



國立中山大學教育研究碩士在職專班
碩士論文

國小中年級資優生數學解題歷程分析

研究生：蔡啟禎撰

指導教授：梁淑坤

中華民國九十三年五月

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校教育研究所碩士在職專班

研究生 蔡啓禎 (學號：m9004304) 所提論文

國小中年級資優生數學解題歷程分析

經本委員會審查並舉行口試，符合碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

(召集人) 姚如芬

許家驊

梁淑坤

指導教授

梁淑坤

系主任/所長

博碩士論文授權書

(國科會科學技術資料中心版本, 93.2.6)

本授權書所授權之論文為本人在國立中山大學教育研究所

九十二學年度第二學期取得碩士學位之論文。

論文名稱：國小中年級資優生數學解題歷程分析

同意 不同意

本人具有著作財產權之論文全文資料，授予行政院國家科學委員會科學技術資料中心(或其改制後之機構)、國家圖書館及本人畢業學校圖書館，得不限地域、時間與次數以微縮、光碟或數位化等各種方式重製後散布發行或上載網路。本論文為本人向經濟部智慧財產局申請專利(未申請者本條款請不予理會)的附件之一，申請文號為：_____，註明文號者請將全文資料延後半年後再公開。

同意 不同意

本人具有著作財產權之論文全文資料，授予教育部指定送繳之圖書館及本人畢業學校圖書館，為學術研究之目的以各種方法重製，或為上述目的再授權他人以各種方法重製，不限地域與時間，惟每人以一份為限。

上述授權內容均無須訂立讓與及授權契約書。依本授權之發行權為非專屬性發行權利。依本授權所為之收錄、重製、發行及學術研發利用均為無償。上述同意與不同意之欄位若未鉤選，本人同意視同授權。

指導教授姓名：梁淑坤

研究生簽名：

學號：9004304

(親筆正楷)

(務必填寫)

日期：民國 九 十 三 年 六 月 三十 日

1. 本授權書(得自 <http://sticnet.stic.gov.tw/sticweb/html/theses/authorize.html> 下載或至 <http://www.stic.gov.tw> 首頁右下方下載)請以黑筆撰寫並影印裝訂於書名頁之次頁。
2. 授權第一項者，請確認學校是否代收，若無者，請個別再寄論文一本至台北市(106)和平東路二段 106 號 1702 室 國科會科學技術資料中心 黃善平小姐。(電話：02-27377606 傳真：02-27377689)

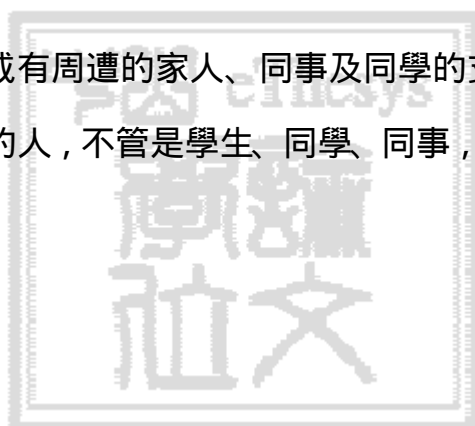
誌 謝

本研究得以順利完成，首先要感謝指導教授梁淑坤老師的細心引導、啟發及修正，其次要感謝口試委員姚如芬及許家驊兩位教授，對本論文提供許多寶貴的意見及指正，讓我有更多的省思與學習，使論文得以更臻完善。

感謝高雄市大同國小前任校長曾鴻謨與成功國小校長陳建銘給我進修的機會及大同國小現任校長李德水同意我以大同國小資優班的學生為研究對象進行研究。另外要感謝屏東師院許朝信教授、大同國小黃義泰主任、簡木全主任與資優班學生的導師給予協助與鼓勵。也要感謝參與研究的資優班學生與其家長，尤其是妍萱、黎璟、顯璟、奕亨、奐均、庭睿與宇軒。對於現在服務的學校高雄市成功國小總務處同仁給予的精神鼓勵與支持也一併感謝。

最後要感謝家人的支持與關愛，給我進修的動力與支持，謝謝你們不斷激勵我，讓我完成一個多年的夢想。

本篇論文的完成有周遭的家人、同事及同學的支持與協助，謹以誠懇的心感謝所有協助的人，不管是學生、同學、同事，還是朋友，謝謝您們。



國小中年級資優生數學解題歷程分析

摘要

本研究的目的是在探討國小中年級資優生解題歷程、解題策略及解題成敗的因素。以研究者自編以「數與量」、「圖形空間」及「邏輯推理」為範圍的九道數學題為研究工具，以高雄市大同國小中年級資優生七位為研究對象，以放聲思考的方法轉譯成原案，分析學生解題歷程、解題策略與解題成敗因素，得到下面的結論。

首先、在解題歷程方面，資優生面對非例行性問題時，會因不同的題目而有不同的解題階段，每一題的解題過程中未必全部出現所有的解題階段，而且同類型的題目也未必有相同的解題階段，甚至不會因為缺少其中一個階段，而影響到解題的結果。解題歷程的順序也非一定循讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段線性進行，會隨著思考而作隨機的調整。

其次，在解題策略方面，國小中年級資優生解題策略，大概有嘗試錯誤、畫表格、尋找所有可能、數字重組、列式列答、邊長分類、圖形分類、點分類、外加個數（三角形）、畫圖、發現規律、歸納法、順向求解、逆向求解、餘式定理、數項數、組織資料、直接解題、畫記等 19 種。

最後，在解題成敗因素方面，解題知識包括：語言知識、語意知識、基模知識、策略知識和程序知識。至於數學能力則包括：形式化數學題材能力、一般化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、簡捷思考能力、逆向思考能力、彈性思考能力、數學記憶力和空間概念能力。解題行為則包括：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式和進行解題後驗算的程序和解題的耐力。

本研究除對研究結果加以討論之外，並提出在資優生、普通生的數學科教學及未來的研究建議。

Analysis of Mathematical Problem Solving Processes of Middle Grade Gifted and Talented (GT) Elementary School Students

Summary

The purpose of this research is to study the mathematical problem solving processes, strategy use and success factors of middle grade gifted and talented (GT) elementary school students.

This research is based on 9 mathematical problems edited by the author and divided into the following categories: “numbers and quantity,” “shape and space,” and “logical thinking.” Seven GT students from Ta-Tung elementary school in Kaohsiung were selected as target students in the study. Besides, the seven students were translated into original cases using a thinking aloud method. Here are the conclusions:

First of all, when facing non-traditional problems, GT students may use different problem solving steps to solve different problems and may not show all detailed steps for every single problem. The same types of problems may not have the same problem solving steps. Missing any single step would have no impact on the answers. Problem solving sequence may not fully follow the traditional 5-step sequence: study the problem, analyze, plan, execute, and verify, and, instead, may dynamically adjust the steps according to the thinking.

Secondly, GT students' problem solving strategy includes more or less the following 19 methods: trial and error, tabling, looking for all possibilities, a combination of numbers, listing all possible answers, classifying the length of each side, classifying graphics, classifying points, adding extra numbers (the triangle problem), drawing, identifying rules and repetition, summarizing, forward solving, backward solving, remainder theory, polynomials, organizing data, direct solving, and making tallies.

Finally, problem solving success factors are tightly coupled with problem solving knowledge, mathematical capability, and problem solving behavior. Problem solving knowledge includes knowledge of language, understanding, basic models, strategy use, and procedural knowledge. Instances of mathematical capability are capability of abstraction, generalization, calculation, logical thinking, express thinking, reverse thinking, dynamic thinking, memorizing, and space concept. Problem solving behavior includes the sense of understanding the problem and mathematical structure, keeping track of all possible pre-conditions, good understanding of the relationship between the problems and the objectives, applying related knowledge or formulas, verifying the accuracy of the answers, and resilience for problem solving.

In addition to discussing the research results, future directions and recommendations for teaching mathematics for GT and regular students are highlighted.

國小中年級資優生數學解題歷程分析

目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	V
表目錄.....	VI
第一章 緒論.....	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的：.....	3
第三節 待答問題：.....	3
第四節 名詞界定.....	4
第二章 文獻探討.....	5
第一節 數學解題的意義.....	5
第二節 數學解題的歷程.....	8
第三節 數學解題的策略.....	20
第四節 影響數學解題相關因素之探討.....	25
第三章 研究設計與程序.....	34
第一節 研究設計.....	34
第二節 研究樣本.....	35
第三節 研究工具.....	36
第四節 研究程序.....	39
第五節 資料分析.....	42
第四章 研究結果.....	46
第一節 原案分析.....	46

第二節 綜合討論.....	92
第五章 結論與建議	105
第一節 結論.....	105
第二節 建議.....	107
參考文獻.....	110
中文部分.....	110
英文部分.....	112
附錄.....	114
附錄一 國小中年級資優資源班數學課程內容	114
附錄二 預試試題.....	118
附錄三 預試得分統計表.....	134
附錄四 放聲思考試題.....	138
附錄五 原案資料.....	148
附錄六 原案分析.....	190

圖目錄

圖 2-1 Schoenfeld 之解題基模大綱	13
圖 2-2 Mayer 解題歷程與知識的關係	14
圖 2-3 胡炳生的數學解題系統圖	28
圖 3-1 解題歷程階段順序圖	45

表目錄

表 2-1 Lester 的數學解題歷程表	10
表 2-2 Schoenfeld 之解題階段及相關問題表	12
表 2-3 數學解題思考步驟及程序表	15
表 2-4 解題歷程劃分表：	17
表 2-5 解題歷程階段區分表	18
表 2-6 Polya 的解題歷程與解題策略表	20
表 2-7 Kilpatrick 修正之解題歷程與策略表	22
表 2-8 Schoenfeld 之常用解題策略表	23
表 3-1 預試試題對照表	37
表 3-2 放聲思考試題對照表	38
表 3-3 答題回顧統計表	41
表 3-4 研究程序進度表	42
表 3-5 預試統計	43
表 3-6 放聲思考樣本得分統計	43
表 4-1 直式算式 (N-01) 解題歷程階段表	49
表 4-2 直式算式 (N-01) 解題階段順序與時間表	50
表 4-3 圍牆整建 (N-02) 解題歷程階段表	55
表 4-4 圍牆整建 (N-02) 解題階段順序與時間表	55
表 4-5 數字分組 (N-03) 解題歷程階段表	60
表 4-6 數字分組 (N-03) 解題階段順序與時間表	60
表 4-7 三角形個數 (M-01) 解題歷程階段表	67
表 4-8 三角形個數 (M-01) 解題階段順序與時間表	67
表 4-9 堆積圖形 (M-02) 解題歷程階段表	71
表 4-10 堆積圖形 (M-02) 解題階段順序與時間表	72

表 4-11	正方體個數 (M-03) 解題歷程階段表	76
表 4-12	正方體個數 (M-03) 解題階段順序與時間表	76
表 4-13	奇妙數列 (L-01) 解題歷程階段表	80
表 4-14	奇妙數列 (L-01) 解題階段順序與時間表	81
表 4-15	硬幣排列 (L-02) 解題歷程階段表	84
表 4-16	硬幣排列 (L-02) 解題階段順序與時間表	85
表 4-17	大樓住戶 (L-03) 解題歷程階段表	91
表 4-18	大樓住戶 (L-03) 解題階段順序與時間表	91
表 4-19	試題運用解題策略一覽表	98
表 4-20	解題策略一覽表表	99
表 4-21	學生解題策略運用一覽表表	100
表 4-22	學生解題知識一覽表表	102
表 4-23	學生數學能力一覽表表	103
表 4-24	學生解題行為一覽表	104

第一章 緒論

第一節 研究動機

數學是一門由具體到抽象的學科，是一切科學研究的基礎，也是發展高級科學技術的必要條件。隨著資訊時代的來臨，各國莫不致力於提升本國的科技水準，因此各國政府都相當重視數學教育的紮根工作，如何提升學生數學推理及數學解題的能力，是目前數學教育的重要目標。

不過「問題解決」這一個主題，卻恆久不變；因為不論時間經歷多久，科技如何發達，人們總是必須去面對諸如職場上或生活上的問題等，而設法去解決問題，以下決定。人們雖然能藉助科技的幫助，可以找到答案；但是唯有人類的頭腦和智慧才能思考推理，才能解決問題。我們必須使學生具備「解決問題」的基本能力，也使得他們將來離開學校，而進入實際的世界時，會使用這些基本技巧以及思考推理，去解決所面對的問題。（教育部，民 89）

近一、二十年來有關數學解題能力的研究發展受到特別重視，1977 年美國數學督導學會(National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM) 指出「學習解題是研讀數學的主要目的」美國教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) (1980)亦強調「解題是數學教育的中心」、1989 年 NCTM 在其出版的中小學課程及評量標準中第一項即指出「數學即解題」(Mathematics as problem solving)、NCTM 在 1991、1995、2000 年所公佈的課程標準、教師專業標準和評量標準，都延續 1989 年的精神仍把「問題解決」列為重點之一(NCTM, 2000)。歷年來國際組織 PME

(Psychology of Mathematics Education)發表的研究報告中數學解題也是研究重點之一。

為因應世界的潮流並配合社會的變遷，在數學教育的領域中「問題解決」被認為是當今數學教育的主流，透過解題的方式才是數學學習的最好方式，九年一貫新課程中，亦提出「獨立思考與解決問題」，為國民教育階段的數學等七個學習領域培養學生具備十大基本能力之一，由此可知學習數學解題的重要性。

謝淡宜(民 87)亦指出，數學解題思考歷程的探討，是協助老師瞭解學生認知發展和認知結構的最佳方式。經由解題歷程的探討，老師們可了解學生如何應用舊有知識結構、如何綜合條件、如何系統化擬定計劃及解決問題等，並可深刻理解學生數學概念內化的程度。

教育部在民國 89 年所發表基本能力實踐策略專題研究報告中亦指出：最近數年來，學校教育的課程內容及其教學法有著顯著的改變。在落實以兒童為本位的觀點之下，只有在學童主動參與教學活動之中，學習才會發生；有意義的學習，一定要將課程內容由學生具體的感覺經驗和日常生活情境著手，並且配合其認知發展，由其自然的想法開始，逐步聯結到形式的知識。是故，解題(problem solving)和推理(reasoning)是當今教育的主流。

在我任教資優班數學課程當中如何去啟發資優生的數學能力，常是我想探討的主題。Krutetskii(1976)也指出，數學教師應當發展所有學生的數學能力，且培養他們對數學的興趣與愛好。在此同時，也應該對數學能力高的學生給予特別的注意，為他們提供特殊的作業，以便進一步發展他們的數學能力。因為在數學科領域裡有興趣及有能力的人，才能有傑出的表現或貢獻，所以，老師應盡其所能的去發掘在數學科領域裡有興趣及有能力的人，進而發展他們的數學能力。

關於資優兒童的特質的研究，國外學者 Krutetskii(1976)做「數學天才

兒童的個案分析」研究，結果亦發現這些個案的數學概念、思考速率、思考品質及對數學的愛好等方面皆表現突出。國內學者謝淡宜(民 87)做「小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程之比較」研究，結果發現數學資優生在解題時，答題率及思考品質皆優於普通生。這些相關的研究都是在探討數學能力高的學生之特質。

基於上述理由，本研究期望以更深入的方式探討資優生的解題歷程，希望藉由研究結果，讓教師對數學資優生有更深一層的瞭解，以便將來更能去發掘及啟發數學資優生的潛能。而且期盼能從資優生解題歷程之探討，歸納出他們數學解題之策略及成敗因素，以幫助任教資優班的老師瞭解資優學生解題之策略及成敗因素，以便能採用有效的教學方法或策略，去幫助學生思考及解決數學問題。

第二節 研究目的：

本研究的主要目的在探討影響國小中年級資優生數學解題之相關因素。一方面從理論分析；一方面從實際解題中進行了解。具體而言，本研究有下面幾項主要目的：

- 一、探討資優生的解題歷程。
- 二、探討資優生數學解題時所使用的解題策略。
- 三、探討影響資優生數學解題成敗的因素。

第三節 待答問題：

依據上述的研究目的，本研究探討下面的問題：

- 一、資優生的解題歷程有哪些？

二、資優生數學解題時所使用的解題策略有哪些？

三、影響學生數學解題成敗的因素有哪些？

第四節 名詞界定

本研究有關數學解題、資優生、解題歷程等名詞作如下的界定：

一、數學解題

國內學者劉秋木（民 85）認為解題是縮減初始狀態與目標狀態的差異、是問題表徵的建構與再建構，而數學解題是指解題者在面對數學上一未知的問題時，無法立即由記憶中檢索出解答，必須統合運用以往的數學先備知識、原理、原則或方法，以新的程序模式獲得解答的心理歷程。本研究的解題，是非例行性問題，而所謂非例行性的問題(non-routine problem)，則是我們看到題目後，無法立刻知道求解路徑的題目，或者這道題目別人講解過，或自己以前曾解過而已經遺忘。此時，解題者探索學過的數學知識和技能，檢查與綜合能否適當地應用到目前所面對的新情境上（這就是所謂的學習遷移）。（黃敏晃，民 80）

二、資優生

高雄市新興區大同國民小學九十學年度、九十一學年度經過高雄市資優生鑑定通過之學生。

三、解題歷程

解題歷程是指解題者在解數學題目時，經過閱讀題目、計劃解題的程序、運用解題的策略，到求出答案及驗證答案等各步驟的整過運算過程。

第二章 文獻探討

第一節 數學解題的意義

關於數學解題的意義，先從問題的分類談起，再引申至數學解題。

問題的分類有黃敏晃、Polya、Kilpatrick、Lester、Thomas 等人的見解，茲分述如下：

黃敏晃在「淺談數學解題」中將數學問題分例行性問題與非例行問題兩類。例行性問題(routine problem)，就是我們熟悉解法的問題。這些題目，可能是課本上的例題，或是老師講解過，或自己曾經做過這些題目或其類似題。做這類題目的目的比較重規熟練一些固定的技巧，或是模仿，而不是將已學會的知識與技能應到未見過的場合，或綜合使用。

非例行性的問題(non-routine problem)，則是我們看到題目後，無法立刻知道求解路徑的題目，或者這道題目別人講解過，或自己以前曾解過而已經遺忘。此時，解題者探索學過的數學知識和技能，檢查與綜合能否適當地應用到目前所面對的新情境上（這就是所謂的學習遷移）。數學解題的目的是要訓練、培養學生、使他們有能力與自信面對並解決非例行性的數學問題。（黃敏晃，80）

在我們的生活情境中，訓練學生解決所面對非例行性的問題多於例行性的問題的能力是有其必要性。

除了黃敏晃之外，國外學者Polya將數學問題分成兩個類型：(Polya, 1962)

1. 求解題 (problems to find) : 求解題最主要的目的是要求出確定的對象 (certain object) — 問題的未知數 (unknown) , 這未知數要能夠滿足問題的條件 (condition) 把問題未知量與已知量 (data) 的條件聯繫起來。
2. 求證題 (problems to prove) : 求證題最主要目的是發現假設 (hypothesis) 和結論 (conclusion) 之間的邏輯連繫 (binding logical line)。

而 Kilpatrick(1985)則根據 Polya 的“Mathematical Discovery”, 對問題加以分類, 分為 1. 例行問題; 2. 有選擇的應用題; 3. 選擇一種組合的問題; 4. 接近研究級的問題。

1. 例行的問題 (one rule under your nose 或 routine problems) : 把正在學的或討論的規則 (或運算) , 拿來作機械式的應用 (mechanical application) 就能解決的問題。
2. 有選擇的應用題 (application with some choice) : 要應用以前學過的規則或步驟才能解決, 但以前學過的不只一種, 所以解題者需要作一些判斷以選擇適用的規則或步驟。
3. 選擇一種組合 (choice of a combination) : 要求解題者把二個以上的學過的規則或例子組合起來才能解出來的題目。
4. 接近研究級的問題 (approaching research level) : 這種題目要求解題者把二個以上的規則或例子作有創意的組合才能解題, 但此種組合會有許多分支 (ramifications) , 且要求相當高層次的獨立思考, 以及使用到擬真推理 (plausible reasoning)。

另外, Lester 則認為數學問題至少有下列四種 :

1. 單一步驟問題 (one-step problems)。
2. 多步驟問題 (multiple-step problems)。
3. 歷程問題 (process problems)。

4. 應用問題(applied problems)。(孫達剛, 民81, 頁9)

Thomas 則將數學問題的種類分為下列五項：

1. 認知的問題：認知或回憶特殊事實、定義或定理敘述之問題。
2. 運算法則的問題：可以一步一步用運算規則或程序解出來的問題。
3. 應用問題：可以將問題化為符號式，再解此代數式的問題。
4. 探索式問題(open-search)：不含解題策略提示的問題。
5. 情境問題(problem situation)：提出一個問題的情境，然後要求學生思考，或自行提出問題而後回答。(孫達剛, 民81, 頁9)

關於數學解題的意義，許多學者提出其個人的見解，茲將重要者臚列如下：

美國數學督導協會(The National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM, 1977)將數學解題界定為：「運用個人先前獲得的知識，以解決一個未知或不熟悉問題之歷程」。(劉宜貞, 民89, 頁10)

Kilpatrick(1985)曾以三個不同觀點來敘述數學解題的意義(引自涂金堂, 民84)：

一、從心理學層面而言：數學解題常被定義為一個情境，在此情境中，某人想到達某一目標，但直接通往此目標的路徑被封住了，因而產生問題，而在尋求答案的過程中，需用到一些數學概念、原理、方法等，亦即把解題看成「人為了達成某種目的而做的一些活動」。

二、從社會—人類學的層面而言：把一個數學問題當作是老師給學生的一項任務，學生在接受此項任務時與老師產生的微妙關係，師生雙方根據自己所關注的焦點，而相互解釋對方的行動和意圖，即從自我觀點出發來解釋對方的行為。

三、從數學的及數學教學的層面而言：將數學問題當作是數學建構的泉源及數學教學的工具，亦即透過數學解題的教學，學生可以建構自己的

數學知識。所以，數學解題是讓學生搭起數學鷹架的重要工具。

Lester 認為倘若問題的解答須涉及數學技能、概念和程序便是數學問題。(孫達剛，民 81，頁 9) 而數學解題即是指個人面臨一種沒有算式可以保證獲得解答的情境，而個人必須利用所擁有的相關訊息，去獲得問題解答所涉及數學技能、概念之過程。

除了 NCSM、Kilpatrick 與 Lester 對解題的意義所給的解釋之外，國內學者劉錫麒(民 86)認為解題是 1. 在問題空間中搜尋的歷程，2. 問題表徵的重組歷程，3. 不斷省思的歷程。

綜合上述學者的見解可知，數學解題的意義指解題者在面對數學問題時，無法立即由記憶中檢索出解答，必須統合運用以往的數學先備知識、原理、原則或方法，產生策略以獲得解答的心理歷程。

第二節 數學解題的歷程

一、Polya 的數學解題歷程模式

Polya(1945)是最早有系統提出解題策略的學者，他在其所著的「怎樣解題」(How to solve it)一書中，強調解題的重要性，並將解題歷程分為四個階段：1. 瞭解問題(understanding the problem)；2. 擬定計劃(devising a plan)；3. 執行計劃(carrying out the plan)；4. 回顧解答(looking back)。

二、Lester 的數學解題歷程

Lester(1980)以六階段來描述數學解題，並強調這六個階段相互的關係。如下所述：

(一) 察覺問題(problem awareness)：解題者對所面臨的情境，能覺察到是一個問題，並且有意願解決問題。

(二) 理解問題(problem comprehension)：這個階段包含兩個子階段：

1. 轉譯(translation)：解題者將問題提供的訊息譯成自己可以理解的語句。

2. 內化(internalization)：解題者選取相關的訊息，並判斷其相關的程度。

(三) 目標分析(goal analysis)：將問題變形以便應用熟悉的策略與技巧。解題者將訊息歸類，並作成細目，而且認清問題的結構，以便更進一步了解問題的成分，是否符合以下條件：

1. 任何子目標可以幫助達成目標嗎？

2. 這些目標有一定的次序嗎？

3. 這樣的次序編排恰當嗎？

4. 能正確認清運算條件嗎？

(四) 計畫發展(plan development)：解題者擬定一個可行計畫、清楚可行的策略，將子目標編列程序和詳細運算。解題者要能了解解題進行的程序和方法，並注意下列事項：

1. 是否有其他的方法可以解這個題目？

2. 是否有更好的方法？

3. 曾經解過這個問題嗎？

4. 這樣的計畫能達成目標或子目標嗎？

(五) 計畫執行(plan implementation)：解題者執行擬定的計畫，並且注意下列事項：

1. 使用這個策略正確嗎？

2. 計畫的步驟順序正確嗎？是否能使用不同的順序？

(六) 程序和解答評估(procedures and solution evaluation)：此階段不僅要檢查答案是否有意義，而且從目標分析到發現解答的整個程序，皆屬評估範圍。

表 2-1 Lester 的數學解題歷程表

階段一	察覺問題 (problem awareness)	解題者對所面臨的情境，能覺察到是一個問題，並且有意願解決問題。
階段二	理解問題 (problem comprehension)	這個階段包含兩個子階段： <ol style="list-style-type: none"> 1. 轉譯 (translation)：解題者將問題提供的訊息譯成自己可以理解的語句。 2. 內化 (internalization)：解題者選取相關的訊息，並判斷其相關的程度。
階段三	目標分析 (goal analysis)	將問題變形以便應用熟悉的策略與技巧。解題者將訊息歸類，並作成細目，而且認清問題的結構，以便更進一步了解問題的成分，是否符合以下條件： <ol style="list-style-type: none"> 1. 任何子目標可以幫助達成目標嗎？ 2. 這些目標有一定的次序嗎？ 3. 這樣的次序編排洽當嗎？ 4. 能正確認清運算條件嗎？
階段四	計畫發展 (plan development)	解題者擬定一個可行計畫，清楚可行的策略，將子目標編列程序和詳細運算。解題者要能了解解題進行的程序和方法，並注意下列事項： <ol style="list-style-type: none"> 1. 是否有其他的方法可以解這個題目？ 2. 是否有更好的方法？ 3. 曾經解過這個問題嗎？ 4. 這樣的計畫能達成目標或子目標嗎？
階段五	計畫執行 (plan implementation)	解題者執行擬定的計畫，並且注意下列事項： <ol style="list-style-type: none"> 1. 使用這個策略正確嗎？ 2. 計畫的步驟順序正確嗎？是否能使用不同的順序？
階段六	程序和解答評估 (procedures and solution evaluation)	此階段不僅要檢查答案是否有意義，而且從目標分析到發現解答的整個程序，皆屬評估範圍。

三、Schoenfeld 的數學解題歷程模式

Schoenfeld(1985)強調數學解題的研究方向需要考慮四個變項：資源(resources)、捷思(heuristics)、控制(control)及信仰系統(belief system)。

資源是指解題者擁有有關解題的相關數學知識，而這些數學知識包含了數學事實、程序及技巧等訊息。

捷思是指捷思策略(heuristics strategies)而言，許多的解題研究都非常重視學生在解題歷程所使用的啟思策略，例如簡化問題、畫表格、尋找組型、猜測等等。

控制則是著重在解題者解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標評估解題結果等方面。Schoenfeld 認為控制的因素與心理學上的後設認知有相當大的關連性。信仰系統是指解題者對於數學的觀點，而解題者擁有的數學觀將會影響其解題行為。

在 Schoenfeld 的相關研究中，他發現在資源、捷思、控制及信仰系統等四項變項中，控制因素居於較為關鍵的地位。因為如何有效的運用資源，如何採用適當的捷思策略，常常是由控制因素所主導。所以特別在解題歷程中，以控制因素的觀點，將解題歷程區分為：1.閱讀；2.分析；3.探索；4.計畫；5.執行；6.驗證等六個階段，而六個階段中的每個階段又細分為幾個解題步驟（表 2-2）。

表 2-2 Schoenfeld 之解題階段及相關問題表

階 段	相 關 問 題
一、閱讀(reading)	R1: 注意到問題所有條件嗎? 條件是明顯的? 或是模糊的? R2: 正確了解目標狀態嗎? 目標狀態是明顯的? 或是模糊的? R3: 是否評估解題者現有知識與問題的關係?
二、分析(analysis)	A1: 選擇什麼觀點? 選擇是明顯的或是不明顯的? A2: 選擇問題條件採取行動嗎? A3: 根據問題目標採取行動嗎? A4: 條件和目標有何關聯? A5: 解題者的行動(A1-A4)合理嗎?
三、探索(exploration)	E1: 本階段是問題的條件引起的? 或目標引起的? E2: 所採行動有方向或重點嗎? 行動有目的嗎? E3: 有無監視行為? 監視行為的有無對解答的結果有何影響? E4: 解題者所採取的行為是否合理?
四、計畫-執行 (planning-implementation)	PI1: 是否有計畫行為? PI2: 計畫與解題有關係嗎? 是否適當? 是否有良好架構? PI3: 學生是否評估計畫的相關性、適當性及結構性? PI4: 執行是否依計畫有系統的進行? PI5: 是否在局部或整體層次評估執行? PI6: 評估之有無對結果的影響如何?
五、驗證(verification)	V1: 解題者是否重新檢查解答? V2: 有無考驗解答? 如果有的話, 如何考驗? V3: 有無歷程及解答的評估? 對結果的信心有多少?
六、遷移(transition)	T1: 對解題的當前狀態有無評估? 若放棄一種解題途徑, 是否企圖利用其中有用的部份? T2: 有無評估先前放棄的解題途徑, 對解答產生的局部與整體影響如何? 所採行動適當而必要嗎? T3: 是否評估採取新途徑的短程或長程的影響? 或直接跳入新的方法? T4: 採用新途徑後有無評估短程及長程影響如何? 行動是否適當而必要?

