項式中同類項合併之類的化簡運算。例如  $2x+3y-x-y$  可以合併為  $x+2y$ 。

而 Collis (1975) 將文字符號的概念分類成六種不同的使用層次：

- (1) 文字符號為可算出的值 (letter evaluated)，指文字符號代表一個設定的數值。如： $a-3=8$  中的  $a$ 。
- (2) 文字符號可忽略而不用 (letter ignored)，指文字符號雖然出現在題目中，但在解題過程中可不加以考慮。如： $a-b=43$ ，求  $a-b+2=?$  本例中，前後兩式只在加 2 的不同， $a-b$  可加以忽略，而直接求出答案為  $43+2=45$ 。
- (3) 文字符號當作物體 (letter as concrete object)，即文字符號為某一代表物的簡寫或標記 (label)，直接加以運算。如： $2a+5b+3a=5a+5b$
- (4) 文字符號當作特定的未知數 (letter as special unknown)，可以直接加以運算。如：一多邊形有  $n$  個邊，而且每邊長為 7，得周長為  $7n$ 。
- (5) 文字符號當作一般化的數字 (letter as generalized number)，即視文字符號代表一組數字而非單一數值。如： $c+d=10$ ，且  $c<d$  中， $c$

代表所有小於 5 的數。

(6) 文字符號當作變數(letter as variable)，即文字符號代表一未定的數值，如當  $n < 0$  時，比較  $n$  和  $2n$  的大小。

在代數式的表示上，文字符號至少有以上六種可能意義，它所代表的不再僅是數字而已，而可能是問題中某個數量，如長度、個數、年齡等。故 Schwartz (1976) 認為這些均屬於一種『可形容的數字』。Küchemann (1981) 更指出這些文字符號不但有量 (quantity) 的性質，更具有質 (quality) 的特色。所以學生在處理變數時經常感到困難，這往往與其無法辨認變數的涵義有關。不論從教師、學生或是教學觀點而言，代數符號的變化性都是很大的，如果學生只會機械性的操作符號而未曾思考其意義，對學習就會是一項挑戰，或許要加強學生對代數語意的理解可以從討論代數符號在不同情境下的涵義開始著手，然而這個過程也是目前教科書上所缺乏的。

### 三、文字符號概念認知層次之相關研究

許多學生在學習文字符號時，會認為文字符號只是一種新的符號，但在邏輯思考時卻仍使用舊的算術計算觀念；也就是說學生對於文字符號存在的只是刻板的觀念，並無法完全了解其所代表的意義。Wagner (1981) 認為數學上的文字符號只有當它出現在某種特殊情境和代表某種對象時才具有意義。教學應幫助學生克服文字表徵的困難。

Küchemann (1981) 則認為學生能否有意義的了解文字符號是影響其是否能有效學習中最重要的因素。二十年前，在英國倫敦大學 Chelsea 學院有個研究計畫“Concepts in Secondary Mathematics and Science”，簡稱 CSMS。CSMS 前後花了五年的時間(1974-1979)，研究中學生數學與科學理解能力發展層次的分類。在 CSMS 計畫中，Küchemann 根據 Collis 對文字符號使用概念層次的六種分類，對 3000 名 13~15 歲的英國學生進行紙筆測驗，從學生認知能力的不同，來探討學生對文字符號的了解情形及成就表現，他將學生對文字符號的解釋分成四個認知層次：

- (a) 層次一：學生能處理文字符號的求值（可用試誤或具體的方法，無須具備解方程式的能力）、忽略文字符號，或將文字符號當成物件的簡易文字符號問題。
- (b) 層次二：能作較為複雜文字符號問題，但無法一貫處理特定未知數、一般數、變數的問題。
- (c) 層次三：能將文字符號視為特定未知數、一般數或變數，但僅限於結構簡單的問題。
- (d) 層次四：能將文字符號視為特定未知數、一般數或變數，且能處理結構較為複雜的問題。

在其研究中，英國僅有 40% 的 15 歲孩童能到層次三，而能達到層次四的更僅有 9%。之後其所主持的 CSMS 研究報告結果更顯示，大部分

13 到 15 歲的學生只會把文字符號當成具體的實物或具體實物的標記 (label for concert objects)。他進一步分析學生學不好代數概念的原因有三：文字符號認知上的差異；記號、制約認知上的差異；以及解題過程受舊經驗影響。

以上 Küchemann 所得到的結果與國內的研究十分類似：郭汾派、林光賢與林福來（1989）參考英國 CSMS 小組所設計的題目對全國分區抽樣測試國中生在文字符號概念上的發展，在此研究中發現，台灣地區國中三年級學生約有半數只會作結構簡單的題目（如單一文字符號的運算），有 43% 可以達到層次三的水準，而能達到層次四的更僅有 13.1%，雖然比英國研究略高，但也可見不論中外，大多數中學生對文字符號概念的了解並不完整，且有效使用文字符號的能力也相當有限。

除了上述英國 Küchemann 及國內郭汾派等人的研究之外，還有許多大型的研究都曾針對代數學習作深入且持續的探討，例如全球數學教育心理年會（The International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME）從第 1 屆（1977 年）到第 29 屆（2005 年）的 29 年間就有 33 個代數的研究成果被發表，早期的研究比較針對代數概念及程序性知識，代數文字題以及學生從算術進階到代數所產生的轉譯困難。到中期，聚焦於代數一般化及多重表徵上的意義。直到近期，則傾向於研究小學生的代數思考方式，代數教學、代數學習，甚至關聯到物理學的情境下

與代數環境相關的模型。詳細年代與主要議題對照於表 1-1。

表 1-1 自 1977 至 2005 年 PME 代數研究的主要議題

年份	主要議題
1977~2005	算術到代數的轉譯，變數、未知數、方程式、方程式解題及代數文字題。
1980 年中期~2005	運用技巧及工具，並著重於多重表徵及一般化。
1990 年中期~2005	小學生的代數思考，教師的教學，及將其模型化並運用於其他物理情境或代數環境。

由 29 屆的 PME 研究可知，學生的代數思維深受算術思維的影響，要將文字符號視為特定未知數、一般數或變數，對大部分的初學者而言，有其困難度，這不只是教學上的問題，更可能是成長及學習過程中認知不足的困難。PME 在這方面的早期研究上，通常使用認知層次 (Kuchemann, 1981)、先備的算術經驗、思考的方法 (Booth, 1984) 以及等號所代表的多重涵義 (Kieran, 1981; Vergnaud, 1984) 來解釋學生學習代數符號的困難。尤其因為算術和代數使用許多相同的符號，學生在初學代數時便需要作相當多概念上的調整，才能夠正確銜接算術到代數的學習。

從國民教育的數學內容來看，符號化是學生跨入代數思維的第一步，而符號化絕不是學生的自然、直觀的想法，這也是為何九年一貫數學領域代數主題中，要安排較長的時間來培養學生對於符號理解與使用，且針對

不同認知層次的學生採用循環、螺旋的方式，以期學生能在足夠且成熟的經驗後，順利進入符號化的代數領域（謝佳叡，2003）。

## 第二節 方程式概念之相關研究

### 一、代數方程式的發展

巴比倫在公元前二千多年，一塊編號 AO8862 的泥板上，就已經出現了用語文敘述的方程式。由於當時大部份的數學問題均來自幾何，因此他們多用  $u \check{s}$ （長）、 $sag$ （寬）和  $a \check{s} a$ （面積）來代表問題中的未知量。再依據經驗，一步一步將答案推算出來，最後甚至發展出一元二次方程式的公式解。

埃及在公元前 1700 年時，雖然還不懂如何使用未知數列出方程式來解題，但是已經知道利用假設法來推測答案。他們把有關代數方程式計算的資料記載在草片文書，如：蘭德草書（Rhind Papyrus），當中全為文字敘述，含有問題列、答案、解法、驗算五步驟，但是並沒有說明為何用那些方法。

至於中國，成書於約公元前一世紀的著名數學典籍：《九章算術》中的「開方術」及「方程術」，也都是用文字敘述來表達代數。這個時期是中國代數學的開始，雖然文字符號發展尚未成熟，且各個民族的表示方式不同，但大部分都是為了解決日常生活的問題，如兌換錢幣、交換商品、計算長度面積、在商業或農業上的計算都有著相當大的用處，此時代數的

應用主要仍在於實務的層面上（李信明，1998）。例如《九章算術》第 8 章「方程」章的第一個問題：

（李儼）今有

上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；

上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；

上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。

問上、中、下禾實一秉各幾何。

其解決方法是利用「算籌」來運算。算籌是古代數學的一種獨特的計算工具，"算術"的意義即是運用算籌的技術。《九章算術》是本以算籌為算具的數學教科書，算籌作為當時世界最靈巧的計算工具，使用起來既方便又準確，在中國歷史上延續了 1500 年以上。在這類題目的計算方法上，會先用算籌排出有關數字，如圖 2.1，然後利用算籌的操作把左、中、右三條方程式加、減消元就找出答案。

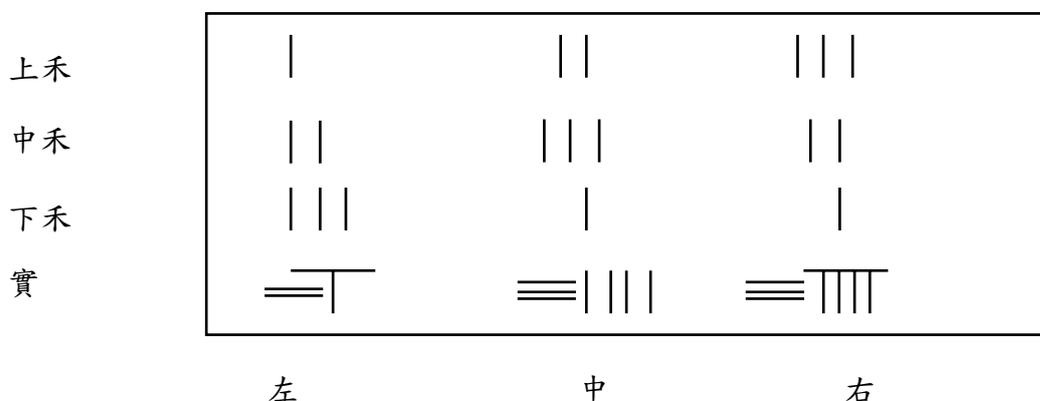


圖 2-1 《九章算術》中的方程組

在第七世紀的時候，中國人已經找到了求一次、二次方程的解法，到了宋朝時代，著名的數學家秦九韶在《數書九章》的著作裏，更進一步提出了求高次方程的近似解法。中國古代的代數是有趣的，它差不多總跟一些田畝、倉廩、粟米等應用問題聯繫著，當時人們把這種方法叫做「天元術」，在運算的時候，先立「天元」表示所求的未知數，再根據問題中給出的數據，列出兩個相等的多項式，然後再將這兩個多項式相減，構成一個一端為零的方程式。



圖 2-2 天元術中的方程式表示法

在天元術裏，多項式是用分離係數法表示的。通常在一次項旁邊注個「元」，或者在常數項邊上寫個「太」，像上圖 2-2 中「元」字左邊是個零，所以「一次項」為零；在它上面兩行分別表示二次項和三次項的係數，在它下面一行裏的就是常數。如果先從「元」字所在的「一次項」往上看，那就是「二次項」的係數等於 3，「三次項」的係數等於 2。再從「元」字所在的那一行往下瞧，那麼常數項等於 6。所以由上而下用現在的習慣看出來就是  $2x^3+3x^2+6=0$  這一個方程式。這種方法雖然書寫和計算起來還

不很方便，但是「分離係數」的方法，卻一直沿用到現在。至於現在國際上用拉丁字母  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ……而不是根據「位置」來表示未知數，那則是近幾百年間的事情（雪山圖書公司，1986）。

## 二、代數方程式的相關研究

十七世紀法國哲學家、數學家笛卡兒 (Rene Descartes, 1596-1650) 曾說：「一切問題都可以轉化為數學問題，一切數學問題都可以轉化為代數問題，一切代數問題都可以轉化為方程式，一切的問題均將迎刃而解。」也就是說，以問題解決與數學的角度來看，方程式在代數的領域中，扮演著極重要的角色 (Polya, 1945)。

所謂方程式其實就是一個用未知數所表示的等式，如日本數學家大村平所說：「只限於某些特定的值代入時，才成立的等式，就叫做方程式。」(李正宏譯，1990，第 36 頁)。而解方程式的最基本方法，可分為等量公理及移項法則，等量公理不管在過去的課程標準或是九年一貫的課程綱要中都是相當重要的學習概念，而移項法則則是運用等量公理推論而得的性質，一般在學校正規教法上，我們希望同學能從等量公理去了解如何“平衡”的概念找出方程式的解，然而大部份的學生卻習慣用移項法則來解方程式，原因在於只要背一些口訣就能方便運用，但其實仍會有一些狀況會讓學生混淆，例如： $-5x=8$ ，學生會搞不清楚這裡的「-」是指性質符號還是運算符號？應該看成負號還是減號？通常概念錯誤的同學會選

擇將” - ”看成減號，移項到等號右邊之後變成加法，也就是本來應該是  $\div (-5)$ ，卻寫成  $+5$ ，而造成錯誤。

Kieran (1989)、Booth (1988) 等學者則認為方程式中的「等號」是一種「兩邊式子等價」的結構概念，因為受到先前算術經驗的影響，學生往往只注意到等號是要去「計算」的符號，會將等號看成一種程序性的運算，其代表的是「接下來我要做的是」、「答案是」、「結果是」....等解題的過程，所以會在解題過程中出現類似  $2.8 + 3.3 = 6.1 - 4.9 = 1.2$  這類的寫法，學生會將等號視為一個獨立的符號，而忽略數學上的等價關係。而 Vergnaud (1984) 也認為學習代數的重點就是必須能將等號看成對稱與等價的概念。「等號」是「方程式」學習的重要核心之一，而「方程式」又是「代數」中不可或缺的一環，所以強化「不管情境或敘述是何程序，等號所代表的都是兩邊等量」的觀念是代數思維能否進展的主要議題(國立編譯館，2000a、2000b)。

人類一直致力於尋找出一種既容易又具系統化的方法來解決日常生活中所遇到的數量問題，因而產生了代數學，代數的特點即是用符號代表數，而用方程式去表達出各數量之間的關係，從而使解題更為簡潔，這就是方程式在代數學學習中所呈現的重要性。

### 第三節 數學解題的相關研究

解題是一種關於思考的內在心理運作歷程。所有複雜的學習過程，如

思考，語文，解題等，都是個體組織經驗所形成或重組的認知結構，我們可以針對同學解題時的心理現象進行探索，從解題歷程中，歸納出其解題策略，分析錯誤發生之類型及解題時的後設認知。其目的有二，其一，將研究的重心轉移到學生解題歷程中的心理表現，能更清楚的知道學生解題觀念正確與否；其二，成功的解題策略和後設認知模式可以成為補救教學的重點。

### 一、數學解題策略

Schoenfeld (1985) 認為啟發學生的認知策略能夠幫助解題者更了解問題，也更能應用技巧來解決問題。就像「畫一個圖」一樣。他從認知科學的觀點提出有關解題技巧的問題：描述解題策略要如何表達才能讓學生應用地如魚得水？並從專家生手的角度來切入問題，發現專家由於熟練的經驗累積，而較能發展出一致且可用性極高的解題策略。再將這些策略特徵化，列出解題的步驟及相關策略，讓學生可以實際使用這些特徵作為解題指引。

PME 對於初學代數的學生如何解方程式的程序有過相當多的研究，包含直覺解題、使用數字事實、覆蓋法、試誤法、以及一般正規方法。另外，Kieran (1992) 則將學生解方程式的解題策略更細密的歸納成以下七項：

(1) 數字事實(use of number facts)：又稱為「代入法」。指任意代入數字到

方程式中，直到找到正確答案為止。

- (2) 數數策略 (use of counting techniques)：將數字以有順序的方式一一代入，直到得到正確答案為止。
- (3) 覆蓋(covering-up)：將一個較複雜的代數式視為一個新的未知數來運算，解出此未知數後再代回求原未知數。
- (4) 復原(undoing)：又稱「還原法」。用逆運算的方式求原未知數。
- (5) 嘗試錯誤(trial-and-error substitution)：類似於「數字事實」法，以不同數字代入方程式直到求出正確答案，但其不同處在於必須掌握代入數字的變化，因此可以建立學生對解的概念。
- (6) 等量公理(performing the same operation on both sides)：在代數方程式運算時經常運用，指在等號兩側同加減乘除一個數，以求得未知數的一個方法。呂溪木（1987）發現學生學習初等代數時，若能先學好等號兩邊平衡運算的概念，解方程式學習成就會更好，故建議學生要先學好等量公理，有助於之後方程式的學習。
- (7) 移項法則(transposing)：逆運算的一種，由等量公理推論而來。

以上七種解題策略，可提供研究者分析研究參與對象之未知數解題策略之向度。但較偏重於解純粹計算的方程式題型。

而在代數文字題的部分，Mayer（1992）認為成功解文字題必須要完成：(1) 能將題目語句轉譯成內在表徵的語言及事實知識。(2) 有足夠解

題的基模知識並能正確整合。(3) 能思考解題計畫的策略知識並加以監控。(4) 能正確執行算術或方程式運算的程序性知識。Schoenfeld (1985) 談及解題的啟發策略時，認為啟發策略應包含 (1) 減少變數；(2) 計算特例；(3) 使用歸謬法三種策略在內。而其中特別強調分析、探討及驗證三個階段。Kilpatrick (1967) 探討學生解決文字題時的策略，發現受試者所使用的解題策略可分為 (1) 了解問題：包含辨認未知資料或條件、畫圖、引入符號。(2) 擬定計畫：重新敘述問題、考慮相關問題。(3) 執行計畫：使用連續漸進、發現結果之前先檢查步驟。(4) 檢討：檢查結果是否合理、檢查結果是否符合條件、回溯論證的步驟、使用其他方法獲得結果。

另外，國內學者黃敏晃 (1991) 則認為解題策略會依個人不同的解題風格而殊異，主要策略有一般化、特殊化、極端化、圖示、對稱原則等。吳德邦、吳順治 (1989) 則將常用的解題策略分為理解、化簡並變形、試驗及模擬、猜測及嘗試、邏輯演練、組織列式、回顧舊經驗等 7 類。

綜觀國內外學者意見，學生解題時最常使用的策略可約略區分為畫圖、製表、化簡、算式之理解、猜測及嘗試、組織並列式、應用相關的問題、邏輯演練等 8 類。因此，教師便可配合教材內容，教導學生如何運用適當的解題策略，以增進其數學解題能力。

## 二、數學錯誤類型之分析研究

探討學生面對問題所引發的概念及解題策略，尤其是錯誤的概念與策略的意義，可以了解學生在過去學習活動及經驗中所累積下來的種種認知錯誤，以此作為補救教學的出發點。在代數計算題的部分，Robert (1968) 針對錯誤類型分為：錯誤的演算 (Wrong operation)、明顯的計算失誤 (Obvious computation error)、不完整的計算過程 (Defective algorithm)、隨意作答 (Random response)。Engelhardt (1982) 則將錯誤類型區分為機械性錯誤 (Mechanical error)、粗心 (Careless)、概念上的錯誤 (Conceptual error)、運算過程中之錯誤 (Procedural error)。

而代數文字題在學生的認知歷程中就顯得更複雜了，其常以日常生活情境做為題材，以語文型態來描述情境 (Cummins, 1991)。學生在解代數文字題時，需要結合兩種能力，一為計算能力，一為理解能力，也就是必須先了解題目的意涵，回憶或激發出相關知識的連結，並建構出可以表徵此問題的模式，最後才經由方程式計算推論出其結果 (唐淑華，1989)。然而多數同學均對此感到困難，主要原因就在於剛開始的步驟中，將語文轉譯為算式或方程式的困難 (Lewis & Mayer, 1987)。在此，Radatz (1979) 針對文字題部分的解題錯誤類型，將其區分為語言上的困難 (Language difficulties)、獲得空間性訊息的困難 (Difficulties in obtaining spatial information)、先備技巧不夠熟練 (Deficient mastery of pre-requisite

skills)、錯誤的連結或是僵硬的思考 (Incorrect associate or rigidity of thinking)、無關的原理原則及策略 (Application of irrelevant rules or strategies)。Marshall (1987) 則分為處理語言訊息的錯誤 (Errors in processing language information)、處理空間訊息的錯誤 (Errors in interpreting spatial information)、選擇適當步驟的錯誤 (Errors in selecting appropriate procedures)、概念連結的錯誤 (Errors in making concept association)、應用不相關的規則或資訊 (Errors in using irrelevant rules or information); 而在 1987 年, Marshall 根據訊息處理理論, 又增加「不專心」這一項。在國內, 張景媛 (1994) 將代數文字題的錯誤類型歸納為問題轉譯錯誤、問題整合錯誤、解題計畫及監控錯誤、解題執行錯誤四項。