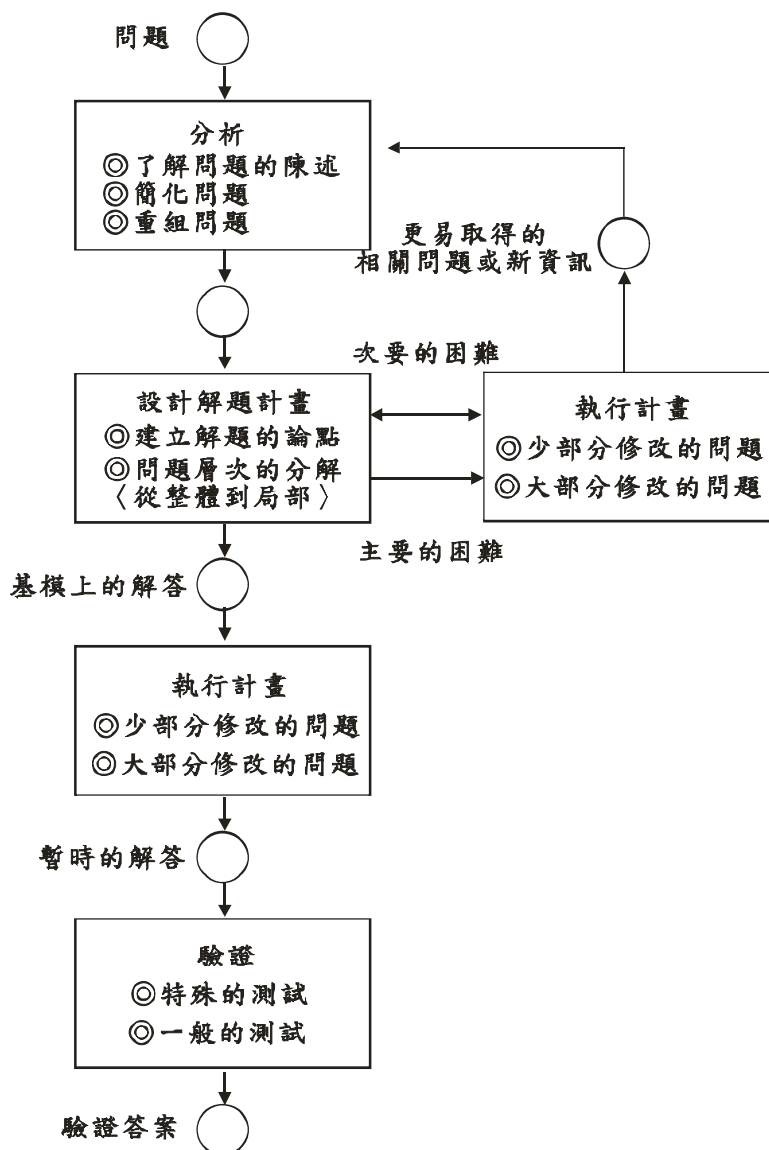


圖 2-1 Schoenfeld 之解題基模大綱(Schoenfeld, 1985)

四、Mayer 的學解題歷程模式

Mayer(1992)將解題歷程分為兩個步驟，每個步驟又包含二個子步驟，分述如下：

(一) 問題表徵(problem representation)：即將文字或圖案轉換成心理表徵，又包含二個子步驟。

1. 問題轉譯(problem translation)：將每一個句子或主要的詞句轉變為內在心理表徵。問題轉譯需要有良好的陳述性與程序性知識，而且將問題從文字表徵轉換成心理表徵是不太容易的。

2. 問題整合 (problem integration)：問題整合要求學生將問題的敘述組合成連貫的表徵，為了整合問題的訊息，需要具有基模知識 (schematic knowledge)，以區分問題的類型。

(二) 問題解決：即從問題的心理表徵進行到最後答案的過程，含二個步驟如下：

1. 解答的計畫與監控 (solution planning and monitoring)：計畫與監控需要具有如何解決問題的策略知識。
2. 解答的實施 (solution execution)，需要以程序性知識正確且有效的應用算則，以執行計算工作。

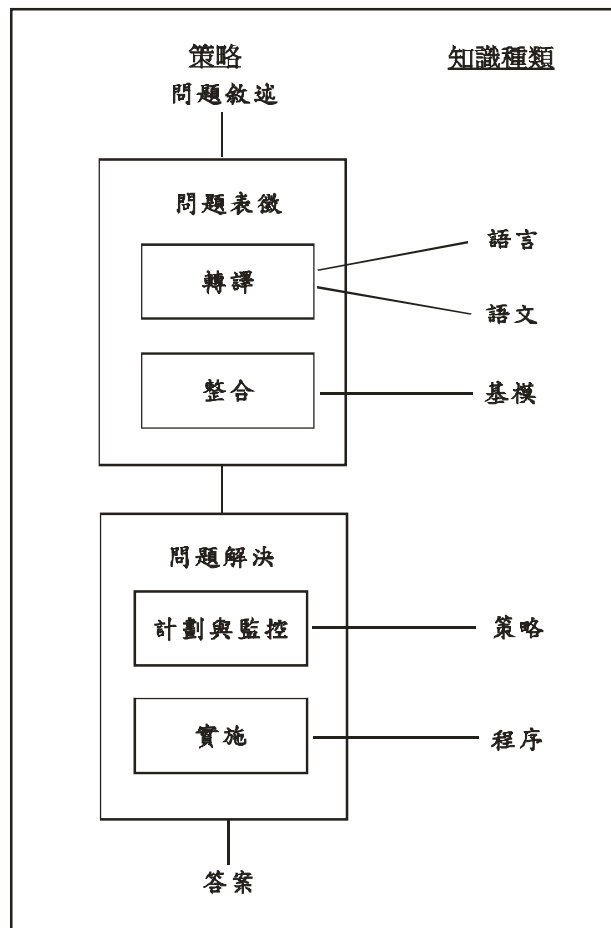


圖 2-2 Mayer 解題歷程與知識的關係 (Mayer, 1992)

在解題過程中，每個步驟所需的知識並不相同：在問題表徵階段，轉譯過程涉及語言知識和語意知識；整合過程則運用到基模知識。在問題解

決階段，解題計畫與監控和策略知識有關；解題的實施則需運用程序知識。Mayer 的解題歷程與知識的關係如圖 2-2。

五、胡炳生的解題思考

胡炳生（民 88）認為人大腦中的思維活動是看不見且摸不著的，但大量解題經驗可表現出人在解題時的思維活動，大致按「觀察—聯想—轉化」的步驟進行，且思維活動要靠問題來激發，沒有問題就沒有積極的思維活動。在「觀察—聯想-轉化」的過程中，照著有名數學教育家 G. 波利亞的建議，可以列成表 2-3 的數學解題思考步驟及程序。

表 2-3 數學解題思考步驟及程序表

步驟	思 考 程 序
觀察	<ol style="list-style-type: none"> 1. 要求解（證）的問題是什麼？它是哪種類型的問題？ 2. 已知條件（已知數據、圖形、事項、及其與結論部份的聯繫方式）是什麼？要求的結論（未知事項）是什麼？ 3. 所給圖形和式子有什麼特點？能否用一個圖形（幾何的、函數的或示意的）或數學式子（對文字題）將問題表示出來？能否在圖上加上適當的記號？ 4. 有什麼隱含條件？
聯想	<ol style="list-style-type: none"> 1. 這個題目以前做過嗎？ 2. 這個題目以前在哪裡見過嗎？ 3. 以前做過或見過類似的問題嗎？當時走怎樣想的？ 4. 題中的一部份（條件、或結論、或式子、或圖形）以前見過嗎？在什麼問題中見過的？ 5. 題中所給的式子、圖形，與記憶中的什麼式子、圖形相像？它們之間可能有什麼聯繫？ 6. 解這類問題通常有哪幾種方法？哪種方法較方便？試一試如何？ 7. 由已知條件能推得哪些可知事項和條件？要求未知結論，需知道哪些條件？ 8. 與這個問題有關的知識（基本概念、定理、公式等）有哪些？

轉化	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能否將題中複雜的式子化簡？ 2. 能否對條件進行劃分，將大問題化為幾個小問題？ 3. 能否將問題化歸為基本命題？ 4. 能否進行變量替換、恆等變換或幾何變換，將問題的形式變得較為明顯一些？ 5. 能否形—數互化？利用幾何方法來解代數問題？利用代數方法來解幾何問題？ 6. 利用等價命題律（逆否命題律、同一法則、分斷式命題）或其他方法，可否將問題持化為一個較為熟悉的等價問題？ 7. 最終目的：將未知轉化為已知。
----	--

資料來源：數學解題思維方法（8-9 頁），胡炳生，民 88，台北市，九章

綜合以上國內外數學解題歷程的文獻，Polya 的解題模式（瞭解問題、擬定計劃、執行計劃、及回顧解答）；Lester 的解題模式（問題的覺察、問題的理解、目標的分析、計劃的發展、計劃的執行、及程序和解答的評估）；Schoenfeld 的解題模式（閱讀、分析、探索、計劃、執行、及驗證）；Mayer 的解題模式（問題表徵即問題轉譯、問題整合，問題解決即解答的計畫與監控、解答的執行）；胡炳生的解題思考步驟（觀察、聯想、及轉化）等人的解題歷程，基於國小階段分析與探索兩階段不易分辨，所以把分析與探索兩階段合為分析階段，而解題歷程劃分為：讀題（R）、分析（A）、計畫（P）、執行（I）、驗證（V），整理成表 2-4。

表 2-4 解題歷程劃分表：

階段內容	學者	Polya	Lester	Schoenfeld	Mayer	胡炳生
1. 閱讀 (R): 先將問題讀過			問題的覺察	閱讀		觀察
2. 分析 (A): 將問題徹底理解, 並將問題轉譯為內在心理表徵, 整合問題成連貫一致的表徵		瞭解問題	問題的理解 目標的分析	分析、探索	問題轉譯 問題整合	聯想、轉化
3. 計畫 (P): 將題目與欲解之問題聯結		擬定計畫	計畫的發展	計畫	解答的計畫與監控	
4. 執行 (I): 依擬定之計畫選擇策略執行		執行計畫	計畫的執行	執行	解答的執行	
5. 驗證 (V): 再驗證解答是否正確		回顧解答	程序和解答的評估	驗證		

研究者再整理出解題歷程階段區分表（表 2-5）：

表 2-5 解題歷程階段區分表

階 段	內 容
1. 讀題 (R)	R1. 閱讀題目：閱讀全部或部份題目的敘述。 R2. 重讀題目：將題目重新閱讀。
2. 分析 (A)	A1. 重述題意。 A2. 辨別條件：知道已知數、未知數、和隱含的條件。 A3. 畫圖表徵。 A4. 以字詞、圖形、或符號等方式來簡化問題。 A5. 回憶相關訊息（如相關的概念、問題、或方法）。 A6. 尋找規則：解題者在未確定如何解題前，探求條件的規則性。 A7. 測試或嘗試錯誤：解題者先以數字代入測試。
3. 計畫 (P)	P1. 確定目標。 P2. 根據已知條件及所求的條件，列出運算的式子。
4. 執行 (I)	I1. 依照計劃，運用公式或以往學過之程序進行解題。
5. 驗證 (V)	V1. 檢查結果是否合理（可用逆推法或代入法）。 V3. 檢查解題步驟或計算過程。

數學解題歷程研究是個逐步演進的過程。在1960及1970年代，有關相關性(correlation)，因素分析(factor-analysis)以及「教法A對應於教法B」的比較性研究佔據了數學教育中所有有關思考，學習以及「數學解題」的研究。到了1970年代中期，研究者漸漸在如此狹窄，限制性多的數學行為研究中感到挫折。

Kilpatrick(1978)在比較了當時在美國及蘇俄的不同數學教育研究法後發現，蘇俄的Krutetskii(1976)所採用的質的研究法雖然不若美國所採用的量的研究法般的嚴謹、科學，但他們卻深入探討了數學教育中的重要

議題如數學思考，數學行為以及數學能力。由於這層認知的影響，數學教育中的研究開始在 1970 年代後期及 1980 年代漸漸轉向以歷程為導向的質的研究（謝淡宜，民 87）。

在心理學的研究中，要將內隱的學習歷程外在化，最早使用的方法是「內省法」(introspection)，後有「歷程追蹤法」(process tracing)、「回溯法」(retrospection)與「放聲思考法」(thinking aloud)的相繼應用(Ericsson & Simon, 1980)。這些研究法所處理的都是意識層面的內容，其功能除心理歷程外在化之外，尚能引導學生注意自己的思考。從研究法的角度而言，內省法與回溯法易受到主試者主觀解釋與推論的影響。因此近年來較不受研究者的歡迎，取而代之的是有聲思考法（劉錫麒，民 86）。

而近年來，數學解題較重視整個解題歷程的研究，因此，學者在進行數學解題的研究時，常採用「放聲思考」的研究方法，對解題者在整個解題歷程中，所表現的解題行為，做較深入的探討。研究者通常會採錄音或錄影的方式，將解題者口述的語言記錄下來。然後再將記錄下來的語言，轉譯成為文字，即所謂的原案(Protocol)。（涂金堂，民 85）

國外學者 Schoenfeld(1985)採用巨觀的原案分析，將解題歷程區分為讀題、分析、探索、計畫、執行及驗證等六階段。巨觀的原案分析主要是探討解題者在解題的歷程中在每一個階段使用多少時間，並且研究每一階段與每一階段轉換時，所產生的解題行為，再根據這些解題行為，進一步分析解題者在資源、捷思、控制與信仰等變項的異同。（涂金堂，民 88）

國內學者王昭明(民 82)認為放聲思考法在解題歷程研究中的優點有：
1. 反映實際解題行為，而非行為之解釋及理由。2. 因受試者未被強迫作記憶性的回憶，故除可運用在簡單工作上外，又可探究複雜工作的解題行

為。3. 推論解題心理歷程是研究者根據對受試者所蒐集到的資料加以分析而獲致的，學生不須經歷推理程序。

如上所述，放聲思考法是研究解題歷程常使用的研究方法，而放聲思考法的原案為分析解題歷程重要的依據，研究者可以藉由原案來分析解題歷程中每一階段所費的時間與階段間轉換的解題行為，進而分析整個解題歷程，本研究擬採用此種方式進行解題歷程之分析。

第三節 數學解題的策略

解題的策略常常是解題成功與否的主要因素之一，許多學者提出有關解題策略的個人見解，茲將重要者敘述如下：

Polya(1945)是最早有系統提出解題策略的學者，他在其所著的「怎樣解題」(How to solve it)一書中，強調解題的重要性，並將解題歷程分為四個階段：1. 瞭解問題；2. 擬定計劃；3. 執行計劃；4. 回顧解答(表 2-6)，在每一階段中，他提出許多相關的解題策略，稱之為捷思(heuristic)策略。

表 2-6 Polya 的解題歷程與解題策略表

解題歷程	解題策略
第一步： 必須瞭解問題	<p style="text-align: center;">瞭 解 問 題</p> 未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？ 可能滿足條件的各個部份嗎？條件足夠決定未知數嗎 不夠嗎？過多嗎？矛盾嗎？ 做一個圖，導入適當的計劃。 分開條件的各部份，你能把它們分別寫下來嗎？
第二步： 1. 找出未知數 和已知數之 間的關係， 如果找不到 就只得考慮	<p style="text-align: center;">擬 定 計 劃</p> 你以前見過它嗎？或者見過形式稍微不同的相似問題 嗎？你知道什麼相關的問題嗎？你知道有什麼可用的 定理嗎？ 注視未知數！試著想出一個有相同或相似未知數的熟 悉問題。

<p>一些補助問題。</p> <p>2. 想辦法擬定一個解題計劃。</p>	<p>這裡有一個相關的，以前你解過的問題，你能否應用它嗎？你能用它的結果嗎？你能應用它的方法嗎？你是否該導入一些輔助元素以便應用。</p> <p>你能改述這個問題嗎？你能將它改述的更不同些嗎？回到定義！你若解不出這個問題，就試著先解個相關的問題。</p> <p>你能想出一個更相關的問題嗎？一個更一般的問題嗎？一個更特殊的問題嗎？一個類似的問題嗎？你能決定問題的一部份嗎？保留一部份條件，丟開其餘部份；這樣決定的未知數會如何？你能從已知數得出什麼有用的東西嗎？有沒有其它已知的東西可以用來決定未知數？你能改變未知數、或已知數，必要時兩者同時改變，使新未知數和新已知數能更加接近嗎？</p> <p>你用了所有已知數嗎？你用了全部條件嗎？問題中研包含的重要觀念都已考慮到了嗎？</p>
<p>第三步： 實行你的計劃</p>	<p style="text-align: center;">執行計劃</p> <p>執行你所擬定的計劃，驗證每一步驟。</p> <p>你能清楚地看出哪些步驟是正確的嗎？你能證明它是正確的嗎？</p>
<p>第四步： 驗證所得的解答</p>	<p style="text-align: center;">回顧解答</p> <p>你能驗證結果嗎？你能驗證論證嗎？你能用不同的方法得出結果嗎？你能一眼看出來嗎？</p> <p>你能把這個結果或方法應用到別的問題上去嗎？</p>

資料來源：How To Solve It (xvi-xvii) ,G. Polya, 1957, Princeton University, 1957, Princeton, New Jersey.

此外，Kilpatrick(1967)以 Polya 解題四階段為依據，探討八年級學生解非例行文字題的策略，發覺學生使用的策略有：1. 圖畫；2. 使用連續漸進法；3. 常常詢問自己問題解決方法的存在性與唯一性；4. 演繹；5. 運用算式；6. 嘗試錯誤；7. 檢查答案等。Kilpatrick 發覺學生所使用的策略不多，乃將解題歷程中各階段的策略重新修正如表 2-7 所示。

表 2-7 Kilpatrick 修正之解題歷程與策略表

一、瞭解問題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 辨認未知資料或條件。 2. 畫圖。 3. 引入符號。
二、擬定計劃	<ol style="list-style-type: none"> 1. 重新敘述問題。 2. 考慮相關問題。
三、執行計劃	<ol style="list-style-type: none"> 1. 使用連續漸進的方法。 2. 發現結果前檢查步驟。
四、檢討	<ol style="list-style-type: none"> 1. 檢查結果是否合理。 2. 檢查結果是否合乎條件。 3. 回溯論證的步驟。 4. 使用其它的方法獲得結果。

(Kilpatrick, 1967)

再者，Gary L. Musser，J. Michael Shaughnessy(1980)則認為在學校中可以教的解題策略有：嘗試錯誤(Trial)、規律(Patterns)、解簡單的題目(Solving a simpler problem)、工作回顧(Working backward)與刺激(Stimulation)等五個策略。

在 Schoenfeld 的相關研究中，在解題歷程的六個階段：1. 閱讀；2. 分析；3. 探索；4. 計畫；5. 執行；6. 驗證中的分析、探索、驗證三階段常用的策略如表 2-8。

表 2-8 Schoenfeld 之常用解題策略表

<p>分析</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 盡可能地畫圖。 2. 檢查特例： <ol style="list-style-type: none"> (1) 取特殊值代入，以獲得較具體的瞭解。 (2) 檢查極端狀況，以探討可能範圍。 (3) 令問題中的整數為 1、2、3、4 與 5 等小值，看看是否可歸納出一些規律。 3. 嘗試簡化問題： <ol style="list-style-type: none"> (1) 利用對稱性。 (2) 採取「假定 _____」而不失問題的一般性討論方式。
<p>探索</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 考慮基本上一樣的問題： <ol style="list-style-type: none"> (1) 用等價的條件取代問題中的條件。 (2) 以不同的方式重組問題中的資料。 (3) 引入輔助的元素。 (4) 用下列的方式重述問題： <ol style="list-style-type: none"> A. 改變題目的背景或符號。 B. 考慮歸謬法或例置法。 C. 假定你已有解答，由此導出解答的性質。 2. 考慮稍微修改的問題： <ol style="list-style-type: none"> (1) 選擇子目標（想辦法得到部份的結果，或滿足部份條件的解答）。 (2) 放寬問題中的某一條件，然後再將之重新收緊。 (3) 把問題分解成不同狀況的情形，再對每一狀況逐一解答。 3. 考慮大幅修改的問題： <ol style="list-style-type: none"> (1) 以較少的變數建構類似的問題。 (2) 改變一個變項，決定該變項的影響。 (3) 想辦法用有相似的形式、已知條件或結論相關的題目結果或其解法。
<p>驗證</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 你的解答能通過下列的特殊檢定嗎？ <ol style="list-style-type: none"> (1) 你是否用到了問題中所有的相關資料？ (2) 結果是否合理的被估計或預測？ (3) 利用對稱、維度分析與比例等原則來檢查時，你的結果是否站得住腳？ 2. 你的解答能通過下列的一般檢定嗎？ <ol style="list-style-type: none"> (1) 這樣的解答可以用不同的方式得到嗎？ (2) 這個抽象的答案能放在特別的狀況，使變得具體些嗎？ (3) 這個解答能否簡化成已知的結果嗎？ (4) 我們能由此解答推出一些已知的結果嗎？

(Schoenfeld, 1985)

除以上所述之外，Alfred S. Poamentier，Stephen Krulik(1998)在 Problem-solving for efficient and elegant solutions：A resource for the mathematics teacher一書中提到十個解題策略：1.工作回顧(orking backwards)；2.發現規律(Finding a pattern)；3.採取不同觀點(Adopting a different point of view)；4.解簡單、類似的問題(Solving a simpler, analogous problem)；5.考慮特殊實例(Considering extreme cases)；6.繪圖(視覺表徵)(Making a drawing (visual representation))；7.慧的推測與測試(包含概算)(Intelligent guessing and testing (including approximation))；8.描述所有可能(詳列)(Accounting for all possibilities (exhaustive listing))；9.組織資料(Organizing data)；10.邏輯推理(Logical reasoning)。

國內研究者劉貞宜(民89)在其論文中綜合了Kilpatrick、Webb、Cyert等人的解題策略，將解題策略歸納如下：1.畫圖表徵；2.以字詞、圖形、或符號等方式來簡化問題；3.回憶相關問題；4.嘗試錯誤；5.應用特殊化；6.使用連續漸進法；7.從現狀向目標倒退思考；8.使用演繹法；9.使用歸納推理法；10.運用類化和隱喻法；11.常常詢問自己問題解決方法的存在性與唯一性；12.以不同的方式提出問題，並口述問題；13.常自問所提問題的前提是否具有可靠性；14.以算式檢查解答是否合乎條件；15.與人談論問題等方法。

綜合上述理論，在小學數學解題可歸納下列的解題策略：嘗試錯誤；以字詞、圖形、或符號等方式來簡化問題；發現規律；列表格輔助解題；解簡單的題目；繪圖；分類；組織資料；描述所有可能；演繹、歸納法；邏輯推理；驗證答案；運用算式；工作回顧等等。期望藉由解題策略教學的訓練，以提昇學生的解題能力。

第四節 影響數學解題相關因素之探討

影響數學解題的因素除了國外學者 Lester 的數學解題本質、Mayer 的解題知識及胡炳生的解題因素，還有國內李靜瑤、李輝雄及蔡承哲解題歷程的研究發現，敘述如後：

Lester (1980)認為有以下四個解題本質相關的因素可破確認：

- 一、問題本身：即工作變項(task variables)，指問題的型態、內容、結構等。問題（工作）本身的特性，顯然會影響成功解題及解題的行為。若要致力於問題特性如何影響數學解題的研究路線，應以問題作為測量解題者能力的工具，且瞭解及分析工作本身的特性如何影響解題結束。而且還需在問題的語法、內容或結構上稍作更動，以產生問題難度的改變，藉以引誘出各種不同的解題行為。
- 二、個人的特徵：即個人變項(subject variables)，顯然不同學生解題時有個別差異。因此，研究學生變項，大部份是以獨立變項來考慮。一般而言，對學生變項的分類是以組織解題者的特性，作為解釋或預估他們的解題表現。包括：認知型態、先前的數學背景、緊張或壓力下的反應，以及場地獨立等。
- 三、解題的行為：即過程變項(process variables)，此變項緊緊維繫著解題者和問題性質這二個特徵，牽涉了與個人解題有關的因素，包括：組織與處理訊息的方法、用來計劃和執行的認知策略，以及用來評鑑的方法等。
- 四、環境特徵：即教學變項(instruction variables)，是問題與解題者外在之解題環境特色（由於外在壓力，解題者會感覺到被強迫去獲得一個迅

速的解法)。而教學變項正是環境特徵裡最重要的變項。

Mayer(1992)就針對解題過程進行分析，而將解題時所需的知識分為下列五個範疇：

- 一、語言知識(Linguistic knowledge)：和語言有關的知識，如：瞭解問題中的每一個字。
- 二、語意知識(Semantic knowledge)：與實際生活上的事實有關的知識，如 1 公里等於 1000 公尺。
- 三、基模知識(Schematic knowledge)：問題型態的知識，如：知道長方形面積問題的基本公式 - 面積等於長乘以寬。
- 四、策略知識(Strategic knowledge)：如何利用不同型態的有效知識來計畫和監控問題解答的技巧，如：定下子目標。
- 五、程序知識(Procedure knowledge)：指演算法的知識。例如：在算數應用問題中，能應用九九乘法表演算問題，並求得結果，這就是程序性知識。(李靜瑤，民 83，頁 5)

胡炳生(民 88)認為影響數學解題的相關因素如圖(2-3)所示，並將其因素做了以下的解釋：

- 一、數學知識：數學知識是解題的基礎，而數學知識包括基本的和較高層次的兩部份。前者包括：中學數學課本中的概念系統、定理系統和符號系統三大系統的知識。後者包括：數學競賽中所涉及到的有關初等數學或介於初、高等數學之間的數學知識，例如：數的整除、多項式等。
- 二、數學解題方法：教學解題方法是解題的基本手段，可以泛指數學解題中的所有方法，它有三個層次。第一層次為解題的具體方法和技巧，例如：配方法、公式解法、幾何中添加輔助線等。第二層次為數學解

題的一些通法，例如：演繹法和歸納法、直接證法和反證法、座標法和解析法。第三層次為數學解題中的思考原則和策略。

三、數學思維：數學思維是解題的原則和策略，它是指我們在解題的思維過程中所應遵循的總原則和總策略。總原則是熟悉化原則、簡單化原則和多途化原則。總策略是化歸，把要解的數學題化歸為基本的、標準的數學題。

四、解題經驗：包括成功的經驗和失敗的經驗，對於一個人解題能力的形成和提高都有重要作用。所謂解題經驗，是指某些數學知識、某種數學解題方法和題中某些條件的有順序組合。成功的經驗，這種有序組合是有效的；失敗的經驗，組合是錯誤的。成功的經驗所獲得的有序組合，就好像是建築上的預製構造，遇到合適的場合，可以原封不動地把它用上。

五、邏輯：解數學題主要是一種思維活動，要想思維活動進行得有成效，就必須符合思維的規律 - 邏輯。數學推理中主要是應遵循形式邏輯，但在探索性思維活動中，還要有辯證邏輯的幫助。

六、興趣：一個人的思維品質和對數學的興趣，無疑對解數學題有顯著影響。一個見了數學題就厭煩的學生，是解不好題的。相反，一個對數學有濃厚興趣的學生，能埋頭幾個小時做題，以解題為樂。思維敏捷而不細密的學生，解題雖快，但計算容易出錯。思維細密而不靈活的學生，往往做代數題優於幾何題等。

七、語文知識、社會生活知識以及其他學科知識：對數學解題都有關係。因為數學題都是用文字來表述的，解題最後結果也要用文字來表述出來。不少學生的答案卷表述不清，詞不達意，並因此而失分。這說明數學愛好者，應提高語文知識水平。

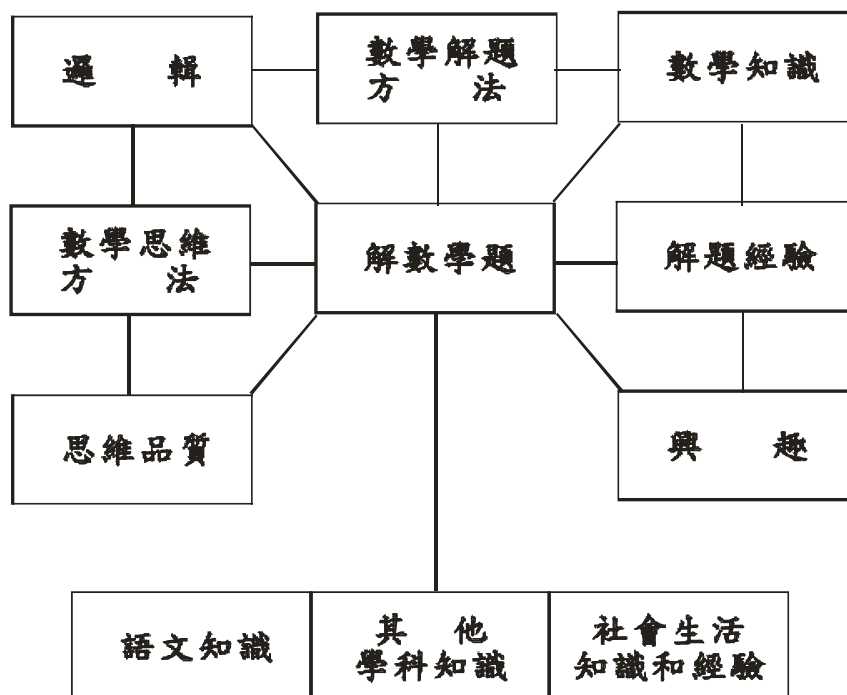


圖 2-3 胡炳生的數學解題系統圖

除了上述國外學者及胡炳生之外，國內有關影響數學解題相關因素的研究，還有下列幾位：

李靜瑤（民 83）年曾對高雄市國二學生進行數學解題歷程分析的研究，發現解題成敗的因數包括：是否理解題意、是否了解目標狀態、數學知識完備與否、能否注意到問題中的所有條件、能否摒棄無用的條件、能否應用相關的知識或公式、是否有完備的程序性知識、能否評估自己的解題過程、自信心、變通性、解題的耐力及對數學的態度或信念。

李輝雄（民 84）則曾做過高雄市高一學生數學解題歷程之分析研究，研究結果發現解題成敗的關鍵包括：是否理解題意、能否了解目標狀態、能否了解數學架構、能否注意到數學中的所有條件、能否應用相關知識或公式、變通性、數學知識是否完備、能否評估自己的解題歷程、是否有

錯誤的數學信念。

而蔡承哲（民 85）研究高雄地區高二學生做空間向量的解題歷程分析，研究結果發現解題成敗的關鍵包括：是否能了解題意、是否能使用正確的基模知識並整合問題、是否有豐富的策略知識並能適時使用之、是否有正確的程序性知識、是否能注意到題目中所有條件、是否能畫出正確圖形來幫助分析解題計畫、是否能恰當的補助線、是否能回憶相關知識和方法，且能對學過的方法加以活用、是否能隨時監控解題過程有無錯誤、是否能對最後答案進行檢驗。

以上是相關的解題研究及重要發現，而有關資優生的數學解題研究中，近年來以俄國的 Krutetskii (1963, 1969, 1976) 的研究最受重視。他的研究主要目的在於：描述數學資優生解不同數學問題時之心智活動的特徵。此外，他的研究有與解題能力和個別差異有關的主題，即探討在數學能力的架構上，象徵性能力的差異，並且探究年齡的差異對數學能力的影響。

Krutetskii (1963, 1976) 的研究中指出，資賦優異學生解題時，在心理特徵方面包括：1. 具有敏捷的推理和心理定向；2. 具有邏輯思維，以及有系統、有順序的思考能力；3. 具有數學抽象思考的能力，且能迅速而廣泛地組織材料；4. 具有靈活的思維；5. 能任意地從正面的思維歷程轉換到反面的思維歷程；6. 解答問題時，其有迅速且簡捷的推理能力，亦具有「壓縮」的傾向；7. 對數學材料能夠迅速而牢固的記憶；8. 對數學作業很少感到疲勞。在解題特徵方面則包括：1. 能掌握問題的結構；2. 能看出並解釋量的或空間的關係；3. 能有彈性地心理運作；4. 能將若干例證加以類化；5. 力求問題的澄清、簡化、經濟，並尋求解題的原則；6. 能將數學的關係，爭

論的觀點及證據，結構的特色加以類化以便記憶。在數學能力方面則包括：1.形式化數學題材的能力；2.一般化數學題材能力；3.數學運算能力；4.邏輯推理能力；5.簡捷思考能力；6.逆向思考能力；7.彈性思考能力；8.數學記憶能力；9.空間概念能力。

除了 Krutestkii 之外，Stonecipher (1986)比較資賦優異學生與普通學生之數學問題解決過程，並依據 Kilpatrick (1967)之編碼系統(coding system)加以分類，其主要發現如下：(汪榮才，民 80)

1. 資賦優異學生傾向於用自己的語句重述問題以求理解，而普通學生傾向於逐字重讀問題，而不加以重組。
2. 資賦優異學生傾向於應用推理及評鑑（例如：核對，即使用另一種方法解題以核對結果是否相同）之歷程，而普通學生傾向於猜測答案，對問題的情境常常誤解。
3. 資賦優異學生傾向於採用類化的策略，而普通學生傾向於採用嘗試錯誤或其他較無效的策略。
4. 資賦優異學生在每一解題過程中所使用之時間少於普通學生。

除了國外學者 Krutestkii 及 Stonecipher 之外，在國內研究方面，邱芳津（民 78 年）做國二資優生線型函數概念之研究，選取九十五名國二資優生為研究對象，實施兩次線型函數單元測驗，根據學生的作答逐題分析，且歸納出學生所使用的正確解題策略和錯誤類型，再針對解題表現特殊的十三名學生進行個別面談，進一步探討學生所具有的錯誤線型函數概念、解題時所涉及的數學能力，與影響解題表現的有關因素。其研究結果發現學生各項數學能力的表現優劣依序為：數學記憶力 數學演算能力 逆向思考能力 空間概念能力 彈性思考能力 一般化數學題材能力 形式化數學題材能力 邏輯推理能力。

此外，謝淡宜（民 87）的研究指出：數學資優生在處理題目中所提供的資訊（條件）時，更具有統合力及成功率。他們能更有效地整合不同的條件，而對成功解題做出關鍵的助力。他們對題目更能保持全面的掌握，而在解題策略、解題歷程及計算準確性上表現其系統性、整合性及持續性的評鑑，及改正的功能。

國內除了邱芳津、謝淡宜、劉貞宜的解題研究之外，顏榮義（民 90）以所任教的三十名國一一般能力資優生為研究對象，進行放聲思考解題，以分析學生的數學能力、解題歷程、解題策略和影響解題成敗的因素。研究發現雖然是經過正式甄試過程才錄取的資優生，但不同學生的解題表現差異相當大，而對於解題策略、解題成敗因素方面得到下列結論：

一、解題策略：

- （一）難度低的題目學生所用的解題策略較少，難度高的題目策略較多。
- （二）學生在做選擇策略時大多是根據先前的知識和經驗做隨機的猜測，而不能做合理的猜測這是在教學時可加以努力的地方。
- （三）解題能力高者會嘗試從不同猜測起點形成多種的解題策略。
- （四）資優生的解題策略顯得相當多樣化。
- （五）學生解題策略的良窳與否與學生的數學知識有密切的關係。

二、解題成敗因素：

- （一）是否理解題意；
- （二）能否了解目標狀態；
- （三）數學知識完備與否；
- （四）能否注意到問題中所有的條件；
- （五）能否摒除無用的條件；

- (六) 能否應用相關知識或公式；
- (七) 是否有完備的程序性知識；
- (八) 能否評估自己的解題過程；
- (九) 自信心；
- (十) 是否有彈性思考的能力；
- (十一) 解題的耐力；
- (十二) 是否有頓悟的歷程；
- (十三) 是否能看出題目的深層結構；
- (十四) 學生的身心情緒；
- (十五) 對數學的態度或信念等。

劉貞宜(民 89)如從國內外的研究中歸納資優生解題有以下的特徵：

一、數學知識：

- (一) 對數學材料能夠迅速而牢固的記憶。
- (二) 數學知識較完備。

二、思考能力：

- (一) 具有很好的抽象思考能力(甚至幾何的問題也可以用抽象的方式來解)。
- (二) 具有敏捷的推理思考和心理定向能力。
- (三) 具有邏輯思維，以及有系統、有順序的思考能力。
- (四) 具有靈活的思維能力，能自如地從正面的思維歷程轉換到反面的思維歷程。

3. 數學解題策略

- (一) 能全面掌握題目中的所有的條件。
- (二) 能正確地統整題目所提供的訊息。

- (三) 具頗強的視覺能力 (如：能很快而正確地看出問題的結構，甚至抽象的問題也可以用視覺的方式來解)。
- (四) 能將大範圍類似的問題一般化。
- (五) 會自行將較難的字彙換掉。
- (六) 會將句子的長度縮短。
- (七) 會將無關資料刪除。
- (八) 會做出輔助圖表。
- (九) 解題方法能變通，且解題策略多變化。

綜合以上文獻的論點，將影響解題的因素歸納為以下幾項作為本研究的重點：

- 一、**解題知識**：語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、程序知識。
- 二、**數學能力**：形式化數學題材能力、一般化數學題材能力、數學演算能力、邏輯推理能力、簡捷思考能力、逆向思考能力、彈性思考能力、數學記憶力、空間概念能力。
- 三、**解題行為**：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序、解題的耐力。

第三章 研究設計與程序

第一節 研究設計

九年一貫的數學課程期望學生達成目標有掌握數、量、型的概念與關係；發展形成數學問題與解決數學問題的能力等。（教育部，民 88）

最近數年來，學校教育的課程內容及其教學法有著顯著的改變。在落實以兒童為本位的觀點之下，只有在學童主動參與教學活動之中，學習才會發生；有意義的學習，一定要將課程內容由學生具體的感覺經驗和日常生活情境著手，並且配合其認知發展，由其自然的想法開始，逐步聯結到形式的知識。是故，解題和推理是當今教育的主流。（教育部，89 年）

除此之外，國外學者 Krutetskii(1976)指出：「數學是數的關係與空間形式的科學，沒有幾何想像力可以學習前者，卻不能學習後者」，而在分析數學天才兒童的個案研究中亦指出：數學天才在解答數學題時，具有邏輯思維，以及有系統、有順序的思考能力。

由此可見「數與量」、「邏輯推理」、「圖形空間」，對於數學的學習有其重要性。

基於上述，僅就「數與量」、「邏輯推理」、「圖形空間」等三個向度編製預試試題與放聲思考試題。

先以自編之預試試題包含數與量、圖形空間、邏輯推理各五題共十五題，對研究者所任教過的中年級資優生進行測試，以篩選測驗分數較高者七位作為放聲思考的樣本，其中三年級三位、四年級學生四位。另自編放聲思考試題九題作為放聲思考研究包含數與量、圖形、邏輯推理各三題共

九題。

本研究擬採參考 Polya(1945)、Kilpatrick(1967)、Schoenfeld(1985)等所提出之解題歷程，將解題歷程區分為讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段，採用放聲思考法，探討國小中年資優班學生其數學解題歷程的解題行為。

研究者篩選好放聲思考學生後，利用課餘安排時間，進行數學解題的放聲思考研究。為了讓學生了解放聲思考的研究法，施測時首先向學生說明本研究的目的，並且介紹放聲思考的研究方法。而為了讓學生能同步進行解題工作，並且將腦中的想法用口語表述出來，研究者擬先讓學生練習三題簡單的範例題「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」各一題共三題，讓學生熟悉放聲思考的研究程序後進行實際解題工作。在實際研究過程中，研究者以錄音的方式，將學生的解題過程，真實的記錄下來，以便將學生的口語資料轉譯成原案。

第二節 研究樣本

本研究樣本為高雄市新興區大同國民小學九十學年度、九十一學年度經過高雄市資優生鑑定通過之學生，研究者所任教過的中年級資優生（三年級十五人、四年級十八人，共三十三人）。

預試以研究者所任教過的中年級資優生 33 人中為樣本，放聲思考樣本則篩選預試施測得分 130 分以上前四位學生，結果三年級只有三位（二女一男）及四年級（二女二男）學生四位共七位。

第三節 研究工具

研究工具有自編預試試題、放聲思考試題及記錄放聲思考解題之器材。

一、試題的編製：

(一) 試題取材：

試題編製是參考「Mathematical Enrichment-A Teacher's Guide」、「數學練習廣場」、牛頓出版社出版之「舉一反三」、「撥雲見日」、美國AMC 8 數學測驗歷屆試題暨詳解等書中的題目編製而成。

(二) 試題編選標準：

試題之編選標準如下：

- 1.和日常生活經驗相關的題目。
- 2.非單一步驟，需要數個步驟的推理才能解答的題目。
- 2.避免機械式的計算即可獲得答案的題目。
- 4.非唯一的方式作答，可顯現較多解題行為的題目。
- 5.題目的選擇對程度高的解題者具挑戰性。而對程度較低的解題者仍有成功解題的機會。

(三) 試題效度：

預試試題與放聲思考試題請指導教授及指導教授指導之同儕研究生十四人，於meeting課堂中，針對語句、試題難度、解題合理性等方面，採共同討論修正、另外請大同國小、陽明國小和成功國小等校任教的中年級教師數位給予指正，修正不當之處。修正部分如放聲思考試題「L-02硬幣排列」原題目為「有五種硬幣：1元、2元、5元、10元、20元，在桌上由左至右排成一列」，因為我國現行硬幣中無2元硬幣，梁老師建議改成

「五種香港硬幣：1元、2元、5元、10元、20元，在桌上由左至右排成一列」，以符真實情境。

(四) 題型分類：

問題中不只一個的問答就是題組的題型，而問題中只有唯一的問答就是非題組的題型。

預試試題內容涵蓋「數與量」(N)、「圖形空間」(M)、「邏輯推理」(L)等三個向度各五題共十五題，含有題組與非題組兩類非例行性問題，整理成表3-1的預試試題對照表。

表 3-1 預試試題對照表

預 試 試 題 對 照 表				
編號	代號	單元名稱	數學概念	題型
1	N-01	數學算式	運算符號使用	題組
2	N-02	符號數字	求未知數	非題組
3	N-03	硬幣位置	求整數解	非題組
4	N-04	花片個數	求整數解	非題組
5	N-05	射擊遊戲	數字重組	題組
6	M-01	不同的正方形	不同正方形	非題組
7	M-02	方塊切割	圖形概念	非題組
8	M-03	組合正方體	空間概念	題組
9	M-04	立方體展開圖	空間概念	題組
10	M-05	三角形個數	圖形分類	非題組
11	L-01	物品排列	相對位置推論	非題組
12	L-02	任教科目	分析推論	非題組
13	L-03	最近的路線	最小值組合	題組
14	L-04	採買水果	分析推論	非題組
15	L-05	射擊分數	分析推論	非題組

放聲思考試題，為避免學生對放聲思考試題有解題經驗，而影響的研究的結果，所以另編製內容涵蓋「數與量」(N)、「圖形空間」(M)、「邏輯推理」(L)等三個向度各三題共九題，含有題組與非題組兩類非例行性問題，整理成表3-2的放聲思考試題對照表。

表 3-2 放聲思考試題對照表

放 聲 思 考 試 題 對 照 表				
編號	代號	單元名稱	數學概念	題型
	N-demo	數字和	代數求解	非題組
	M-demo	對角線個數	空間概念	非題組
	L-demo	車子顏色	分析推論	非題組
1	N-01	直式算式	代數求解	非題組
2	N-02	圍牆整建	面積組成	非題組
3	N-03	數字分組	數字重組	非題組
4	M-01	三角形個數	圖形分類	題組
5	M-02	堆積圖形	尋找圖形規律	題組
6	M-03	正方體個數	空間概念	題組
7	L-01	奇妙數列	尋找規律	題組
8	L-02	硬幣排列	相對位置推論	非題組
9	L-03	大樓住戶	相對位置推論	題組

【說明】：題組：問題中不只一個的問答；非題組：問題中只有唯一的問答。

二、記錄放聲思考解題之器材：

1. 錄音機（或錄音筆）。
2. 120分鐘的錄音帶。

第四節 研究程序

一、蒐集文獻資料：（92.08 - 92.11）

蒐集並閱讀國內、外與本研究相關的文獻，並將資料加以分析、歸納，作為本研究的理論基礎。

二、編製預試試題（92.09）

預試試題內容涵蓋「數與量」（N）、「圖形空間」（M）、「邏輯推理」（L）等三個向度各五題共十五題，含有題組與非題組兩類非例行性問題。

三、預試試題施測（92.10 - 92.11）

由於研究樣本是研究者平常上課的學生，而所用的教材即是研究者自編的教材（教材內容見附件一），所以學生非常熟悉異於課本循序的編排的非例行性的題目。

預試試題的施測以研究者所任教中年級一般資優生33位學生（三年級十五人、四年級十八人）為施測對象，於九十二年十月、十一月每週一次共八次，每次30分鐘。

四、編製放聲思考試題（92.12）

放聲思考試題，為避免學生對放聲思考試題有解題經驗，而影響的研究的結果，所以另編製內容涵蓋「數與量」（N）、「圖形空間」（M）、「邏輯推理」（L）等三個向度各三題共九題，含有題組與非題組兩類非例行性問題。

五、放聲思考樣本篩選 (92.12 - 93.01)

放聲思考施測篩選標準是以預試得分130以上的前四位為篩選的對象。結果三年級只有三位(二女一男)、四年級選前面四位(二女二男)共七位作為放聲思考施測的樣本,並隨機編號為S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7。

六、放聲思考施測 (93.01 - 93.02)

由於研究樣本是研究者平常上課的學生,而平常上課要求學生解題時,列出解題過程,而未要求把過程說出來,所以在進行放聲思考研究施測時先以三題範例題(數與量、圖形空間及邏輯推理各一題)供學生練習,以熟悉如何把所思考的解題歷程說出來。

施測地點為大同國小輔導處,每位學生施測時間為90分鐘。若學生在施測時間內完成,則施測結束。

為了確認放聲思考試題對學生是否有解過類似題的經驗,而影響到研究的結果,此外為了解學生解題的情意部分,在放聲思考試題中每一題後面都附有答題回顧,讓受試者每一題解題完成後就對該題做答題回顧,研究者把答題回顧收集整理後區分為【解題經驗】、【解題計畫】、【依想法解題】、【驗證答案】、【題目難度】、【挑戰類似題】、【解題時間】等七個部分;數與量、圖形空間、邏輯推理等三個向度做統計,結果如表 3-3。

其中【解題經驗】第一次做、【依想法解題】有、【驗證答案】根據題目條件驗證答案等均回饋一致。【解題計畫】則有約 71% (45/63) 讀題完就有計畫,約 29% (18/63) 有計畫但不是很確定。【題目難度】約 75% (47/63) 難易適中,約 25% (16/63) 容易。【挑戰類似題】約 84% (53/63) 難易適中,約 16% (10/63) 容易。【解題時間】約 5% (3/63) 太長,約 76% (48/63) 剛好,約 19% (12/63) 很短時間就完成。

表 3-3 答題回顧統計表

答題回顧		數與量	圖形空間	邏輯推理
解題經驗	第一次做	21	21	21
	以前做過	0	0	0
	做過類似題	0	0	0
解題計畫	讀題後就想出計畫	16	13	16
	有計畫但不是很確定	5	8	5
	不知道如何計畫解題	0	0	0
依想法解題	有	21	21	21
	沒有	0	0	0
	有些有，有些沒有	0	0	0
驗證答案	根據題目條件驗證答案	21	21	21
	不需驗證	0	0	0
	不知道如何驗證答案	0	0	0
題目難度	很困難	0	0	0
	難易適中	16	15	16
	容易	5	6	5
挑戰類似題	有信心	17	19	17
	繼續培養	4	2	4
	不想挑戰	0	0	0
解題時間	太長	1	1	1
	剛好	17	15	16
	很短時間就完成	3	5	4

答題回饋顯示資優生面對非例行性問題，解題過程都有解題計畫、依照一定的想法解題及驗證答案等步驟，這與原案分析相符合。而情意方面的大都回饋難易適中的題目難度、有信心挑戰類似題、剛好的解題時間等，這在研究者進行施測時也觀察到這些表現。

七、分析資料 (92.02 - 92.04)

先將放聲思考收集的資料轉譯成口語資料的原案，在根據原案分析解題歷程、解題策略及答題成敗的因素等。

八、撰寫研究報告 (92.08 - 92.11 ; 93.02 - 93.05)

就資料分析的結果進行討論，並將研究發現與相關文獻加以分析探討，最後撰寫研究報告的結論與建議。各階段進度如表3-4：

表 3-4 研究程序進度表

日期 研究步驟	92.08	92.09	92.10	92.11	92.12	93.01	93.02	93.03	93.04	93.05	93.06
蒐集文獻											
編製 預試試題											
預試施測											
編製放聲 思考試題											
放聲思考 篩選											
放聲思考 樣本施測											
分析資料											
撰寫報告											

第五節 資料分析

本研究之資料分析包含二部分，預試分析與放聲思考資料分析。

一、預試分析

- (一) 於預試施測後，對每位受試樣本作統計，以分析樣本在「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」等三個部分，統計得分，以作為篩選放聲思考樣本的依據。
- (二) 預試評分為每題10分，總分共150分，如該題有多個答案則按答對答案數比例給分。

(三) 資料分析以SPSS for Windows V11.5版為統計分析工具。

(四) 預試結果：預試結果（附錄三）在「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」等三個向度的得分做簡單的統計分析，如表3-5。

表 3-5 預試統計

試題內容	人數	最小值	最大值	總和	平均數	標準差
數與量 (N)	33	16.0	50.0	1155.0	35.000	11.264
圖形空間 (M)	33	10.0	44.0	1051.0	31.848	8.899
邏輯推理 (L)	33	3.0	50.0	1013.0	30.697	14.770
總 分	33	41.0	141.0	3219.0	97.545	30.631

(五) 放聲思考篩選樣本得分：篩選得分高的學生進行放聲思考施測，以分析其解題歷程、解題策略及解題成功的因素。放聲思考施測篩選標準是以預試得分130以上的前四位為篩選的對象。施測結果預試（見附錄二）得分130以上者三年級只有三位（二女、一男）、四年四位（二女、二男）（表3-6），所以共選出七位學生，隨機編號為S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7，進行放聲思考施測。

表 3-6 放聲思考樣本得分統計

編號	性別	數與量 (N)	圖形空間 (M)	邏輯推理 (L)	總分
S301	男	50	41	50	141
S302	女	48	42	43	133
S303	女	30	35	38	131
S401	男	50	41	47	140
S402	女	50	37	48	135
S403	男	50	44	40	134
S404	女	43	41	48	132

二、放聲思考資料分析：

(一) 原案產生：

放聲思考施測後，將每位學生之解題過程轉述成文字資料，再經過大同國小一位主任及陽明國小一位老師作確認以增加其信度，而確認的方式是以隨機在「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」等九題放聲思考試題中各抽取一至二題進行轉述文字的確認，如果有所出入，則討論更改，確認無誤後即為原案（附錄五）。本研究原案資料的整理規則如下：

1. **解題歷程的階段區分：**研究者參考Polya(1945)、Kilpatrick(1967)、Schoenfeld(1985)等所提出之解題歷程，將解題歷程區分為讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段。階段代號以英文字母代表，R代表讀題階段、A代表分析階段、P代表計畫階段、I代表執行階段、V代表驗證階段。
2. **資料編碼：**每一解題者都有一份原案資料，內容涵蓋施測的九個題目的口語資料、解題行為、階段代號。而口語資料的編碼有4碼，第一碼為題號，後三碼為流水號。

(二) 原案分析：

原案分析的過程包括解題階段順序和時間紀錄及解題階段分析等二個部分，敘述如下：

1. **解題階段順序和時間紀錄：**將解題歷程區分為讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段為依據，加以階段區分與評註，對照解題階段區分的結果，紀錄解題階段順序、時間，並繪製成解題歷程階段順序和時間圖（圖3-1）。

階段	N-01 解題歷程階段順序和時間 (學生代號)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■			■				
計畫 (P)				■		■			
執行 (I)			■				■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	59	239	12	12	14	9	24	18	387

【說明】「■」表示解題成功。「■」下的數字表示解題花費總時間。

圖 3-1 解題歷程階段順序圖

2. 解題階段分析：針對解題歷程階段順序和時間圖進行解題階段分析，以了解學生的解題過程，並對每一階段加註解題時間。

第四章 研究結果

本章主要所歸納整理預試的結果及放聲思考每位學生的原案，再將原案分析每一位學生的解題歷程、所使用的策略及影響解題成敗的因素。本章共分為二節，第一節原案分析，第二節綜合討論。

原案分析就是根據口語資料的原案做解題歷程、解題策略、解題成敗因素做分析。綜合討論則包含解題歷程、解題策略、解題成敗因素做討論。

第一節 原案分析

本節擬就七位學生每一題的原案分為解題歷程順序與時間、解題階段分析兩個部分加以分析，作成分析結果，以討論每一題七位學生解題的結果。其中每一題只列舉解題較有變化的二至三個原案分析以作為對照，完整的原案分析資料請參閱附錄六。