綜合以上文獻資料之分析, 研究者希望透過二元一次方程式單元的施測, 觀察並了解學生在本單元解題時所運用的概念及策略, 並探討其發生錯誤的類型及原因, 以便改進未來的教學型態, 並協助學生做最有效率的學習。

## 第三章 研究方法

本研究之主要目的在探討國中生在二元一次聯立方程式單元解題時所使用的策略、可能出現的錯誤類型、以及其錯誤概念之原因。比較特別的是，研究者想針對的是即將面對國中基本學力測驗的國三學生，希望藉由已經學習此單元一年多的同學所發生的解題情況，回頭省思教師最初的教學，進而提供改進教學策略的依據及方法，更確實的增進學習成效。

本研究的研究方法質量並重，在紙筆測驗上對學生的解題歷程探討有二：其一為所運用的解題策略；其二為所發生的錯誤類型、原因；並結合文獻探討、教室觀察、訪談等方式蒐集更詳盡的資料以作比對驗證。是次以國三學生作為施測對象，在研究工具上研究者以基本學測試題為藍本，再加上文獻理念的指引來編修。本章將就本研究之研究對象、研究設計及工具、實施步驟、資料處理等四個部分加以說明。

### 第一節 研究對象

研究者取方便樣本，在高雄市 A 校、高雄縣 B 校及屏東縣 C 校，各選取 2 個班級，合計共 6 班的國中三年級學生，三校均為公立國中，高雄市 A 校及屏東縣 C 校的 4 個班級為常態編班，高雄縣 B 校所選取的 2 班則恰巧為全校成績最好的 2 個班，3 校共 207 人。三所學校分處都會及鄉鎮，學生結構上有相當差異，取樣範圍較廣，也較平衡，研究成果不至於

偏離一般常態太遠。另外在九年一貫課程綱要的設計下，強調一綱多本，故研究者設定不同學校所採用的不同教材在本研究結果的界定上並不會有太大影響。現將各校所使用版本列於表 3-1。

表 3-1 研究樣本班級之基本資料

學校	參加人數	使用版本及本單元之各分節
高雄市 A 國中	81	南一版第三冊第三章： 3-1 二元一次方程式 3-2 二元一次聯立方程式的 列式與求解
高雄縣 B 國中	65	南一版：同上
屏東縣 C 國中	61	康軒版第三冊第二章： 2-2 二元一次方程式 2-3 二元一次聯立方程式
合計	207	

## 第二節 研究設計及工具

### 一、教材地位分析

為確實調查出國中學生在二元一次方程式單元的學習內容，本研究依據民國 92 年公布之九年一貫課程綱要數學領域的內容，並參考南一、康軒、部編版等教師手冊、相關文獻及其他參考資料，分析本單元之教材地位於圖 3-1，以便為之後的研究提供更適合的定位。

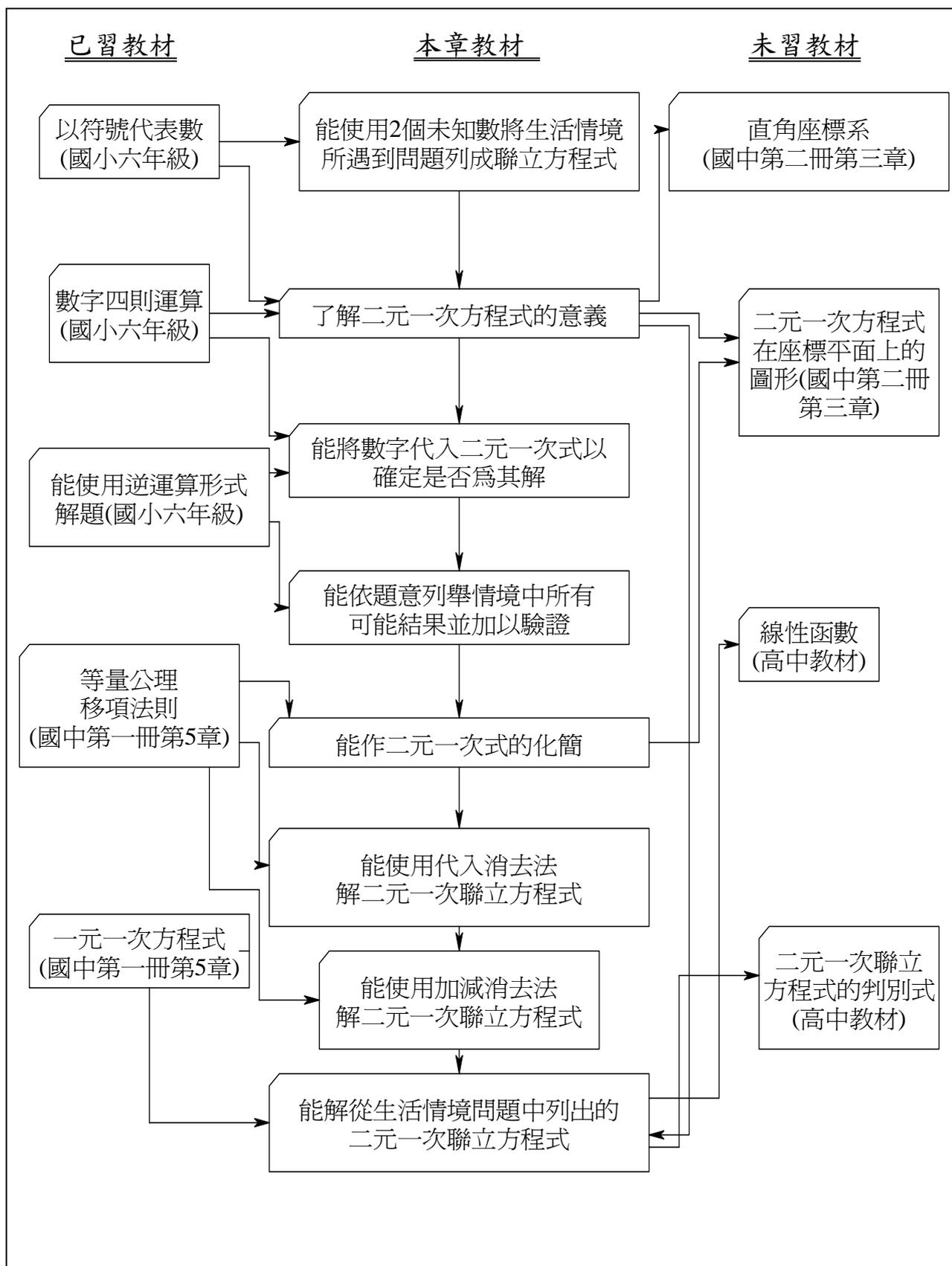


圖 3-1 二元一次方程式之教材地位分析圖

## 二、研究設計

研究設計主要分為兩階段，並依此設計研究工具：

階段一為紙筆測驗，研究者於施測後，分析並歸納學生作答內容，將其分成正確和錯誤兩個部份，分別探討學生在解二元一次方程式時的正確解題策略或是可能發生的錯誤觀念及類型。而此研究工具是根據 90~95 年基本學力測驗數學科題目改編之"二元一次方程式單元測驗"。

階段二則為晤談，在施測的試卷分析中，選擇學生的錯誤類型具代表性、特殊性、或是不易了解者進行晤談。由晤談的過程中釐清學生解題的歷程、想法、及犯錯的原因。晤談所使用的工具為階段一紙筆測驗試卷的分析結果。

## 三、研究工具

研究者由整理文獻資料所得，再加上多年教學心得，觀察學生在二元一次方程式單元的學習歷程後，決定了本研究之研究工具為"二元一次方程式單元測驗"試卷，試卷以教學內容分為二元一次方程式之化簡（化簡）、解二元一次聯立方程式（解聯立）、依照題意列出二元一次聯立方程式（列式）、二元一次方程式之文字題（解文字題）四類，試卷設計流程如下：

（一）測驗題選擇：研究者自 90~95 年基測考古題中整理並改編 20 題有

關二元一次方程式之測驗題，包含解聯立方程式計算題以及文字

題（附錄 A）。試題係以正式的基本學力測驗題目改編，測驗之能力指標概念已經專家學者及專業數學教師審核確認過，研究者改編試題時維持題型原有架構，只有在數據上有些微的變化。改編試題和基測原題的差異詳列於附錄 B。在內容效度方面，表 3-2 附上預試試卷的施測題目雙向細目表，此份雙向細目表除了研究者之外，另外請教了 2 位任教國中多年，經驗豐富的數學教師作檢核，以符合專家效度。另外為了清楚檢視學生的思考及解題歷程，在正式施測時，將部分選擇題改編為計算題的形式，而其精神仍然符合九年一貫中課程綱要之能力指標。雖然題型改編可能對同學的答題表現有所影響，因為選擇題中的選項可以代入的方式猜答，也從中暗示同學正確解題模式；而計算題則需要同學以自己的代數概念由無到有順序解題，難度上實有差異，但是依本研究所要討論的解題策略及錯誤類型而言，將題型改編為計算題才有足夠資料以供分析，確實有其必要性。

表 3-2 「二元一次方程式單元測驗」預試試卷之雙向細目表

		教 學 目 標			
		概念理解 (概念)	基本運算 (運算)	問題解決 (解題)	合計 題數
教 學 內 容	二元一次方程式之 化簡(化簡)	(1) *	(2)	(3)	3
	解二元一次聯立方 程式 (解聯立)	(4)	(5)(6) (7)(8)		5
	依照題意列出二元 一次方程式(列式)	(9)(10) (11) (13)		(12) (14)	6
	二元一次方程式之 文字題(解文字題)		(16) (17)	(15) (18) (19) (20)	6
	合計題數	6	7	7	20

\*：括弧內數字代表題號

(二) 預試：為了準備適當之執行工具，研究者先做預試，目的在初步了解學生對於二元一次方程式的概念能力發展，以作為增刪及修改試題的依據，對象為高雄市 A 國中國三學生一班共 33 人，採集體測驗，時間為 45 分鐘，題數共 20 題。

(三) 試題增刪並確認：根據預試結果，研究者利用 Microsoft Excel 軟

體加以統計，刪除錯誤率太低或太高，鑑別度不佳的試題，並修改文字及數據，使題意更清晰，最後經由指導教授的修訂及指正，選擇正確率在 40~65% 之間的題目，計有第 2、3、4、5、6、7、12、16、17、18 共 10 題。分析其題目內容後，發現第 5、6、7 三題同質性太高，故只留存第 6 題，再根據雙向細目表分析，加入第 1 及第 20 題。至此 10 題試題均屬於難度中等的題目，但由於本研究欲分析同學的錯誤解題概念，所以難題的存在有其重要性，故加上一題在預試中答對率最低的第 14 題，共取 11 題。最後將部份題目修改為計算題的形式。預試之統計情形數據列於圖 3-2。

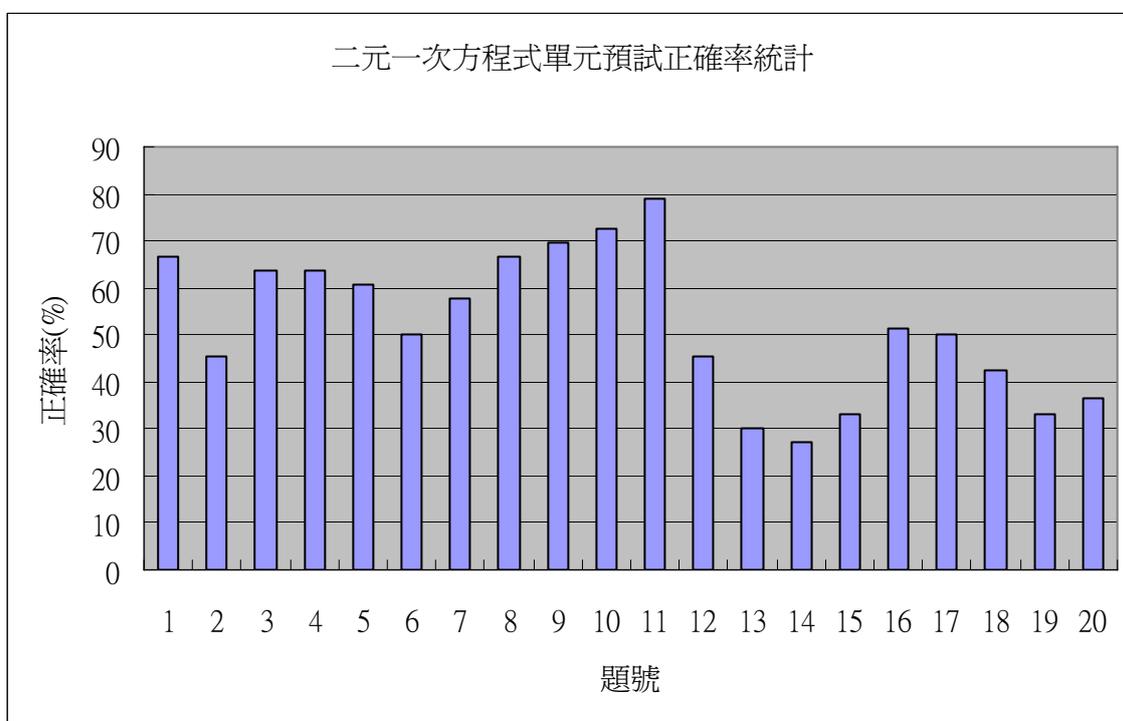


圖 3-2 「二元一次方程式單元測驗」預試各題正確率統計圖

(四) 正式施測：目的在確實了解學生對於二元一次方程式的概念及解題能力，並據以分析產生錯誤的類型及原因，樣本為高雄市 A 國中國三學生 2 班共 81 人、高雄縣 B 國中國三學生 2 班共 65 人、屏東縣 C 國中國三學生 2 班共 61 人，合計 6 班共 207 人，採集體測驗的方式，施測時間 45 分鐘，題數為 11 題。正式施測測驗結果，研究者同樣利用 Microsoft Excel 軟體加以分析，分為正確解題的策略選擇及錯誤類型兩部分作討論。詳細結果請參考第四章。表 3-3 附上正式試卷的施測題目雙向細目表，正式施測試卷則詳見附錄 C。

表 3-3 「二元一次方程式單元測驗」正式試卷之雙向細目表

		教 學 目 標			
		概念理解 (概念)	基本運算 (運算)	問題解決 (解題)	合計題數
教 學 內 容	二元一次方程式之化簡 (化簡)	(4) *	(3)	(1)	3
	解二元一次聯立方程式 (解聯立)	(2)	(5)		2
	依照題意列出二元一次方程式(列式)			(7) (11)	2
	二元一次方程式之文字題 (解文字題)		(8) (9)	(6) (10)	4
	合計題數	2	4	5	11

\*：括弧內數字代表題號

(五) 晤談計畫：研究者為完整了解學生在解二元一次方程式時所使用的概念及採用的策略，在正式施測後會進行學生的晤談計畫。晤談的方式採非結構性，引導學生說出自己的想法及解題步驟。晤談進行方式由研究者選定樣本後，為了減低學生焦慮感，請任課老師做為訪談者，先選擇能輕鬆和學生進行晤談的場地，以漸進深入的形式

引導學生說明其解題概念及方法。在晤談過程中以筆記和錄音並重的方式作紀錄。除了詢問同學測驗時的作答歷程外，必要時也會請同學當場回答類似的問題，以確實釐清其正確或錯誤想法。詳細晤談計畫見附錄 D。

### 第三節 實施步驟

本研究實施步驟分為：蒐集資料、編製研究工具、選取適合樣本、試題預試及修訂、正式施測、晤談等六個階段，分別說明如下：

- (一) 資料蒐集：自 95 年 6 月到 95 年 9 月，一方面閱讀國內外代數相關書籍，論文，期刊及其他參考資料，另一方面分析現階段二元一次方程式教材相關內容及基本學力測驗曾出現的題目，在與指導教授討論之後，確認本研究的研究架構。
- (二) 編製研究工具：依據本研究的需要及研究目的，編製「二元一次方程式單元測驗」，以基本學力測驗的題型作為藍本，題型包含二元一次式的化簡（化簡），解二元一次聯立方程式（解聯立），依照題意列出適當之二元一次方程式（列式），以及解二元一次聯立方程式之文字題（解文字題）共四大類。
- (三) 選取適合樣本：本研究在正式施測時，選取之研究樣本包含高雄市、高雄縣、屏東縣三個地區各一所學校，每所學校選取 2 個國三的班級，共 6 班，合計 207 名學生。

- (四) 試題預試及修訂：本測驗由高雄市 A 國中在 95 年 10 月 20 日進行預試，以確認題目文字表達的清楚及合理性，及刪除過易或過難的題目，透過刪改及修訂，決定正式試卷內容。
- (五) 正式施測：本測驗於 95 年 11 月正式施測，測驗時間 45 分鐘，任課教師以集體測驗方式進行，題目設計有選擇題及計算題，實施前皆由研究者說明測驗目的及作答注意事項，其中特別強調要有完整的計算過程(計算題部分)，因若沒有計算過程，不管答案正確或錯誤，均無法分析其解題策略或錯誤類型。
- (六) 晤談：測驗資料統計完成後，研究者開始分析學生的錯誤作答情形，並歸類錯誤類型，再依據錯誤人數多寡決定晤談人數，並從中選取具有代表性、特殊性或不易了解其錯誤情形的學生接受晤談。在和諧的氣氛下由任教老師為訪談者，適時引導學生表達其想法及觀念，以錄音配合紙筆紀錄，呈現其正確或錯誤的概念，綜合學生的思考方式加以分析。
- (七) 實施步驟流程圖，參考圖 3-3

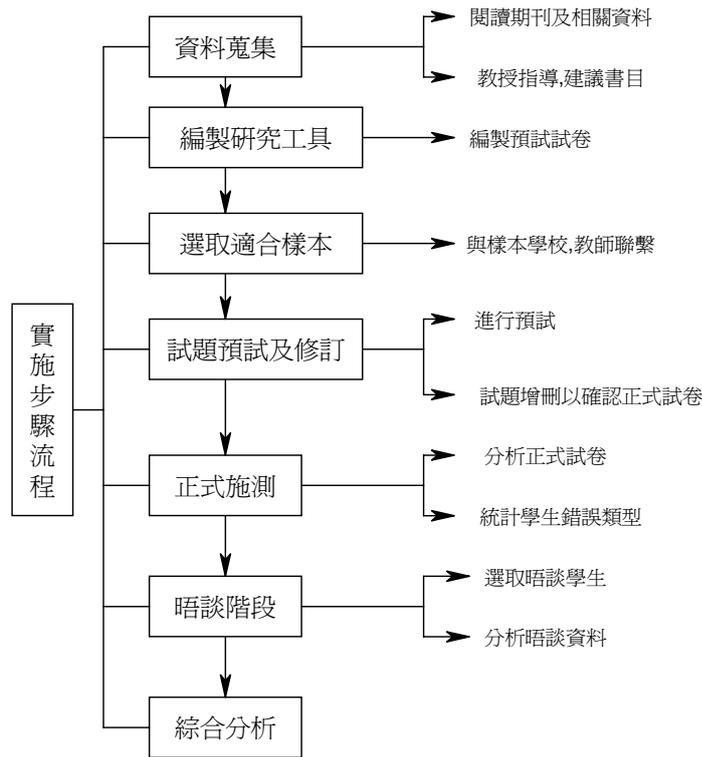


圖 3-3 實施步驟流程圖

#### 第四節 資料處理

在測驗結束之後，隨即進行測驗資料的統計，以分析學生在二元一次方程式的概念及理解情形。資料處理分為二個部分：

(一) 量化資料：在「二元一次方程式單元測驗」施測後，使用 Microsoft

Excel 軟體作正確率統計，及錯誤類型的歸納分析。

(二) 質性資料：統計資料完成後，再依據晤談計畫選取適合學生進行面

談，使用錄音並以紙筆輔助紀錄，綜合學生的正確解題策略或錯誤

思考方式，了解其錯誤解題歷程，並加以分析。

## 第四章 結果及討論

本章將就全體受試學生在接受「二元一次方程式單元測驗」施測之後，整理其作答情形及晤談結果來了解學生的解題策略及錯誤類型，再依據所得資訊分析學生解題錯誤的原因。

以下將分為四節加以說明，第一節為學生在此單元之解題正確及錯誤百分比。第二節探討學生之解題策略。第三節將歸類出學生之解題錯誤類型。第四節則是分析學生解題錯誤原因。

### 第一節 二元一次方程式解題正確及錯誤百分比

本研究使用「二元一次方程式單元測驗」施測試卷來調查學生在此單元的學習情形，將二元一次方程式依教學內容區分為化簡（第（1）、（3）、（4）題）、解聯立（第（2）、（5）題）、列式（第（7）、（11）題）、解文字題（第（6）、（8）、（9）、（10）題）四類，先在表 4-1 列出所有題型之正確與錯誤百分比統計，之後再綜合所有施測資料，並逐題表列三所施測學校之正確答題百分率、錯誤答題（有作答但錯誤）百分率及空白（未作答）百分率統計表於附錄 E，於本節依不同類別作初步之歸納及分析。

表 4-1 所有題型答題正確與錯誤百分比統計

	題號	正確答題率	錯誤答題率	空白率
二元一次方程式之化簡（化簡）	(1)(3)(4)	66.34	20.93	12.73
解二元一次聯立方程式（解聯立）	(2)(5)	75.85	15.75	8.40
依照題意列出二元一次方程式（列式）	(7)(11)	68.36	23.85	7.79
二元一次方程式之文字題（解文字題）	(6)(8)(9)(10)	63.41	15.83	20.76
合計		67.98	18.62	13.39

### 一、「化簡」類別

根據附錄 E 之表 E-1，在「化簡」類別共 3 題，其中第（4）題在檢驗同學在文字題轉譯為二元一次方程式並求解的歷程中概念之理解程度，第（3）題測驗同學在二元一次方程式中的化簡及運算，第（1）題

則是實際問題的解決。

在「化簡」類別的整體解題正確率上，研究者發現第（1）題不需解方程式，只要對已知代數式（3包餅乾和2個麵包）和未知代數式（6個麵包和9包餅乾）之間的倍數關係有概念即可，較為容易，有接近8成的同學能正確解題（79.7%）。第（3）題是有關二個未知數所組成的代數式在等式中的化簡，因為涉及分數整數的混合四則，還需要指數律的運算概念，再加上最後要求的是 $x-y$ ，而不是單一未知數，對很多同學來說較為複雜，能夠正確解題者僅佔51.2%。

空白率部分則發現，第（1）題相當低，只有2.4%，表示題意清楚不複雜，多數同學均樂於嘗試解題。但是第（3）（4）題空白率相對偏高，尤其第（4）題有3個未知數，研究者發現，題目若有2個以上未知數時，往往會讓同學對列式感到困惑，會因不知如何下手而空白。

## 二、「解聯立」類別

根據附錄E之表E-2，在「化簡」類別共2題，其中第（2）題測試同學對何謂方程式解之基本概念理解，第（5）題則測驗同學是否能自行運用計算策略來解二元一次聯立方程式。

在「解聯立」類別中發現，此類型的2題雖然同樣都是解基本的二元一次聯立方程式，但是第（2）題可以用選項代入的方式找解，同學只需要有整數四則運算基礎即可，較為容易，正確率達87.4%；相對的第

(5) 題需要運用等量公理先化為整數方程式，再利用加減消去法或代入消去法解  $x$ 、 $y$ ，最後還要再作絕對值運算，除非有完整解聯立方程式的概念，否則不容易求出答案，正確率明顯較低，只有 64.3%。

錯誤率約介於 10%~20% 之間，顯示同學對於解二元一次聯立方程式的步驟及方式並不陌生，也可以解釋為從國一到國三，2 年的練習較為足夠，已由生手漸漸轉變為專家。空白率約 2% ~15%，顯示同學有心求解，且大部分也均有解二元一次聯立方程式的能力。因為題目是清楚的計算題型，不會產生解讀文字的錯誤，所有的錯誤均出現在計算過程之中。

### 三、「列式」類別

根據附錄 E 之表 E-3，在「列式」類別共 2 題，這 2 題均是在測驗同學是否能由實際具體情境中列出二元一次聯立方程式，以選擇題型態呈現，除了測驗同學對文字是否有足夠的轉譯能力外，能否清楚分辨變數間數量相對關係的改變，也是這 2 題的重點。

本類別之正確率約在 65%~71% 之間，因為是單純的列方程式題，不需任何計算過程，只需正確解讀題意並分析其數字變化型態，即可選擇正確之二元一次聯立方程式。同學的錯誤大多出現在解讀文字並轉譯、整合到列方程式的過程，尤其在數量的相對關係上（哥哥給弟弟紀念卡，哥哥減少的張數會等於弟弟增加的張數），更容易混淆。而空白率約在 5% ~11% 之間，研究者認為此二題題意清楚，題目中也已假設好未知數，解讀不

困難，不過因為有較多的數據及敘述呈現在題目中，如果同學沒耐性思考或分析，就會不想作答，但是因為題目設計為選擇題，同學即使不會做也大多會任意猜一個答案，所以空白比率並不高。

#### 四、「解文字題」類別

根據附錄 E 之表 E-4，在「解文字題」類別中共 4 題，其中第 (8)、(9) 題，題目敘述較單純，主要在測驗同學在基本文字題中從假設、列式、解方程式等完整過程的運算概念；第 (6) 及第 (10) 題敘述則較為繁雜，同學必須有較佳的文字轉譯及整合能力，才能順利解決問題。

在「解文字題」類別中發現，正確率部分，各題間差距相當大，計算協力車有幾輛，題意簡單清楚的第 (8) 題可達 74.9%，而敘述複雜，條件、數據較多的第 (10) 題則只有 46.9%。顯示雖然都是文字題，但題目解讀的難易度對同學解題仍然有相當大的影響。

其中錯誤率最高的第 (10) 題，是有關網咖收費及時間關係的一題，除了題目敘述複雜之外，題目中需要解讀另一個表格，並且使用  $s$ 、 $t$  來假設未知數，對於大多數習慣用  $x$ 、 $y$  來解聯立方程式的同學，不同字母所代表的未知數也會造成概念上的混亂。其餘各題之錯誤率差異較小，都是將要求的變數以傳統的  $x$ 、 $y$  來假設，然後以題目敘述的方式直接轉譯為二元一次方程式，再解題即可。研究者發現在此類型中的錯誤主要還是文字題對某些同學造成多重困難（從解讀、轉譯、整合、列式、解

方程式一連串的解題歷程)的關係,從施測後的晤談中發現,很多同學的反應是”看不懂”、”不知如何列式”、或是作到一半就接不下去,對同學而言,有較多的迷思概念。

另外(6)、(8)、(9)這3題也可以只假設一個未知數,用一元一次方程式來解,但想到的同學很少。研究者認為主要原因應該是整份試題表明為二元一次方程式試題,所以即使是不會列出二元一次方程式的同學,也很難將解題方式聯結到一元一次方程式,多半就直接放棄(空白)。這種僵化的思考方式往往在同學解題上造成困擾,我們常常強調數學解題不只一種方法,可是在實際教學中,為了使同學熟練解題技巧以應付考試,在某些單元所產生的過度學習,卻往往會扼殺了其他更有趣,更特別的思考型態。

## 第二節 二元一次方程式單元解題策略研究

### 一、策略之歸類

研究者對於所有學生解題正確的策略部分之歸類,係參考 Kieran (1992) 有關學生解方程式之解題策略, Schoenfeld (1985) 的解題啟發策略, 吳德邦、吳順治 (1989) 所歸納之學生解題策略, 以及研究者本身在教學活動中所發現之學生常用之解題策略, 可分為「方程式計算題」及「代數文字題」兩大項, 研究者又發現, 學生解題時經常會合併使用 2

個以上策略，而其中代數文字題因為包含解讀、列式及解方程式，所以其解題策略也包含方程式計算題之解題策略。現將歸納後的策略分類敘述如下：

(一) 「方程式計算題」之解題策略

- (1) 覆蓋法：將一個較複雜的代數式視為一個新的未知數來運算，解出後再代回原方程式。
- (2) 等量公理：國中一年級學習方程式前已經教導過的先備知識。指等號的兩邊同加（減、乘、除）一數，其等值關係不變。（但必須注意同乘或同除的數不得為零）
- (3) 移項法則：由等量公理導出之運算法則。
- (4) 代入消去法：解二元一次聯立方程式常用的方法之一，將其中 1 個未知數以另 1 個未知數組成的代數式代入以求解的方法。
- (5) 加減消去法：解二元一次聯立方程式常用的方法之一，將 2 個方程式以相加或相減的方式消去 1 個未知數以求解的方法。
- (6) 嘗試錯誤法：以不同數字嘗試代入至求得正確答案為止。

(二) 「代數文字題」之解題策略

- (1)~(6) 在計算過程中，與以上「方程式計算題」相同之解題策略。
- (7) 製表法：將題目數據以表格形式列出，以協助解題。
- (8) 化簡並變形：將較長的式子或較多的數據先行合併，簡化為較短的

方程式或改變其形式來解題。

(9) 算式之理解：理解變數之間的和、差、倍數或其他關係，並運用此關係解題。

(10) 組織並列式：在此單元中定義為組織題目中有用數據，並將其列為二元一次方程式以求解。

(11) 邏輯推論：利用其他與二元一次方程式無關的邏輯概念推論並解得正確答案。

(12) 減少變數：只用一個未知數假設、列式、並解出正確答案。

(13) 其他。

## 二、逐題探討學生作答情形及解題策略

除了第 2、7、11 題為選擇題，無法看出學生用來解題的方式或策略，在此節不予討論外，其餘各題依教學內容區分為化簡（第 (1)、(3)、(4) 題）、解聯立（第 (5) 題）、解文字題（第 (6)、(8)、(9)、(10) 題）三類別（列式類別因均為選擇題，無法討論），且就計算題型及文字題型之解題策略分別加以歸納分析並以表格呈現，因為其中有些同學使用策略不只一種，故策略數總和不一定等於正確解題人數。當同學所運用的解題策略較為特殊時，將附上實際計算過程，以便能更清楚的檢視及探討其思考型態：

## 一、「化簡」類別

- (1) 某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 個麵包和 9 包餅乾，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？

表 4-2-1 第 (1) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
覆蓋法	68	54	40	162
組織並列式	57	35	34	126
算式之理解	11	19	6	36
猜測及嘗試	0	2	1	3

在本題中，同學使用的解題策略可分為

### 1、覆蓋法及組織並列式（共 126 人）

此種策略組合運用最廣泛，將 3 包餅乾及 2 塊麵包合併為一個代數式，再分析之後的 9 包餅乾加 6 塊麵包為前者的 3 倍，不計算餅乾及麵包的價格，就可得到  $500 - 105 \times 3$  之正確答案。

### 2、覆蓋法及算式之理解（共 36 人）

採用此策略的同學和前面策略最大的差別在於他們理解題意之後，完全不使用未知數，直接以 105 乘以 3 作為總價，再用 500 去減，就可以得到正確答案，是最簡單的計算過程。

### 3、猜測及嘗試（共 3 人）

採用此種策略的同學將餅乾、麵包以符合題意之數字代入，在過程上並不完全正確，但可以得到同樣答案。

(3)、若  $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則  $x-y = ?$

表 4-2-2 第 (3) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
覆蓋法	46	39	21	106
等量公理	46	39	21	106

在本題中，所有正確解題同學所使用的解題策略均為

覆蓋法及等量公理 (共 106 人)

但在細分之下仍然有兩種不同的方式：

(1) 先在等號兩邊同乘分母的最小公倍數 12，變成整數係數後再化簡。

$$12 \times \left( \frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} \right) = 12 \times 10^4$$

$$5x-4y+3(3x-2y)-4(2x-y) = 12 \times 10^4$$

$$5x-4y+9x-6y-8x+4y = 12 \times 10^4$$

$$6x-6y = 12 \times 10^4$$

$$6(x-y) = 12 \times 10^4$$

$$x-y = 2 \times 10^4$$

(2) 直接以 12 作為分母通分化簡後求出  $x-y$  之值。

$$\frac{5x-4y+9x-6y-8x+4y}{12} = 10^4$$

$$\frac{6x-6y}{12} = 10^4$$

$$\frac{x-y}{2} = 10^4$$

$$x-y = 2 \times 10^4$$

(4) 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 6 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 71 元，則其中有幾人買鉛筆？

表 4-2-3 第 (4) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
猜測及嘗試	24	28	17	69
組織並列式	12	10	4	26
邏輯推論	11	1	6	18
製表法	3	0	1	4
其他	6	13	5	24

這題是比較特別的一題，因為題目中有 3 個未知數，但卻只有 2 個條件可用，所以無法使用平常同學所練習的二元一次聯立方程式解法。同學使用的解題策略可分為：

1、猜測及嘗試 (共 69 人)

這是使用最廣泛的方法，同學代入不同的數字，在符合題意的前提下試出正確答案，沒有固定的步驟，甚至有些計算過程相當含糊或簡略。

2、組織並列式 (共 26 人)

此種策略會將所有未知數假設出來、並依題意假設  $x$  人買鉛筆， $y$  人買原子筆， $(6-x-y)$  人買橡皮擦，整合出二元一次方程式  $7x+15y+20(6-x-y)=71$ ，化簡後得  $13x+5y=49$ ，再以嘗試錯誤法推論得  $x=3$ 、 $y=2$ ，故得有 3 人買鉛筆。

3、邏輯推論 (共 18 人)

能用邏輯推論的是對於數感較為清楚敏銳的同學，所佔的比例並不高，同學能清楚的表達因為原子筆、橡皮擦的價格特殊（15元、20元），所以鉛筆總價的個位數一定是1或6，總和才可能為71元。依此來推斷鉛筆只能是3枝，求得答案速度相當快，也是很漂亮的一個方法。以下為同學的實際解題案例。

∵ 原子筆一支為15元，橡皮擦為20元。  
則此兩種文具總價相加，個位數一定為0或5  
要使三種文具總價相加之個位數為1  
則鉛筆總價的個位數必為1或者6  
7的倍數：~~21, 56, 84~~  $7 \times 3 = 21$   $7 \times 8 = 56$  ⇒ 答應為3或8人，但8 > 7  
故答為3人 A: 3人

#### 4、製表法（共4人）

只有4位同學使用，其實表格的運用在較繁複題型的了解及組織上是相當好用的一個方法，但是因為建構表格有一定的困難度，通常也只有成績較優異的同學有此能力，這也是教師可以努力的一個方向。

#### 「化簡」類別之策略運用發現：

計算題的策略部分：主要應用的是覆蓋法及等量公理，原本以為覆蓋法對同學是比較深入且不易運用的概念，因為它需要將2個以上的未知數列式成為一個新的代數式再來計算，結果發現大部分同學都能妥善運

用（如第（1）題）。

$$\begin{aligned} & \text{設餅乾 } x \text{ 元 麵包 } y \text{ 元} \\ & 3x + 2y = 105 \\ & \text{3倍} \downarrow \\ & 9x + 6y = 315 \\ & 500 - 315 = 185 \\ & \text{A: 185元} \end{aligned}$$

文字題的策略在第（1）題，即關於麵包和餅乾倍數關係的此題較為簡單，多數的同學只需要了解題意並組織列式就能順利求解。而第（4）題因為有鉛筆、原子筆、橡皮擦 3 個未知數，但依題意卻只能列出 2 個方程式，無法用上課所教的方式求解，所以就出現很多的嘗試錯誤法，但是研究者很意外的發現，同學在答案的猜測上其實並不盲目，會考慮答案的合理性，在推論過程中也會運用此合理性來加速求得正確答案。

$$\begin{aligned} & 7 \times 3 = 21 \\ & 71 - 21 = 50 \\ & 1 \times 20 = 20 \\ & 50 - 20 = 30 \\ & 2 \times 15 = 30 \\ & \text{A: 3人} \end{aligned}$$

## 二、「解聯立」類別

(5) 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ ，則  $|a - 2b| = ?$

表 4-2-4 第 (5) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
加減消去法	54	47	26	127
代入消去法。	2	2	2	6

在本題中，同學使用的解題策略為

### 1、加減消去法 (共 127 人)

此為運用最多的策略，其下有 2 種常見解題方式，差別在於是否將

原方程式全部化為整數。

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 & \text{——— ①} \\ \frac{1}{5}x + y = 17 & \text{——— ②} \end{cases}$$

方法一：將①式乘以 4 後減去②式

$$\text{得 } \frac{19}{5}x = 19$$

$$x = 19 \div \frac{19}{5}$$

$$x = 5 \text{ 再代回②式 得 } y = 16$$

方法二：將①式乘以 20 後減去②式乘以 5

$$\text{得 } 19x = 95$$

$$x = 5 \text{ 再代回②式}$$

$$\text{得 } y = 16$$

## 2、代入消去法（共 6 人）

在二元一次聯立方程式的解題方法中，加減消去法通常是同學較喜歡也較擅長使用的，對大多數的題目而言也適合，像這題雖然也可以使用代入消去法，但因為其計算比較繁複，會出現 $\frac{1}{5}(9-\frac{1}{4}y)+y=17$ 這種容易粗心出錯的方程式，所以在所有施測學生中只有極少數這樣作。

### 「解聯立」類別之策略運用發現：

同學在解二元一次聯立方程式的計算題時，大部分使用的策略都是加減消去法，且作為樣本的三校皆然，研究者發現主要原因是代入消去法有較多分數或是括號的運算，計算上要花較多時間，而且在應用分配律去括號時經常會出現變號上的錯誤，所以同學比較不喜歡使用；而加減消去法即使遇到分數型態的題目，也只需使用等量公理將方程式中係數變成整數就會很容易計算，同學較能接受。

### 三、「解文字題」類別

(6) 已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則請問花生糖和梅子糖各多少顆？

表 4-2-5 第 (6) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
加減消去法	48	33	24	105
代入消去法。	3	2	1	6
算式之理解	0	1	2	3
猜測及嘗試	2	8	8	18
組織並列式	51	35	25	111
減少變數	5	2	1	8

在本題中，同學使用的解題策略可分為

#### 1、加減消去法及組織並列式 (共 105 人)

這是最典型的策略，假設花生糖買  $x$  顆、梅子糖買  $y$  顆

$$\begin{cases} x+y=80 & \text{———— ①} \\ 3x+\frac{1}{3}y=80 & \text{———— ②} \end{cases}$$

$$\text{②式} \times 3 \text{ 得 } 9x+y=240 \text{ ————— ③}$$

$$\text{③式} - \text{①式} \text{ 得 } 8x=160$$

$$x=20 \text{ 代回得 } y=60 \quad \text{故花生糖 20 顆、梅子糖 60 顆}$$

#### 2、代入消去法及組織並列式 (共 6 人)

與上法類似，但在計算策略上不用加減消去法，而是使用代入消去法來解二元一次聯立方程式。

### 3、猜測及嘗試（共 18 人）

每一題都有部分同學以此法解題，雖然方法不是很合適，但也能解出正確答案，對於概念不佳但計算能力好的同學，也許這也是一種適合他的解題策略。

### 4、算式之理解（共 3 人）

有時學生的想法真的很特別，尤其在將文字解讀分析成算式時更有趣，有同學就把 3 顆梅子糖作為一個單位量，假設花生糖有  $x$  顆，梅子糖則有  $y$  個單位量，列出以下聯立方程式

$$\begin{cases} x+3y=80 \\ 3x+y=80 \end{cases}$$

求得  $x=20$ ， $y=20$  後，再回答花生糖有 20 顆，梅子糖則有  $20 \times 3 = 60$  顆。

### 5、減少變數（共 8 人）

雖然這份試卷是二元一次方程式的單元測驗，但是其實很多二元一次聯立方程式的題目也可以用一元一次方程式來解，在 Schoenfeld（1985）的解題啟發策略中，就提到了「減少變數」這個方式，也就是利用一個文字符號作變化來代表 2 個（或以上）未知數的方法。以本題來說，也就是假設花生糖買  $x$  顆、梅子糖則有  $(80-x)$  顆，依題意可列出  $3x + \frac{1}{3}(80-x) = 80$ ，再解此一元一次方程式得  $x=20$ 。故花生糖 20 顆，梅子糖 60 顆。

- (8) 小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？

表 4-2-6 第 (8) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
代入消去法	2	3	4	9
加減消去法	53	32	22	107
猜測及嘗試	9	7	6	22
組織並列式	49	35	26	116
減少變數	5	2	1	8
其他	1	6	1	8

在本題中，同學使用的解題策略為

- 1、加減消去法及組織並列式 (共 107 人)
- 2、代入消去法及組織並列式 (共 9 人)

組織並列式是最廣泛使用的策略。此策略為使用 2 個未知數列式並以加減消去法或是代入消去法解出正確答案。假設兩人共騎的協力車有  $x$  輛，三人共騎的協力車有  $y$  輛，則可列出

$$\begin{cases} x+y=17 & \text{—— ①} \\ 2x+3y=40 & \text{—— ②} \end{cases} \quad \text{再以加減或是代入消去法解題。}$$

- 3、減少變數 (共 8 人)

只使用 1 個未知數來假設 2 種協力車的輛數，並以一元一次方程式來解題。

- 4、猜測及嘗試 (共 22 人)

研究者發現本份試卷中，每一題都有同學應用猜測的方式解題，尤其像此類文字題，因為答案必定為正整數，所以同學用數字代入（猜測及嘗試）的方法並不會花費太多時間。

(9) 右表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量各為多少包？

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16  
應付總額：740

表 4-2-7 第(9)題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
代入消去法	5	0	2	7
加減消去法	44	44	18	106
化簡並變形	56	47	14	117
猜測及嘗試	5	7	11	23
組織並列式	51	40	21	112
減少變數	3	0	1	4
其他	3	3	1	7

在本題中，因為在列方程式之前必須先對題目的數據作一化簡整理，先化簡表格得雞蛋 2 盒共 34 元，未汙損收據部分總金額為 551 元，再開始假設並列式，所以解題正確同學至少都必須運用到 2 個以上的策略，歸納同學使用的解題策略如下：