第一題 (N-01): 直式算式

如果 \triangle 、 \square 為 0-9 中不同的數，請問下面的算式，所得到的最小三位數與最大三位數各是多少？而 \diamond 、 \odot 所代表的值各是多少？

$$\begin{array}{r} \triangle \triangle \triangle \\ \circ \triangle \\ + \triangle \\ \hline \square \diamond \odot \end{array}$$

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■			■				
計畫 (P)			■			■			
執行 (I)				■			■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	13	34	37	27	25	24	19	15	194

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(13 ")

(1)能注意到問題的所有條件(最大與最小三位數、 所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求(求最大與最小的三位數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 1002、1003)(34 ")

如果要求最大數, 就是 9。但是如果 是 9, $999 + 19 + 9 = 1027$, 就變成四位數, 所以 是 8。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 1004)(37 ")

假定 $= 8$, $= 9$ 可以求最大三位數。

4. 執行階段 (I):(口語資料 1005)(27 ")

求得最大三位數 994。

5. 分析階段 (A):(口語資料 1006)(25 ")

如果求最小的, 是 0, 但是不可能, 所以就是 1

6. 計畫階段 (P):(口語資料 1007)(24 ")

假定 $a = 1$, $b = 2$ 三位數最小。

7. 執行階段 (I): (口語資料 1008) (19 ")

求得最小三位數 133。

8. 驗證階段 (V): (口語資料 1009、1010) (15 ")

根據題目的條件來驗證。 $a = 8$, $b = 9$ 最大數 994, $a = 1$, $b = 2$ 最小數 133。結果也符合題意。

(二) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	14	43	123	15	195				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 1001) (14 ")

(1) 能注意到問題的所有條件 (最大與最小三位數 a 、 b 所代表的值各是多少)。

(2) 能瞭解題目的要求 (求最大與最小的三位數)。

2. 分析階段 (A): (口語資料 1002) (43 ")

當 $a = 9$ 時, 應該是最大三位數。當 $a = 1$ 時, 應該是最小三位數。當 $a = 9$ 時, 就變成 4 位數, 所以不符合條件

3. 執行階段 (I):(口語資料 1003、1004、1005、1006)(123 ")

$a = 8, b = 9$ 求得最大三位數 994, $a = 1, b = 2$ 求得最小三位數 133。

4. 驗證階段 (V):(口語資料 1007、1008)(15 ")

根據題目的條件來驗證。 $a = 8, b = 9$ 最大三位數為 994, $a = 1, b = 2$ 最小三位數為 133, 結果符合題意。

【N-01 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現, 學生 S6 只有讀題、分析、執行、驗證等四階段, 其餘六位學生的解題歷程都具有讀題、分析、計畫、執行、驗證等五階段(表 4-1)。而解題階段順序則顯出較為不一致, 可能是因為解題過程中, 在分析階段把最大三位數與最小三位數集中分析與分散分析所致。七位學生都先認為最大三位數時 a 的值應該為 9, 但是一經實際計算的結果會是四位數, 而修正為最大三位數時 a 的值為 8, 因而體認直覺反應可能造成錯誤, 還是需要經過驗證。而在求最小三位數則有一致的想法, 都直覺反應 a 的值為 1。在解法上雖有先求最小三位數或先求最大三位數, 七位學生都求出當 $a = 8, b = 9$ 時, 最大三位數為 994; 當 $a = 1, b = 2$ 時, 最小三位數為 133。而使用的解法都大同小異。七位學生解本題所花費的時間在 117 秒至 219 秒。(表 4-2)

表 4-1 直式算式 (N-01) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-2 直式算式 (N-01) 解題階段順序與時間表

學生	N-01 解題階段順序與時間									
S1	R	A	P	I	A	P	I	V		
	13	34	37	27	25	24	19	15	194	
S2	R	P	I	A	P	I	V			
	13	37	31	37	33	34	12	197		
S3	R	P	I	A	P	I	V			
	14	35	41	39	37	38	15	219		
S4	R	A	I	P	I	P	I	V		
	13	31	26	23	28	23	37	13	194	
S5	R	P	A	I	P	I	V			
	15	41	43	35	28	34	14	210		
S6	R	A	I	V						
	14	43	123	15	195					
S7	R	A	I	P	I	A	P	I	V	
	13	15	14	12	14	12	13	12	12	117

解題策略：七位學生在求最大三位數時利用嘗試錯誤的方式得到當 $\square = 8$ 、 $\square = 9$ 時最大三位數為 994。

解題成敗因素：

一、解題知識：七位學生都了解題意（語言知識），也知道最大三位數與最小三位數（語意知識），當三位數百位數進位大於 9 時就變成四位數、當 $\square = 1$ 、 $\square = 2$ 時三位數最小（基模知識），利用嘗試錯誤策略得到當 $\square = 8$ 、 $\square = 9$ 時三位數最大（策略知識），求得最大三位數為 994、最小三位數為 133（程序知識）。

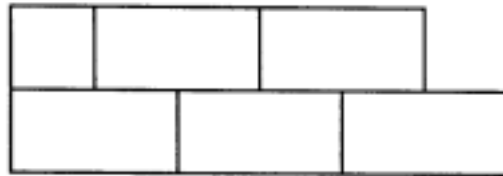
二、數學能力：數學運算能力、邏輯推理能力。

三、解題行為：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗

算的程序。

第二題 (N-02)：圍牆整建

學校一道長 100 公尺高 7 公尺的圍牆，因為颱風來襲，被大風吹倒，現在學校要使用兩種磚塊重新整建：長 2 公尺高 1 公尺、長 1 公尺高 1 公尺。垂直堆砌磚塊必須如下圖所示交錯間隔，而且牆的兩端必須堆砌平整。請問學校使用這兩種磚塊重新整建這一道圍牆各需要多少塊才可以整建完成？（假設磚塊間沒有間隔）



(一) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	113	14	140	12	125	44	473	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 2001) (25 ")

(1) 能注意到問題的所有條件 (圍牆的長度與高度, 磚塊的種類)。

(2)能瞭解題目的要求 (求 2×1 與 1×1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002、2003、2004、2005、2006)(113 ”)

分析全部共有 7 層, 使用 1×1 的磚塊 2 塊和 2×1 的磚塊 49 塊與全部使用 2×1 磚塊的那一層共有 50 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2007)(14 ”)

第二種第一層先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2008-2016)(140 ”)

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊, 得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 2018)(12 ”)

第一種第一層先全部使用 2×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I):(口語資料 2019-2027)(125 ”)

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 的磚塊, 得到 2×1 的磚塊共 347 塊、 1×1 的磚塊共 6 塊。

	2×1	1×1
1	49	2
2	50	0
3	49	2
4	50	0
5	49	2
6	50	0
7	49	2
和	346	8

	2×1	1×1
1	50	0
2	49	2
3	50	0
4	49	2
5	50	0
6	49	2
7	50	0
和	347	6

7. 驗證階段 (V):(口語資料 2028、2029)(44 ”)

根據題目的條件來驗證。先使用 2×1 和 1×1 的磚塊; 先使用 2×1 的磚塊, 結果符合題意。

(二) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 02 解題階段順序和時間和時間 (S 5)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)			■		■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	28	143	15	151	12	122	49	520	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 2001) (28 ”)

(1) 能注意到問題的所有條件 (圍牆的長度與高度 , 磚塊的種類)。

(2) 能瞭解題目的要求 (求 2×1 與 1×1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A) : (口語資料 2002、2003、2004、2005) (143 ”)

分析全部共有 7 層 , 全部使用 2×1 磚塊的那一層共有 50 塊與使用 1×1 的磚塊 2 塊和 2×1 的磚塊 49 塊。

3. 計畫階段 (P) : (口語資料 2006) (15 ”)

第一層先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

4. 執行階段 (I) : (口語資料 2007-2015) (151 ”)

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊 , 得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

5. 計畫階段 (P) : (口語資料 2016) (12 ”)

第一層先全部使用 2×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I) : (口語資料 2017-2025) (122 ”)

自行畫表格以輔助解題先使用 2x1 的磚塊，得到 2x1 的磚塊共 347 塊、1x1 的磚塊共 6 塊。

	1x1	2x1
1	2	49
2	0	50
3	2	49
4	0	50
5	2	49
6	0	50
7	2	49

	1x1	2x1
1	0	50
2	2	49
3	0	50
4	2	49
5	0	50
6	2	49
7	0	50

7. 驗證階段 (V): (口語資料 2026、2027) (49 ")

根據題目的條件來驗證。先使用 2x1 和 1x1 的磚塊；先使用 2x1 的磚塊，結果符合題意。

【N-02 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都具有讀題、分析、計畫、執行、驗證等階段（表 4-3）。而解題階段順序則有一致的現象。比較有趣的是，每位學生都找出兩種整建圍牆方式，例如，圍牆需使用磚塊共有七層，第一層使用 2 公尺x1 公尺的磚塊 50 塊，或者是使用的磚塊 49 塊與 1 公尺x1 公尺的磚塊 2 塊，分別得到 2 公尺x1 公尺的磚塊 347 塊、1 公尺x1 公尺的磚塊 6 塊與 2 公尺x1 公尺的磚塊 346 塊、1 公尺x1 公尺的磚塊 8 塊。由此可知，七位學生的解題都具有擴散性思考，不會只求得單單一解為滿足，而把二種可能的解都找出來。七位學生解本題所花費的時間在 457 秒至 524 秒（表 4-4），平均解題時間較長，需要具備解題耐力才能完成。

表 4-3 圍牆整建 (N-02) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-4 圍牆整建 (N-02) 解題階段順序與時間表

學生	N-02 解題階段順序與時間								
S1	R	A	P	I	P	I	V		
	25	129	13	136	14	125	43	485	
S2	R	A	P	I	P	I	V		
	27	127	13	134	12	121	43	477	
S3	R	A	P	I	P	I	V		
	28	142	16	145	15	133	45	524	
S4	R	A	P	I	P	I	V		
	25	113	14	140	12	125	44	473	
S5	R	A	P	I	P	I	V		
	28	143	15	151	12	122	49	520	
S6	R	A	P	I	P	I	V		
	25	109	13	138	11	118	43	457	
S7	R	A	P	I	P	I	V		
	29	132	12	147	13	125	42	500	

解題策略：七位學生都自行畫表格方式以輔助解題，並尋找所有可能的解。

解題成敗因素：

- 一、解題知識：七位學生均了解題意（語言知識），長 100 公尺高 7 公尺圍牆的知識（語意知識），知道 2 公尺x1 公尺與 1 公尺x1 公

尺的磚塊交錯間隔堆砌(基模知識),每位學生都找出兩種整建圍牆方式,共有七層,第一層全部使用 2 公尺×1 公尺的磚塊 50 塊或使用的磚塊 49 塊與 1 公尺×1 公尺的磚塊 2 塊(策略知識),第一層使用 2 公尺×1 公尺的磚塊 50 塊或使用的磚塊 49 塊與 1 公尺×1 公尺的磚塊 2 塊,分別得到 2 公尺×1 公尺的磚塊 347 塊、1 公尺×1 公尺的磚塊 6 塊與 2 公尺×1 公尺的磚塊 346 塊、1 公尺×1 公尺的磚塊 8 塊(程序知識)。

二、數學能力：形式化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、彈性思考能力。

三、解題行為：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序、解題耐力。

第三題 (N-03)：數字分組

請你將 1、3、5、7、9、11、12 等 7 個數分成兩組，使每一組內所有數加起來的和相等。請問每一組數的和是多少？並請你找出所有分組的方法。

(一) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	21	26	129	23	199				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 3001)(21 ")

能瞭解题目的要求 (把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 3002、3003、3004)(26 ")

知道把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數加起來除以 2，以得到每一組數的和為 24。

3. 執行階段 (I):(口語資料 3005、3006、3007)(129 ")

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，利用數字重組的策略共找出不同的三個解，並自行畫表格列答：

(1)第一組 12、9、3，第二組 11、1、5、7。

(2)第一組 12、1、11，第二組 3、5、7、9。

(3)第一組 12、5、7，第二組 1、3、9、11。

第 1 組	第 2 組
12, 9, 3	11, 1, 5, 7
12, 1, 11	3, 5, 7, 9
12, 5, 7	1, 3, 9, 11

4. 驗證階段 (V): (口語資料 3008、3009、3010) (23")

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且符合題意。

(二) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階 段	N - 0 3 解 題 階 段 順 序 和 時 間 (S 7)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	21	24	125	26	196				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 3001) (21")

能瞭解題目的要求 (把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A): (口語資料 3002) (24")

因為要把這 7 個數分成和相等的 2 組，所以把所有數加起來除以 2，每一組的和為 24。

3. 執行階段 (I):(口語資料 3003、3004、3005)(125")

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，利用數字重組的策略共找出不同的三種解：

(1)第一組 $12 + 11 + 1$ ，第二組 $3 + 5 + 7 + 9$ 。

(2)第一組 $5 + 7 + 12$ ，第二組 $1 + 3 + 9 + 11$ 。

(3)第一組 $5 + 1 + 11 + 7$ ，第二組 $3 + 9 + 12$ 。

4. 驗證階段 (V):(口語資料 3006、3007)(26")

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且符合題意。

【N-03 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都只有讀題、分析、執行、驗證等四個階段。解題階段順序則相當一致，都呈現讀題 分析 執行 驗證等四個解題階段順序(表 4-5)。每位學生都知道要分成相等的兩組的方式，就是把所有的數加起來除以 2。而且每位都求得三個不同的解分別為 (1、11、12) 和 (3、5、7、9);(3、9、12) 和 (1、5、7、11);(5、7、11);(1、3、9、11)。其中比較特別的是 S2 以畫表格的形式列答。七位學生解本題所花費的時間在 196 秒至 273 秒之間(表 4-6)。由此可知，七位學生的解題都具有擴散性思考，不會只求得單單一解為滿足，而把三種可能的解都找出來。

表 4-5 數字分組 (N-03) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-6 數字分組 (N-03) 解題階段順序與時間表

學生	N-03 解題階段順序與時間								
	R	A	I	V					
S1	22	25	132	24	203				
	R	A	I	V					
S2	21	26	129	23	199				
	R	A	I	V					
S3	23	27	198	25	273				
	R	A	I	V					
S4	23	25	126	25	199				
	R	A	I	V					
S5	22	27	164	25	238				
	R	A	I	V					
S6	22	26	138	24	210				
	R	A	I	V					
S7	21	24	125	26	196				
	R	A	I	V					

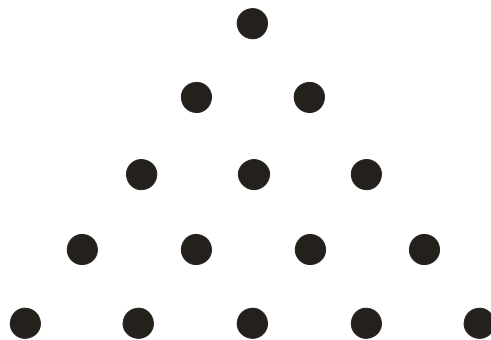
解題策略：七位學生都使用數字重組的策略、尋找所有可能的解，求出三個不同的解；除了 S2 畫表格列答，其餘六位都以條列式列答。

解題成敗因素：

- 一、**解題知識**：七位學生均了解題意（**語言知識**），並知道將 1、3、5、7、9、11、12 等 7 個數分成 2 組每組 24（**語意知識**），也知道組成和為 24 的數字組合（**基模知識**），應用數字重組與尋找所有可能解求出三個不同的解（**策略知識**），求得三個不同的解分別為（1、11、12）和（3、5、7、9）；（3、9、12）和（1、5、7、11）；（5、7、11）；（1、3、9、11）（**程序知識**）。
- 二、**數學能力**：形式化數學題材的能力、數學運算能力、邏輯推理能力、彈性思考能力。
- 三、**解題行為**：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序。

第四題（M-01）：三角形個數

在平面上有 15 個點，點與點之間の間隔距離都相等，如下圖，請問使用這 15 個點可以畫出大大小小的正三角形共多少個？如果有這種點 21 個，那麼可以畫出大大小小的正三角形共多少個？



(一) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	18	67	128	54	63	23	353		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(18 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 4002)(67 ")

把正三角形分為邊長為 1、2、3、4 等 4 種，並在點與點之間畫線。

3. 執行階段 (I):(口語資料 4004、4005、4006、4007、4008)(128 ")

15 點可畫出邊長為 1 的正三角形有 16 個、邊長為 2 的正三角形有 7 個、邊長為 3 的正三角形的有 3 個、邊長為 4 的正三角形的有 1 個，共有正三角形 27 個。

4. 計畫階段 (P):(口語資料 4009)(54 ")

補畫 6 個點並補畫線。

5. 執行階段 (I):(口語資料 4010-4018)(63 ")

21 點比 15 點增加邊長為 1 的正三角形有 9 個、邊長為 2 的正三角形有 6 個、邊長為 3 的正三角形的有 3 個、邊長為 4 的正三角形的有 6 個，邊

長為 5 的正三角形的有 1 個，所以 21 點共可畫出 $21 + 27 = 48$ 個正三角形。

$$\begin{array}{r} 1-16 \\ 2-7 \\ 3-3 \\ 4-1 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1-9 \\ 2-6 \\ 3-3 \\ 4-2 \\ 5-1 \\ \hline 21 \end{array}$$

6. 驗證階段 (V): (口語資料 4019、4020) (23 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(二) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)									
計畫 (P)		■		■					
執行 (I)			■		■				
驗證 (V)						■			
時間(秒)	17	65	121	57	70	22	352		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 4001) (17 ")

- (1) 能注意到問題的所有條件。
- (2) 能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P): (口語資料 4002) (65 ")

在點與點之間畫線。自行畫表格，把正三角形分邊長為 1、2、3、4 及正、反。

3. 執行階段 (I): (口語資料 4003、4004、4005、4006、4007) (121 ")
 邊長為 1 的正有 10、反有 6，邊長為 2 的正有 6、反有 1，邊長為 3 的正有 3、反有 0，邊長為 4 的正有 1、反有 0。15 點正的有 20、反的有 7，共有 27。

4. 計畫階段 (P): (口語資料 4008) (57 ")

補 6 個點並把點與點之間的線連起來，並自行畫表格，把正三角形分邊長為 1、2、3、4、5 及正、反。

5. 執行階段 (I): (口語資料 4009、4010、4011、4012、4013、4014) (70 ")
 邊長為 1 的正有 15、反有 10，邊長為 2 的正有 10、反有 3，邊長為 3 的正有 6、反有 0，邊長為 4 的正有 3、反有 0，邊長為 5 的正有 1、反有 0。21 點正有 35，反有 13，共有 48。

15點	正	反
1	10	6
2	6	1
3	3	0
4	1	0
和	20	7
	27	

21點	正	反
1	15	10
2	10	3
3	6	0
4	3	0
5	1	0
和	35	13
	48	

6. 驗證階段 (V): (口語資料 4015、4016) (22 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(三) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)									
計畫 (P)		■		■					
執行 (I)			■		■				
驗證 (V)						■			
時間(秒)	18	92	141	60	68	21	400		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(18 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 4002)(92 ")

因為 2 個點可以劃一直線，所以 15 個點，可以分成：5 個點、4 個點、3 個點、2 個點等 4 類。(畫線)

3. 執行階段 (I):(口語資料 4003-4007)(141 ")

5 個點的有 1 個三角形，4 個點的有 3 個三角形，3 個點的有 7 個三角形，2 個點的有 $10 + 6 = 16$ 個三角形，15 點共有正三角形 27 個正三角形。

4. 計畫階段 (P):(口語資料 4008)(60 ")

21 個點，補 6 個點，可以分成：6 個點、5 個點、4 個點、3 個點、2 個點等 5 類。(畫線)

5. 執行階段 (I):(口語資料 4009-4014)(68 ")

6 個點的有 1 個三角形，5 個點的有 3 個三角形，4 個點的有 6 個三角形，

3 個點的有 13 個三角形，2 個點的有 25 個三角形，21 點共可畫出 48 個正三角形。

$$\begin{array}{l}
 \bullet x_5 = 1 \\
 \bullet x_4 = 3 \\
 \bullet x_3 = 7 \\
 \bullet x_2 = 10 + 6 = 16 \\
 7 + 3 + 1 + 16 \\
 = 27
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \bullet x_6 = 1 \\
 \bullet x_5 = 3 \\
 \bullet x_4 = 6 \\
 \bullet x_3 = 13 \\
 \bullet x_2 = 14 + 10 = 25 \\
 6 + 13 + 1 + 3 + 25 \\
 = 20 + 28 \\
 = 48
 \end{array}$$

6. 驗證階段 (V): (口語資料 4015、4016) (21 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

【M-01 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都只有讀題、計畫、執行、驗證等四個階段。解題階段順序則相當一致，都呈現讀題 計畫 執行 驗證等四個解題階段順序 (表 4-7)。其中分類的方式呈現比較多樣化，學生 S3 以畫圖來分類，學生 S6 將 15 點、21 點的三角形分為 2、3、4、5 點與 2、3、4、5、6 點之外，其他五位學生都將 15 點、21 點以邊長分類三角形為 1、2、3、4 與邊長為 1、2、3、4、5。在求 21 點的三角形個數過程中，S1 與 S2 二位學生在求得 15 點可以畫 27 個三角形，增加 6 個點，以外加三角形個數的方式解題，可多畫 21 個三角形。其他五位學生則以 15 點可畫 27 個三角形、21 點可畫 48 個三角形的形式解題。七位學生解本題所花費的時間在 327 秒至 428 秒之間 (表 4-8)。

表 4-7 三角形個數 (M-01) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

解題策略：S3 以畫圖分類、S6 以點分類，其他五位學生則以邊長分類；

S4 自行畫表格列答外，其他六位則以條列式列答，將三角形加以分類以簡化求大大小小三角形的複雜性。

表 4-8 三角形個數 (M-01) 解題階段順序與時間表

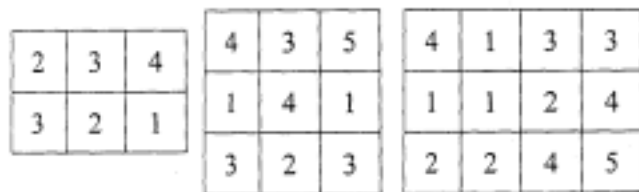
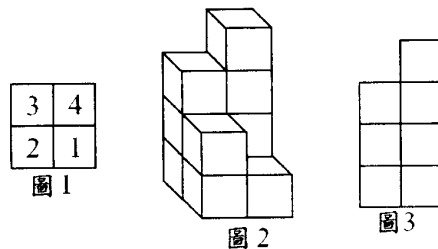
學生	M-01 解題階段順序與時間							
S1	R	P	I	P	I	V		
	18	66	134	51	65	22	356	
S2	R	P	I	P	I	V		
	18	67	128	54	63	23	353	
S3	R	P	I	P	I	V		
	17	97	153	61	79	21	428	
S4	R	P	I	P	I	V		
	17	65	121	57	70	22	352	
S5	R	P	I	P	I	V		
	16	93	147	62	73	22	413	
S6	R	P	I	P	I	V		
	18	92	141	60	68	21	400	
S7	R	P	I	P	I	V		
	17	62	123	42	64	19	327	

解題成敗因素：

- 一、解題知識：七位學生均了解題意（語言知識），各類的三角形（語意知識），以邊長、畫圖、點分類三角形而 S1、S2 更以外加個數（先求 15 點三角形的個數，增加 6 個點多增加三角形的個數 +）的方式求得 21 點的三角形個數（策略知識），解得 15 點可畫 27 個三角形、21 點可畫 48 個三角形（程序知識）。
- 二、數學能力：形式化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、彈性思考能力、空間概念能力。
- 三、解題行為：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序。

第五題 (M-02)：堆積圖形

圖 1 叫做「堆積圖形」，這個圖形中的數是告訴我們在這個位置上堆積多少個正方體。圖 2 是顯示出全部的正方體，而圖 3 是由圖形正面方向觀看所獲得的正面圖。請你畫出下面堆積圖形的正面圖。由下面三個堆積圖形，你能不能找出畫出正面圖的規律？如果可以請把規律寫出來。



(一) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	47	106	21	200				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 5001)(26 ")

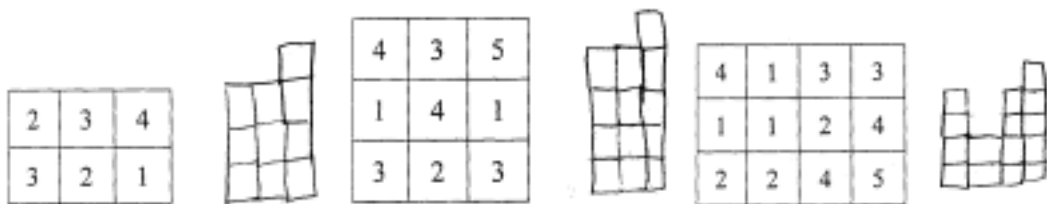
- (1)能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 5002)(47 ")

由圖 1 的每行的最大數、圖 2 可以看每行到最多的正方體個數、圖 3 每行的正方形個數之間的關係。

4. 執行階段 (I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(106 ")

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)。
- (4)畫正面圖的規律為每行最大的數就是正面圖的個數。



5. 驗證階段 (V):(口語資料 5007、5008)(21 ”)

根據題目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(二) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	28	110	112	25	275				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 5001)(28 ”)

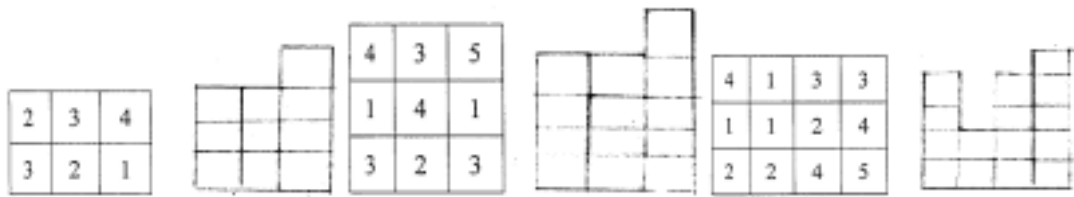
- (1)能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 5002)(110 ”)

圖 1 第一行最大數 3，圖 3 第一行有 3 個正方形；第二行最大數 4，圖 3 第二行有 4 個正方形。

3. 執行階段 (I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(112 ”)

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)
- (4)畫正面圖的規律為直行中的最大數就是正方形個數。



4. 驗證階段 (V): (口語資料 5007、5008) (25 ")

根據题目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

【M-02 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都只有讀題、分析、執行、驗證等四個階段（表 4-9）。解題階段順序則相當一致，都呈現讀題 分析 執行 驗證等四個解題階段順序。在分析階段七位學生有二種分析方式，除了 S1、S3 二位使用的圖 1 堆積圖、圖 2 全部正方體圖、圖 3 正面圖分析外，其他四位學生則只使用圖 1 堆積圖與圖 3 正面圖分析。每位學生都能畫出三個堆積圖形並找出畫堆積圖形的規律。七位學生解本題所花費的時間在 195 秒至 275 秒之間（表 4-10）。

表 4-9 堆積圖形 (M-02) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-10 堆積圖形 (M-02) 解題階段順序與時間表