1、加減消去法、化簡並變形及組織並列式（共 106 人）

2、代入消去法、化簡並變形及組織並列式（共 7 人）

假設粉絲  $x$  包、茼蒿  $y$  包，依照題意列二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=6 & \text{———— ①} \\ 39x+30y=740-551 & \text{———— ②} \end{cases}$$

以加減消去法或是代入消去法計算得  $x=1$ ，代回  $y=5$ 。故得粉絲 1 包、茼蒿 5 包。

3、化簡並變形及猜測及嘗試（共 23 人）

化簡表格中之數字並得到粉絲加茼蒿共 6 包，總價則為 189 元之後，有些同學便開始依序用正整數代入找適合的解，雖然是在用猜測及嘗試的方法，但是也必須有數字運算的基本概念才能較快解出答案。

4、化簡並變形、組織並列式及減少變數（共 4 人）

除了數字仍有較多的計算及化簡過程之外，此策略的特徵是只假設一個變數。也就是假設粉絲  $x$  包、茼蒿則為  $(6-x)$  包，

$$178+39x+264+75+30(6-x)+17\times 2=740$$

$$178+39x+264+75+180-30x+34=740 \text{ 之後同類項合併，並化簡得 } 9x=9,$$

$x=1$ ，故得粉絲 1 包、茼蒿 5 包

(10) 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

(1) 基本費用：每次 50 元(可使用 $t$ 分鐘)
(2) 超過 $t$ 分鐘時：超過的部分每分鐘收費 $s$ 元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問  $t$  為多少？

表 4-2-8 第 (10) 題所使用的解題策略

	A 校	B 校	C 校	合計
加減消去法	35	23	5	63
猜測及嘗試	0	1	5	6
組織並列式	32	23	5	63
邏輯推論	9	5	1	15
其他	1	12	0	13

在本題中，同學使用的解題策略為

1、加減消去法及組織並列式 (共 63 人)

$$\begin{cases} 50+s(120-t)=140 & \text{————— ①} \\ 50+s(140-t)=170 & \text{————— ②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50+120s-st=140 & \text{————— ③} \\ 50+140s-st=170 & \text{————— ④} \end{cases}$$

④式減掉③式，得  $20s=20$

$s=1$ ，代回①式  $50+120-t=140$

得  $t=30$

2、猜測及嘗試 (共 6 人)

研究者發現當同學對題目不是很確定怎樣解題時，會將當中的某些

數字以自己的想法猜測並代入試試看，以這題而言，同學不知道  $s$  的變數如何處理，就先用 1 代看看，偏偏這題  $s$  真的就等於 1，所以用這個方法的人就很開心，似乎也增強了他們解題的信心。

$$\begin{array}{l} 120 - t = 120 - 50 \\ 120 - t = 90 \\ t = 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} 30 \quad 30 \quad (\text{列式}) \\ \text{這十分時 1 份 1 元} \\ A = 30 \end{array}$$

### 3、邏輯推論（共 15 人）

這種策略是基於對題意及算式的理解，運用收費與使用時間成正比的概念來推論解題。

#### 『解文字題』類別之策略運用發現：

在計算題策略方面，能將題意以二元一次聯立方程式列出者，其計算過程幾乎都是使用加減消去法，此法對學生而言，熟悉度較高，計算較順暢，可能與教師也習慣以此法教學有關。

而在文字題策略方面，主要應用之策略均為列式及組織，也就是一般傳統的假設 2 個未知數並列式求解，在此單元為最常用也最容易理解的解題方式。讓研究者相當訝異的是，猜測與嘗試竟然是這個類型中排名第二的解題策略，例如第(8)題有關協力車輛數的題目就出現以下解法：



第(10)題計算網咖收費的時間關係的題目是所有試題中答對率最低的，本題中比較特別的是利用收費與使用時間成正比的概念來作邏輯推論，觀念很清楚，所列出的比例式也很容易解，在不需要解出s的前提下，就可以解出題目所要求的t，是一個相當快的方法。

$$\begin{array}{l}
 120 - t \text{ 需 } 90 \text{ 元} \\
 140 - t \text{ 需 } 120 \text{ 元}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \frac{120-t}{90} = \frac{150-t}{120} \\
 480 - 4t = 450 - 3t \\
 480 = 450 + t \\
 t = 30
 \end{array}$$

### 第三節 二元一次方程式單元之解題錯誤類型

#### 一、錯誤類型之歸類

研究者對於所有學生解題錯誤類型部分之歸類，係參考 Robert (1968)，Engelhardt (1982)，Mayer (1992) 及張景媛 (1994) 有關學生解方程式之錯誤題型分類，同樣分為「方程式計算題」及「代數文字題」兩大項，而其中代數文字題的錯誤包含了計算方程式過程中可能出現的錯誤，現將研究者歸納後的分類敘述如下：

#### (一)「方程式計算題」之錯誤類型

(1) 演算錯誤：包含所有正負數、符號、以及基本四則運算上的錯誤。

- (2) 等量公理概念錯誤：解方程式時，在等號一邊作加（減、乘、除）運算時，另一側未做等量運算所產生之錯誤。
- (3) 移項法則概念錯誤：將方程式中某一項由等號一側移至另一側時未變號或變號錯誤之類型。
- (4) 分配律概念錯誤：在  $a(b \pm c) = ab \pm ac$  此類運算中，去括號時  $a$  只乘前項（ $b$ ）忘了乘後項（ $c$ ），或是乘開時變號錯誤。
- (5) 其他定理定律應用錯誤：包含與解二元一次聯立方程式無直接關係的其他數學運算時可能用到的定理定律，例如絕對值、指數律等。
- (6) 粗心大意或隨意作答：包含看錯題目的數據、計算過程中出現的筆誤、或是沒有任何計算過程或說明，只有一個錯誤答案等等之類型。
- (7) 空白未答。

## (二)「代數文字題」之錯誤類型

- (1) ~ (7) 在計算過程中，與以上「方程式計算題」相同之解題錯誤類型。
- (8) 問題轉譯錯誤：語言知識之錯誤概念，包含對語義的錯誤直覺、不明白文字敘述涵義、抓不住文字題重點等等。
- (9) 問題整合錯誤：使用錯誤的基模知識，例如看到「共」便使用加法，不管題意的先後順序、固定套用自己認為正確的基模知識、無法完

整列出所有方程式等。

- (10) 解題計畫及監控錯誤：在策略知識方面的錯誤概念、未能正確使用文字符號列式、答案未檢測其合理性等。
- (11) 解題執行錯誤：常用方程式解題的概念或步驟錯誤，例如等量公理、移項法則、分配律等運算上的錯誤。
- (12) 其他錯誤：無法由其作答歷程推測出錯誤類型者。

## 二、逐題探討學生解題錯誤之類型

同上節，研究者將 11 題正式施測題依二元一次方程式之教學內容區分為化簡（第（1）、（3）、（4）題）、解聯立（第（2）、（5）題）、列式（第（7）、（11）題）、解文字題（第（6）、（8）、（9）、（10）題）四類，第一部份以表格歸納呈現各題不同錯誤類型所出現的人次，在各類型的結論則分別就計算題型及文字題型之解題錯誤類型加以討論，必要時依同學實際作答過程舉列表之。

## 一、「化簡」類別

- (1) 某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 個麵包和 9 包餅乾，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？

表 4-3-1 第 (1) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
問題轉譯錯誤	9	5	10	24
解題計畫及監控錯誤	2	1	1	4
解題執行錯誤	2	3	4	9
空白未答	0	0	5	5

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 3 種，分列於下：

### 1、問題轉譯錯誤 (共 24 人)

因為將餅乾和麵包的包數看反，無法產生倍數關係，所出現的轉譯困難。也就是已知  $3x + 2y = 105$ ，但  $6x + 9y = ??$  就是一種轉譯文字的錯誤，正確應為  $9x + 6y$ ，否則不會和  $3x + 2y$  產生倍數關係。另一種錯誤則是因為不了解題意而產生的轉譯錯誤，看到 500 元就列出  $9x + 6y = 500$  這種與題意不合的方程式，忽略了還要找錢，所以總價並不是 500 元的文字敘述。

### 2、解題計畫及監控錯誤 (共 4 人)

解題計畫錯誤，不應該假設第 3 個未知數  $z$ 。有同學列出  $9x + 6y = 500 - z$ ，但是不知道  $z$  代表什麼，又要如何繼續解題。

### 3、解題執行錯誤 (共 9 人)

在解題運算過程中的錯誤，例如四則運算時的失誤。

(3) 若  $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則  $x-y = ?$

表 4-3-2 第 (3) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
演算錯誤	5	4	5	14
等量公理概念錯誤	12	9	9	30
分配律概念錯誤	5	3	5	13
其他概念錯誤	2	3	4	9
粗心大意或隨意作答	2	1	0	3
空白未答	9	6	17	32

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 4 種，分列於下：

1、演算錯誤 (共 14 人)

計算時變號或是四則運算上的錯誤，純屬運算錯誤。

2、等量公理概念錯誤 (共 30 人)

$$\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$$

$$5x-4y+3x-2y-2x+y=10^4 \quad \dots\dots \text{等號左邊乘 12，右邊未乘}$$

3、分配律概念錯誤 (共 13 人)

$$\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4 \quad \text{合併得}$$

$$\frac{5x-4y+9x-6y-8x-4y}{12} = 10^4 \quad \dots\dots \text{分配律去括號時變號錯誤}$$

$$\text{正確應為 } \frac{5x-4y+9x-6y-8x+4y}{12} = 10^4$$

4、其他概念錯誤 (共 9 人)

指數律的概念中， $10^4$  指的是 1 後面接 4 個零，應為 10000；但同學有

一種錯誤類型為 10 後面接 4 個 0，會變成 100000，也就是產生 10 倍的誤差。另一種錯誤類型為  $10^4=40000$ 。另外有些同學會以國小所學的算術中分子分母約分的概念，來作代數式的約分，產生  $\frac{6x-6y}{12} = \frac{x-3y}{2}$  此種奇怪的錯誤約分方式。

### 5、粗心大意或隨意作答 (共 3 人)

包含看錯題目，或是在計算過程中的筆誤等。

同乘 12

$$\Rightarrow 5x - 4y - 3(3x - 2y) - 4(2x - y) = 10^4 \times 12$$

$$5x - 4y - 9x + 6y - 8x + 4y = 120000$$

$$-12x + 6y = 120000$$

$$\rightarrow x + y = 20000$$

原題的符號為 +

Ans = -20000

- (4) 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 6 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 71 元，則其中有幾人買鉛筆？

表 4-3-3 第 (4) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
問題轉譯錯誤	4	0	2	6
問題整合錯誤	0	1	2	3
解題計畫及監控錯誤	2	3	3	8
其他錯誤	5	2	0	7
空白未答	14	7	21	42

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 4 種，分列於下：

### 1、問題轉譯錯誤（共 6 人）

誤解題目中數字所代表的涵義，以致列式錯誤。在本題中，假設買

鉛筆的有  $x$  人、原子筆  $y$  人，有同學會列出下列二元一次方程式

$$\begin{cases} x+y=22 \\ x+y+\frac{71-7x-15y}{20}=6 \end{cases} \quad \text{但此為錯誤轉譯，應為 1 支鉛筆加上 1 支原子}$$

筆 22 元，非人數 22 人，故  $x+y=22$  此方程式與題意不合。

### 2、問題整合錯誤（共 3 人）

使用錯誤的基模概念，例如等號的任意使用。有同學假設買鉛筆有  $x$  人，買原子筆  $y$  人，則買橡皮擦有  $6-x-y$  人，根據題意得

$7x+15y+20(6-x-y)=71$ ，之後卻發現只有一個二元一次方程式無法解出

$x$ 、 $y$ ，於是就照自己的想法加列出  $6-x=y$  這種莫名其妙的方程式，研究者

發現這樣列的同學並不認為  $6-x-y$  和  $6-x=y$  有什麼不同，也就是對等號概

念不清楚，認為在方程式中，等號是必須存在的解題符號，卻不去思考代

數式所代表的真正意義。

### 3、解題計畫及監控錯誤（共 8 人）

有完整及正確的列式，但卻沒有足夠的策略知識以解方程式，在本題

所發生的是列出三元一次方程式後無法解題。也就是假設鉛筆有  $x$  支、原

子筆  $y$  支、橡皮擦  $z$  個，在列出

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \text{————— ①} \\ 7x+15y+20z=71 & \text{————— ②} \end{cases} \quad \text{後卻不會解題。}$$

#### 4、其他錯誤（共 7 人）

包含計算未完成，沒有最後答案。或是完全看不懂計算過程及其思考型態，答案也不正確。

#### 「化簡」類別之發現：

方程式計算題部分，主要的錯誤類型在概念錯誤，包含解二元一次聯立方程式時的先備知識：等量公理概念錯誤、分配律概念錯誤、及其他概念如正負數四則運算、指數律、分數的特殊計算型態（如約分）等，比較特別的是有些同學會用國小算術的型態做代數式的約分，例如

Handwritten work showing errors in simplification:

$$\frac{5x-4y}{12} + \frac{7x-12x}{12} - \frac{8x-4y}{12} = 10^4$$

Below this, a student incorrectly simplifies  $\frac{6x - 4y}{12}$  to  $10000$ . A callout box points to this error, stating: 代數式的約分概念錯誤。

To the right, another student's work shows  $x-3y = 50000$ .

而等量公理的概念及運用，則是在題目等號兩側分別為分數及整數時，分數側乘上分母最小公倍數後，整數那一側常常會忽略也要乘以同一數。

除了計算的錯誤之外，研究者分析代數文字題部分，主要錯誤類型則在問題轉譯錯誤及問題整合錯誤上，例如第（1）題計算 6 個麵包 9 包餅乾的價格，同學因為不了解題意會產生轉譯錯誤。實例如下：

$$\begin{cases} 3x + 2y = 105 \\ 9x + 6y = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y = 315 \\ 9x + 6y = 500 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 500 \\ 315 \\ \hline 185 \end{array}$$

$$A = 185 \text{元}$$

因為付 500 元鈔票還  
要找錢，所以  $9x+6y$   
並不是等於 500。

同學習慣看到數字就代入方程式中，但其實並沒有真正理解題意。本題顯示同學對文字解讀的掌控能力明顯不足，如何學習將題目敘述所提供的數據解讀、整合並列出正確的二元一次方程式，是同學和教師都還要努力的課題。

## 二、「解聯立」類別

(2)  $x=1, y=-1$  為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

(A)  $\begin{cases} 19x - 11y = 30 \\ 16x - 15y = 31 \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} 37x + 17y = 20 \\ 21x + 4y = 25 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} 15x + 17y = 32 \\ 16x - 11y = 27 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} 19x - 18y = 11 \\ 23x + 17y = 40 \end{cases}$

表 4-3-4 第 (2) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
演算錯誤	4	4	7	15
粗心大意或隨意作答	4	1	2	7
空白未答	1	0	3	4

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 2 種，分列於下：

### 1、演算錯誤 (共 15 人)

主要為計算上將數字代入時變號的錯誤。也就是將  $x=1$ 、 $y=-1$  代入

$$(B) 37 \times 1 + 17 \times (-1) = 37 - 17 = 20$$

$$16 \times 1 - 15 \times (-1) = 16 - 15 = 1 \dots\dots \text{符號運算錯誤}$$

$$(C) 15 \times 1 + 17 \times (-1) = 15 + 17 = 32 \dots\dots \text{符號運算錯誤}$$

## 2、粗心大意或隨意作答 (共 7 人)

包含看錯題目，以及計算正確但答案寫錯的筆誤；或是隨便猜一個答案，這是選擇題常出現的錯誤類型之一。

$$(5) \text{ 二元一次聯立方程式 } \begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases} \text{ 的解為 } x=a, y=b, \text{ 則 } |a - 2b| = ?$$

表 4-3-5 第 (5) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
演算錯誤	4	3	1	8
等量公理概念錯誤	5	2	3	10
分配律概念錯誤	2	2	0	4
其他概念錯誤	5	2	5	12
粗心大意或隨意作答	2	1	6	9
空白未答	7	6	18	31

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 5 種，分列於下：

### 1、演算錯誤 (共 8 人)

(1) 基礎的四則運算錯誤或是變號上的錯誤。

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4x + y = 36 \\ x + 5y = 85 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4x + y = 36 \\ 4x + 20y = 340 \end{cases}$$

相減得  $-19y = -304$  後得  $y = -16$  時變號錯誤， $y$  應為 16 才正確。

(2) 同類項合併錯誤。

$$\begin{cases} a + \frac{1}{4}b = 9 \\ \frac{1}{5}a + b = 17 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 9 - \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{5}a + b = 17 \end{cases} \quad \text{將分數先換算成小數，並將上式}$$

代入下式得  $0.2(9 - 0.25b) + b = 17$ ，以分配律去括號得

$1.8 - 0.05b + b = 17$ ，之後合併同類項得  $1.8 - 1.05b = 17$ ，但同類項合併

錯誤，正確應為  $1.8 + 0.95b = 17$ 。

## 2、等量公理概念錯誤 (共 10 人)

等量公理的觀念不清，未在等號二側同乘或同除一數。

$$\begin{cases} a + \frac{1}{4}b = 9 \\ \frac{1}{5}a + b = 17 \rightarrow \times 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{4}b = 9 \\ a + 5b = 17 \end{cases} \quad \text{下式等號右邊未乘以 5}$$

## 3、分配律概念錯誤 (共 4 人)

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4x + y = 36 \\ x + 5y = 85 \end{cases} \quad \text{將 } x \text{ 用 } 85 - 5y \text{ 代入得}$$

$4(85 - 5y) + y = 36$ ，再以分配律去括號得  $340 - 5y + y = 36$ ，但在

分配律概念中，4 除了乘 85 外也要乘  $(-5y)$ ，所以應為  $340 - 20y + y$

$= 36$ 。

#### 4、其他概念錯誤（共 12 人）

包含二元一次方程式解題的部分正確，但是在題目最後的絕對值部分計算錯誤，或是看不出運算規則的作答，這種通常是屬於為了湊答案而自己胡亂編出來的計算過程。

#### 5、粗心大意或是隨意作答（共 9 人）

包含看錯題目數字，筆誤、或是隨意猜測的答案等。

#### 「解聯立」類別之發現：

本類別均為方程式計算題，錯誤類型可分為演算錯誤、等量公理概念錯誤、分配律概念錯誤、其他概念錯誤四種，可能是因為這 2 個題目難度並不高，所以在概念上產生的錯誤並不多，反而是演算錯誤佔最大比例，尤其是在變號的部分。而在概念上，除了明顯易見的錯誤認知之外，有很多奇怪的解法是讓老師百思莫解的，例如，有同學將 2 個二元一次方程式相減，但是減的方式完全錯誤，又像減法又像乘法，還會出現平方項，非常特別。

$$\begin{cases} a + \frac{1}{4}b = 9 \\ \frac{1}{5}a + b = 17 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} & \rightarrow a + \frac{1}{2}b - 9 = 0 \\ & \rightarrow \frac{1}{5}a + b - 17 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{5}a - \frac{1}{4} + 8 = 0$$

又像減法，又像乘法的奇怪運算

如上例，同學會以自己似是而非的想法自行建構出錯誤概念來解題，而這些就是教師教學時必須及時發現並加以導正的。另外研究者發現，對於解二元一次聯立方程式不熟悉的同學，有的會採取代入數字計算來猜測答案的形式，而且因為整數代入較容易計算，所以通常都會從整數著手，若題目有分數型態，像  $\frac{1}{5}x+y=17$  這個二元一次方程式，同學如果用猜測的方式就會從  $x=5$  或  $10$  代入來找答案。

### 三、「列式」類別

(7) 羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使創創少付了 100 元。設比賽用球買  $x$  打，練習用球買  $y$  打，下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目的數量關係？

$$(A) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x+100 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}$$

表 4-3-6 第 (7) 題所出現的錯誤類型

		A 校	B 校	C 校	合計
問題整合錯誤	選 A	3	1	1	5
	選 B	2	1	1	4
	選 D	12	12	16	40
空白未答		4	4	3	11

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型只有 1 種：

問題整合錯誤 (共 49 人)

在錯誤的 3 個選項中，大多數的錯誤均為 (D) 這個答案，原因為題目中看到「少」100 元，於是就將看反後的價格  $(300y+250x)$  再減 100 元，卻沒有考慮到價格「少」了 100 元反而應該要加回去。而選 (A) 或 (B) 的同學都是未清楚看完題目，就以自己的想法選答，或者是假設的基模知識不足，無法將自己的想法和題意結合起來。

(11) 哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為  $x$  張，弟弟的張數為  $y$  張，依題意下列列式何者正確？

(A) 
$$\begin{cases} 2(y-10) = x \\ y = x-10 \end{cases}$$

(B) 
$$\begin{cases} y-10 = 2x \\ y = x-10 \end{cases}$$

(C) 
$$\begin{cases} y-10 = 2x \\ x-10 = y+10 \end{cases}$$

(D) 
$$\begin{cases} 2(y-10) = x+10 \\ x-10 = y+10 \end{cases}$$

表 4-3-7 第 (11) 題所出現的錯誤類型

		A 校	B 校	C 校	合計
問題整合錯誤	選 A	1	3	8	12
	選 B	3	4	6	13
	選 C	9	7	9	25
空白未答		4	6	12	22

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型只有 1 種：

### 問題整合錯誤 (共 49 人)

選擇 (A) 或是 (B) 的同學，其錯誤類型在於對題意的了解、整合不完整，包含缺乏因果關係的基模知識，在哥哥給弟弟 10 張的條件下，只記得弟弟多了 10 張，卻忘了哥哥也要少 10 張。選擇 (C) 的同學，除了和前述有相同的錯誤外，對於倍數關係的順序也有錯誤概念，所以在題目說哥哥張數為弟弟的 2 倍時，會列出哥哥張數 $\times 2 =$ 弟弟張數這種錯誤的方程式。另外也有同學不清楚括號使用時機，會自己列出 $2y - 10 = x + 10$  這種錯誤方程式，但卻無適當選項可選。

#### 「列式」類別之發現：

本類型以選擇題形式來測驗代數文字題，學生錯誤類型多在題意整合錯誤上，張景媛 (1994) 曾提及：學生對於解題的基模知識不足時，在將題意整合為方程式的階段很容易發生錯誤，包括等號二邊的不等價，該加或該減會產生混淆，對於題目的敘述沒有耐心分析，尤其遇到  $x, y$  兩個未知數之間有 2 種以上數量關係時，會更不願意去思考，寧可隨便猜個答案。

#### 四、「解文字題」類別

- (6) 已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則請問花生糖和梅子糖各多少顆？

表 4-3-8 第 (6) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
問題轉譯錯誤	5	5	7	17
問題整合錯誤	2	1	1	4
解題執行錯誤	2	4	0	6
其他錯誤	5	3	0	8
空白未答	9	6	17	32

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 4 種，分列於下：

1、問題轉譯錯誤（共 17 人）

假設花生糖  $x$  顆、梅子糖  $y$  顆後，列出的方程式除了  $x+y=80$  外，另一個方程式會有 2 種錯誤轉譯方式，一種為  $3x+y=80$ ，另一種方式則為  $3x+3y=80$ 。

2、問題整合錯誤（共 4 人）

只能列出  $x+y=80$  一個方程式，數學基模知識不足，導致對未知數或是題目中所出現的數字所代表的涵義不夠清楚，無法理解因而難以列出其餘所需的方程式，以致無法解題。

3、解題執行錯誤（共 6 人）

(1) 有完整列式，但在解二元一次聯立方程式時產生錯誤。包含計算上的粗心。

$$\begin{cases} x+y=80 & \text{—— ①} \\ 3x+\frac{1}{3}y=80 & \text{—— ②} \end{cases}$$

① $\times 3$ -② 得  $\frac{2}{3}y=160$  此處  $y$  項減法錯誤，應為  $\frac{8}{3}y=160$ 。

(2) 一個未知數正確解出後，代入求另一個未知數產生錯誤。

$$\begin{cases} x+y=80 & \text{—— ①} \\ 3x+\frac{1}{3}y=80 & \text{—— ②} \end{cases}$$

① $\times 9$ -② $\times 3$  得  $8y=480$ ， $y=60$ ，代回得  $x=40$  此時代回運算錯誤， $x$  應為 20 才正確。

#### 4、其他錯誤 (共 8 人)

可分為計算未完成，沒有最後答案；計算已完成，但沒有寫答案，也不知其  $x$ 、 $y$  各代表哪一種糖果的個數；或是完全看不懂計算過程，答案也不正確。

- (8) 小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？

表 4-3-9 第 (8) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
問題轉譯錯誤	2	2	6	10
問題整合錯誤	0	0	2	2
解題計畫及監控錯誤	0	1	2	3
解題執行錯誤	1	1	3	5
其他錯誤	0	4	4	8
空白未答	8	7	9	24

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 5 種，分列於下：

#### 1、問題轉譯錯誤（共 10 人）

未看清楚題目的轉譯錯誤，即使列出來式子或所得答案不合理也未發覺。假設兩人共騎的有  $x$  輛，三人共騎的有  $y$  輛後，將題目給的人數及車輛數數據看反了，把聯立方程式列為「 $x+y=40$ 」及「 $2x+3y=17$ 」

#### 2、問題整合錯誤（共 2 人）

在本題的整合錯誤上，主要是運算符號在列式時的認知及使用錯誤。例如假設兩人共騎的有  $x$  輛，三人共騎的有  $y$  輛後列出  $xy=17$ ，但此列式無意義；或是  $2x+3y=17$ ，但是  $2x+3y$  應為 40 才對。另外也有同學未能完整列出所需的方程式；以及無法將題意正確整合為方程式，會出現  $x+y=17$ ， $x+y=40$  這種不合理的方程式。

#### 3、解題計畫及監控錯誤（共 3 人）

計算完全正確，但在最後寫答時卻錯誤，這種錯誤可以透過驗算來發現，教師在教學時可適時強調驗算的重要性。

#### 4、解題執行錯誤（共 5 人）

在本題主要是計算上的錯誤，有趣的是，計算錯的地方大同小異，都是移項時減法上的錯誤。研究者發現的狀況有二，一為以加減消去法解二元一次聯立方程式，但在最後  $3y-2y=40-34$  時計算得  $y=7$ ，但是  $y$  應該等於 6 才正確。另一種則是以代入消去法解二元一次聯立方程式，解

至  $34 - 2y + 3y = 40$  後  $y = 3$ ，但是  $y = 6$  才正確。

### 5、其他錯誤（共 8 人）

主要有二種，一為計算未完成，沒有最後答案；另一則為隨意代入數字寫答案，沒有明確過程。

### (9) 下表為小美採買火鍋

料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據右表判斷粉絲與茼蒿的數量各為多少包？

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16  
應付總額：740

表 4-3-10 第 (9) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
問題整合錯誤	4	0	1	5
解題計畫及監控錯誤	0	0	2	2
解題執行錯誤	2	0	1	3
其他錯誤	2	3	5	10
空白未答	13	8	19	40

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 4 種，分列於下：

### 1、問題整合錯誤（共 5 人）

因為題意清楚，並沒有同學轉譯錯誤，但是在整合題意以列式的部分就有人列不出來。

## 2、解題計畫及監控錯誤（共 2 人）

在表格的計算上不夠嚴謹，疏忽掉雞蛋部分的金額，使得列式時金額部分有誤，無法得到正確解答。也就是假設粉絲  $x$  包、茼蒿  $y$  包後列出「 $39x+30y=740-178-264-75$ 」此方程式，但因少減了雞蛋總價 34 元，無法解得正確答案。

## 3、解題執行錯誤（共 3 人）

本題計算上因表格中數字較多，有部分同學在解聯立方程式時產生計算上的錯誤。將價格的方程式中雞蛋總價  $17 \times 2$  算錯為 54 元，方程式誤列為  $39x+30y=740-(178+264+75+54)$ 。

## 4、其他錯誤（共 10 人）

主要有二種錯誤類型，一為計算未完成，只求出 1 個未知數，沒有最後答案；另一則為隨意代入數字猜測答案，沒有明確過程。

(10) 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

- (1) 基本費用：每次 50 元(可使用  $t$  分鐘)
- (2) 超過  $t$  分鐘時：超過的部分每分鐘收費  $s$  元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問  $t$  為多少？

表 4-3-11 第 (10) 題所出現的錯誤類型

	A 校	B 校	C 校	合計
問題整合錯誤	15	5	15	35
解題執行錯誤	0	1	0	1
未完成或其他錯誤	4	2	6	12
空白未作答	17	16	29	62

除了空白未答之外，本題出現的錯誤類型可歸類為 3 種，分列於下：

1、問題整合錯誤 (共 35 人)

可分為二類，第一類為將文字題意整合為方程式時所產生的錯誤，有以下幾種不同的錯誤列式範例，有些可以看的出來錯誤概念為何，有些則是完全摸不著頭緒，研究者將在晤談時與同學討論這些特別的列式方式：

$$(a) \begin{cases} 50t+70s=140 \\ 50t+100s=170 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 120t+50=140 \\ 150t+50=170 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2t+40=120 \\ 3t+20=150 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2t+40s=140 \\ 3t+20s=170 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 50t+(120-t)s=140 \\ 50t+(150-t)s=170 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} (120-t)s=140 \\ (150-t)s=170 \end{cases}$$

第二類則是未使用方程式列式，而是使用和解題策略曾經討論過的邏輯推論的概念，以時間和收費成正比的關係來解題，但是卻出現列式不但不合理，而且也看不懂的解題型態。

## 2、解題執行錯誤（共 1 人）

解方程式時所發生的錯誤。在聯立方程式

$$\begin{cases} 50+s(120-t)=140 & \text{———— ①} \\ 50+s(140-t)=170 & \text{———— ②} \end{cases} \text{ 中以加減消去法計算至}$$

$s=1$  後，代回①式求  $t$  時計算執行錯誤。

## 3、其他錯誤（共 12 人）

主要有計算未完成，或是只求出 1 個未知數，沒有最後答案；或是隨意代入數字寫答案，沒有明確過程。

### 「解文字題」類別之發現：

本類別全部為文字題，研究者在此類得到以下數點結論：

錯誤類型包含問題轉譯錯誤、問題整合錯誤、解題計劃及監控錯誤、問題執行錯誤，其中以轉譯和整合佔最多，也就是說同學在文字題上的困難主要還是在列式。將語言訊息及文字條件轉化為方程式的過程，對某些同學確實有困難，這種困難可能因為其語言能力不佳，也可能是數學基模知識不足。

在本研究中，同學的錯誤率比預期中要低，可能是因為以基本學力測驗考古題為本的題型，大部分的國三學生或多或少都練習過，雖然題目稍經改編，但研究者發現同學對文字題的熟悉度會影響其解題信心，當同學覺得對題目有印象時，即使無法根據題意列出二元一次方程式，也會運用其他方法試圖求解，展現了數學解題能力的多元性。

其次，學生在解代數文字題時有一種壞習慣，就是不喜歡寫假設，直接用未知數列式，覺得這樣比較節省時間，但是也容易造成列式上的失誤，或者是計算正確，但最後回答時把 2 個未知數所代表的答案寫反，這種錯誤幾乎每一題都有人發生。

最後，研究者發現，學生在進行自己較為熟悉的解題題型時，經常不仔細了解題目，便以自己以為的意思作答，而且這種情形在功課較優秀的同學部分也出現不少，研究者認為這和某些題型的過度練習有關，一旦同學練習某類題目很多次，再看到類似題時有時就會不耐煩看完題目，直接以自己以為的題意作答，但卻往往是錯誤的。

## 第四節 二元一次方程式單元之解題錯誤原因分析

### 一、 逐題探討分析學生解題錯誤之原因

本節將就學生在"二元一次方程式單元測驗"中各題所出現的錯誤進行原因歸納及分析，分別討論學生的錯誤原因，配合進一步的面談來獲知學生解題過程中的想法。

研究者將全部施測題分為四類（化簡、解聯立、列式、解文字題）後，逐題列出同學犯錯原因，並加以分析討論，而同學所出現的較特殊，或是較典型的錯誤想法，將分別於「化簡」類別第（3）、（4）題、「解聯立」類別第（5）題、「列式」類別第（7）、（11）題、「解文字題」類別第（6）、（9）、（10）題共 8 題呈現實際晤談內容，最後再予總結，希望能提供未來教學作為參考。

### 一、「化簡」類別

（1）某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 個麵包和 9 包餅乾，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？  
錯誤原因：

本題的設計目標是希望同學能夠有能力將 2 個未知數組成的代數式直接加以運算，而不須計算個別未知數所代表的值。而在施測後之結果發現，同學在此觀念所產生的錯誤原因大致有三：一為從 3 包餅乾和 2 個麵包共 105 元中，執意要求出 1 包餅乾和 1 個麵包的價格，但條件不足，解題會中斷。其次是因題目的前後敘述中，餅乾和麵包的位置顛倒，粗心的

同學會誤解題意為要買 9 個麵包和 6 包餅乾，導致錯誤。第三則是有些同學會在還未完全了解題目時就以自己的想法列式並解題，造成對題意有所誤解。

(3) 若  $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則  $x-y = ?$

錯誤原因：

本題強調代數運算規則的熟練運用，有較多同類項合併之類的化簡運算，並且含有指數的計算，同學在此出現的錯誤原因大致可歸因於以下五種：

第一為程序知識不足，在較長方程式中易造成運算上的混淆，加、減、乘、除法的使用上出現的混亂狀況特別多。第二為指數律概念錯誤，同學會把  $10^4$  誤解為 10 後面再接 4 個 0，變成 100000，或者是 4 後面接 4 個 0，變成 40000，這種錯誤雖然和解方程式無關，但是仍然導致無法正確解題。第三則是在等號左邊以 12 為分母進行通分時，應用分配律運算卻變號錯誤，正確的方程式為  $\frac{5x-4y+9x-6y-8x+4y}{12} = 10^4$ ，卻寫成  $\frac{5x-4y+9x-6y-8x-4y}{12} = 10^4$ 。第四是等量公理概念錯誤，等號左邊乘上 12，右邊因為本來就是整數，有些同學認為不必乘，沒有等價的概念。最後第五種為遇到不熟悉的題目時，同學會憑直覺或自認為合理的概念去解題，例如分數中出現代數式時，分子分母的約分，同學就會用國小數字約分的方式去思考，以下為此類型之晤談紀錄。

T：從  $\frac{6x-6y}{12}=10^4$  這個式子的等號左側開始，你約分給老師看看好嗎？

S：就是先約 6 嘛，就變成  $\frac{\cancel{6}x-\cancel{6}y}{\cancel{12}_2}$ ，也就是  $\frac{x-6y}{2}$ 。

T：是嗎？那 6y 的係數 6 不用約嗎？

S：等一下再和分母的 2 約就好了，以前都是這樣作的。

T：那是國小的作法，你看看  $\frac{6 \times 6}{12}$  和  $\frac{6x-6y}{12}$  有哪裡不一樣？

S：嗯，一個有 x、y，另一個沒有；而且一個分子是乘法，另一個是減法。

T：所以左邊那個式子可以先約一個 6，再約另一個；右邊的 6x-6y 其實要看成 6(x-y)，所以只有一個 6 可以和分母約分。

S：喔，所以要看成  $\frac{6(x-y)}{12}$ 。

T：對，而且如果是  $\frac{6-5}{12}$  的話，你覺得分子的 6 和分母的 12 可不可以約分呢？

S：應該不行吧，因為是  $\frac{1}{12}$ 。

T：很好，也就是說分子如果是相加減時，也不能和分母直接約分。

S：那式子就變成  $\frac{\cancel{6}(x-y)}{\cancel{12}_2}$ ，也就是  $\frac{x-y}{2}$  對不對？

T：很讚，懂了吧。

(4) 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 6 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 71 元，則其中有幾人買鉛筆？

錯誤原因：

本題研究者想要了解同學在未知數個數超過 2 個時，會如何運用文字符號的化簡來求得正確答案。錯誤原因可分為以下三種：

第一種為文字題的轉譯不正確，從列式開始就有錯誤，例如鉛筆 1 支 7 元，原子筆 1 支 15 元，假設有 x 支鉛筆和 y 支原子筆，有的同學會

假設出  $x+y=22$  這種意義有誤的方程式。第二種出現最多的錯誤，則是雖然能依照題意列出方程式，但因為有鉛筆、原子筆、橡皮擦 3 個未知數，卻只能列出 2 個方程式而做不下去，或是化簡到一半，無法完成。如以下晤談紀錄：

T：你假設了 3 個未知數，但是只列 2 個方程式，試試設 2 個未知數就好。

S：那  $x$  人買鉛筆， $y$  人買原子筆，橡皮擦怎麼假設？

T：共有 6 位小朋友啊。

S：那就是  $6-x-y$  了，然後是  $7x+15y+20(6-x-y)=71$ 。

T：很好，化簡後是.....

S： $-13x-5y=-49$ ，可是還是解不出來。

T：所以可以用列表的方式找解， $x, y$  都必須是整數，試一、二次就可以成功了。

S：好吧，試試看，真麻煩。

最後，第三種則是以嘗試錯誤法試出正確答案，但卻不懂所代數字的涵義而寫出錯誤答案。例如： $7 \times 3 + 15 \times 2 + 20 = 71$ ，所以答案應該是 3 支，有同學卻寫成  $7 \times 3 = 21$ ，變成 21 支。

## 二、「解聯立」類別

(2)  $x=1, y=-1$  為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

(A) 
$$\begin{cases} 19x - 11y = 30 \\ 16x - 15y = 31 \end{cases}$$

(B) 
$$\begin{cases} 37x + 17y = 20 \\ 21x + 4y = 25 \end{cases}$$

(C) 
$$\begin{cases} 15x + 17y = 32 \\ 16x - 11y = 27 \end{cases}$$

(D) 
$$\begin{cases} 19x - 18y = 11 \\ 23x + 17y = 40 \end{cases}$$

錯誤原因：

本題屬於基本的二元一次聯立方程式解的判別概念及運算問題。同學

只要有何謂「方程式解」的概念就可順利解題，所以出現的錯誤幾乎都在運算上的錯誤，研究者將錯誤原因分為以下四點：

第一為符號運算錯誤：負負得負，或是正負得正等。例如  $16 \times 1 - 15 \times (-1) = 16 - 15 = 1$ 、 $15 \times 1 + 17 \times (-1) = 15 + 17 = 32$ 。第二則為數字計算錯誤。例如  $16 \times 1 - 15 \times (-1) = 16 + 15 = 21$ 。第三點錯誤是本題應該直接將  $x=1$ 、 $y=-1$  代入 4 個選項計算即可，但有同學直接以加減消去法計算 4 個選項的方程式解，但因為題目設計本來就不是要同學使用代入消去法或是加減消去法來解題，所以在 (A) 選項解方程式時就發現數字太複雜，不想計算，於是隨便猜答案。最後，第四種錯誤原因則是計算正確，但在寫答時選項看錯，尤其是 (B)、(C) 兩個選項看反。這種錯誤也不在少數。

(5) 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases}$  的解為  $x=a$ ， $y=b$ ，則  $|a - 2b| = ?$

錯誤原因：

本題為基本的解二元一次聯立方程式，主要測驗同學能否熟練運用加減消去法或代入消去法解題。錯誤原因歸納為以下六種：

第一種為等量公理運用不當，這種錯誤出現最多，亦即方程式的左右兩邊沒有同乘同一整數。例如： $\frac{1}{5}a + b = 17$  此方程式中等號左側乘以 5，但右側未乘，得  $a + 5b = 17$ 。第二種則為分配律運用不當。

$a(b+c)$ 展開後應為 $ab+ac$ 。但有同學會將 $4(85-5y)+y$ 計算成 $340-5y+y$ ，此步驟運算錯誤。應為 $340-20y+y$ 。第三種錯誤為以正確方式解出 $x=5$ 之後代入原方程式，求 $y$ 為多少時計算錯誤。第四種錯誤為基本運算上的錯誤及不熟悉。顯示部分同學即使到國三，在基本四則運算的處理上仍需加強，部分同學解到 $x=\frac{95}{19}$ 時沒有化簡成 $5$ ，以致之後計算太過複雜，而難以正確解題。第五種則為其他與解聯立方程式無關的錯誤。本題最後有絕對值的計算，有同學在此出現錯誤。最後，國三學生在代數的運算上，雖然已經有過較長時間的學習，但有少部分同學仍然沒有能力了解基本代數運算的概念及方式，尤其讓研究者無奈的是，這樣的學生幾乎完全沒有意願學習，也就是在數學這個科目上已經完全放棄。例如：

$$T: \text{妳怎樣解} \begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases} \text{這組聯立方程式?}$$

S: 就相減。

T: 減完會變成.....

$$S: \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4} = -8。$$

T: 這樣對嗎? 妳自己會不會覺得怪怪的?

S: 就隨便作。

T: 我們一步一步來，先看 $x$ 。

S: 老師，不用講了啦，反正我也聽不懂。

### 三、「列式」類別

(7) 羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使創創少付了 100 元。設比賽用球買  $x$  打，練習用球買  $y$  打，下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目的數量關係？

$$(A) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x+100 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}$$

#### 錯誤原因：

大多數的錯誤選項均為 (D) 這個答案，佔所有答錯部分的 67%，原因則為同學未清楚解讀題意，在題目中看到「少付了 100 元」，就將看反後的價格 ( $300y+250x$ ) 再減 100 元，卻沒想到就是因為變少所以才要把 100 元加回來。研究者發現同學即使經過這麼多年的數學學習，還是很難用逆向的方式思考某些數學運算。以下即為晤談紀錄：

*T*：知道自己錯在哪裡嗎？

*S*：如果 *D* 是錯的，那就一定是 *C* 了，我本來就是用猜的。

*T*：那你為什麼猜 *D* 呢？

*S*：因為題目說少付 100 元。

*T*：那表示後來付的錢比較少，正確的價格比較多，所以...