學生	M-02 解題階段順序與時間								
	R	A	I	V					
S1	26	61	107	22	216				
	R	A	I	V					
S2	26	65	103	23	217				
	R	A	I	V					
S3	26	47	106	21	200				
	R	A	I	V					
S4	25	92	103	24	244				
	R	A	I	V					
S5	28	110	112	25	275				
	R	A	I	V					
S6	26	45	101	23	195				
	R	A	I	V					
S7	27	103	107	26	263				
	R	A	I	V					

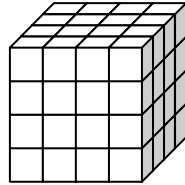
解題策略：七位學生均由圖 1、圖 2 及圖 3 歸納並發現規律為每行最大的數就是正面圖的個數，畫圖解題。

解題成敗因素：

- 一、**解題知識：**七位學生均了解題意（語言知識），由三個堆積圖形找出畫出正面圖的規律（語意知識），發現畫正面圖的規律為每行最大的數就是正面圖的個數（策略知識），每位學生都能畫出三個堆積圖形並找出畫堆積圖形的規律。（程序知識）。
- 二、**數學能力：**一般化數學題材能力、邏輯推理能力、空間概念能力。
- 三、**解題行為：**題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序。

第六題 (M-03): 正方體個數

一個 $4 \times 4 \times 4$ 的正方體盒子剛好裝滿 64 個大小相同的小正方體，請問會接觸到盒子外側的小正方體的個數共有多少個？沒有接觸的盒子外側的正方體有多少個？



(一) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	21	133	92	30	25	301			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 6001)(21 ”)

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(133 ”)

先考慮有接觸的。再以全部 64 個減去有接觸的，剩下就是沒有接觸的。

3. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004、6005)(92 ”)

分析有接觸的外面的小正方體左右兩層共有 $4 \times 4 \times 2 = 32$ 上下兩層剩下 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 、前後兩層剩下 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

4. 執行階段 (I): (口語資料 6006、6007) (30 ")

接觸外面的共有 $8 + 32 + 16 = 56$ 個。未接觸的有 $64 - 56 = 8$ 個。

5. 驗證階段 (V): (口語資料 6008、6009) (25 ")

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

(二) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 4)									
讀題 (R)										
分析 (A)										
計畫 (P)										
執行 (I)										
驗證 (V)										
時間(秒)	18	143	95	26	23	305				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 6001) (18 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

3. 計畫階段 (P): (口語資料 6002) (143 ")

先考慮沒有接觸的盒子外側的正方體個數，全部個數減去沒有接觸的盒子外側的正方體的個數剩下就是有接觸盒子外側的正方體個數。

2. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004、6005)(95 ")

以長寬高來看，長有 4 層，扣掉接觸盒子外測的剩下 2 層；寬有 4 層，扣掉接觸盒子外測的剩下 2 層；高有 4 層，扣掉接觸盒子外測的剩下 2 層。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6006、6007)(26 ")

沒接觸的有 $(4-2) \times (4-2) \times (4-2) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ 。接觸的有 $64-8 = 56$ 個。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 6007、6008)(23 ")

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

【M-03 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都具有讀題、分析、計畫、執行、驗證等階段(表 4-11)。而解題階段順序則有一致的現象。但在計畫階段則出現了二種不同策略，第一種順向求解策略：先找出與盒子外側有接觸的正方體個數，再以全部減去與盒子外側有接觸的正方體個數，剩下就是沒有接觸盒子外側的正方體個數，運用這種方式的學生有 S1、S2、S3、S6 等四位；第二種逆向求解策略：先找出與盒子外側無接觸的正方體個數，在以全部減去與盒子外側沒有接觸的正方體個數，剩下就是有接觸盒子外側的正方體個數，運用這種方式的學生有 S4、S5、S7 等三位。七位學生都具備空間的抽象概念能力，對於空間概念的問題，有能力解決。七位學生解本題所花費的時間在 144 秒至 305 秒之間(表 4-12)。

表 4-11 正方體個數 (M-03) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-12 正方體個數 (M-03) 解題階段順序與時間表

學生	M-03 解題階段順序與時間								
S1	R	P	A	I	V				
	19	43	40	22	20	144			
S2	R	P	A	I	V				
	18	51	45	24	21	159			
S3	R	P	A	I	V				
	21	133	92	30	25	301			
S4	R	P	A	I	V				
	18	143	95	26	23	305			
S5	R	P	A	I	V				
	20	141	82	23	25	291			
S6	R	P	A	I	V				
	19	41	43	23	18	144			
S7	R	P	A	I	V				
	20	123	83	24	21	271			

解題策略：S1、S2、S6 等三位學生利用**順向求解**的策略先找出接觸盒子外側的正方體個數 56 個，再以全部正方體個數 64 個減去接觸外側的正方體個數，求得未接觸盒子外側的正方體個數 8 個；S3、S4、S5、S7 等四位學生利用**逆向求解**的策略先找出未接觸盒子外側的正方體個數，再以全部正方體個數減去未接觸外側的正方體個數，求得接觸盒子外側的正方體個數；先找出未接觸盒子外側的正方體個數 8 個，再

以全部正方體個數 64 個數減去未接觸外側的正方體個數，求得接觸盒子外側的正方體個數 56 個。

解題成敗因素：

- 一、**解題知識：**七位學生均了解題意（**語言知識**），並知道接觸盒子外側的正方體與未接觸盒子外側的正方體的知識（**語意知識**），以順向求解或逆向求解的方式求得接觸盒子外側的正方體個數與未接觸盒子外側的正方體個數（**策略知識**），解出接觸盒子外側的正方體 56 個，未接觸盒子外側的正方體 8 個（**程序知識**）。
- 二、**數學能力：**形式化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、逆向思考能力、空間概念能力。
- 三、**解題行為：**題意與數學結構的掌握、能否注意到問題中所有的條件、能否了解題意與目標間的關係、能否應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序。

第七題 (L-01)：奇妙數列

老師藉由下列的三個規則製造出一串數列，剛開始先寫一個正整數，然後再依下列的三個規則，寫出後面的數字：

規則 1：如果這個數比 10 小，將它乘以 9。

規則 2：如果這個數為偶數而且比 9 大，則將它除以 2。

規則 3：如果這個數為奇數而且比 9 大，則將它減去 5。

【例】數列：25、20、10、5、45、40、20

請問數列 58、29、24、 的第 15 項與第 27 項的各是什麼數字？這種數列是否有規律？如果有請你找出這種數列的規律，並把它寫出來。

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	48	170	91	24	333				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 7001)(48 ")

(1)能注意到問題的所有條件(製造數列的規則)。

(2)能瞭解題目的要求(找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 7002)(170 ")

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I):(口語資料 7003、7004、7005、7006)(91 ")

(1)找出數列的規律為從第 5 個數開始, 6、54、27、22、11 等 5 個數循環。

(2)用數項數的方式找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

4. 驗證階段 (V):(口語資料 7007、7008)(24 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生, 並驗證找出的規律以求的第 15 項與第 27 項的數, 結果也符合題意。

(二) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	46	161	74	23	304				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 7001)(46 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 7002)(161 ")

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I):(口語資料 7003-7009)(74 ")

- (1)找出數列的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。
- (2)利用餘數定理找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

$$\begin{aligned} 15 - 4 &= 11 \\ 11 \div 5 &= 2 \dots 1 \\ 27 - 4 &= 23 \\ 23 \div 5 &= 4 \dots 3 \end{aligned}$$

第 15 項是 6。
第 27 項是 27。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 7010、7011)(23 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果也符合題意。

【L-01 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都只有讀題、分析、執行、驗證等四個階段。解題階段順序則相當一致，都呈現讀題 分析 執行 驗證等四個解題階段順序（表 4-13）。每位學生都找出數列的規律為從第五項重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。而在找項數值的則有二種策略，S2、S3、S4、S7 等四位學生則是利用餘式定理找出第 15 項、第 27 項的數各為 6、27，其他 S1、S5、S6 等三位學生利用數項數的方式找出第 15 項、第 27 項的數各為 6、27。餘式定理在中年級課程中未曾提及，顯示學生另有加深及加廣的學習。七位學生解本題所花費的時間在 292 秒至 372 秒之間（表 4-14）。

表 4-13 奇妙數列（L-01）解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

解題策略：S2、S3、S4、S7 四位學生利用餘式定理，而 S1、S5、S6 三位學生利用數項數，歸納求出第 15 項、27 項的值。七位學生都發現規律：從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。

表 4-14 奇妙數列 (L-01) 解題階段順序與時間表

學生	L-01 解題階段順序與時間								
S1	R	A	I	V					
	48	170	91	24	333				
S2	R	A	I	V					
	46	143	82	21	292				
S3	R	A	I	V					
	47	156	71	22	296				
S4	R	A	I	V					
	46	150	72	21	289				
S5	R	A	I	V					
	48	203	95	26	372				
S6	R	A	I	V					
	49	197	93	25	364				
S7	R	A	I	V					
	46	161	74	23	304				

解題成敗因素：

- 一、**解題知識**：七位學生均了解題意（語言知識），知道以題目的規則求得新的數列（基模知識），並找出新數列的規律及第 15、27 項的數（語意知識），以餘式定理或數項數的策略（策略知識），求的第 15 項、第 27 項的數各為 6、27（程序知識）。
- 二、**數學能力**：一般化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、簡捷思考能力。
- 三、**解題行為**：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序。

第八題 (L-02)：硬幣排列

五種香港硬幣：1 元、2 元、5 元、10 元、20 元，在桌上由左至右排成一列。

幣值最高的硬幣排在中間。

5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊，但沒有緊鄰。

2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔開。

1 元硬幣不會排列在最後。

請你找出這五種硬幣的排列順序。

(一) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	45	14	84					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 8001) (25 ")

(1) 能注意到問題的所有條件。

(2) 能瞭解題目的要求 (由左至右排列)。

2. 執行階段 (I) : (口語資料 8002、8003、8004、8005、8006) (45 ")

自行畫表格以輔助解題。

- (1) 20 元硬幣排在第三個位置。
- (2) 5 元硬幣排在第一個位置。
- (3) 2 元硬幣排在第四個位置。
- (4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

	一	二	三	四	五
1元		✓			✗
2元				✓	
5元	✓				
10元					✓
20元			✓		

3. 驗證階段 (V): (口語資料 8007、8008) (14 ")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

(二) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	63	18	107					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 8001) (26 ")

- (1) 能注意到問題的所有條件。
- (2) 能瞭解題目的要求 (由左至右排列)。

2. 執行階段 (I): (口語資料 8002、8003、8004、8005、8006、8007) (63 ")

- (1) 20 元硬幣排在第三個位置。
- (2) 5 元硬幣排在第一個位置。
- (3) 2 元硬幣排在第四個位置。
- (4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

3. 驗證階段 (V): (口語資料 8009、8009) (18 ")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

【L-02 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，都只有讀題、執行與驗證等三個階段 (表 4-15)。但還是能把問題解出來，顯示不一定需經過讀題、分析、計畫、執行與驗證五個階段，才有解題的成功機會。比較特別的試 S1 以畫表格來協助列答。七位學生解本題所花費的時間在 65 秒至 107 秒之間 (表 4-16)，是所有試題中平均解題時間最短的題目。

表 4-15 硬幣排列 (L-02) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-16 硬幣排列 (L-02) 解題階段順序與時間表

學生	L-02 解題階段順序與時間								
S1	R	I	V						
	24	47	13	84					
S2	R	I	V						
	25	45	14	84					
S3	R	I	V						
	25	63	13	101					
S4	R	I	V						
	25	45	13	83					
S5	R	I	V						
	23	53	18	94					
S6	R	I	V						
	24	29	12	65					
S7	R	I	V						
	26	63	18	107					

解題策略：七位學生都組織資料，直接解題推論出錢幣由左至右的排列為 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元。其中 S2 畫表格輔助解題。

解題成敗因素：

- 一、**解題知識：**七位學生均了解題意（語言知識），知道各個錢幣的相對位置（語意知識），採用組織資料直接解題策略（策略知識），推論錢幣由左至右的排列為 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元（程序知識）。
- 二、**數學能力：**形式化數學題材能力、邏輯推理能力。
- 三、**解題行為：**題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序。

第九題 (L-03): 大樓住戶

J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R 等 12 人住在同一棟六層樓的大樓內。每層樓有 2 間房間，任何一間房間最多住 2 人。有某些房間是空房間的。

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。

M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。

R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。

請問由下往上排列的順序為何？空房間可能位於哪些樓層？

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	57	298	51	15	24	17	23	26	551

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (57 "))

(1) 能注意到問題的所有條件。

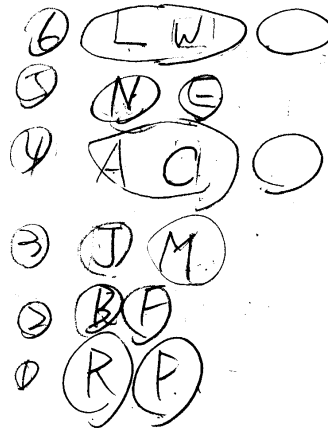
(2) 能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2. 分析階段 (A): (口語資料 9002、9003、9004、9005) (298 "))

(1) 列出 J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R，使用過就畫記以確認有無疏漏。

J L M P W C A B F E R

(2) 由三個條件：L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。推論 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。



3. 執行階段 (I): (口語資料 9006) (51 "))

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層，M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層，R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件推論 L 住在最第 6 層，A、C 住在第 4 層，M 住在第 3 層、P、R 住單人房住在第 1 層。(畫記 L、A、C、M、P、R)

4. 分析階段 (A): (口語資料 9007) (15 "))

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。推論 N、B、F 之間相對位置的關係。

5. 執行階段 (I): (口語資料 9008) (24 "))

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。因為 B、F 住單人房，而只有第 2 層有二間單人房外，其他層沒有，所以 B、F 住在第 2 層，N 住

在第 5 層。(畫記 B、F、N)

6.分析階段 (A):(口語資料 9009)(17 ”)

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。

7.執行階段 (I):(口語資料 9010、9011、9012、9013)(23 ”)

因為 J 只能住在第 3 層，W 住在第 6 層，E 住在第 5 層。(畫記 J、W、E)。

推論 L 的室友是 W，空房間可能在四樓、六樓。

8.驗證階段 (V):(口語資料 9014、9015)(26 ”)

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，

三樓住 M、J，四住樓 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、

六樓的結果也符合題意。

(二) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	57	301	48	15	13	16	20	20	490

【解題階段分析】

1.讀題階段 (R):(口語資料 9001)(57 ”)

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2.分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004)(301 ”)

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。推論出 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。

3.執行階段 (I):(口語資料 9005)(48 ”)

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層，M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層，R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件，推論出 L、A、C、M、R、P 所在的位置共有六層，L 住在 6 樓，A、C 住在 4 樓，M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。

4.分析階段 (A):(口語資料 9006)(15 ”)

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。推論 N、B、F 之間相對位置的關係。

5.執行階段 (I):(口語資料 9007)(13 ”)

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層，推論出 B、F 住單人房只有在 2 樓有二間，所以 B、F 只能住在 2 樓，N 住在 5 樓。

6.分析階段 (A):(口語資料 9008)(16 ”)

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J、W、E 之間相對位置的關係。

7.執行階段 (I):(口語資料 9009、9010、9011、9012)(20 ”)

由 J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論出 J 住在 3 樓，E 住在 5 樓，W 住在 6 樓。L 的室友是 W。

6	LW	
5	N	E
4	AC	
3	M	J
2	B	F
1	R	P

8. 驗證階段 (V): (口語資料 9013、9014) (20 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列为，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四樓住 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

【L-03 分析結果】

綜觀七位學生在本題的表現可發現，每位學生的解題歷程都只有讀題、分析、執行、驗證等四個階段（表 4-17）。解題階段順序除了 S2 呈現讀題 分析 執行 分析 執行 驗證等六個解題階段順序外，其他六位則相當一致，都呈現讀題 分析 執行 分析 執行 分析 執行 驗證等八個解題階段順序。主要是因為本題有 12 個變數，而條件也有 5 個。重複分析 執行的解題順序就是在推論各個變數之間的相對位置，把相關的條件區置於同一分析中，以推論各個變數間的相對位置。雖然未見計畫階段，但是能整合相關的條件推論其相對位置，其實也蘊含計畫階段，只是未於原案中呈現。七位學生解本題所花費的時間在 387 秒至 530 秒之間（表 4-18），本題平均解題時間較長，需要具備解題耐力，才能完成。

表 4-17 大樓住戶 (L-03) 解題歷程階段表

學生	讀題 (R)	分析 (A)	計畫 (P)	執行 (I)	驗證 (V)	解題成功
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
S6						
S7						

表 4-18 大樓住戶 (L-03) 解題階段順序與時間表

學生	L-03 解題階段順序與時間								
S1	R	A	I	A	I	A	I	V	
	57	298	51	15	24	17	23	26	551
S2	R	A	I	A	I	V			
	61	289	56	26	59	23	514		
S3	R	A	I	A	I	A	I	V	
	63	302	61	18	18	21	25	22	530
S4	R	A	I	A	I	A	I	V	
	57	301	48	15	13	16	20	20	490
S5	R	A	I	A	I	A	I	V	
	61	312	53	12	15	11	22	16	502
S6	R	A	I	A	I	A	I	V	
	60	289	55	10	16	12	18	20	480
S7	R	A	I	A	I	A	I	V	
	59	201	50	12	14	9	24	18	387

解題策略：七位學生均組織資料並自行畫圖以分析所有的條件，歸納推論出各個變項的相對位置；其中 S1、S2 以畫記方式輔助解題。

解題成敗因素：

一、**解題知識：**七位學生均了解題意（語言知識），並了解題目中的條

件及求出由下至上的排列順序及空房間所在的樓層(語意知識), 六層樓, 每層樓有兩間房間, 每間房間最多住 2 人(基模知識), 組織資料並自行畫圖以分析所有的條件(策略知識); 推論由下而上的排列為, 一樓住 R、P, 二樓住 B、F, 三樓住 M、J, 四樓住 AC, 五樓住 N、E, 六樓住 LW, 空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意(程序知識)。

二、**數學能力**：形式化數學題材能力、邏輯推理能力、數學記憶力。

三、**解題行為**：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序、解題耐力。

第二節 綜合討論

本節主要就本研究的目的解題歷程、解題策略及解題成敗因素等的研究結果作討論, 所以本節共分為三部分, 一、解題歷程、二、解題策略及三、解題成敗因素等。

一、解題歷程

綜合七位學生放聲思考的結果, 每位學生在「數與量」、「圖形空間」及「邏輯推理」等九題試題均解題成功。但解題階段大都呈現一致現象。這個結果, 推論可能是因為學生是採立意抽樣的方式篩選有關, 雖然有年級之分, 但在解題歷程施測所得分數均在 130 分以上(總分 150 分)。

(一) 學生在「數與量」的解題歷程除了【數字分組】(N-03) 包含讀題、

分析、執行、驗證等四個階段，【直式算式】(N-01) 及【圍牆整建】(N-02) 則包含讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段；在「圖形空間」的解題歷程【三角形個數】(M-01) 包含讀題、計畫、執行、驗證等四個階段，【堆積圖形】(M-02) 讀題、分析、執行、驗證等四個階段，【正方體個數】(M-03) 則包含讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段；在「邏輯推理」的解題歷程除了【硬幣排列】(L-02) 只包含讀題、執行、驗證等三個階段外，【奇妙數列】(L-01) 及【大樓住戶】(L-03) 則包含讀題、分析、執行、驗證等四個階段，整理成表 4-19。

表 4-19 解題階段表

試題 \ 階段	讀題	分析	計畫	執行	驗證
直式算式 (N-01)					
圍牆整建 (N-02)					
數字分組 (N-03)					
三角形個數 (M-01)					
堆積圖形 (M-02)					
正方體個數 (M-03)					
奇妙數列 (L-01)					
硬幣排列 (L-02)					
大樓住戶 (L-03)					

(二) 在解題歷程中驗證階段是重要的一環，這個階段可能會影響解題成功與否的重要階段，七位解題者都能依題意進行驗證，結果是否合理、檢查解題步驟或計算過程。

(三) 解題歷程的讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段未必在解題

時都得出現，才有解題成功的可能，但解題時如能經過這五階段，將可使解題歷程更為周詳完備。

(四)【圍牆整建】(N-02)、【數字分組】(N-03)兩題七位學生均分別找出二個解及三個解。這顯示資優生的具有擴散思考的特質。

研究結果發現資優生的思路敏捷，而且有時會有跳躍式的思考，有時又呈放射式思考，因此面對非例行性問題時，會因不同的題目而有不同的解題階段，每一題的解題過程中未必全部出現所有的解題階段，而且同類型的題目也未必有相同的解題階段，甚至不會因為缺少其中一個階段，而影響到解題的結果。解題歷程的順序也非一定循讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段線性進行，會隨著思考而作隨機的調整。

二、解題策略

由原案分析的結果題解時所使用的解題策略有：**【直式算式】**(N-01)(1.嘗試錯誤)；**【圍牆整建】**(N-02)(1.畫表格、2.尋找所有可能)；**【數字分組】**(N-03)(1.數字重組、2.列式列答、3.畫表格列答、4.尋找所有可能)；**【三角形個數】**(M-01)(1.邊長分類、2.圖形分類、3.點分類)；**【堆積圖形】**(M-02)(1.畫圖、2.歸納法、3.發現規律)；**【正方體個數】**(M-03)(1.順向求解、2.逆向求解)；**【奇妙數列】**(L-01)(1.餘式定理、2.數項數、3.歸納法、4.發現規律)；**【硬幣排列】**(L-02)(1.組織資料、2.直接解題、3.畫表格)；**【大樓住戶】**(L-03)(1.畫圖、2.歸納法、3.組織資料、4.畫記)，整理成表 4-19。

而解題策略應用到哪些試題的解題過程則有：**【1.嘗試錯誤】**(1.直式算式(N-01))；**【2.畫表格】**(1.圍牆整建(N-02)、2.數字分組(N-03)、3.硬幣排列(L-02))；**【3.尋找所有可能】**(1.圍牆整建(N-02)、2.數字

分組 (N-03));【4.數字重組】(1.數字分組 (N-03));【5.列式列答】(1.數字分組 (N-03));【6.邊長分類】(1.三角形個數 (M-01));【7.圖形分類】(1.三角形個數 (M-01));【8.點分類】(1.三角形個數 (M-01));【9.外加個數】(1.三角形個數 (M-01));【10.畫圖】(1.堆積圖形 (M-02) 2.奇妙數列 (L-01));【11.發現規律】(1.堆積圖形 (M-02) 2.大樓住戶 (L-03));【12.歸納法】(1.堆積圖形 (M-02) 2.奇妙數列 (L-01) 3.大樓住戶 (L-03));【13.順向求解】(1.正方體個數 (M-03));【14.逆向求解】(1.正方體個數 (M-03));【15.餘式定理】(1.奇妙數列 (L-01));【16.數項數】(1.奇妙數列 (L-01));【17.組織資料】(1.硬幣排列 (L-02) 2.大樓住戶 (L-03));【18.直接解題】(1.硬幣排列 (L-02));【19.畫記】(1.大樓住戶 (L-03)), 整理成表 4-20。而學生解題時所使用的解題策略則整理成表 4-21。

而解題策略敘述如下：

(一) 嘗試錯誤

在【直式算式】(N-01) 七位學生均使用嘗試錯誤解題，七位學生均認為要求最大三位數， $\quad = 9$ ，經計算結果為四位數。

(二) 畫表格

在【圍牆整建】(N-02) 七位學生都自行畫表格以輔助解題。另外 S2 在【數字重組】(N-03) 以表格列答、【硬幣排列】(L-02) 中也自行畫表格填入各個硬幣的位置。

(三) 尋找所有可能

在【圍牆整建】(N-02) 找出第一層全部用 2×1 的磚塊與第一層使用 2×1 和 1×1 的磚塊求得二個不同的解。而在【數字分組】(N-03) 七位學生都使用數字重組的策略找出三個不同的解。

(四) 數字重組

在【數字分組】(N-03) 七位學生都使用數字重組的策略找出三個不同的解。

(五) 列式列答

在【數字分組】(N-03) S1、S3、S4、S5、S6、S7 六位學生使用列式的方式列答案。

(六) 邊長分類、圖形分類、點分類

在【三角形個數】(M-01) S1、S2、S4、S5、S7 以邊長分類、S3 以圖形分類、S6 以點分類。

(七) 外加個數

在【三角形個數】(M-01) S1、S2 在求 21 點有多少個 時，以 15 個點有 27 個 ，增加 6 個點增加 21 個 的策略解題。

(八) 畫圖

在【堆積圖形 (M-02)】七位學生利用畫圖來找出每一行正面圖需畫方形的個數；在【大樓住戶】(L-03) 七位學生則利用畫圖來填入各個變數的相對位置。

(九) 發現規律

在【堆積圖形】(M-02) 發現畫正面圖的規律為堆積圖中每行最多的個數就是要畫正面圖的個數；而【奇妙數列】L-01 的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。

(十) 歸納法

在【堆積圖形】(M-02) 使用歸納法做推論，推論出堆積圖中每行最大數就是畫正面圖的每行的個數；【奇妙數列】(L-01) 使用歸納法歸納出從第 5 項開始循環 6、54、27、22、11 等 5 個數中找項數值的方法；【硬幣排列】(L-02) 組織條件歸納推論出硬幣的排列順序；【大樓住戶】(L-03) 組織條件歸納推論出每個變數的相對位置。

(十一) 順向求解、逆向求解

在【正方體個數】(M-03), S1、S2、S6 等三位學生利用順向求解的策略先找出接觸盒子外側的正方體個數,再以全部正方體個數減去接觸外側的正方體個數,求得未接觸盒子外側的正方體個數;S3、S4、S5、S7 等四位學生利用逆向求解的策略先找出未接觸盒子外側的正方體個數,再以全部正方體個數減去未接觸外側的正方體個數,求得接觸盒子外側的正方體個數。

(十二) 餘式定理、數項數

在【奇妙數列】(L-01) 有 S2、S3、S4、S7 等四位學生使用餘式定理解題,求出第 6 項、第 27 項的值;而 S1、S5、S6 等三位學生則使用數項數,求出第 6 項、第 27 項的值。

(十三) 組織資料

在【硬幣排列】(L-02) 七位學生組織四個條件,推論出硬幣排列順序;在【大樓住戶】(L-03) 七位學生組織相關的條件,如組織與 A、C 相關的條件成以 AC 為中心的輻射狀關係,使關係明確清晰,利於推論:L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層;M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層;R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件,推論出 L、AC、M、R、P 所在的位置共有六層,L 住在 6 樓,A、C 住在 4 樓,M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。

(十四) 直接解題

在【硬幣排列】(L-02) 七位學生均採直接解題推論出硬幣的由左至右的排列為 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元。

(十五) 畫記

畫記就是把變數全部列出來,使用過的變數就畫掉或圈起來,以了解剩下未使用變數有哪些,在【大樓住戶】(L-03) 有 S1、S3 等二

位學生使用畫記輔助。

表 4-19 試題運用解題策略一覽表

試 題	解題策略	學 生
直式算式 (N-01)	1. 嘗試錯誤	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
圍牆整建 (N-02)	1. 畫表格 2. 尋找所有可能	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
數字分組 (N-03)	1. 數字重組 2. 條列式列答 3. 畫表格列答 4. 尋找所有可能	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S3、S4、S5、S6、S7 3. S2 4. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
三角形個數 (M-01)	1. 邊長分類 2. 圖形分類 3. 點分類 4. 畫表格 5. 條列式列答	1. S1、S2、S4、S5、S7 2. S3 3. S6 4. S4 5. S1、S2、S3、S5、S6、S7
堆積圖形 (M-02)	1. 畫圖 2. 歸納法 3. 發現規律	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 3. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
正方體個數 (M-03)	1. 順向求解 2. 逆向求解	1. S1、S2、S6 2. S3、S4、S5、S7
奇妙數列 (L-01)	1. 餘式定理 2. 數項數 3. 歸納法 4. 發現規律	1. S2、S3、S4、S7 2. S1、S5、S6 3. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 4. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
硬幣排列 (L-02)	1. 組織資料 2. 直接解題 3. 畫表格	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 3. S2
大樓住戶 (L-03)	1. 畫圖 2. 歸納法 3. 組織資料 4. 畫記	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 3. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 4. S1、S3