*S*：後來的要加 100 元才會等於正確的。

*T*：YES！！

*S*：題目好像繞口令一樣亂七八糟，原來這麼簡單。

可見同學並不覺得本題困難，只是需要加以指引，尤其在題目敘述較為複雜時，關鍵性的提示對於語文能力較差的同學會有相當大的幫助。

(11) 哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為  $x$  張，弟弟的張數為  $y$  張，依題意下列列式何者正確？

$$(A) \begin{cases} 2(y-10)=x \\ y=x-10 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} y-10=2x \\ y=x-10 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} y-10=2x \\ x-10=y+10 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2(y-10)=x+10 \\ x-10=y+10 \end{cases}$$

錯誤原因：

本題在測試同學是否能依據題意列出適當的二元一次聯立方程式，主要錯誤原因有三：最多的列式概念錯誤為，弟弟給哥哥 10 張紀念卡時，忽略了二人張數彼此消長的因果關係，只記得將弟弟的張數減少 10 張，但在哥哥部分卻忘記要加上 10 張。第二種錯誤則是分配律的應用上，去括號時產生錯誤， $2(y-10)=x+10$  會列為  $2y-10=x+10$ 。最後一種錯誤則是出現在哥哥張數是弟弟的 2 倍，但同學會誤列為哥哥張數  $\times 2 =$  弟弟張數。綜合以上三者的錯誤原因晤談如下：

T：你為什麼列  $y-10=2x$ ？

S：題目說弟弟給哥哥 10 張後，哥哥張數是弟弟的 2 倍。

T：可是弟弟減少，哥哥會不會增加？為什麼哥哥張數沒變？

S：那哥哥的要多 10 張嗎？

T：對啊，你可以列給老師看嗎？

S：就是  $y-10=2x+10$ 。

T：你再想一想，是  $2x+10$  還是  $2(x+10)$ ？

S：不一樣嗎？喔，我知道了，老師常常提醒我們要加括號。

T：對，因為這 2 個式子是完全不一樣的意思， $2x+10$  是 2 乘上  $x$  再加上 10， $2(x+10)$  則是整個  $(x+10)$  乘以 2。

S：那就是  $y-10=2(x+10)$  了。

T：還有 1 個問題，既然哥哥張數是弟弟的 2 倍，就是比弟弟多，為

什麼他還要乘以 2？那樣不是愈差愈多了嗎？

S：我知道了，所以哥哥要加 10 張，而且 2 要換弟弟這邊去乘。

T：對了！所以應該列為……？

S： $2(y-10)=x+10$ 。

#### 四、「解文字題」類別

(6) 已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則請問花生糖和梅子糖各多少顆？

##### 錯誤原因：

在解文字題此類別中，同學必須要有從轉譯文字、解讀並整合題意，進而執行解題運算等連貫的能力。研究者發現同學出現的錯誤在轉譯及整合部分最多，本題將錯誤原因歸納為三種如下：第一種錯誤為無法根據題意列式，題目敘述梅子糖 3 顆 1 元，同學無法反應出每顆可以假設為  $\frac{1}{3}$  元。以下為此類錯誤原因之晤談紀錄：

T：你好像看不太懂題目，列式有點不合理。

S：題目數字看起來都差不多，好亂喔。

T：我們一句一句來，先假設未知數。花生糖、梅子糖共 80 顆。

S： $x+y=80$ 。

T：花了 80 元，所以……

S： $3x+3y=80$ 。

T：花生糖價格對了，但梅子糖 3 顆才 1 元喔，不是 1 顆 3 元！

S：可是 3 顆 1 元，1 顆又不能賣？

T：還是可以啊，你可以試試看分數。

S：那是每顆  $\frac{1}{3}$  元，那  $3x+\frac{1}{3}y=80$  就是第 2 個方程式了。

T：對了！

第二種錯誤是類似敘述對同學造成的混淆，例如題目中出現糖果共 80 顆，價格也是 80 元，有些同學無法分辨這兩個 80 其中的差異，故列出

2 個相同的方程式，無法解題。最後第三種是學生常常為了方便省時，沒有在作答一開始時寫清楚  $x$ 、 $y$  所代表的未知數，結果有部分同學計算雖然正確，但在最後卻把 2 個未知數所代表的變數寫反了，這是相當可惜的，也提醒了我們叮嚀學生要把文字題解題過程寫完整的重要性。

- (8) 小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？

錯誤原因：

本題為 91 年基本學力測驗的題目所改編，題目敘述不複雜，同學出現的錯誤不多，原因可歸納為四點如下：

首先，最多的錯誤出現在同學在二元一次方程式文字題列式時，有時會無法將較多的敘述及數據整合成 2 個正確的方程式，例如有同學先假設  $2x+3y=17$ ，但 $????=40$  就列不出來，屬於語言知識不足的轉譯困難。其次為把車輛數和人數 2 個數據看反了，變成車有 40 輛，而人只有 17 位，得到不合理的答案。第三種則是未看清楚題目問什麼，題目問 3 人騎的有幾輛，有同學寫成 2 人騎的有 11 輛。最後第四種則是解聯立方程式之計算錯誤。例如以代入消去法解到最後，得  $3y-2y=40-34$ ， $y$  應該等於 6，但卻計算成  $y=7$ ，就是這類粗心錯誤，也不在少數。

(9) 下表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量各為多少包？

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16  
應付總額：740

錯誤原因：

研究者在本題的設計中，希望測驗同學解讀表格的能力，所以雖然題目並不難，但是在解題前要先做表格的整理及化簡，不過這卻是某些同學相當欠缺的能力，所歸納之錯誤原因有四：

首先，有些同學並不擅長處理表格，以致於會漏掉 1、2 個數據未計算，或是覺得計算太複雜而提早放棄，造成解題錯誤，以下即為此類型的錯誤原因晤談紀錄：

T：老師看你的表格已經有計算，為什麼後面空白？  
S：因為數字一大堆，看了就覺得好像很難，我想我一定不會。  
T：是嗎，你看，你已經算出肉片每包 88 元，雞蛋共 34 元，先寫在表格上，現在還有什麼是不知道的數量？  
S：就粉絲和茼蒿的包數。  
T：那假設粉絲  $x$  包，茼蒿  $y$  包，金額部分你說說看。  
S：粉絲  $39x$  元，茼蒿  $30y$  元。  
T：對啊，你有沒有發現表格裡都填完了，接下來根據總包數和總金額列式會嗎？  
S：噢，好像還蠻簡單的。

其次，為列式過程中，括號的忽略所產生的運算錯誤。例如： $x+y=16-$

(2+3+3+2) 中，括號忘記寫，變成  $x+y=16-2+3+3+2$ ，意義完全錯誤。

第三種錯誤是不少同學並未列方程式，而是以嘗試錯誤法來試出正確答案，但是用這個方法比較需要時間，所以有的同學便半寫半猜，未完整寫出正確解答。最後研究者發現，在三所施測學校中，本題空白者均比錯誤者多很多，有些同學看到數字很多，會覺得很煩，根本不想計算，而有些則是勉強算到一半，也因為太多不想算，這也是數學學習成就較低的同學中一種很普遍的現象。

10. 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

- (1) 基本費用：每次 50 元(可使用  $t$  分鐘)
- (2) 超過  $t$  分鐘時：超過的部分每分鐘收費  $s$  元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問  $t$  為多少？

錯誤原因：

本題在此次施測中為難度最高的一題，研究者除了要同學能正確的解二元一次聯立方程式之外，對於題目複雜的文字陳述更要正確解讀，而大多數的同學即在此部份產生錯誤。本題的錯誤原因研究者將其歸納為六種如下：

首先，最多的錯誤就是發生在解讀、轉譯文字的過程中，例如以下同學的錯誤範例

$$(1) \begin{cases} 50t+70s=140 \\ 50t+100s=170 \end{cases} \text{ 中，不清楚基本費用的 50 元代表什麼，把 50}$$

乘上  $t$ ，代表金額中的一部分，但其實其意義錯誤。

$$(2) \begin{cases} 120t+50=140 \\ 150t+50=170 \end{cases} \text{ 中，120 是時間，應該要乘以 } s, \text{ 而非 } t。$$

$$(3) \begin{cases} (120-t) s=140 \\ (150-t) s=170 \end{cases} \text{ 在此種列法中同學認為不管上網多久，}$$

都一樣要付基本費用 50 元，所以 50 元可以省略，直接以超過的部份來列式，但其實 50 元應要加在方程式中。

$$(4) \begin{cases} 120s-st=90 \\ 150s-st=120 \end{cases} \text{ 此聯立方程式中有 2 個未知數相乘 (如方程式中}$$

所示之  $st$ )，雖然只要相減就可求解，同學仍然會因為覺得怪怪的而停下來，也顯示出當出現平時較少使用的文字符號做為未知數時，同學容易產生恐懼，相對的對解題就會比較沒有信心。第三種錯誤原因為，研究者發現，當題目敘述相當複雜時，同學會以自己的意思來列式解題（非題目的意思），尤其像網咖這種並不是每位同學都有接觸經驗的場所，有人就直言完全看不懂，也就是說當自己的生活經驗不足以了解或解讀一個數學題目時，解題自然是困難重重。第四種錯誤原因則與生活經驗息息相關，雖然電腦網路對這一代學生並不陌生，但是網咖這種場所的計費方式對某些同學而言卻會有理解上的問題，例如以下晤談：

*T*：可以告訴老師你在列式時哪裡有困難嗎？

*S*：那個基本費用的部分，我有 2 種想法，不知道哪個才對。

*T*：你說說看。

*S*：第一種想法是每  $t$  分鐘 50 元，那  $2t$  分鐘是不是要收 100 元... 以此類推。第二種想法是只要超過  $t$  分鐘，就要加 50 元。到底怎樣才對。

T：嗯……，你有沒有研究過手機的付費方式？

S：沒有耶，都是媽媽在繳錢。

T：你回家找出帳單，或是問問看電信公司，手機就是有基本費用，例如××電信推出 365 專案，指的就是通話秒數在一定時間內收 365 元，這就是基本費用，如果超過這個時間再另外加收每秒多少元的通話費，合起來就是你的手機費用了。

S：喔，所以那個 50 元的基本費只能算一次囉。

T：答對了，那全部的錢怎麼算？

S：那就是 50 元再加上超過的錢，第一次上網 120 分，所以就是  $50+120s=140$ 。

T：是  $120s$  嗎？你自己講的，是「超過」部分的錢喔。

S：那我怎麼知道超過多久？

T：題目有說，50 元可以用……

S： $t$  分鐘啊，可是  $t$  又不知道。

T：所以  $t$  要列在式子當中，你把前面列過的式子再改一點點就對了。

S：我試試看。嗯 ...  $50+(120-t)=140$ 。

T：還差一點， $120-t$  是時間，不是金額，能和 50 相加嗎？

S：那老師你的意思是說，要把  $120-t$  變成金額，所以就把它再乘上  $s$  就好囉。

T：那會列了嗎？

S：就是  $50+(120-t)s=140$ 。

T：讚喔，你會了！這題有點難呢！！

S：還好啦！

最後，研究者發現，本題空白率也相當高，尤其是 C 校，更佔所有施測同學的 45%，如此高的空白率，除了題目解讀列式較困難外，時間的掌握不夠好應該也是一個原因，11 題 45 分鐘比起基本學力測驗的 33 題 70 分鐘應是遊刃有餘，如果同學到後來因為作不完而空白，是否在前面題目因方法不佳而花了太多時間，這是在教學前就要事先提醒學生注意的。

## 二、綜合發現：

根據以上分析二元一次方程式單元試卷中，同學所產生的錯誤原因及晤談結果，研究者發現二元一次方程式單元測驗的多種錯誤原因，在「方程式計算題」的部份可綜合歸類為新舊學習經驗的互相干擾，例如先備知識不足，造成運算規則、定理、公式的誤用；算術和代數運算法則的混淆；或是不經正式解題過程，以直覺或是自行建構的錯誤概念計算並寫答此三項。而在「代數文字題」的部份，主要錯誤原因也可歸納為三項，包含語言能力不足造成文字題轉譯困難；文字題的整合及監控上的能力不足造成列式錯誤；以及解題策略有限，不會利用二元一次方程式以外的其他方法解題。

研究者認為，對於二元一次聯立方程式的學習，同學比較大的問題還是在文字題的解題上，而在晤談中發現，其實只要經過適當的引導，學生在文字題的敘述理解及轉譯為方程式，也會有很大的進步，這也讓研究者反省平時上課是否為了趕進度，減少了讓學生自行思考的時間，總是急急忙忙的直接告訴同學解題方法，對於本來就不是很願意思考數學题目的同學，更加剝奪了他學習自行找關鍵語句來轉譯為方程式的練習機會。數學的學習中，教師的教導固然重要，但是如果可以培養同學面對陌生問題時，自行思考、整理、分析、歸納並正確解題的能力，才是真正「學到」數學的精髓吧。

## 第五章 結論及建議

在皮亞傑的認知發展理論中，時間是相當重要的學習因素，尤其是將概念重新排列組合以建構解題的知識系統上，時間的催化除了增加學生的成熟度之外，在認知歷程上，學生也從國小階段的具體運思期進階到能抽象思考的形式運思期，時間在學生認知及學習上的影響，佔有舉足輕重的地位。

本研究旨在探討國三學生經過較長時間學習代數(從國一下學期至國三上學期)後，在二元一次方程式單元的各種解題情形，包含學生所選擇運用之正確解題策略、解題時出現之錯誤類型及分析其錯誤原因。研究者先以文獻中有關代數及文字符號之背景理念及參考為依據，再以近五年，亦即 90~95 年的基本學力測驗題目為藍本，小幅度修改後作為筆試施測試題，再據以作統計歸納，並透過實際晤談了解學生解題時的錯誤原因及困難所在，希冀能在本單元學習上，提供一些能幫助教師教學以及讓學生更能有效學習的方法及建議。

### 第一節 研究結論

根據本研究的待答問題，茲將施測分析後之主要發現，以學生解題能力之差異、學生使用之解題策略、及學生所出現的錯誤類型及原因，分三點列述於下：

#### 一、學生解題能力的差異

### (1) 解題總正確率較之前國內外研究略高

在第二章曾提及，Küchemann 對英國學生所進行的紙筆測驗中，15 歲學生在代數符號的認知上能達到層次三、四者僅佔 40% 及 9%；而郭汾派、林光賢及林福來（1989）以台灣地區的國中學生為對象，研究國中生文字符號概念的發展中，發現在國三學生中，能達到層次三、四者也只有 43% 及 13.1%，也就是說，不到半數的台灣地區國中三年級學生只能做單一文字符號運算，將文字符號當作特定未知數，或計算結構簡單的題目。而對於將文字符號當作變數、或是解結構較為複雜的題目，能達到要求的同學更是寥寥無幾。但在本單元的自編測驗卷中，11 題總正確率為 68%，較之前國內外研究均略高。研究者認為，主要原因應該是因為以歷年的基本學力測驗為本改編的題型，幾乎所有國三同學都做過類似題型的練習，此種練習效應會使解題恐懼感降低，再加上文字符號運算的熟練度提升，解題自然較有信心。而近年來基測重視生活情境題，使得同學在文字解讀能力上也有進步，比較能夠找尋並組織題目中的重要關鍵字，能運用多種策略，以驗算來確認答案，並有較積極的解題態度。所以會出現較之前研究更高的成績表現。

### (2) 不同題型的正確答題率差異不大

讓研究者較感意外的是，以平均答題正確率來講，在四種不同題型中並沒有太大的差異，「化簡」類別的平均正確率為 66.3%，「解聯立」類別

為 75.8%，「列式」類別為 68.1%，「解文字題」類別則為 65.1%，文字題的解題並沒有對同學造成太大的困擾，經仔細分析後，研究者認為此份施測試題中文字題的敘述並不複雜，在題目轉譯為方程式的難度上除了第 (10) 題外其實都不大，此應即為同學在「解文字題」類型上表現尚佳的主要原因。

### (3) 不同學校的學生解題能力確有差異

雖然本研究主要目的並非在比較不同學校的成績高低，但是從各校解題正確及錯誤百分比的統計表中還是可以發現，不同學校學生之解題能力確實有非常明顯的差異：A 校地處市區，家長社經背景較高，學生素質則較為整齊，總平均解題正確率為 73.5%，平均空白率只有 9.7%，顯示 A 校同學在此單元的學習已達到一定水準。B 校雖屬高雄縣，但非偏遠地區，且施測班級剛好是全校當中成績最優的 2 班，總平均解題正確率比 A 校略高，達 75.5%，平均空白率也只有 9.2%，成為施測的 6 個班級中，成績最好的 2 班。C 校地處屏東縣，較為偏遠，在教育資源上相對弱勢，反應在學習成就上，研究者發現其解題正確率比起另外 2 校明顯偏低，平均解題總正確率為 52.6%，空白率也高達 22.8%，顯示放棄作答情況明顯，尤其在文字題上，正確答題比例和其他 2 校約有 20% ~30% 的差異，相當懸殊。

## 二、學生解題策略之歸類

### (1) 以加減消去法為方程式計算題之主要策略

在計算策略中，考量以代入消去法或是加減消去法解二元一次聯立方程式時，大多數同學會使用加減消去法，而此法是以等量公理為基礎，可見同學在代數的學習上，對等量公理的了解及應用熟悉度都已到達一定水準。在晤談中同學提到代入消去法從國一剛開始學習時就比較少用，雖然其運用的概念較為簡單，但是在大多數的計算題型中，都因為會運用到分數計算，過程中要花較多時間，在分配律計算時又容易忘記變號造成解題錯誤，使用率明顯較低。

### (2) 以線性思考模式解代數文字題

本份施測試卷雖然名為二元一次方程式單元測驗，但解題時並未規定同學只能用二元一次方程式解題，實際上很多二元一次聯立方程式的文字題也可以用一元一次方程式來解。研究者發現，若是題目上明顯有 2 個未知數時，大多數同學就只會用二元來列式，也就是說同學會受到题目的敘述方式影響，思考屬於線性模式，其實在方程式此單元中，減少變數是相當有用的解題策略之一，但是在使用上卻不夠普及。

### (3) 應用數字的特殊或邏輯性解題

另外還有一個有趣的發現，同學在不會用正式方法解題的情況下，常常會使用猜測及嘗試的方法，也就是代入不同數字來找出答案，但是研究者發現國三學生在利用此法時，不只是盲目的任選數字猜測，而是會考慮

题目的相關條件，運用較為抽象的邏輯概念或是數字的特殊性來解題，這也可以算是一種另類的解題方式，甚至，比起正規方式有趣的多。

### 三、學生解題錯誤類型及原因之歸類

#### (1)「方程式計算題」的錯誤類型

主要均為概念上的錯誤，包含等量公理及移項法則運用錯誤、分配律使用上變號的錯誤、括號的忽略或不當使用、正負數的四則運算中所產生的錯誤。另外有些同學會運用從前的學習內容，加上自己似是而非的觀念，自行建構出運算規則，但這通常都是錯誤的，這種想法在每一種步驟都有可能出現，尤其在除法（約分）的計算上最多。

#### (2)「代數文字題」的錯誤類型

以文字的整合並列式出現最多錯誤，單純的文字轉譯反而較佳，研究者認為國一到國三的數學學習已經教導大多數同學如何理解數學文字題，尤其是掌控關鍵字句以轉譯的能力，反而在題目條件較多，或是敘述較長時的整合能力相對較差，會列出難以解題之方程式。

根據以上結論，在本單元的研究結果中顯示，除了每個人先天條件，教育環境不同所造成的個別差異外，對基本計算定理公式的熟悉度，及能否適當運用有效策略，均會造成解題能力的差異，至於解題的錯誤則多出現在較為複雜（例如分數或是等號二側均有未知數）的計算題型或是敘述繁複、不易轉譯整合的文字題。

## 第二節 研究建議

根據本研究之發現，研究者將就教學方法及內容、教材呈現、未來研究方向等三方面提出建議，以作為未來進一步研究之參考。

### 一、在教學內容及方法上

#### (1) 學生的先備知識及舊經驗的連結必須更加清楚

解二元一次方程式其實需要完整的算術運算及基礎的代數能力，學生在國小時所學的四則運算，必須結合國中所學的等量公理及方程式等號的概念，才能順利解題。在這個過程中，只要一個環節出錯，解題就會失敗，所以教師在教學上，必須確實要求學生組織正確觀念，不過度類化，類似題目可以用條列的方式讓同學比較，較不會產生錯誤聯結。

#### (2) 加強學生解讀文字及組織基模的能力

文字題大部分的錯誤，會出現在 Mayer (1987) 的解題歷程四步驟中的問題轉譯及問題整合這二個步驟，所以教師必須加強學生解讀文字及組織基模的能力。以國三學生而言，因為已經受過較長時間的文字題解讀訓練，對於較直接、基礎的問題轉譯，大多數都沒有問題，反而是對於解題的基模知識較零散，出現 2 個以上概念時難以整合，在列式時會出現問題。研究者建議可利用類似情境，例如在試卷第 (10) 題有關網咖的題目中，若是同學對基本收費和超出時間部分的費用不會區分，就可以運用其他同學較可能有接觸的形式，像是計程車或是手機收費方式等，教導同學

將類似觀念融入題意，舉生活中的例子協助同學聯結有關概念，進而順利解題。

### (3) 培養學生進行自我覺察，亦即後設認知之思考能力

為了增進學生在代數概念上的理解，教師在教學時不應只重視程序性的解題過程，尤其對學習成就較差的同學，教師可從一開始教學時，就教導同學如何隨時監測自己的解題歷程，包括評估解題過程的合理性，是否和其他概念產生矛盾，以及驗證最後答案等等，讓學生能更有效的經營管理自己的解題行為。

### (4) 培養學生多元思維型態的解題技巧

善用不同的數學多元表徵是相當有效的策略。多元解題的能力一直是各國數學教育所強調的，尤其代數方程式的題目經常與生活相關，在日常生活環境中遇到數字問題時，並不一定會以方程式來解決，包含猜測並嘗試、概算、逆推法、圖形、表格之輔助等反而是較經常使用的。也就是說，解題的歷程並不唯一，而應是動態的，若是能嘗試以不同的形式來思考問題，往往能激發出更有趣、更有價值的火花。例如本施測試卷中的第(4)題有關鉛筆、原子筆、橡皮擦個數的題目，就有同學以表格的方式來列出所有可能答案，雖然沒有正規計算過程，但也可以達到正確解題的目的。

## 二、在教材的改進上

### (1) 未知數概念可提早代入國小課程

二元一次聯立方程式在國中代數領域是必要的學習單元，也銜接在小學已學的未知數概念與國一的一元一次方程式之後，教學形式的一以貫之有其重要性。但是國小數學所學的未知數概念，依皮亞傑的認知發展理論來講，著重於具體操作的教學，而國中數學卻以形式運思期的抽象思考和邏輯推理為主，在教材和教法上均有明顯的不同（張景媛，1994）。因此，以目前教材而言，在國中和國小的教科書，代數觀念的銜接存在相當大的落差，研究者認為，時代社會的快速進步，現代兒童的成熟度和數十年前已有相當差距，在教材上可以嘗試將較為抽象的未知數概念在國小五、六年級的課程中予以代入，也許對兒童日後在國中的代數學習能夠有更佳的成效。

## （2）文字題的語意必須明確清晰，且結合學生日常生活

近年來，數學教育強調解決問題的能力，所以符合生活情境的文字題在各版本的教科書中出現相當頻繁，但是文字題的重點除了要與學生日常生活結合外，還要注意個體或城鄉間之差距。例如捷運系統對非大台北地區的孩子非常陌生，若要設計為題目就必須要解說相當清楚。另外，文字題的語意必須明確清晰，轉譯文字是學生學習解題相當重要的能力之一，題目語意若是含糊不清，容易產生誤會，就不是適當的題目。例如某版本教科書就曾出現下列例題：「已知三年前父親年齡為兒子年齡的4倍；二年後，父親年齡為兒子年齡的3倍，問父子今年各多少歲？」其中的『二

年後』，可以解讀為現年的二年後，或是3年前的二年後，易造成混淆。

### 三、在未來的相關研究上

本研究由於時間、人力的限制，僅選取高雄市、高雄縣、屏東縣各一所國中做研究，建議未來可針對不同樣本（如其他地區學校）及變項（如性別、年級、學習態度、學習成就等）作更詳盡的分析研究。另外，本研究的學生在93學年度學習二元一次聯立方程式時，仍屬於九年一貫暫行綱要的範疇，不同版本產生的差異性較高，研究者建議未來研究者，可以在94學年度正式實施九年一貫課程正式綱要之後，再做此類相關研究，探討是否可以降低版本差異所造成的影響，相信會有更高的研究價值。

## 參考文獻

- 王懷權 (1987)。數學發展史。學英文化事業有限公司。
- 王如敏 (2004)。國二學生解一元一次方程式錯誤類型分析研究。國立高雄師範大學數學系所碩士論文。
- 方吉雄 (2001)。原住民國中學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究。國立高雄師範大學數學系所碩士論文。
- 列志佳、簡珮華、黃家鳴 (2000)。數學的故鄉。九章出版社。
- 朱建正 (2001) 增訂。數學父親。翰林出版事業股份有限公司。
- 李信明 (1998)。中國數學五千年。台北市：台灣書店。
- 李正宏 (2000) 譯、大村平原著。什麼是方程式。台北：建興出版社。
- 呂溪木 (1987)。代數在國民小學教學之可行性研究。我國學生數學概念發展研究計劃總結報告之一。中華民國 76 年度科學教育學術研討會論文彙編。
- 余民寧 (1997)。有意義的學習—概念構圖之研究。台北市：商鼎文化。
- 吳德邦、吳順治 (1989)。解題導向的數學教學策略。台北市：五南圖書出版公司。
- 吳寶桂 (2002)。青少年數學方程式概念發展研究。國科會專題研究計劃報告：NSC-91-2522-S-110-001。
- 林碧珍 (1985)。數學概念的形成與學習。國教世紀月刊，21(4)，1-4。

- 林麗雯(2000)。國中一年級學生學習二元一次聯立方程式的能力發展與其解題的錯誤分析。國立中山大學教育研究所碩士論文。
- 涂佩瑜(2004)。國中生解二元一次聯立方程式錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- 南一書局國中數學編撰委員會(2006a)。國民中學數學第一冊教師手冊。台北：南一書局。
- 南一書局國中數學編撰委員會(2006b)。國民中學數學第二冊教師手冊。台北：南一書局。
- 袁媛(1992)。國中一年級學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究。國立高雄師範大學數學教育研究所論文。
- 唐淑華(1989)。語文理解能力對增進國一學生數學理解能力之實驗研究。國立台灣師範大學心理與教育輔導研究所碩士論文(未出版)。
- 梁蕙如(2003)。國三學生數形命題論證類型及其改變之教學探究。台灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 陳維民(1998)。兒童的未知數概念研究——一個國小六年級兒童的個案研究。國立高雄師範大學數學系碩士班未發表之碩士論文。
- 陳嘉麟(2003)。發展符合九年一貫精神之二元聯立方程教學模組之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。

郭汾派 (1988)。國中生文字符號運算的錯誤型態。數學科教學輔導  
論文集，11-128 頁。

郭汾派、林光賢與林福來 (1989)。國中生文字符號概念的發展。國科  
會專題研究計畫報告，NSC76-0111-S003-08、  
NSC77-0111-S003-05A。

雪山圖書公司 (1986)。趣味數學常識。台北：雪山圖書公司。

許正諭 (2005)。九年一貫體制下國中生文字符號運算概念認知理解情  
形之研究。國立高雄師範大學數學系教學碩士論文。

國立編譯館 (2000a)。國民中學數學第一冊。台北：國立編譯館。

國立編譯館 (2000b)。國民中學數學教師手冊第一冊。台北：國立編  
譯館。

黃台珠 (1984)。概念的研究及其意義。科學教育月刊，66，44-55。

黃敏晃 (1991)。淺談數學解題。教與學，23，2-15。

張景媛 (1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研  
究。師範大學教育心理學報，27，175-200。

趙文敏 (1985)。數學史。台北市：協進。

謝和秀 (2001)。國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究。國  
立高雄師範大學數學系教學碩士論文。

謝和秀、謝哲仁 (2002)。國一學生文字符號概念及代數文字題之解題

研究。九十一年度師範院校教育學術論文發表會論文集，3，頁  
1491-1521。

謝佳叡 (2003)。從算術思維過渡到代數思維。九年一貫課程綱要諮詢  
小組諮詢意見書。

[http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/\\_private/mathedu/me9/nineyear/p  
hilosophy/Appendix\\_A2.doc](http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me9/nineyear/p<br/>hilosophy/Appendix_A2.doc)

謝孟珊 (2000)。以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表  
現之探討。國立台北師範數理教育研究所碩士論文。

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor,  
United Kingdom: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F.  
Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideals of algebra, K-12* (pp.20-32).  
Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Jr., Lindquist, M. M., & Reys,  
R. E. (1982). Student performance in algebra: Results from the  
National Assessment. *School Science and Mathematics* (October),  
514-531.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle,  
Australia : University of Newcastle.

Cox, L. S. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal  
and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics  
Education*, 6, 202-220.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word

- problems. *Cognition and Instruction*, 8, 261-289.
- Engelhardt, J. M. (1982). Using Computational errors in diagnostic teaching. *Arithmetic Teacher* , 29(8), 16-19.
- Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115-141.
- Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 75-90.
- Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kathleen, T. T. (1987). *Error reduction strategies for whole number operations in grade four*. (Doctoral Dissertation , University of Brigham Young ,1986).
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran , C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* ( pp.390-419). New York: Macmillan Publishers.
- Kilpatrick, J. (1967). Problem solving in mathematics. *Review of Educational Research*, 39, 523-534
- Kuchemann, D. (1981) Algebra In Kathleen. M. Hart (Ed.), *Children's*

- Understanding of Mathematics* ( pp.11-16). John Murray, London.
- Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.
- Marshall, S. P. (1987). *Understanding arithmetic story problems*. ( ERIC Document Reproduction Service No. ED 279687 ) .
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Merrill, M. D. & Wood, N. D. (1974). *Instruction strategies: A preliminary taxonomy*. Columbus, Ohio: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education, Ohio State University.
- Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 163-172.
- Resnick, L. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC : National Academy Press.
- Robert, G. H. (1968). *The failure strategies of third grade arithmetic pupils*. *Arithmetic Teacher*, 442-446.
- Schwartz J. (1976). *Semantic aspects of quantity*. Cambridge, MA : MIT, Division for study and Research in Education.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. London : Academic

Press.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Vergnaud, G. (1984). Understanding mathematics at secondary school level. In Alan Bell, B. Low & Jeremy Kilpatrick, (Eds.), *Theory, research and practice in mathematical education* (pp. 27-35), UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Wanger, S. (1981). Conservation of equation and function under transformation of variable. *Journal for Research in mathematics Education*, 12, 107-118.

二元一次方程式單元測驗預試試卷

\_\_\_\_\_ 國中 \_\_\_\_\_ 年 \_\_\_\_\_ 班 \_\_\_\_\_ 號 姓名：\_\_\_\_\_

- ( ) 1. 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 6 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 71 元，則其中有幾人買鉛筆？  
(A) 4 (B) 3 (C) 6 (D) 5
- ( ) 2. 若  $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則  $x-y = ?$   
(A) 0  
(B) 1  
(C)  $10^4$   
(D)  $2 \times 10^4$
- ( ) 3. 某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 個麵包和 9 包餅乾，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？  
(A) 315 (B) 210 (C) 290 (D) 185
- ( ) 4.  $x=1, y=-1$  為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？  
(A)  $\begin{cases} 19x-11y=30 \\ 21x+4y=25 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} 37x+17y=20 \\ 16x-15y=31 \end{cases}$   
(C)  $\begin{cases} 15x+17y=32 \\ 16x-11y=27 \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} 19x-18y=11 \\ 23x+17y=40 \end{cases}$

( ) 5. 已知二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 3x-y=1 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ , 則  $a-b$   
 = ? (A) 3 (B) -1 (C)  $\frac{19}{5}$  (D)  $\frac{31}{13}$

( ) 6. 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x+\frac{1}{4}y=9 \\ \frac{1}{5}x+y=17 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ , 則  $|a-2b|$   
 = ? (A) 1 (B) 11 (C) 6 (D) 27

( ) 7. 求聯立方程式  $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$  的解為何?  
 (A)  $x=2, y=-\frac{3}{2}$   
 (B)  $x=3, y=1$   
 (C)  $x=1, y=-1$   
 (D)  $x=3, y=-2$

( ) 8. 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 4x+3y=29 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ , 則  
 $a+b=?$  (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

( ) 9. 守守到郵局, 買了 5 元與 12 元的兩種郵票共 29 張, 花了 250 元; 若 5 元郵票買  $x$  張, 12 元郵票買  $y$  張, 下列哪一個聯立方程式是正確的?

(A)  $\begin{cases} x+y=250 \\ 5x+12y=29 \end{cases}$   
 (B)  $\begin{cases} x+y=29 \\ 5x+12y=250 \end{cases}$

$$(C) \begin{cases} x + y = 250 \\ 12x + 5y = 29 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x + y = 29 \\ 12x + 5y = 250 \end{cases}$$

( ) 10. 小玲的錢包內有佰元鈔票  $2x$  張，伍拾元硬幣  $3y$  個，請問錢包內有多少元？

(A)  $2x + 3y$

(B)  $20x + 30y$

(C)  $200x + 150y$

(D)  $100(2x + 3y)$

( ) 11. 某人帶了 400 元到市場買水果，如果他買 3 個蘋果、5 個水梨，則不足 30 元；如果他買 5 個蘋果、4 個水梨，則剛好把錢用完。設蘋果每個  $x$  元，水梨每個  $y$  元，則依題意可列出下列哪一組聯立方程式？

$$(A) \begin{cases} 5x + 3y = 430 \\ 4x + 5y = 400 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} 3x + 5y = 430 \\ 5x + 4y = 400 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 5x + 3y = 370 \\ 4x + 5y = 400 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} 3x + 5y = 370 \\ 5x + 4y = 400 \end{cases}$$

( ) 12. 羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使得創創少付了 100 元。設比賽用球買  $x$  打，練習

用球買  $y$  打，則下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目中的數量關係？

(A) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}$$

(B) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}$$

(C) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x+100 \end{cases}$$

(D) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}$$

( ) 13. 小嵐與小律現在的年齡分別為  $x$  歲、 $y$  歲，且  $x$ 、 $y$  的關係式為

$3(x+2)=y+2$ 。下列關於兩人年齡的敘述何者正確？

(A) 兩年後，小律年齡是小嵐年齡的 3 倍

(B) 小嵐現在年齡是小律兩年後年齡的 3 倍

(C) 小律現在年齡是小嵐兩年後年齡的 3 倍

(D) 兩年前，小律年齡是小嵐年齡的 3 倍

( ) 14. 哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥

的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就

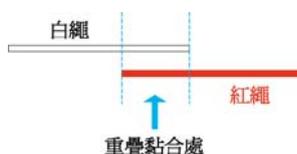
一樣多。設哥哥的張數為  $x$  張，弟弟的張數為  $y$  張，依題意下

列列式何者正確？

(A)  $\begin{cases} 2(y-10)=x \\ y=x-10 \end{cases}$       (B)  $\begin{cases} y-10=2x \\ y=x-10 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} y-10=2x \\ x-10=y+10 \end{cases}$       (D)  $\begin{cases} 2(y-10)=x+10 \\ x-10=y+10 \end{cases}$

- ( ) 15. 如圖(一)，有一白繩與紅繩長度相差 17 公分，若將白繩的  $\frac{3}{8}$  與紅繩的  $\frac{1}{3}$  重疊並以膠帶黏合，求黏合後所形成的繩長為多少公分？



- (A) 236  
(B) 238  
(C) 287  
(D) 289

圖(一)

- ( ) 16. 小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？  
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

- ( ) 17. 下表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16

應付總額：740

- (A) 粉絲比茼蒿多 2 包      (B) 茼蒿比粉絲多 2 包

(C) 粉絲比茼蒿多 4 包 (D) 茼蒿比粉絲多 4 包

( ) 18. 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

- |   |
|---|
| (1) 基本費用：每次 50 元(可使用 $t$ 分鐘)                    |
| (2) 超過 $t$ 分鐘時：超過的部分每分鐘收費 $s$ 元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計) |

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問  $t$  為多少？

(A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 40

( ) 19 創創家有 10 人、守守家有 8 人，兩家人一同看表演，該場表演票價如圖(二)所示。若創創家的總票價比守守家少 60 元，則

創創家的全票比守守家的全票少幾張？

(A) 0 (B) 2  
(C) 4 (D) 6

票價	
全票	60元 / 張
半票	30元 / 張

( ) 20. 已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則此兩種糖果的數量關係為何？

(A) 花生和梅子糖一樣多  
(B) 花生糖比梅子糖多 40 顆  
(C) 花生糖比梅子糖少 20 顆  
(D) 花生糖比梅子糖少 40 顆

附錄 B 改編後試題與原基本學力測驗題之差異

(差異處在改編題上以粗黑體表之)

原題 (94 學年度第二次學測)

某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 5 位小朋友，每人各買一件文具，共花 64 元，則其中有幾人買原子筆？  
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

改編後試題

1. 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 **6 位**小朋友，每人各買一件文具，共花了 **71 元**，則其中有幾人買鉛筆？  
(A) 4 (B) 3 (C) 6 (D) 5

原題 (94 學年度第二次學測)

若  $\frac{3x-2y}{6} + \frac{2x-4y}{3} - \frac{x-2y}{2} = 10^5$ ，則  $x-y = ?$   
(A) 0 (B) 1 (C)  $10^5$  (D)  $1.5 \times 10^5$

改編後試題

2. 若  $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則  $x-y = ?$   
(A) 0 (B) 1 (C)  $10^4$  (D)  $2 \times 10^4$

原題 (90 學年度第一次學測)

某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 包餅乾和 4 個麵包，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？  
(A) 290 (B) 395 (C) 105 (D) 210

改編後試題

3. 某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 **6 個麵包和 9 包餅乾**，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？  
(A) 315 (B) 210 (C) 290 (D) 185

原題（93 學年度第二次學測）

$x=1, y=1$  為下列哪一組二元一次聯立方程式的解？

(A)  $\begin{cases} 19x - 11y = 30 \\ 21x + 4y = 25 \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} 37x + 17y = 20 \\ 16x - 15y = 31 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} 15x + 17y = 32 \\ 16x - 11y = 27 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} 19x - 8y = 11 \\ 23x + 17y = 40 \end{cases}$

改編後試題

4.  $x=1, y=-1$  為下列哪一組二元一次聯立方程式的解？

(A)  $\begin{cases} 19x - 11y = 30 \\ 16x - 15y = 31 \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} 37x + 17y = 20 \\ 21x + 4y = 25 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} 15x + 17y = 32 \\ 19x - 18y = 11 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} 16x - 11y = 27 \\ 23x + 17y = 40 \end{cases}$

原題（90 學年度第二次學測）

已知二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ ，則  $a+b=?$

(A) 3 (B) -1 (C)  $\frac{19}{5}$  (D)  $\frac{31}{13}$

改編後試題

5. 已知二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ ，則  $a-b=?$

(A) 3 (B) -1 (C)  $\frac{19}{5}$  (D)  $\frac{31}{13}$

原題（92 學年度第一次學測）

已知二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases}$  的解為  $x=a$ ， $y=b$ ，則  $|a-b|=?$

(A)1 (B)11 (C)13 (D)16

改編後試題

6. 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases}$  的解為  $x=a$ ， $y=b$ ，則  $|a-2b|=?$

(A)1 (B)11 (C)6 (D)27

原題（92 學年度第二次學測）

求聯立方程式  $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$  的解為何？

(A) $x=2$ ， $y=-\frac{3}{2}$  (B) $x=3$ ， $y=1$

(C) $x=1$ ， $y=-1$  (D) $x=3$ ， $y=-2$

本題未改編

7. 求聯立方程式  $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$  的解為何？

(A) $x=2$ ， $y=-\frac{3}{2}$

(B) $x=3$ ， $y=1$

(C) $x=1$ ， $y=-1$

(D) $x=3$ ， $y=-2$

原題（95 學年度第二次學測）

若二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 3y = 29 \end{cases}$  的解為  $x = a, y = b$ ，則  $a + b = ?$

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

本題未改編

8. 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 3y = 29 \end{cases}$  的解為  $x = a, y = b$ ，則  $a + b = ?$

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

原題（90 學年度第一次學測）

守守到郵局，買了 5 元與 12 元的兩種郵票共 29 張，花了 250 元；若 5 元郵票買  $x$  張，12 元郵票買  $y$  張，下列哪一個聯立方程式是正確的？

- (A)  $\begin{cases} x + y = 250 \\ 5x + 12y = 29 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} x + y = 29 \\ 5x + 12y = 250 \end{cases}$   
(C)  $\begin{cases} x + y = 250 \\ 12x + 5y = 29 \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} x + y = 29 \\ 12x + 5y = 250 \end{cases}$

本題未改編

9. 守守到郵局，買了 5 元與 12 元的兩種郵票共 29 張，花了 250 元；若 5 元郵票買  $x$  張，12 元郵票買  $y$  張，下列哪一個聯立方程式是正確的？

- (A)  $\begin{cases} x + y = 250 \\ 5x + 12y = 29 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} x + y = 29 \\ 5x + 12y = 250 \end{cases}$   
(C)  $\begin{cases} x + y = 250 \\ 12x + 5y = 29 \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} x + y = 29 \\ 12x + 5y = 250 \end{cases}$