表 4-20 解題策略一覽表

解題策略	試題	學生
1. 嘗試錯誤	1. 直式算式 (N-01)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
2. 畫表格	1. 圍牆整建 (N-02) 2. 數字分組 (N-03) 3. 三角形個數 (M-01) 4. 硬幣排列 (L-02)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S2 3. S4 4. S2
3. 尋找所有可能	1. 圍牆整建 (N-02) 2. 數字分組 (N-03)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
4. 數字重組	1. 數字分組 (N-03)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
5. 條列式列答	1. 數字分組 (N-03) 2. 三角形個數 (M-01)	1. S1、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S5、S6、S7
6. 邊長分類	1. 三角形個數 (M-01)	1. S1、S2、S4、S5、S7
7. 圖形分類	1. 三角形個數 (M-01)	1. S3
8. 點分類	1. 三角形個數 (M-01)	1. S6
9. 外加個數	1. 三角形個數 (M-01)	1. S1、S2
10. 畫圖	1. 堆積圖形 (M-02) 2. 大樓住戶 (L-03)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
11. 發現規律	1. 堆積圖形 (M-02) 2. 奇妙數列 (L-01)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
12. 歸納法	1. 堆積圖形 (M-02) 2. 奇妙數列 (L-01) 3. 大樓住戶 (L-03)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 3. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
13. 順向求解	1. 正方體個數 (M-03)	1. S1、S2、S6
14. 逆向求解	1. 正方體個數 (M-03)	1. S3、S4、S5、S7
15. 餘式定理	1. 奇妙數列 (L-01)	1. S2、S3、S4、S7
16. 數項數	1. 奇妙數列 (L-01)	1. S1、S5、S6
17. 組織資料	1. 硬幣排列 (L-02) 2. 大樓住戶 (L-03)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7 2. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
18. 直接解題	1. 硬幣排列 (L-02)	1. S1、S2、S3、S4、S5、S6、S7
19. 畫記	1. 大樓住戶 (L-03)	1. S1、S2

表 4-21 學生解題策略運用一覽表

解題策略	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
1. 嘗試錯誤							
2. 畫表格							
3. 尋找所有可能							
4. 數字重組							
5. 列式列答							
6. 邊長分類							
7. 圖形分類							
8. 點分類							
9. 外加個數							
10. 畫圖							
11. 發現規律							
12. 歸納法							
13. 順向求解							
14. 逆向求解							
15. 餘式定理							
16. 數項數							
17. 組織資料							
18. 直接解題							
18. 畫記							

綜合上述整理歸納出學生解題時所使用的解題策略有：嘗試錯誤、畫表格、尋找所有可能、數字重組、列式列答、邊長分類、圖形分類、點分

類、外加個數（三角形）、畫圖、發現規律、歸納法、順向求解、逆向求解、餘式定理、數項數、組織資料、直接解題、畫記等 19 種。

三、解題成敗因素

七位學生的原案分析的結果發現，學生各題皆成功解題，整理解題成功的因素包括：解題知識、數學能力、解題行為等三個方面。

（一）解題知識：

由原案分析結果，七位學生題解時所應用的解題知識有：**【直式算式】**（N-01）（語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、程序知識）；**【圍牆整建】**（N-02）（語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、程序知識）；**【數字分組】**（N-03）（語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、程序知識）；**【三角形個數】**（M-01）（語言知識、語意知識、策略知識、程序知識）；**【堆積圖形】**（M-02）（語言知識、語意知識、策略知識、程序知識）；**【正方體個數】**（M-03）（語言知識、語意知識、策略知識、程序知識）；**【奇妙數列】**（L-01）（語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、5. 程序知識）；**【硬幣排列】**（L-02）（語言知識、語意知識、策略知識、程序知識）；**【大樓住戶】**（L-03）（語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、程序知識），整理成表 4-22。

表 4-22 學生的解題知識一覽表

試題 \ 解題知識	語言知識	語意知識	基模知識	策略知識	程序知識
直式算式 (N-01)					
圍牆整建 (N-02)					
數字分組 (N-03)					
三角形個數 (M-01)					
堆積圖形 (M-02)					
正方體個數 (M-03)					
奇妙數列 (L-01)					
硬幣排列 (L-02)					
大樓住戶 (L-03)					

(二) 數學能力：

由原案分析結果發現題解時所應用的數學能力有：**【直式算式】**(N-01) (數學運算能力、邏輯推理能力)；**【圍牆整建】**(N-02) (形式化數學題材的能力、數學運算能力、邏輯推理能力、彈性思考能力)；**【數字分組】**(N-03) (形式化數學題材的能力、數學運算能力、邏輯推理能力、彈性思考能力)；**【三角形個數】**(M-01) (形式化數學題材的能力、數學運算能力、邏輯推理能力、彈性思考能力、空間概念能力)；**【堆積圖形】**(M-02) (一般化數學題材的能力、邏輯推理能力、空間概念能力)；**【正方體個數】**(M-03) (形式化數學題材的能力、數學運算能力、邏輯推理能力、逆向思考能力、空間概念能力)；**【奇妙數列】**(L-01) (一般化數學題材的能力、數學運算能力、邏輯推理能力、簡捷思考能力)；**【硬幣排列】**(L-02) (形式化數學題材的能力、邏輯推理能力)；**【大樓住戶】**(L-03) (形式化數學題材的能力、邏輯推理能力、數學記憶力)，整理成表 4-23。

表 4-23 學生數學能力一覽表

試題 \ 數學能力	形式化	一般化	數學運算	邏輯推理	簡捷思考	逆向思考	彈性思考	數學記憶	空間概念
直式算式 (N-01)									
圍牆整建 (N-02)									
數字分組 (N-03)									
三角形個數 (M-01)									
堆積圖形 (M-02)									
正方體個數 (M-03)									
奇妙數列 (L-01)									
硬幣排列 (L-02)									
大樓住戶 (L-03)									

由表 4-23 可歸納整理得到結論，邏輯思考在每一題都有出現，而有牽涉到運算的題目數學運算能力就必須運用；在尋找規律的題目（【堆積圖形】(M-02)、【奇妙數列】(L-01)）中應用到一般化數學題材能力；在多組解（【圍牆整建】(N-02)、【數字分組】(N-03)）或多解題策略的題目中應用；空間概念能力則在「圖形與空間」的題目（【三角形個數】(M-01)、【堆積圖形】(M-02)、【正方體個數】(M-03)）中應用。

數學能力的應用會隨著不同類型的題目而有所變化，不同的數學能力會因題目的需要而適時應用，而不一定哪一類型的題目一定需要應用哪些數學能力。

（三）解題行為：

七位學生的解題行為除了【圍牆整建】(N-02)、【大樓住戶】(L-03)所花費的時間較長，需要解題耐力外，每一題都包含了下列的解題行為：

1. 題意與數學結構的掌握；
2. 能否注意到問題中所有的條件；
3. 能否了解題意與目標間的關係；
4. 能否應用相關知識或公式；
5. 進行解題後驗算的程序。

學生解題的解題行為整理成表 4-24。

表 4-24 學生解題行為一覽表

試題 \ 解題行為	題意與 數學結 構	問題 條件	題意與 目標	應用相 關知識 或公式	驗算的 程序	解題 耐力
直式算式 (N-01)						
圍牆整建 (N-02)						
數字分組 (N-03)						
三角形個數 (M-01)						
堆積圖形 (M-02)						
正方體個數 (M-03)						
奇妙數列 (L-01)						
硬幣排列 (L-02)						
大樓住戶 (L-03)						

綜合上述資料，解題成敗因素可歸納解題知識、數學能力及解題行為等三個方面：

- 一、**解題知識**：1. 語言知識（與語言有關的知識） 2. 語意知識（與實際生活上的事實有關的知識） 3. 基模知識（問題型態的知識） 4. 策略知識（利用不同型態的有效知識來計畫和監督問題解答的技巧） 5. 程序知識（轉換或運作性知識）。
- 二、**數學能力**：形式化數學題材能力、一般化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、簡捷思考能力、逆向思考能力、彈性思考能力、數學記憶力、空間概念能力。
- 三、**解題行為**：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序、解題的耐力。

第五章 結論與建議

本章目的在將本研究作一整體性的描述，並歸納研究結果作出結論，以提供教學與未來研究之參考。本章共分為二節，第一節為結論，第二節為建議。

第一節 結論

綜合本研究對國小中年級資優生解題歷程之分析結果，提出下列幾項結論：

一、解題歷程：

七位學生在解「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」等三方面的各個問題的過程中，雖然未必經歷讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段，但是七位學生均解題成功。

研究結果發現資優生的思路敏捷，而且有時會有跳躍式的思考，有時又呈放射式思考，因此面對非例行性問題時，會因不同的題目而有不同的解題階段，每一題的解題過程中未必全部出現所有的解題階段，而且同類型的題目也未必有相同的解題階段，甚至不會因為缺少其中一個階段，而影響到解題的結果。解題歷程的順序也非一定循讀題、分析、計畫、執行、驗證等五個階段線性進行，會隨著思考而作隨機的調整。

二、解題策略

分析結果發現國小中年級資優生解題策略，大概有嘗試錯誤、畫表格、尋找所有可能、數字重組、列式列答、邊長分類、圖形分類、點分類、

外加個數（三角形）、畫圖、發現規律、歸納法、順向求解、逆向求解、餘式定理、數項數、組織資料、直接解題、畫記等 19 種。

三、解題成敗因素

綜觀資優生之解題表現，可發現影響解題成敗之因素包括：

- （一）解題知識：語言知識、語意知識、基模知識、策略知識、程序知識。
- （二）數學能力：形式化數學題材能力、一般化數學題材能力、數學運算能力、邏輯推理能力、簡捷思考能力、逆向思考能力、彈性思考能力、數學記憶力、空間概念能力。
- （三）解題行為：題意與數學結構的掌握、注意到問題中所有的條件、了解題意與目標間的關係、應用相關知識或公式、進行解題後驗算的程序、解題的耐力。

劉秋木（民 85）認為 Torrance 對於創造的研究定義幾乎和問題解決相同。在研究的過程中，觀察到資優生的一些心理歷程或認知能力與創造思考有關：反映的流暢性、變通性、原創性及精密性；對問題的敏感性或對於現有知識之漏洞的敏感性；使新的東西變成熟悉而熟悉的事物變成新穎；擴散性思考；在混亂中見到秩序；以現有的知識為新知識的基礎；做計畫與掌控思考歷程的能力；邏輯思考，但觀察到這些心理歷程或認知能力特質不是本研究的主題，可做未來研究的參考。

第二節 建議

本研究係以高雄市大同國小中年級資優生為對象，所得結果僅題供同型學校教學之參考，無法做一般性的推論。

經由本研究對國小中年級資優生數學解題歷程的分析與討論，研究者擬提出下列幾點建議，以作為國小資優學生與普通學生數學科教學及未來研究之參考。

一、對國小資優學生數學科教學之建議：

- (一) **以解題為重心的教與學**：未來教學應以解題為重心，並透過解題教學以提升學生之解題能力，追求高層次的思考活動。
- (二) **非例行性教材的選擇**：教師應選擇多一點思考的非例行性問題的教材，培養資優生的解題能力，以激發其潛能。
- (三) **聚斂與擴散性思考並重**：資優生的數學教學不僅要注重縱向聚斂思考，也必須重視橫向擴散性思考。
- (四) **解題策略溶入教與學**：於數學教學中多提供解題策略，且能溶入各單元的學習中。
- (五) **給學生適時思考與表達**：給予學生充分的思考與等候時間，並鼓勵學生表達自己的想法。
- (六) **解題驗證行為的養成**：解題驗證也是解題成功與否重要的一環，教師平常應注重驗證階段之教學，培養學生自我反省的習慣。
- (七) **培養多元解決問題的知能**：解題教學就是創造思考教學，就是在培養學生多元智能的解決問題能力。
- (八) **教師解題能力的具備與充實**：教師本身應具備解題者的能力，如此方能了解、引導、協助學生培養解題的習慣與能力。

(九) **解題小書的製作**：資優生解題後可以針對自己與同儕的解題製作成解題小書，以反省自己的解題並可比較與同儕解題的異同，欣賞解題之美，以提升學生批判思考與多元的數學解題能力。

二、對國小普通學生數學科教學之建議：

(一) **數學解題的引導**：對於資優生解題的教學，以可施教於普通學生，但可能必須因材施教，循循誘導，以提升學生數學解題能力。

(二) **非例行性教材的引入**：教師應引入非例行性問題的教材，以循序漸進的方式給普通學生適應例行性問題，以激發其潛能。

(三) **聚斂與擴散性思考並重**：對於普通學生的數學教學也要注重縱向聚斂思考與橫向擴散性思考的訓練，以發揮其潛能。

(四) **活用解題策略於教學**：教師於數學教學中多活用解題策略，以提升學生的解題能力。

(五) **思考與表達的訓練**：教師平常教學中應訓練學生充分的思考與鼓勵學生表達自己的想法。

三、對未來研究的建議

(一) **解題歷程差異的研究**：基於時間限制，本研究只針對國小中年級資優生中高成就的學生進行解題歷程之探討，推論上尚有限制，未來宜就高年級及高低成就的學生的解題歷程差異加以探討。

(二) **其他方面的深入研究**：考量時間因素，本研究只針對「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」等三方面做研究，未來宜就其他方面做進一步的研究。

- (三) **解題階段與題目類型的關係研究**：本研究結果發現資優生面對非例行性問題時，會因不同的題目而有不同的解題階段，每一題的解題過程中未必全部出現所有的解題階段，而且同類型的題目也未必有相同的解題階段，甚至不會因為缺少其中一個階段，而影響到解題的結果，這是否意味解題階段的出現與題目本身有關係，值得進一步再做研究。
- (四) **數學課程的調整與改變**：九年一貫課程的實施，資優資源班的數學課程如何做調整與改變宜做進一步的研究。
- (五) **資優生數學能力的比較研究**：本研究未就資優生的數學能力進行比較，未來宜就資優生數學能力比較做研究。
- (六) **解題與創造思考教學的研究**：人們靠自己建構新的概念組織以及數學運算的新程序而獲得新的數學知識，一個真正的問題對解題者而言是從未見過，或者從未有現成解決方法的，未來可就解題與創造思考探討創造的歷程協助思考以解決問題。
- (七) **佈題與解題的關係研究**：本研究只針對資優生解題歷程，未來可針對佈題與解題做深入的研究。

參考文獻

一、中文部分：

王昭明(民 82)。解題歷程研究法--有聲思考法簡介。台灣教育, 512, 53-57。

汪榮才(民 80)。資賦優異學生創造性問題解決的教學。臺南師院學報, 24, 27-38。

李輝雄(民 84)。高雄市高一學生數學解題歷程之分析研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文, 未出版, 高雄市。

李靜瑤(民 83)。高雄市國二學生數學解題歷程之分析研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文, 未出版, 高雄市。

邱芳津(民 79)。國二資優學生線型函數概念之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文, 未出版, 彰化。

胡炳生(民 88)。數學解題思維方法。台北市：九章。

涂金堂(民 84)。國小學生後設認知、數學焦慮與數學解題表現之相關研究。國立高雄師範大學教育研究所碩士論文, 未出版, 高雄市。

涂金堂(民 85)。數學解題之探究。研習資訊, 13,2, 60-65。

涂金堂(民 88)。國小學生數學解題歷程之分析研究。初等教育學刊, 7, 295-332。

孫達剛(民 81)。雄中、雄女學生數學解題之研究—Polya 解題四階段論取向。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文, 未出版, 高雄市。

教育部(民 89)。基本能力實踐策略專題研究報告。台北市：教育部。

教育部(民 88)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北市：教育部。

- 黃敏晃 (民 80) 。淺談數學解題。 **教與學** , 23 , 2-15。
- 博凱出版社有限公司 (民 92) : **美國 AMC 8 數學測驗歷屆試題暨詳解**。台北市 : 博凱。
- 劉秋木 (民 85) 。 **國小數學科教學研究**。台北市 : 五南。
- 劉貞宜 (民 89) 。數學解題歷程分析。 **建中學報** , 6 , 163-187。
- 劉貞宜 (民 89) 。 **數學資優生的解題歷程分析**。國立台灣師範大學特殊教育研究所碩士論文, 未出版, 台北市。
- 蔡承哲 (民 85) 。 **高雄地區高二學生空間向量之解題歷程分析研究**。國立高雄師範大學數學系教學碩士論文, 未出版。高雄市。
- 謝淡宜 (民 87) 。小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程之比較。 **台南師院學報** , 31 , 225-268。
- 顏榮義 (民 90) 。 **國一一般資優生的解題歷程分析**。國立高雄師範大學數學系教學碩士論文, 未出版。高雄市。

二、英文部分：

- Alfred S. Posamentier & Stephen Krulik(1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions : A resource for mathematics teacher*. California: Corwin Press, Inc.
- Dennis Thyer(1993). *Mathematical Enrichment Exercise: A Teacher Guide*, London; New York : Cassell.
- Gary L. Musser , J. Michael Shaughnessy(1980). Problem-solving Strategies in school mathematics. In Stephen Krulik, Robert E. Reys (ED.), *Problem Solving in School Mathematics : 1980 Yearbook*.(pp. 136-145), THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Inc.
- Krutetskii, VA. (1963). Some characteristics of the thinking of pupils with little capacity for mathematics. In B. Simon & J. Simon (Eds.), *Educational psychology in the USSR*. Stanford, Calif: Stanford University Press.
- Krutetskii, VA. (1976). *The Psychology of Mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In Silver, E. A. (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*.(pp. 1-15). Hillsdale, N.J. : Erlbaum Associates.
- Lester, F. K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindquist (Ed.), *Selected issues in mathematics education*, (pp. 29-45).

- Berkeley Calif.: McCutchan.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company Press.
- National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). Position paper on basic mathematical skills. *Arithmetic Teacher*, 25,19-22.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *Problem solving be the focus of school mathematical in the 1980's. An agenda for action* . Palo Alto, Calif : Dale Seymour Publications Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Palo Alto, Calif.: Dale Seymour Publications Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Palo Alto, Calif : Dale Seymour Publications Press.
- Polya, G.(1957). *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Polya, G.(1962). *Mathematical discovery: On understanding , learning and teaching problem solving (Vol I)*. New York: Wiley Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

附錄

附錄一 國小中年級資優資源班數學課程內容

高雄市大同國小資優資源班【三年級】上學期數學科課程內容

編號	領域	單元名稱	編號	領域	單元名稱
1	數與量	迴數一	21	邏輯推理	國籍配對
2	數與量	迴數二	22	代數	數字小填填
3	數與量	動腦筋，找規律	23	代數	圖形數字
4	數與量	加法的速算	24	代數	圖形規則
5	數與量	減法中的加括號和去括號	25	代數	共通性排列
6	數與量	減法的速算	26	代數	比比看
7	數與量	連續數的加法速算	27	應用	20 的組合
8	數與量	高斯速算	28	應用	購買蔬菜
9	數與量	加減法速算練習	29	應用	遊樂場
10	圖形	分割土地	30	應用	排列三位數字
11	圖形	四方塊排列	31	應用	數字的和
12	圖形	四方塊拼圖	32	應用	高爾夫球數學
13	圖形	圖形組成	33	應用	正方體數字
14	圖形	正方形個數	34	應用	數字象棋
15	圖形	正三角形個數	35	統計	圖形內的數
16	邏輯推理	方塊轉一轉	36	統計	學期成績
17	邏輯推理	體重配配看	37	統計	學期成績統計圖
18	邏輯推理	誰第一名	38	統計	長條圖
19	邏輯推理	推算紙牌數字	39	統計	社團活動統計
20	邏輯推理	國際語言	40	統計	游泳池人數統計

高雄市大同國小資優資源班【三年級】下學期數學科課程內容

編號	領域	單元名稱	編號	領域	單元名稱
1	數與量	數字金字塔	21	代數	摸彩活動
2	數與量	數學運算器	22	代數	文字謎
3	數與量	三角形的大小	23	代數	班級人數
4	數與量	找出三角形的大小	24	應用	猜猜砝碼的重量
5	數與量	質數與合數	25	應用	填月曆日期
6	圖形	正方形拼圖	26	應用	月曆數學
7	圖形	切蛋糕	27	應用	圓形循環數列
8	邏輯推理	誰勝利了	28	應用	數字機密
9	邏輯推理	職務推判	29	統計	合計 76 元
10	邏輯推理	馬拉松賽跑	30	統計	錢幣組合
11	邏輯推理	一起打工	31	統計	正方體路徑
12	邏輯推理	餐廳廚師	32	統計	大數小數排排看
13	邏輯推理	標籤號碼	33	統計	最短路徑
14	邏輯推理	救生員輪值	34	統計	射箭比賽
15	代數	兩數之和	35	統計	電話號碼

高雄市大同國小資優資源班【四年級】上學期數學科課程內容

編號	領域	單元名稱	編號	領域	單元名稱
1	數與量	生日值多少錢	21	代數	十字型數字
2	數與量	規律填數	22	代數	加法魔方陣
3	數與量	尋找規律	23	代數	六角形的數學
4	數與量	和的比較	24	代數	比多比少
5	數與量	四則運算和	25	代數	測驗成績
6	數與量	乘法分配律	26	代數	積木分組
7	數與量	乘法分配律練習	27	代數	數的組合
8	圖形	五方塊排列	28	應用	自創運算符號
9	圖形	分割圖形	29	應用	自創運算符號的運算
10	圖形	果園劃分	30	應用	自創運算符號的練習
11	圖形	長方形個數	31	應用	車牌遊戲
12	圖形	圖形個數	32	應用	數字排列
13	圖形	組合正方形	33	應用	認識流程圖
14	邏輯推理	排課的數學	34	應用	運算流程圖
15	邏輯推理	飲料販賣機	35	統計	過河卒子
16	邏輯推理	果醬禮盒	36	統計	棋盤街
17	邏輯推理	照片沖印	37	統計	平時測驗
18	邏輯推理	一百公尺賽跑	38	統計	測量溫度
19	邏輯推理	名次排序	39	統計	火車票種類
20	邏輯推理	名次推判	40	統計	擺放硬幣

高雄市大同國小資優資源班【四年級】下學期數學科課程內容

編號	領域	單元名稱	編號	領域	單元名稱
1	數與量	平方速算	21	邏輯推理	數字辨認
2	數與量	數字陣列的和	22	代數	符號數值
3	數與量	羊隻知多少	23	代數	尋找錯誤數字
4	數與量	月曆遊戲	24	代數	最大值和最小值
5	數與量	運動競賽	25	代數	圓上數字和
6	圖形	區域分割	26	應用	魔方陣規律
7	圖形	「TIME」的個數	27	應用	圖形分割區域
8	圖形	組合正方體	28	應用	區域塗色
9	圖形	正方體的展開圖	29	應用	相鄰兩數和的平方數
10	圖形	彩妝正方體	30	應用	文字配對
11	邏輯推理	商船卸貨	31	應用	相等的和
12	邏輯推理	運動會	32	應用	解流程圖
13	邏輯推理	教師進修	33	統計	射箭分數
14	邏輯推理	測驗分數	34	統計	硬幣組合
15	邏輯推理	誰拿了誰的傘	35	統計	數的組成

附錄二 預試試題

中年級資優班解題歷程分析預試試題

親愛的同學：

你好！此份研究的目的，在了解你的解題思考過程，請你認真作答，協助完成「國小中年級資優生的解題歷程分析」的研究。這份研究結果為協助其他學生解題與教師教學，你的作答，對同學與老師均有所助益。謝謝你花時間認真完成！

國立中山大學教育研究所 謹誌

中華民國九十二年九月

指導教授：梁淑坤博士

研究生：蔡啟禎

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
數學算式	數與量	蔡啟禎	N-01		

請在 1、2、3、4 這四個數字間加上 +、-、×、÷ 的符號，做成求出 2 到 10 的等式。符號使用幾次都沒有關係。

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 2$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 3$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 4$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 5$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 6$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 7$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 8$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 9$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 10$$

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
符號數字	數與量	蔡啟禎	N-02		

下表中，相同的符號代表相同的數，右邊的數字是橫列 4 個數的合計。請填入勺、ㄨ、ㄇ、ㄣ等 4 個格子中的數，他們分別是直行 4 個數的合計

				28
		#	#	30
#				20
			#	16
勺	ㄨ	ㄇ	ㄣ	

合計	勺	ㄨ	ㄇ	ㄣ
數值				

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
硬幣的位置	數與量	蔡啟禎	N-03		

在下面的表格中，①至⑯格子裡分別放置 5 元、10 元、50 元硬幣一個。表中① + ② + ③ + ④ = 75 元；① + ⑤ + ⑨ + ⑬ = 80 元，直行與橫列表示 4 個硬幣合計的金額。請問①至⑯格子裡各應該放置哪一種硬幣。

					合計
	①	②	③	④	75 元
	⑤	⑥	⑦	⑧	65 元
	⑨	⑩	⑪	⑫	35 元
	⑬	⑭	⑮	⑯	30 元
合計	80 元	30 元	20 元	75 元	

位置	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
硬幣	元	元	元	元	元	元	元	元
位置	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯
硬幣	元	元	元	元	元	元	元	元

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
花片個數	數與量	蔡啟禎	N-04		

有白色、紅色、黃色的花片共 65 個，其中紅色的花片比黃色花片多 6 個、白色的花片比紅色花片多 8 個，請問每一種顏色的花片各有幾個？你可以使用下面的表格解題，也可用其他方法來解題。如果用其他的方法，請寫在其他方法的位置。

紅色花片數	黃色花片數	白色花片數	合計花片數
7	1	15	23

【其他方法】

中年級資優班解題歷程分析預試試題

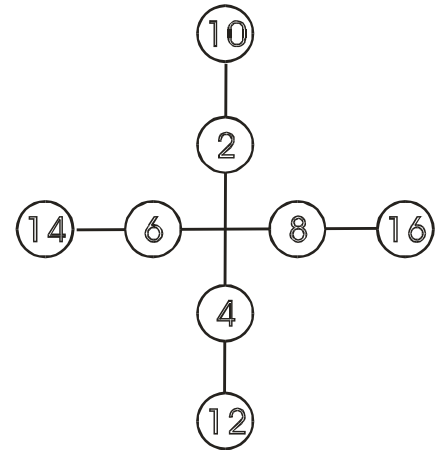
單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
射擊遊戲	數與量	蔡啟禎	N-05		

有一種射擊遊戲，每個圓盤上都有分數，排列如下圖，當圓盤被射擊後就倒到後面，無法再被射擊，每次遊戲可以射擊三次，如果每次射擊都有射中，請問得到總分 32 分的射中方法有哪些？共多少種？請全部列出來。（以算式表示）

【注意】下面格子的個數不一定是答案個數，同一組數字位置對調算同一種。

答：

(1)	$2 + 14 + 16 = 32$
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	
(7)	
(8)	