原題（92 學年度第一次學測）

小玲的錢包內有百元鈔票  $x$  張，拾元硬幣  $y$  個，請問錢包內有多少元？

- (A)  $x+y$
- (B)  $10x+y$
- (C)  $100x+10y$
- (D)  $110(x+y)$

改編後試題

10. 小玲的錢包內有百元鈔票  $2x$  張，伍拾元硬幣  $3y$  個，請問錢包內有多少元？

- (A)  $2x+3y$
- (B)  $20x+30y$
- (C)  $200x+150y$
- (D)  $100(2x+3y)$

原題（94 學年度第一次學測）

某人帶了 400 元到市場買水果，如果他買 3 個蘋果、5 個水梨，則剩下 30 元；如果他買 5 個蘋果、4 個水梨，則剛好把錢用完。設蘋果每個  $x$  元，水梨每個  $y$  元，則依題意可列出下列哪一組聯立方程式？

- (A)  $\begin{cases} 5x+3y=430 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$
- (B)  $\begin{cases} 3x+5y=430 \\ 5x+4y=400 \end{cases}$
- (C)  $\begin{cases} 5x+3y=370 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$
- (D)  $\begin{cases} 3x+5y=370 \\ 5x+4y=400 \end{cases}$

改編後試題

11. 某人帶了 400 元到市場買水果，如果他買 3 個蘋果、5 個水梨，則不足 30 元；如果他買 5 個蘋果、4 個水梨，則剛好把錢用完。設蘋果每個  $x$  元，水梨每個  $y$  元，則依題意可列出下列哪一組聯立方程式？

- (A)  $\begin{cases} 5x+3y=430 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$
- (B)  $\begin{cases} 3x+5y=430 \\ 5x+4y=400 \end{cases}$
- (C)  $\begin{cases} 5x+3y=370 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$
- (D)  $\begin{cases} 3x+5y=370 \\ 5x+4y=400 \end{cases}$

原題（90 學年度第二次學測）

羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使得創創多付了 100 元。設比賽用球買  $x$  打，練習用球買  $y$  打，則下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目中的數量關係？

- (A)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}$   
(C)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300xx+250y=300y+250x=100 \end{cases}$

改編後試題

12. 羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使得創創少付了 100 元。設比賽用球買  $x$  打，練習用球買  $y$  打，則下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目中的數量關係？

- (A)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}$   
(C)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x+100 \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}$

原題（93 學年度第一次學測）

小嵐與小律現在的年齡分別為  $x$  歲、 $y$  歲，且  $x$ 、 $y$  的關係式為  $3(x+2)=y$ 。下列關於兩人年齡的敘述何者正確？

- (A) 兩年後，小律年齡是小嵐年齡的 3 倍  
(B) 小嵐現在年齡是小律兩年後年齡的 3 倍  
(C) 小律現在年齡是小嵐兩年後年齡的 3 倍  
(D) 兩年前，小嵐年齡是小律年齡的 3 倍

改編後試題

13. 小嵐與小律現在的年齡分別為  $x$  歲、 $y$  歲，且  $x$ 、 $y$  的關係式為  $3(x+2)=y+2$ 。下列關於兩人年齡的敘述何者正確？

- (A) 兩年後，小律年齡是小嵐年齡的 3 倍  
(B) 小嵐現在年齡是小律兩年後年齡的 3 倍  
(C) 小律現在年齡是小嵐兩年後年齡的 3 倍  
(D) 兩年前，小律年齡是小嵐年齡的 3 倍

原題（94 學年度第二次學測）

哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為  $x$  張，弟弟的張數為  $y$  張，依題意下列列式何者正確？

- (A)  $\begin{cases} 2(y-10) = x \\ y = x-10 \end{cases}$       (B)  $\begin{cases} y-10 = 2x \\ y = x-10 \end{cases}$
- (C)  $\begin{cases} y-10 = 2x \\ x-10 = y+10 \end{cases}$       (D)  $\begin{cases} 2(y-10) = x+10 \\ x-10 = y+10 \end{cases}$

本題未改編

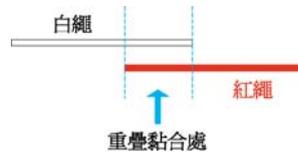
14. 哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為  $x$  張，弟弟的張數為  $y$  張，依題意下列列式何者正確？

- (A)  $\begin{cases} 2(y-10) = x \\ y = x-10 \end{cases}$       (B)  $\begin{cases} y-10 = 2x \\ y = x-10 \end{cases}$
- (C)  $\begin{cases} y-10 = 2x \\ x-10 = y+10 \end{cases}$       (D)  $\begin{cases} 2(y-10) = x+10 \\ x-10 = y+10 \end{cases}$

原題（94 學年度第一次學測）

如圖，將一白繩的  $\frac{3}{8}$  與一紅繩的  $\frac{1}{3}$  重疊並以膠帶黏合，形成一條長為 238 公分的繩子。求未黏合前，兩繩長度相差多少公分？

- (A) 14    (B) 17    (C) 28    (D) 34



改編後試題（圖同原題）

15. 如圖，有一白繩與紅繩長度相差 17 公分，若將白繩的  $\frac{3}{8}$  與紅繩的  $\frac{1}{3}$  重疊並以膠帶黏合，求黏合後所形成的繩長為多少公分？

- (A) 236    (B) 238    (C) 287    (D) 289

原題（91 學年度第一次學測）

小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，38 人共租了 16 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 16 輛協力車中，由兩人共騎的有幾輛？

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

改編後試題

16. 小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

原題（95 學年度第二次學測）

下表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

- (A) 粉絲比茼蒿多 2 包 (B) 茼蒿比粉絲多 2 包  
(C) 粉絲比茼蒿多 4 包 (D) 茼蒿比粉絲多 4 包

品名	售價 (元/包)	數量 (包)	金額 (元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16

應付總額：740

本題未改編（表同原題）

17. 下表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

- (A) 粉絲比茼蒿多 2 包 (B) 茼蒿比粉絲多 2 包  
(C) 粉絲比茼蒿多 4 包 (D) 茼蒿比粉絲多 4 包

原題 (91 學年度第一次學測)

超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

- (1) 基本費用：每次 50 元(可使用  $t$  分鐘)
- (2) 超過  $t$  分鐘時：超過的部分每分鐘收費  $s$  元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 130 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 160 元。請問  $t$  為多少？

- (A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 40

改編後試題

18. 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

- (1) 基本費用：每次 50 元(可使用  $t$  分鐘)
- (2) 超過  $t$  分鐘時：超過的部分每分鐘收費  $s$  元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問  $t$  為多少？

- (A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 40

原題（93 學年度第一次學測）

創創家有 10 人、守守家有 8 人，兩家人一同看表演，該場表演的票價如下圖所示。若創創家的總票價比守守家少 60 元，則創創家的半票比守守家的半票多幾張？

- (A) 0      (B) 2  
(C) 4      (D) 6

票價	
全票	60元 / 張
半票	30元 / 張

改編後試題（圖同原題）

19. 創創家有 10 人、守守家有 8 人，兩家人一同看表演，該場表演票價如圖所示。若創創家的總票價比守守家少 60 元，則創創家的全票比守守家的全票少幾張？

- (A) 0   (B) 2   (C) 4   (D) 6

原題（93 學年度第二次學測）

已知花生糖 1 顆 2 元，梅子糖 2 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 60 顆，花了 60 元，則此兩種糖果的數量關係為何？

- (A) 花生和梅子糖一樣多  
(B) 花生糖比梅子糖多 30 顆  
(C) 花生糖比梅子糖少 20 顆  
(D) 花生糖比梅子糖少 30 顆

改編後試題

20. 已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則此兩種糖果的數量關係為何？

- (A) 花生和梅子糖一樣多  
(B) 花生糖比梅子糖多 40 顆  
(C) 花生糖比梅子糖少 20 顆  
(D) 花生糖比梅子糖少 40 顆

附錄 C 二元一次方程式單元測驗正式施測試卷

\_\_\_\_\_ 國中 \_\_\_\_\_ 年 \_\_\_\_\_ 班 \_\_\_\_\_ 號 姓名：\_\_\_\_\_

## 二元一次方程式單元測驗試卷

各位親愛的同學：

在寫這份試卷之前，有一些注意事項請你務必配合，謝謝。

1、作答時間 45 分鐘，共有十一題。

2、請盡量將作答過程表達完整，包含計算過程或是你所運用的性質及觀念，超出格子沒有關係。

3、若是不會做的題目，請你寫出不會的原因（例如：題目看不懂；不會列式……愈詳細愈好）。

1. 某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 個麵包和 9 包餅乾，付 500 元鈔票一張，應可找回多少元？

2.  $x=1$ ， $y=-1$  為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

- (A)  $\begin{cases} 19x-11y=30 \\ 21x+4y=25 \end{cases}$       (B)  $\begin{cases} 37x+17y=20 \\ 16x-15y=31 \end{cases}$
- (C)  $\begin{cases} 15x+17y=32 \\ 16x-11y=27 \end{cases}$       (D)  $\begin{cases} 19x-18y=11 \\ 23x+17y=40 \end{cases}$

3、若  $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則  $x-y=?$

4. 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 6 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 71 元，則其中有幾人買鉛筆？

5. 二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases}$  的解為  $x=a, y=b$ ，則  $|a - 2b| = ?$

6. 已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則請問花生糖和梅子糖各多少顆？

7. 羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使得創創少付了 100 元。設比賽用球買  $x$  打，練習用球買  $y$  打，則下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目中的數量關係？

(A) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}$$

(B) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}$$

(C) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x+100 \end{cases}$$

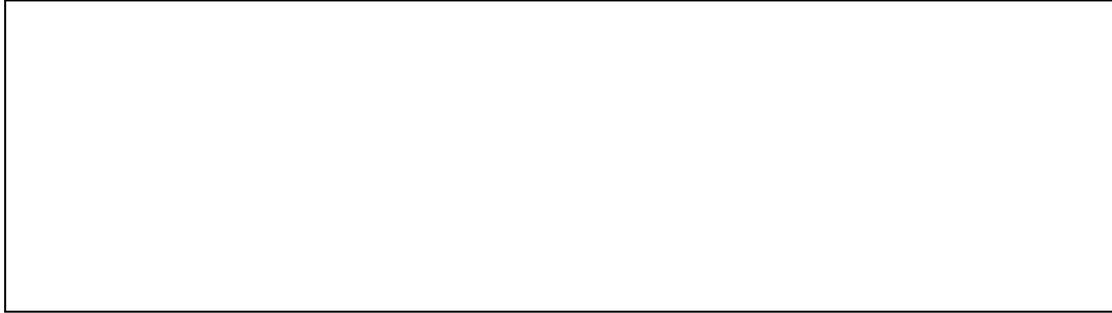
(D) 
$$\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}$$

8. 小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？

9. 下表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量各為多少包？

品名	售價 (元/包)	數量 (包)	金額 (元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16  
應付總額：740



10. 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：

- (1) 基本費用：每次 50 元(可使用  $t$  分鐘)  
(2) 超過  $t$  分鐘時：超過的部分每分鐘收費  $s$  元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)

小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問  $t$  為多少？



11、哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為  $x$  張，弟弟的張數為  $y$  張，依題意下列列式何者正確？

(A)  $\begin{cases} 2(y-10)=x \\ y=x-10 \end{cases}$  (B)  $\begin{cases} y-10=2x \\ y=x-10 \end{cases}$  (C)  $\begin{cases} y-10=2x \\ x-10=y+10 \end{cases}$  (D)  $\begin{cases} 2(y-10)=x+10 \\ x-10=y+10 \end{cases}$



## 附錄 D 晤談計畫

- 一、 在正式晤談之前，研究者先找數位學生作晤談預試，從中了解發問及引導的技巧，讓學生在沒有壓力的情境下，盡量表達其觀念及想法。
- 二、 研究者顧及晤談樣本的代表性，先將全體學生施測的情形作統計處理，計算出四種類型（化簡、解聯立、列式、解文字題）中，答題正確及錯誤的人次，先依下表 D-1 規則選取晤談人數並進行晤談，然後就同學在各題中所出現的較為特殊，或是典型的錯誤想法，與同學先做初步討論，必要時在第四章呈現實際晤談內容。

表 D-1 晤談人數選取規則

錯誤解題人次	選取晤談人數
50 人以下	2 人
50~100 人	3 人
100 人以上	4 人

- 三、 晤談進行方式由研究者選定樣本後，為了減低學生焦慮感，請任課老師做為訪談者，先選擇能輕鬆和學生進行晤談的場地，以漸次深入的形式引導學生說明其解題概念及方法。在晤談過程中以筆記和

錄音並重的方式作紀錄。除了詢問同學測驗時的作答歷程外，必要時也會請同學當場回答類似的問題，以確實釐清其正確或錯誤想法。

四、 根據下圖流程進行晤談。

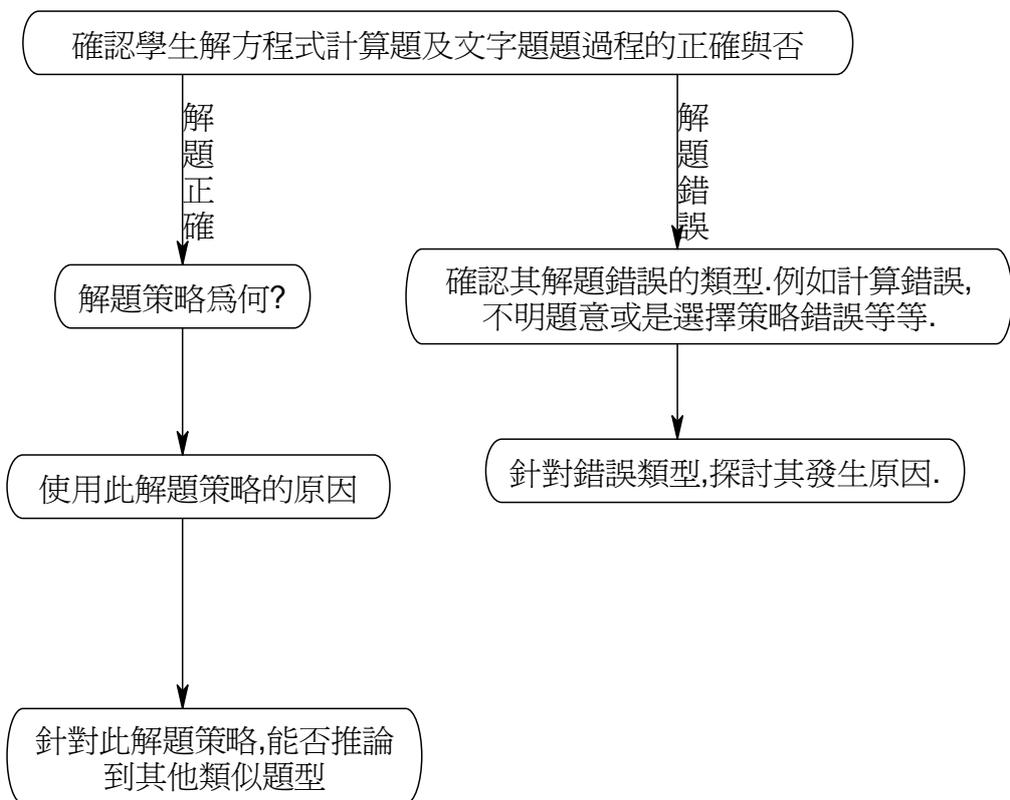


圖 D-1 學生晤談流程圖

五、 晤談結束後，再根據不同的錯誤類型作整理並歸納分析，以作為研究的結論參考。

附錄 E：學生在各類型中之解題正誤百分率統計表

表 E-1 學生在「化簡」類別中的正誤百分率統計表

題目	百分比率	正 確率	錯 誤率	空 白率	總錯 誤率
(4) 概念理解 某書店的文具價格為：鉛筆一支 7 元，原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 6 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 71 元，則其中有幾人買鉛筆？		68.1	11.6	20.3	31.9
(3) 基本運算 若 $\frac{5x-4y}{12} + \frac{3x-2y}{4} - \frac{2x-y}{3} = 10^4$ ，則 $x-y = ?$		51.2	33.3	15.5	48.8
(1) 問題解決 某商店促銷活動，買 3 包餅乾和 2 個麵包，僅需 105 元。若小芬至此商店購買 6 個麵包和 9 包餅乾，付 500 元鈔票一張，應可 <u>找回</u> 多少元？		79.7	17.9	2.4	20.3

表 E-2 學生在「解聯立」類別中的正誤百分率統計表

題目	百分比率	正 確率	錯 誤率	空 白率	總錯 誤率
<p>(2) 概念理解</p> <p><math>x=1, y=-1</math> 為下列哪一個二元一次聯立方程式的解?</p> <p>(A) <math>\begin{cases} 19x-11y=30 \\ 16x-15y=31 \end{cases}</math>      (B) <math>\begin{cases} 37x+17y=20 \\ 21x+4y=25 \end{cases}</math></p> <p>(C) <math>\begin{cases} 15x+17y=32 \\ 16x-11y=27 \end{cases}</math>      (D) <math>\begin{cases} 19x-18y=11 \\ 23x+17y=40 \end{cases}</math></p>		87.4	10.7	1.9	12.6
<p>(5) 基本運算</p> <p>二元一次聯立方程式 <math>\begin{cases} x+\frac{1}{4}y=9 \\ \frac{1}{5}x+y=17 \end{cases}</math> 的解為 <math>x=a</math>, <math>y=b</math>, 則 <math> a-2b =?</math></p>		64.2	20.8	15.0	35.8

表 E-3 學生在「列式」類別中的正誤百分率統計表

題目	百分比率	正 確率	錯 誤率	空 白率	總錯 誤率
<p>(7) 問題解決</p> <p>羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。<u>創創</u>共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使<u>創創</u>少付了 100 元。設比賽用球買 <math>x</math> 打，練習用球買 <math>y</math> 打，下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目的數量關係？</p> <p>(A) <math>\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=2600 \end{cases}</math></p> <p>(B) <math>\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=3100 \end{cases}</math></p> <p>(C) <math>\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x+100 \end{cases}</math></p> <p>(D) <math>\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=300y+250x-100 \end{cases}</math></p>		71.0	23.7	5.3	29.0
<p>(11) 問題解決</p> <p>哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為 <math>x</math> 張，弟弟的張數為 <math>y</math> 張，依題意下列列式何者正確？</p> <p>(A) <math>\begin{cases} 2(y-10)=x \\ y=x-10 \end{cases}</math> (B) <math>\begin{cases} y-10=2x \\ y=x-10 \end{cases}</math></p> <p>(C) <math>\begin{cases} y-10=2x \\ x-10=y+10 \end{cases}</math> (D) <math>\begin{cases} 2(y-10)=x+10 \\ x-10=y+10 \end{cases}</math></p>		65.2	24.2	10.6	34.8

表 E-4 學生在「解文字題」類別中的正誤百分率統計表

題目	百分比率	正確率	錯誤率	空白率	總錯誤率																												
<p>(8) 基本運算</p> <p>小健全班在週末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，40 人共租了 17 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 17 輛協力車中，由三人共騎的有幾輛？</p>		74.9	13.5	11.6	25.1																												
<p>(9) 基本運算</p> <p>下表為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量各為多少包？</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>品名</th> <th>售價 (元/包)</th> <th>數量 (包)</th> <th>金額 (元)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>綜合火鍋料</td> <td>89</td> <td>2</td> <td>178</td> </tr> <tr> <td>粉絲</td> <td>39</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>火鍋肉片</td> <td></td> <td>3</td> <td>264</td> </tr> <tr> <td>金針菇</td> <td>25</td> <td>3</td> <td>75</td> </tr> <tr> <td>茼蒿</td> <td>30</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>雞蛋</td> <td>17</td> <td>2</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">購買包數：16 應付總額：740</p>	品名	售價 (元/包)	數量 (包)	金額 (元)	綜合火鍋料	89	2	178	粉絲	39			火鍋肉片		3	264	金針菇	25	3	75	茼蒿	30			雞蛋	17	2			71.0	9.7	19.3	29.0
品名	售價 (元/包)	數量 (包)	金額 (元)																														
綜合火鍋料	89	2	178																														
粉絲	39																																
火鍋肉片		3	264																														
金針菇	25	3	75																														
茼蒿	30																																
雞蛋	17	2																															
<p>(6) 問題解決</p> <p>已知花生糖 1 顆 3 元，梅子糖 3 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 80 顆，花了 80 元，則請問花生糖和梅子糖各多少顆？</p>		67.6	16.9	15.5	32.4																												

<p>(10) 問題解決</p> <p>超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，收費標準如下：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>(1) 基本費用：每次 50 元(可使用 <math>t</math> 分鐘)</p> <p>(2) 超過 <math>t</math> 分鐘時：超過的部分每分鐘收費 <math>s</math> 元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)</p> </div> <p>小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 140 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 170 元。請問 <math>t</math> 為多少？</p>	46.8	23.2	30.0	53.2
--	------	------	------	------