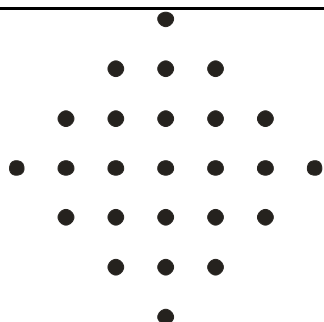


得到總分 32 分的方法共有 () 種。

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
不同的正方形	圖形空間	蔡啟禎	M-01		

下圖有 25 個點，每個點之間的距離都相等，連接這些點，儘可能畫出不同面積的正方形。每一個格子中只能畫一個正方形，格子的數目不一定是答案數。(請用直尺畫線)



中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
方塊切割	圖形空間	蔡啟禎	M-02		

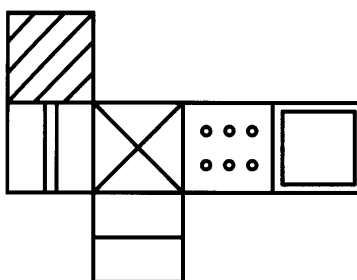
下圖方塊中包括六組的「大同國民小學」，請你將方塊切成六個部分，使每一個部分都包含「大同國民小學」這六個字。（請用螢光筆、直尺描框）

同	民	國	國	國	大
同	小	大	大	民	民
民	學	大	同	小	小
國	學	小	大	學	同
國	小	小	國	民	學
學	民	大	同	同	學

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
組合正方體	圖形空間	蔡啟禎	M-03		

下圖是一個正方體的展開圖，請你在下面的表格 6 個正方體中找出哪些是左邊展開圖所組成的正方體？哪些不是？是的請畫「」；不是的請畫「」。

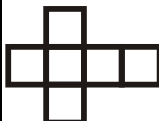
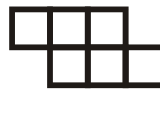
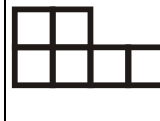
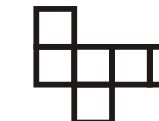

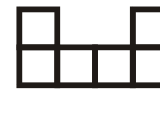
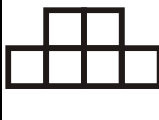
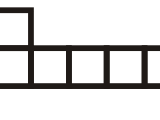
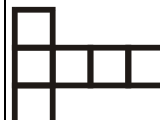

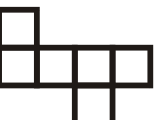
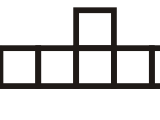
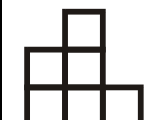
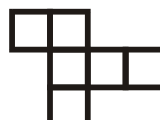
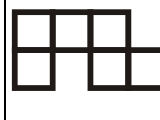
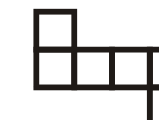
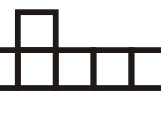

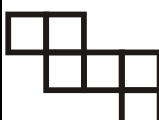
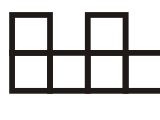

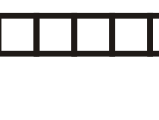

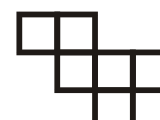
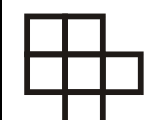
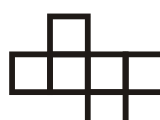
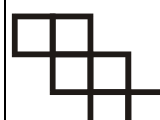
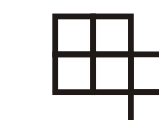
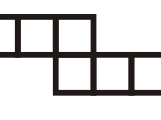
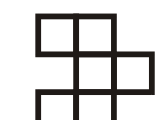


展開圖	正方體	答案

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
立方體展開圖	圖形空間	蔡啟禎	M-04		

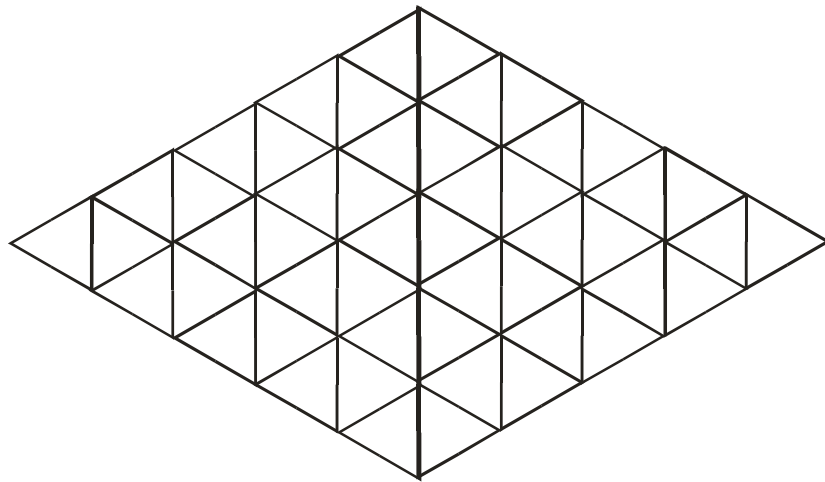
正方體有六個面，在下面的展開圖中哪些可以組成正方體，請在可以組成正方體的展開圖方格中畫「」。

 ()	 ()	 ()	 ()	 ()	 ()
 ()	 ()	 ()	 ()	 ()	 ()
 ()	 ()	 ()	 ()	 ()	 ()
 ()	 ()	 ()	 ()	 ()	 ()
 ()	 ()	 ()	 ()	 ()	 ()

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
三角形個數	圖形空間	蔡啟禎	M-05		

下圖形是由許多小正三角形所組成的圖形，請問這個圖形大大小小的正三角形共有多少個？請你找出來。（請寫出過程算式）



中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
物品排列	邏輯推理	蔡啟禎	L-01		

超市有一商品櫃，設有五格商品櫃，由左至右依次編號為 1、2、3、4、5，現有 5 項商品 V(紅蘿蔔)、W(蘋果)、X(冰淇淋)、Y(糖果)、Z(果汁) 要擺放在商品櫃上。擺放時，一格只能放一項商品，而且必須遵照下面的條件：

- (1) Y 不能緊鄰在 V 的左側或右側。
- (2) W 必須緊鄰在 X 的左側。
- (3) Y 不能擺放在第 5 格。

如果 V 擺放在第 5 格，五種商品的可能擺放順序是如何排列的？請全部列出來。

商品櫃編號	1	2	3	4	5
排列一	W	X	Y	Z	V
排列二					
排列三					
排列四					
排列五					
排列六					

【注意】上表中的排列的方式不一定有六種，實際動手排排看。

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
任教科目	邏輯推理	蔡啟禎	L-02		

甲、乙、丙三人在台北、台中、高雄的小學裡教不同的科目：語文、數學、英文。已知：

1. 甲不在台北工作，乙不在台中工作。
2. 在台北工作的人不教英文。
3. 在台中工作的人教數學。
4. 乙不教語文。

請問甲、乙、丙各在哪一個城市教什麼科目？

【備註】你可以使用下面提供的方法解題，或者有其他的方法，請列在下面以供參考。

【我的想法】

教師	城 市			科 目		
	台北	台中	高雄	語文	數學	英文
甲						
乙						
丙						

【我的結果】

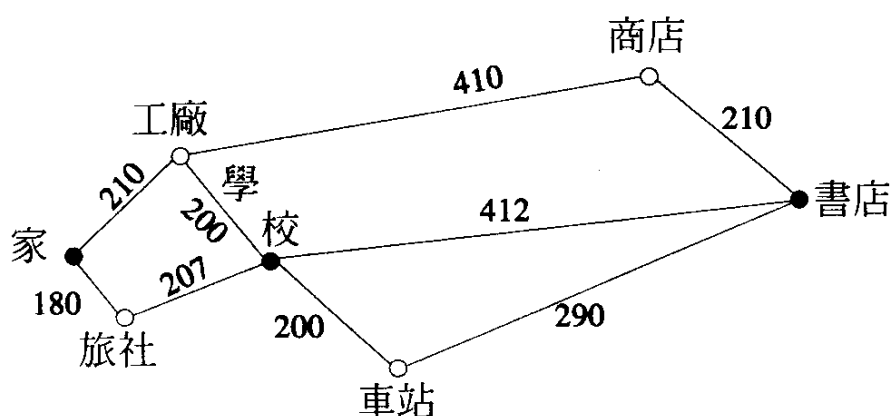
教 師	甲	乙	丙
任教城市			
任教科目			

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
最近的路線	邏輯推理	蔡啟禎	L-03		

下圖是沛哲家附近的地圖，如果沛哲想由家裡到書店去買書，有許多條路線可以走，請你找出從家裡到書店可能的路線有哪些？並找出哪一條路線最近？

【注意】下面格子的個數不一定是路線個數，



路線別	路線與距離	最近路線
路線一	家 工廠 學校 車站 書店 $210 + 200 + 200 + 290 = 900$	否
路線二		
路線三		
路線四		
路線五		
路線六		

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
採買水果	邏輯推理	蔡啟禎	L-04		

大同國小資優班舉辦戶外教學，甲、乙、丙三位學生每個人都要負責採買 4 種水果其中有 2 個人要採買西瓜；2 個人要採買橘子；2 個人要採買奇異果；2 個人要採買鳳梨；2 個人要採買香蕉；2 個人要採買蘋果。

甲：如果他買橘子，他也會買鳳梨。

如果他買鳳梨，他就不會買奇異果。

如果他買奇異果，他就不會買蘋果。

乙：如果他買香蕉，他就不會買橘子。

如果他不買橘子，他也不會買蘋果。

如果他買蘋果，他就不會買奇異果。

丙：如果他買奇異果，他也會買蘋果。

如果他買蘋果，他就也會買橘子。

如果他買橘子，他就不會買香蕉。

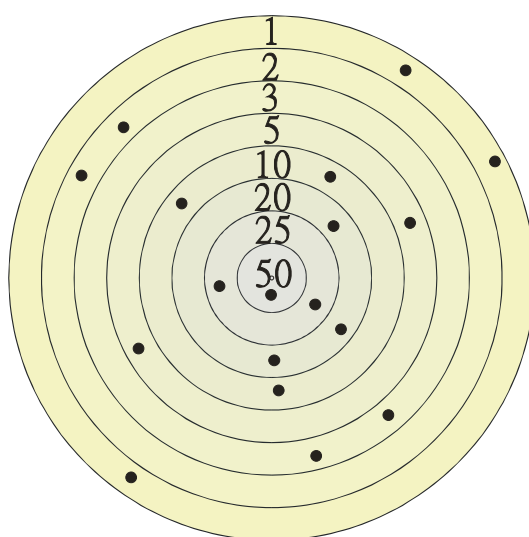
請你找出這三位學生各買了哪些水果。

水 果	甲	乙	丙
西 瓜			
橘 子			
奇 異 果			
鳳 梨			
香 蕉			
蘋 果			

中年級資優班解題歷程分析預試試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
射擊分數	邏輯推理	蔡啟禎	L-05		

有三個士兵：隆尼、梅澤、普敦，有一場射擊比賽。每人射擊 6 次，結果如下圖所示。每個人的得分都是 71 分，隆尼前兩次的射擊得分是 22 分；梅澤第一次射擊的分數是 3 分，請問他們三人射擊的結果各得哪些分數？誰射中靶心？



分數	1	2	3	5	10	20	25	50
次數								

射擊順序	隆尼	梅澤	普敦
1			
2			
3			
4			
5			
6			
總分	71	71	71

【結果】

射中靶心的人是：()

附錄三 預試得分統計表

一、三年級學生解題歷程成績統計：

編號	性別	題 01	題 02	題 03	題 04	題 05	題 06	題 07	題 08	題 09	題 10	題 11	題 12	題 13	題 14	題 15	N	M	L	總分
S301	男	10	10	10	10	10	7	10	10	10	4	10	10	10	10	10	50*	41*	50*	141*
S302	女	9	10	9	10	10	7	10	7	10	8	10	10	7	6	10	48*	42*	43*	133*
S303	女	10	10	6	10	4	7	10	8	10	8	10	10	8	10	10	30*	35*	38*	131*
S304	男	9	3	9	0	10	7	10	10	10	4	10	10	8	0	2	31*	41*	30*	102*
S305	男	10	10	6	0	0	7	0	8	9	0	8	10	8	10	10	26	24	46*	96*
S306	男	9	10	9	0	10	7	6	3	10	0	5	10	8	3	3	38*	26	29*	93*
S307	女	8	5	6	10	8	4	10	10	8	0	0	10	8	0	0	37*	32*	18	87*
S308	男	5	10	10	0	4	6	10	5	8	10	8	0	5	0	0	29*	39*	13	81
S309	女	9	10	10	0	0	4	10	5	10	0	8	0	0	0	0	29*	29*	8	66
S310	女	8	3	6	0	4	6	10	5	8	0	0	3	3	0	10	21	29*	16	66

編號	性別	題 01	題 02	題 03	題 04	題 05	題 06	題 07	題 08	題 09	題 10	題 11	題 12	題 13	題 14	題 15	N	M	L	總分
S311	女	7	3	0	0	6	6	10	8	10	0	0	0	8	3	3	16	34*	14	64
S312	男	9	3	0	0	4	7	0	10	0	8	0	7	8	0	0	16	25	15	56
S313	男	6	0	3	0	8	7	0	8	9	0	8	0	7	0	0	17	24	15	56
S314	女	5	3	8	0	0	7	0	5	7	0	8	0	10	0	0	16	19	18	53
S315	男	2	3	3	0	8	4	0	7	9	2	0	0	3	0	0	16	22	3	41

數與量N：平均數28、標準差11.4；圖形空間M：平均數30.8、標準差；7.6

邏輯推理L：平均數23.7、標準差14.6；總分：平均數82.5、標準差29.243

二、四年級學生解題歷程成績統計：

編號	性別	題 01	題 02	題 03	題 04	題 05	題 06	題 07	題 08	題 09	題 10	題 11	題 12	題 13	題 14	題 15	N	M	L	總分
S401	男	10	10	10	10	10	10	10	10	9	4	10	10	7	10	10	50*	41*	47*	140*
S402	女	10	10	10	10	10	7	10	10	10	0	10	10	8	10	10	50*	37	48*	135*
S403	男	10	10	10	10	10	7	10	7	10	10	10	10	10	10	0	50*	44*	40*	134*

編號	性別	題 01	題 02	題 03	題 04	題 05	題 06	題 07	題 08	題 09	題 10	題 11	題 12	題 13	題 14	題 15	N	M	L	總分
S404	女	9	10	10	10	4	7	10	10	10	4	10	10	8	10	10	43*	41*	48*	132*
S405	男	10	10	10	10	8	7	10	7	10	2	10	10	8	10	10	48*	36*	48*	132*
S406	男	10	10	10	0	10	7	10	5	9	8	10	10	7	10	10	40	39*	47*	126*
S407	男	9	10	10	10	8	6	10	8	10	4	10	0	10	10	10	47*	38*	40*	125*
S408	男	9	10	10	0	10	7	10	3	9	10	8	10	7	10	10	39	39*	45*	123*
S409	女	10	5	8	10	10	7	10	5	7	4	10	10	9	7	9	43*	33*	45*	121*
S410	男	8	10	10	0	10	9	10	10	8	4	10	3	8	10	8	38	41*	39*	118*
S411	女	9	8	3	10	8	7	10	5	9	4	0	10	10	10	10	38	35*	40*	113*
S412	女	9	10	9	10	6	7	10	3	7	0	10	0	10	10	10	44*	27	40*	111*
S413	男	8	0	10	10	8	7	10	7	9	0	8	10	10	10	3	36	33*	41*	110*
S414	女	7	10	9	10	4	7	10	3	9	2	10	0	7	0	0	40	31	17	88
S415	女	9	10	9	3	8	7	10	3	8	2	0	3	7	0	3	39	30	13	82
S416	男	9	10	10	0	10	7	10	0	5	0	5	0	10	0	0	39	22	15	76

編號	性別	題 01	題 02	題 03	題 04	題 05	題 06	題 07	題 08	題 09	題 10	題 11	題 12	題 13	題 14	題 15	N	M	L	總分
S417	女	3	10	5	0	8	7	0	0	3	0	8	0	5	10	0	26	10	23	59
S418	男	9	8	0	0	8	7	0	3	0	0	4	0	7	10	0	25	10	21	56

數與量N：平均數40.8、標準差7.2；圖形空間M：平均數32.7、標準差10.0；

邏輯推理L：平均數36.5、標準差12.5；總分：平均數110.0、標準差26.4

中年級資優班放聲思考試題

親愛的同學：

你好！此份研究的目的，在了解你的解題思考過程，請你認真作答，協助完成「國小中年級資優生的解題歷程分析」的研究。這份研究結果為協助其他學生解題與教師教學，你的作答，對同學與老師均有所助益。謝謝你花時間認真完成！

國立中山大學教育研究所 謹誌

中華民國九十三年二月

指導教授：梁淑坤博士

研究生：蔡啟禎

中年級資優班放聲思考試題

「放聲思考法」指導語

以前老師任教大同國小資優班數學課時。老師對於你們在算數學題目時，腦中到底在想什麼，感到很有興趣，所以正在進行「中年級資優班解題歷程分析」的研究。這個研究需要你們的協助，關於你們的身份，老師將會保密，絕對不會讓其他人知道。

研究開始時，老師會請你們分別解幾道數學題目，在解題的過程中，你們要將腦裡所想到的任何意念，同時大聲的說出來。老師也許會全程錄音並配合錄影。為了讓你們熟悉這種過程，所以在研究開始之前，老師會先做示範，然後請你們親自練習幾道題目，進行正式的研究。

在研究過程中，有幾點需要你們的協助及配合：

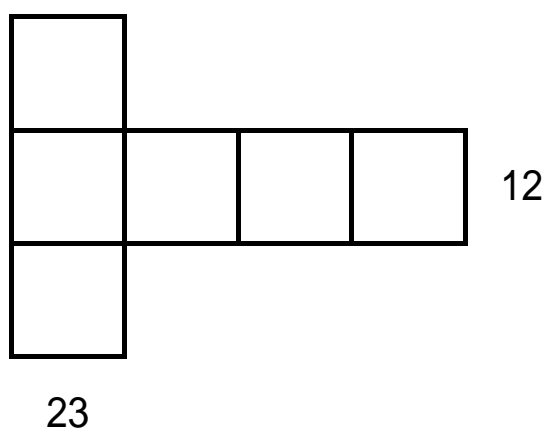
- 一、計算這些數學題目。只是供老師研究解題思考過程的參考，和你們的數學成績或數學能力沒有關係，所以在作答時，不要緊張。
- 二、在解題時，不論腦中想到任何事情，請一定要全部大聲的唸出來，若忘了唸，老師會提醒你。
- 三、在答案紙計算時，請把每一個計算步驟寫清楚。
- 四、其他同學也許會做相同的題目，所以當你做完題目後，千萬不要與其他同學討論題目的內容，若知道題目內容之後，再參加研究，會減少了解題的樂趣。
- 五、在做完題目後，請回答「答題回顧」的問題，並在適當的選項打勾。

謝謝你的合作！

中年級資優班放聲思考試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
數字和	數與量	蔡啟禎	N-demo		

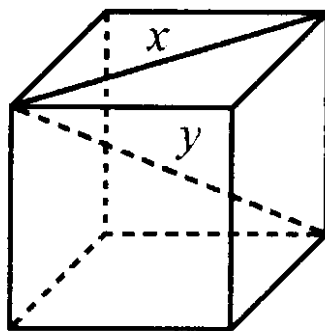
從 1、2、3、4、5、6、7、8、9 等九個數中選出 6 個不同的數填入下圖的空格中，使圖中直行的數字和為 23，橫列的數字和為 12，請問這 6 個數是哪幾個數？這 6 個數的和是多少？



中年級資優班放聲思考試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
對角線個數	圖形空間	蔡啟禎	M-demo		

一正方體有 8 個頂點，12 條邊。有線段如 x ， y 為連接兩頂點但與正方體的邊沒有交點，則稱 x 為一對角線，同理 y 亦稱為對角線，請問在正方體中共有多少條對角線？



單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
車子顏色	邏輯推理	蔡啟禎	L-demo		

A、M、L 三人每人有一部車。一部白色的車、一部藍色的車和一部灰色的車。A 的車不是白色的。藍色的車部屬於 A 或 L，請問每一個人的車各是什麼顏色的？

中年級資優班放聲思考試題

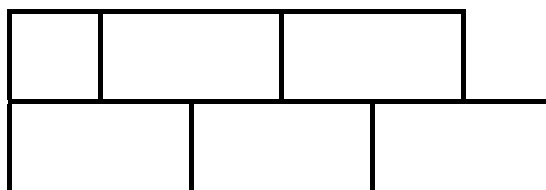
單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
直式算式	數與量	蔡啟禎	N-01		

如果 a 、 b 為 0-9 中不同的數，請問下面的算式，所得到的最小三位數與最大三位數各是多少？而 a 、 b 所代表的值各是多少？

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline \end{array} +$$

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
圍牆整建	數與量	蔡啟禎	N-02		

學校一道長 100 公尺高 7 公尺的圍牆，因為颱風來襲，被大風吹倒，現在學校要使用兩種磚塊重新整建：長 2 公尺高 1 公尺、長 1 公尺高 1 公尺。垂直堆砌磚塊必須如下圖所示交錯間隔，而且牆的兩端必須堆砌平整。請問學校使用這兩種磚塊重新整建這一道圍牆各需要多少塊才可以整建完成？（假設磚塊間沒有間隔）



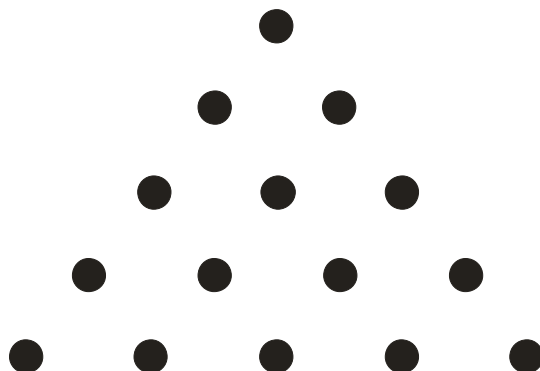
中年級資優班放聲思考試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
數字分組	數與量	蔡啟禎	N-03		

請你將 1、3、5、7、9、11、12 等 7 個數分成兩組，使每一組內所有數加起來的和相等。請問每一組數的和是多少？並請你找出所有分組的方法。

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
三角形個數	圖形空間	蔡啟禎	M-01		

在平面上有 15 個點，點與點之間の間隔距離都相等，如下圖，請問使用這 15 個點可以畫出大大小小的正三角形共多少個？如果有這種點 21 個，那麼可以畫出大大小小的正三角形共多少個？



中年級資優班放聲思考試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
堆積圖形	圖形空間	蔡啟禎	M-02		

圖 1 叫做「堆積圖形」，這個圖形中的數是告訴我們在這個位置上堆積多少個正方體。圖 2 是顯示出全部的正方體，而圖 3 是由圖形正面方向觀看所獲得的正面圖。請你畫出下面堆積圖形的正面圖。由下面三個堆積圖形，你能不能找出畫出正面圖的規律？如果可以請把規律寫出來。

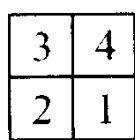


圖 1

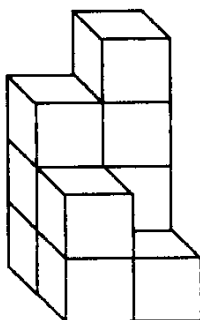


圖 2

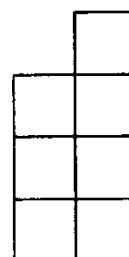
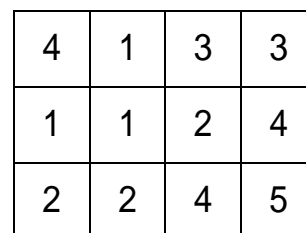
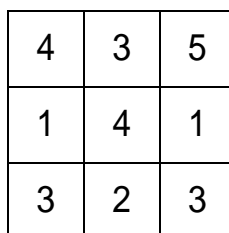
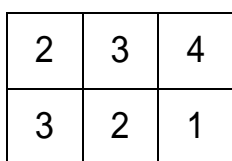


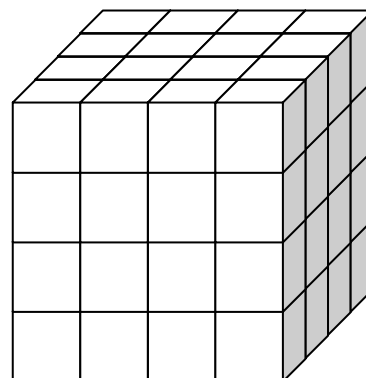
圖 3



中年級資優班放聲思考試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
正方體個數	圖形空間	蔡啟禎	M-03		

一個 $4 \times 4 \times 4$ 的正方體盒子剛好裝滿 64 個大小相同的小正方體，請問會接觸到盒子外側的小正方體的個數共有多少個？沒有接觸的盒子外側的正方體有多少個？



單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
奇妙數列	邏輯推理	蔡啟禎	L-01		

老師藉由下列的三個規則製造出一串數列，剛開始先寫一個正整數，然後再依下列的三個規則，寫出後面的數字：

規則 1：如果這個數比 10 小，將它乘以 9。

規則 2：如果這個數為偶數而且比 9 大，則將它除以 2。

規則 3：如果這個數為奇數而且比 9 大，則將它減去 5。

【例】數列：25、20、10、5、45、40、20

請問數列 58、29、24、 的第 15 項與第 27 項的各是什麼數字？這種數列是否有規律？如果有請你找出這種數列的規律，並把它寫出來。

中年級資優班放聲思考試題

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
硬幣排列	邏輯推理	蔡啟禎	L-02		

五種香港硬幣：1 元、2 元、5 元、10 元、20 元，在桌上由左至右排成一列。

幣值最高的硬幣排在中間。

5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊，但沒有緊鄰。

2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔開。

1 元硬幣不會排列在最後。

請你找出這五種硬幣的排列順序。

單元名稱	領域	設計者	編號	學生姓名	日期
大樓住戶	邏輯推理	蔡啟禎	L-03		

J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R 等 12 人住在同一棟六層樓的大樓內。每層樓有 2 間房間，任何一間房間最多住 2 人。有某些房間是空房間的。

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。

M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。

R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。

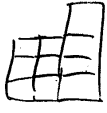
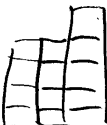
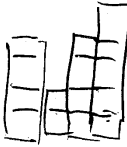
請問由下往上排列的順序為何？空房間可能位於哪些樓層？

附錄五 原案資料

(S1) 口 語 資 料	解 題 行 為	階 段 代 號																											
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：194"																												
1001：讀題。(13")	$\begin{array}{r} 999 \\ 19 \\ + 9 \\ \hline 1027 \end{array}$ $\begin{array}{r} 888 \\ 98 \\ + 8 \\ \hline 994 \end{array}$ $\begin{array}{r} 111 \\ 21 \\ + 1 \\ \hline 133 \end{array}$	R																											
1002：先算 ，因為 最多。		A																											
1003：如果要求最大數， 就是 9。但是如果 是 9， $999 + 19 + 9 = 1027$ ，就變成四位數，所以 是 8。(34")		A																											
1004： = 8， = 9 可以得到最大三位數。(37")		P																											
1005： $888 + 98 + 8 = 994$ ，最大數是 994。(27")		I																											
1006：如果求最小的， 是 0，但是不可能，所以就是 1。(25")		A																											
1007： = 1， = 2，三位數最小。(24")		P																											
1008： $111 + 21 + 1 = 133$ ，最小就是 133。(19")		I																											
T：你如何驗證你的答案？		V																											
1009：根據題目的條件來驗證。		V																											
T：你驗證看是否符合題目條件。	V																												
1010：符合。(15")	V																												
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：485"																												
2001：讀題。(25")	$100 \div 2 = 50$ $(100 \div 2 + 1) \div 2$ $= 98 \div 2$ $= 49$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">>X1</td> <td style="text-align: center;">1X1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">49</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">50</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">49</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">50</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">49</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">50</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">49</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">合計</td> <td style="text-align: center;">346</td> <td style="text-align: center;">8</td> </tr> </table>		>X1	1X1	1	49	2	2	50	0	3	49	2	4	50	0	5	49	2	6	50	0	7	49	2	合計	346	8	R
		>X1	1X1																										
1		49	2																										
2	50	0																											
3	49	2																											
4	50	0																											
5	49	2																											
6	50	0																											
7	49	2																											
合計	346	8																											
2002：長 100 公尺，除以 2 等於 50 塊，可是需要交錯切齊。	A																												
2003：第一種 2 公尺x1 公尺，有 50 塊。	A																												

(S1) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																											
2004：第二種，100 減掉前後 1 公尺×1 公尺各 1 塊，再除以 2，就是 49，所以就是用 2 塊 1 公尺×1 公尺、49 塊 2 公尺×1 公尺。(129")		A																											
2005：第一排使用 2 公尺×1 公尺 49 塊、2 塊 1 公尺×1 公尺，第二排就用 2 公尺×1 公尺有 50 塊，交錯使用，到第七排。(畫表格)(13")	$50 \times 3 + 49 \times 4$ $= 150 + 196$ $= 346$	P																											
2006：第一排需要 2×1 的 49 塊，1×1 的 2 塊。	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>≥X1</th> <th>1X1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>合計</td><td>347</td><td>6</td></tr> </tbody> </table>		≥X1	1X1	1	50	0	2	49	2	3	50	0	4	49	2	5	50	0	6	49	2	7	50	0	合計	347	6	I
		≥X1	1X1																										
1		50	0																										
2		49	2																										
3		50	0																										
4		49	2																										
5		50	0																										
6	49	2																											
7	50	0																											
合計	347	6																											
2007：第二排需要 2×1 的 50 塊。	I																												
2008：第三排跟第一排一樣，2×1 的 49 塊，1×1 的 2 塊。	I																												
2009：第四排跟第二排一樣，偶數都一樣，2×1 的 50 塊，1×1 的磚塊有 0 塊，奇數層都一樣。	I																												
2010：需要 2×1 的 $49 \times 4 + 50 \times 3 = 196 + 150 = 346$ 塊。	I																												
2011：需要 $2 \times 4 = 8$ 塊 1×1 的磚塊。(136")	I																												
2012：第一排使用 2 公尺×1 公尺有 50 塊，第二排就用 2 公尺×1 公尺 49 塊、2 塊 1 公尺×1 公尺，交錯使用，到第七排。(畫表格)(14")	$50 \times 4 + 49 \times 3$ $= 200 + 147$ $= 347$	P																											
2013：第一排 2×1 需要 50 塊，1×1 的有 0 塊。	I																												
2014：第二排 2×1 需要 49 塊，1×1 的有 2 塊。	I																												
2015：第三排、第五排、第七排跟第一排一樣需要 50 塊，1×1 的有 0 塊。	I																												
2016：第四排、第六排跟第二排一樣，2×1 需要 49 塊，1×1 的有 2 塊。	I																												
2017：2×1 的磚塊共總共需要 $50 \times 4 + 49 \times 3 = 200 + 147 = 347$ 。	I																												
2018：1×1 的共有需要 $2 \times 3 = 6$ 塊。(125")	I																												
T：你如何驗證你的答案？																													
2019：根據題目的條件來驗證。		V																											
T：你驗證看是否符合題目條件。																													
2020：符合。(43")		V																											
第 三 題 (N - 0 3)	解題時間合計：203"																												
3001：讀題。(22")		R																											
3002：把全部的數加起來除以 2。		A																											

(S1) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
3003 : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12 = 25 + 11 + 12 = 36 + 12 = 48$ 。	$13+5+7+9+11+12$	A
3004 : $48 \div 2 = 24$ 。(25'')	$= 25 + 11 + 12$	A
3005 : (一) 第一組 $12 + 11 + 1 = 24$, 第二組 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$ 。	$= 26 + 12$	I
3006 : (二) 第一組 $9 + 12 + 3 = 24$, 第二組 $1 + 5 + 7 + 11 = 24$ 。	$= 48$	I
3007 : (三) 第一組 $12 + 5 + 7 = 24$, 第二組 $1 + 3 + 9 + 11 = 24$ 。(132'')	$48 \div 2 = 24$	I
3008 : 驗證的結果, 有沒有其他答案, 因為都使用過的數, 前後順序不同而已。	(一)	I
T : 你如何驗證你的答案?	① $12 + 11 + 1 = 24$	I
3009 : 根據題目的條件來驗證。	② $3 + 5 + 7 + 9 = 24$	V
T : 你驗證看是否符合題目條件。	(=)	V
3010 : 符合。(24'')	① $9 + 12 + 3 = 24$	V
	② $1 + 5 + 7 + 11 = 24$	V
	(三) ① $12 + 5 + 7 = 24$	V
	② $1 + 3 + 9 + 11 = 24$	V
第 四 題 (M - 0 1)	解題時間合計 : 356''	
4001 : 讀題。(18'')	^{15個點} 邊長 1 $\overline{1+2+3+4}$	R
4002 : 15 點 : 正三形從最小到最大, 分為邊長為 1、2、3、4 的 4 種正三角形。(66'')	$= 10$	P
4003 : 邊長為 1 正的有 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, 反的有 $1 + 2 + 3 = 6$ 。	反 $= 1 + 2 + 3 = 6$	I
4004 : 邊長為 2 的正有 $1 + 2 + 3 = 6$, 反有 1。	邊長 2 $\overline{1+2+3} = 6$	I
4005 : 邊長為 3 的正有 $1 + 2 = 3$, 反有 0。	反 1	I
4006 : 邊長為 4 的正有 1 , 反有 0。	邊長 3 $\overline{1+2} = 3$	I
4007 : 總共有 $10 + 6 + 1 + 3 + 1 = 22 + 1 + 2 + 1 = 27$ 。(134'')	反 0	I
4008 : 21 點比 15 點增加邊長為 1、2、3、4、5 的正三角形個數共多少個。(51'')	邊長 4 $\overline{1}$	I
	反 0	I
	$10 + 6 + 6 + 1 + 3 + 1$	I
	$= 22 + 1 + 2 + 1$	I
	$= 27$	I
	21 點	P
	$21 + 1 + 5 + 4 + 4 + 2$	P
	$+ 3 + 2$	P
	$= 37 + 10 + 5$	P
	$= 48$	P

(S1) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號												
4009 : 21 點增加了邊長為 5 正的有 1 個 ; 邊長為 1 正的有 5 個、反的有 4 個 ; 邊長為 2 正的有 4 個、反的有 2 個 ; 邊長為 3 正的有 3 個 ; 邊長為 4 正的有 2 個。		I												
4010 : 所以 21 點共有 $27 + 1 + 5 + 4 + 4 + 2 + 3 + 2 = 33 + 10 + 5 = 48$ (65'')		I												
T : 你如何驗證你的答案 ?														
4011 : 根據題目的條件來驗證。		V												
T : 你驗證看是否符合題目條件。(22'')														
4012 : 符合。		V												
第 五 題 (M - 0 2)	解題時間合計 : 216''													
5001 : 讀題。(26'')		R												
5002 : 圖 1 第一行最大數 3 , 圖 3 第一行有 3 層 ; 第二行最大數 4 , 圖 3 第二行有 4 層。圖 2 第一行有 3 層 第二行有 4 層 , 所以取每一行的最大數。(61'')	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table> 	2	3	4	3	2	1	A						
2	3	4												
3	2	1												
5003 : 第一個圖 : 第一行最大數是 3 , 所以畫 3 層。第二行最大數是 3 , 所以畫 3 層。第三行最大數是 4 , 所以畫 4 層。	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> 	4	3	5	1	4	1	3	2	3	I			
4	3	5												
1	4	1												
3	2	3												
5004 : 第二個圖 : 第一行最大數是 4 , 所以畫 4 層。第二行最大數是 4 , 所以畫 4 層。第三行最大數是 5 , 所以畫 5 層。		I												
5005 : 第三個圖 : 第一行最大數是 4 , 所以畫 4 層。第二行最大數是 2 , 所以畫 2 層。第三行最大數是 4 , 所以畫 4 層。第四行最大數是 5。所以畫 5 層。		I												
5006 : 每一行最大數就是正面圖的層數 (107'')	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table> 	4	1	3	3	1	1	2	4	2	2	4	5	I
4	1	3	3											
1	1	2	4											
2	2	4	5											
T : 你如何驗證你的答案 ?														
5007 : 根據題目的條件來驗證。		V												
T : 你驗證看是否符合題目條件。(22'')														
5008 : 符合。	每一行最大數就是正面圖的層數。	V												
第 六 題 (M - 0 3)	解題時間合計 : 144''													
6001 : 讀題。(19'')		R												
6002 : 先考慮有接觸的 , 全部減去有接觸的剩下就是沒接觸的。(43'')	<p>有接觸 $4 \times 4 \times 2 + 4 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2$ $= 32 + 16 + 8$ $= 56$</p> <p>沒有接觸 $64 - 56 = 8$</p>	P												
6003 : 上下兩層共有 $4 \times 4 \times 2$ 。		A												
6004 : 前後兩層共有 $4 \times 2 \times 2$ 。		A												
6005 : 左右兩層剩下 $2 \times 2 \times 2$ 。(40'')		A												

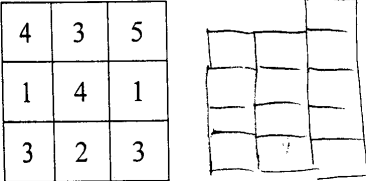
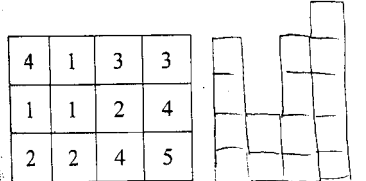
(S1) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
6006: 所以有接觸的盒子外側的共有 $4 \times 4 \times 2 + 4 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 32 + 16 + 8 = 56$ 。		I
6007: 沒接觸的有 $64 - 56 = 8$ 。(22")		I
T : 你如何驗證你的答案?		
6008: 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
6009: 符合。(20")		V
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計: 333"	
7001: 讀題。(48")		R
7002: 58、29、24、12、6、54、27、22、11、6、54。(170")	58 → 29 → 24 → 12 → 6 → 54 → 27 → 22 → 11 → 6 → 54	A
T : 你有沒有看出這個數列規律?	從第5個數開始, 5個5個循環一次	I
7003: 從第5個數開始, 5個5個循環一次。	6 → 54 → 27 → 22 → 11	I
T : 哪5個數循環?	第15項 第21項 6 27	I
7004: 6、54、27、22、11。		I
T : 第15項、第27項各是什麼數?		I
7005: 第15項: 6(用數的)。		I
7006: 第27項: 27(用數的)。(91")		I
T : 你如何驗證你的答案?		
7007: 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
7008: 符合。(24")		V
第 八 題 (L - 0 2)	解題時間合計: 84"	
8001: 讀題。(24")		R
8002: 由左至右寫出1、2、3、4、5的位置, 幣值最高是20元, 排在中間, 8004: 所以20元在第三個位置。	5 1 20 10 10	I
8003: 5元硬幣排在20元硬幣的左邊, 但沒有緊鄰, 所以5元硬幣應該排在第一個位置。		I
8004: 2元硬幣與5元硬幣被另外兩個硬幣隔開, 所以2元硬幣排在第四位置。		I
8005: 1元硬幣不會排列在最後, 所以1元硬幣只能排在第二。10元硬幣就排在第五。		I
8006: 由左至右排列順序是5元、1元、20元、2元、10元。(47")		I
T : 你如何驗證你的答案?		

(S1) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
8007 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。(13'')		
8008 : 符合。		V
第 九 題 (L - 0 3)	解題時間合計 : 511''	
9001 : 讀題。(57'')		R
9002 : 列出 J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R。	J L M P W C N B F E R	A
9003 : L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。	⑥ L W ○	A
9004 : M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。	⑤ N E	A
9005 : R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層 (298'')	④ A C ○	A
9006 : 由上而下, 如果 L 住在最第 6 層, A、C 住在第 4 層, M 住在第 3 層、P、R 住單人房住在第 1 層。(畫記 L、A、C、M、P、R)(51'')	③ J M	I
9007 : N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。(15'')	② B F	A
9008 : 因為 B、F 住單人房, 而只有第 2 層有二間單人房外, 其他層沒有, 所以 B、F 住在第 2 層, N 住在第 5 層。(畫記 B、F、N)(24'')	① R F	A
9009 : J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。(17'')	空房間在第四層和第六層	I
9010 : 所以第 1 層、第 2 層已經住了 R 和 P、B 和 F, 所以 J 只能住在第 3 層, W 住在第 6 層, E 住在第 5 層。(畫記 J、W、E)		A
9011 : 少了 L 的室友, 所以 W 是 L 的室友。		I
9012 : 空房間在第四層和第六層。		I
9013 : 由下而上的排列為, 一樓住 R、P, 二樓住 B、F, 三樓住 M、J, 四住樓 AC, 五樓住 N、E, 六樓住 LW, 空房間可能是四樓、六樓。(23'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
9014 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
9015 : 符合。(26'')		V

(S2) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																											
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：197"																												
1001：讀題。(13")	設 $\Delta=1$ $\begin{array}{r} \overset{1}{1} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \\ + \\ \hline 133 \end{array}$ 最小 $\begin{array}{r} 999 \\ 89 \\ + \\ \hline 1097 \end{array}$ $\begin{array}{r} 999 \\ 79 \\ + \\ \hline 1087 \end{array}$ $\begin{array}{r} 888 \\ 98 \\ + \\ \hline 994 \end{array}$ 最大	R																											
1002：當 $\Delta=1$ ， $\Delta=2$ 三位數最小。(37")		P																											
1003：最小是 $111+21+1=133$ 。(31")		I																											
1004：當 $\Delta=9$ ， $\Delta=8$ 時， $999+89+9=1097$ ，結果是四位數。		A																											
1005：當 $\Delta=9$ ， $\Delta=7$ 時， $999+79+9=1087$ ，結果是四位數。(37")		A																											
1006：當 $\Delta=8$ ， $\Delta=9$ 時，三位數最大。(33")		P																											
1007： $888+98+8=994$ 。		I																											
1008：最小三位數是 133，最大三位數是 994。(34")		I																											
T：你如何驗證你的答案？																													
1009：根據題目的條件來驗證。		V																											
T：你驗證看是否符合題目條件。																													
1010：符合。(12")		V																											
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：477"																												
2001：讀題。(27")	$7 \div 1 = 7$ $100 \div 2 = 50$ $(100-2) \div 2 = 49$	R																											
2002：因為圍牆高 7 公尺，磚塊高 1 公尺，所以圍牆有 $7 \div 1 = 7$ 層。		A																											
2003：圍牆長 100 公尺，磚塊長 2 公尺，全部都是 2×1 的那一有 $100 \div 2 = 50$ 塊。		A																											
2004：有 1×1 和 2×1 的那一層 1×1 前後各有 1 塊，共 2 塊。	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2×1</th> <th>1×1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>7</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計</td> <td>347</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		2×1	1×1	7	50		6	49	2	5	50		4	49	2	3	50		2	49	2	1	50		合計	347	6	A
		2×1	1×1																										
7		50																											
6		49	2																										
5		50																											
4		49	2																										
3		50																											
2		49	2																										
1		50																											
合計		347	6																										
2005： $(100-2) \div 2 = 49$ 。(127")	A																												
2006：先使用全部 2×1 的磚塊(畫表格)(13")	P																												
2007：第七層 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																												
2008：第六層 2×1 的磚塊有 49 塊， 1×1 的磚塊有 2 塊。	I																												
2009：第五層 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																												
2010：第四層 2×1 的磚塊有 49 塊， 1×1 的磚塊有 2 塊。	I																												
2011：第三層 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																												

(S2) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																											
2012: 第二層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>2x1</td> <td>1x1</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>50</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>合計</td> <td>46</td> <td>8</td> </tr> </table>		2x1	1x1	7	49	2	6	50		5	49	2	4	50		3	49	2	2	50		1	49	2	合計	46	8	I
		2x1	1x1																										
7		49	2																										
6		50																											
5		49	2																										
4		50																											
3		49	2																										
2		50																											
1		49	2																										
合計		46	8																										
2013: 第一層 2x1 的磚塊有 50 塊。		I																											
2014: 2x1 的磚塊共有 347。		I																											
2015: 1x1 的磚塊共有 6。(134")		I																											
2016: 先使用有 1x1 和 2x1 的磚塊。(畫表格)(12")		P																											
2017: 第七層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I																											
2018: 第六層 2x1 的磚塊有 50 塊。		I																											
2019: 第五層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I																											
2020: 第四層 2x1 的磚塊有 50 塊。		I																											
2021: 第三層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I																											
2022: 第二層 2x1 的磚塊有 50 塊。	I																												
2023: 第一層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。	I																												
2024: 2x1 的磚塊共有 $49 \times 4 + 50 \times 3 = 196 + 150 = 346$ 。	I																												
2025: 1x1 的磚塊共有 $2 \times 4 = 8$ 。(121")	I																												
T : 你如何驗證你的答案?																													
2026: 根據題目的條件來驗證。	V																												
T : 你驗證看是否符合題目條件。																													
2027: 符合。(43")	V																												
第 三 題 (N - 0 3)	解題時間合計: 199"																												
3001: 讀題。(21")	$1 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12$ $= 48$ $48 \div 2 = 24$	R																											
3002: 把所有數加起來除以 2。		A																											
3003: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12 = 48$		A																											
3004: $48 \div 2 = 24$ (26")		A																											
3005: 第一組 12、9、3, 第二組 11、1、5、7。(畫表)		I																											
3006: 第一組 12、1、11, 第二組 3、5、7、9。	<table border="1"> <tr> <td>第 1 組</td> <td>第 2 組</td> </tr> <tr> <td>12, 9, 3</td> <td>11, 1, 5, 7</td> </tr> <tr> <td>12, 1, 11</td> <td>3, 5, 7, 9</td> </tr> </table>	第 1 組	第 2 組	12, 9, 3	11, 1, 5, 7	12, 1, 11	3, 5, 7, 9	I																					
第 1 組	第 2 組																												
12, 9, 3	11, 1, 5, 7																												
12, 1, 11	3, 5, 7, 9																												
3007: 第一組 12、5、7, 第二組 1、3、9、11。(129")		I																											
T : 有沒有其他的方法?	<table border="1"> <tr> <td>12, 5, 7</td> <td>1, 3, 9, 11</td> </tr> </table>	12, 5, 7	1, 3, 9, 11																										
12, 5, 7	1, 3, 9, 11																												

(S2) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
3008 : 沒有了, 因為除 12 以外, 其他 6 個數中, 加起來等於 12 的數, 只有 9、3、1、11、5、7 三組外, 沒有其他的。		V
T : 你如何驗證你的答案?		
3009 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
3010 : 符合。(23'')		V
第 四 題 (M - 0 1)	解題時間合計 : 353''	
4001 : 讀題。(18'')	<p>1-16 2-7 3-3 4-1 ----- 27</p> <p>1-9 2-6 3-3 4-2 5-1 ----- 21</p> <p>21+27=48</p> <p>15點-27個 21點-48個</p>	R
4002 : 把正三角形分為邊長為 1、2、3、4 等 4 種。(畫線)(67'')		P
4004 : 邊長為 1 有 16。		I
4005 : 邊長為 2 有 7。		I
4006 : 邊長為 3 的有 3。		I
4007 : 邊長為 4 的有 1。		I
4008 : 共有 27。(128'')		I
T : 21 點的時候, 可畫多少個三角形?		
4009 : 補畫 6 個點並補畫線。(54'')		P
4010 : 增加的部分有 :		I
4011 : 邊長為 1 的增加 9。		I
4012 : 邊長為 2 的增加 6。		I
4013 : 邊長為 3 的增加 3。		I
4014 : 邊長為 4 的增加 2。		I
4015 : 邊長為 5 的增加 1。		I
4016 : 共增加 21。		I
4017 : 21 + 27 = 48	I	
4018 : 15 點共有 27 個, 21 點共有 48 個。(63'')	I	
T : 你如何驗證你的答案?		
4019 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
4020 : 符合。(23'')		V
第 五 題 (M - 0 2)	解題時間合計 : 217''	
5001 : 讀題。(26'')		R
5002 : 圖 1 第一行最大數是 3, 圖 3 第一行有 3 個正方形; 第二行最大數是 4, 圖 3 第二行有 4 個正方形。(65'')		A

(S2) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
5003 : 第一個圖 : 第一行最大數是 3 , 畫 3 個方塊。第二行最大數是 3 , 畫 3 個方塊。第三行最大數是 4 , 畫 4 個方塊。	  <p>在一排中最大的數字就是你應該畫幾個正方形。</p>	I
5004 : 第二個圖 : 第一行最大數是 4 , 畫 4 個方塊。第二行最大數是 4 , 畫 4 個方塊。第三行最大數是 5 , 畫 5 個方塊。		I
5005 : 第三個圖 : 第一行最大數是 4 , 畫 4 個方塊。第二行最大數是 2 , 畫 2 個方塊。第三行最大數是 4 , 畫 4 個方塊。第四行最大數是 5 , 畫 5 個方塊。		I
5006 : 在一排中最大的數字就是你應該畫幾個正方形。(103'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
5007 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
5008 : 符合。(23'')		V
第 六 題 (M - 0 3)	解題時間合計 : 159''	
6001 : 讀題。(18'')	$16+16=32$ $(8 \times 2) + (4 \times 2)$ $= 16 + 8$ $= 24$ $32 + 24 = 56 \dots$ 有接觸的 $64 - 56 = 8 \dots$ 沒有接觸的	R
6002 : 先找出有接觸盒子外側的正方體的個數, 再把全部減去有接觸盒子外側的正方體的個數, 剩下的就是沒有接觸盒子外側的正方體個數。(51'')		P
6003 : 上下兩層共有 $16 + 16 = 32$ 。		A
6004 : 前後左右接觸的剩下 $8 \times 2 + 4 \times 2 = 24$ 。(45'')		A
6005 : 有接觸的共有 $32 + 24 = 56$ 。		I
6006 : 沒接觸的有 $64 - 56 = 8$ 。(24'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
6007 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
6008 : 符合。(21'')	V	
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計 : 292''	
7001 : 讀題。(46'')	$58, 29, 24, 12, 6, 54, 27, 22, 11, 6, 54$ 從第5項開始重複 6, 54, 27, 22, 11	R
7002 : 數列 : 58、29、24、12、6、54、27、22、11、6、54 (143'')		A
7003 : 這個數列的規律是從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。		I
7004 : $15 - 4 = 11$ 。		I
7005 : $11 \div 5 = 2 \quad 1$ 。		I

(S2) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																																				
7006 : $27 - 4 = 23$ 。	$15 - 4 = 11$	I																																				
7007 : $23 \div 5 = 4 \quad 3$ 。	$11 \div 5 = 2 \dots 1$	I																																				
7008 : 第 15 項 = 6 , 第 27 項 = 27 (82'')	$27 - 4 = 23$	I																																				
T : 你如何驗證你的答案 ?	$23 \div 5 = 4 \dots 3$	V																																				
7009 : 根據題目的條件來驗證。	第 15 項 = 6																																					
T : 你驗證看是否符合題目條件。	第 27 項 = 27	V																																				
第 八 題 (L - 0 2)	解題時間合計 : 84''																																					
8001 : 讀題。(25'')		R																																				
8002 : 因為幣值最高是 20 元 , 排在中間 , 所以第三個位置是 20。(畫表格)	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>一</td> <td>二</td> <td>三</td> <td>四</td> <td>五</td> </tr> <tr> <td>1元</td> <td></td> <td>✓</td> <td></td> <td></td> <td>✗</td> </tr> <tr> <td>2元</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>✓</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5元</td> <td>✓</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>10元</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>20元</td> <td></td> <td></td> <td>✓</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		一	二	三	四	五	1元		✓			✗	2元				✓		5元	✓					10元					✓	20元			✓			I
	一	二	三	四	五																																	
1元		✓			✗																																	
2元				✓																																		
5元	✓																																					
10元					✓																																	
20元			✓																																			
8003 : 5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊 , 但沒有緊鄰 , 所以 5 元硬幣排在第一個位置。		I																																				
8004 : 2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔開 , 所以 2 元硬幣排在第四。		I																																				
8005 : 1 元硬幣不會排列在最後 , 所以 1 元硬幣只能排在第二。10 元硬幣就排在第五。		I																																				
8006 : 由左至右排列順序是 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元。(45'')	5元, 1元, 20元, 2元, 10元	I																																				
T : 你如何驗證你的答案 ?																																						
8007 : 根據題目的條件來驗證。		V																																				
T : 你驗證看是否符合題目條件。																																						
8008 : 符合。(14'')		V																																				
第 九 題 (L - 0 3)	解題時間合計 : 514''																																					
9001 : 讀題。(61'')		R																																				
9002 : L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓层高 2 層。	<table border="1"> <tr> <td>L</td> <td>W</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>E</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>C</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>M</td> <td>J</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>F</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>R</td> <td>P</td> <td>—</td> </tr> </table>	L	W	—	N	E	—	A	C	—	M	J	—	B	F	—	R	P	—	A																		
L	W	—																																				
N	E	—																																				
A	C	—																																				
M	J	—																																				
B	F	—																																				
R	P	—																																				
9003 : M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層的條件與 AC 有關。		A																																				
9004 : R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層的條件又與 M 相關。(289'')		A																																				
9005 : L、AC、M、R、P 所在的位置共有六層 , L 住在 6 樓 , A、C 住在 4 樓 , M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。(56'')		I																																				
9006 : J 住單人房 , 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。		A																																				

(S2) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
9007 : N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。(26'')	6樓和4樓可能有空房間	A
9008 : J 如果住在 2 樓, E 就住在 4 樓, W 住在 5 樓, B、F 二人就無法住單人房, 不可能, 所以 J 不住在 2 樓。		I
9009 : 所以 B、F 住在 2 樓, N 住在 5 樓, J 住在 3 樓, E 住在 5 樓, W 住在 6 樓。		I
9010 : L 的室友就是 W。		I
9011 : 由下而上的排列為, 1 樓住 R、P, 2 樓住 B、F, 3 樓住 M、J, 4 住樓 AC, 5 樓住 N、E, 6 樓住 LW,		I
9012 : 6 樓和 4 樓可能有空房間。(59'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
9013 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
9014 : 符合。(23'')		V

(S3) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																																													
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：219"																																														
1001：讀題。(14")	<p>最小：$\Delta=1$ $0=2$</p> $\begin{array}{r} 111 \\ - 21 \\ + \quad 1 \\ \hline 133 \end{array}$ <p>最大：$\Delta=8$ 09 888 98 + 8 <hr/>994</p>	R																																													
1002：最小的時候， $\Delta=1$ ， $0=2$ 。(35")		P																																													
1003： $111+21+1=133$ 。(41")		I																																													
1004：如果 $\Delta=9$ ，就會變成四位數。(39")		A																																													
1005：最大的時候， $\Delta=8$ ， $0=9$ 。(37")		P																																													
1006： $888+98+8=994$ 。(38")		I																																													
T：你如何驗證你的答案？																																															
1007：根據題目的條件來驗證。		V																																													
T：你驗證看是否符合題目條件。																																															
1008：符合。(15")		V																																													
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：524"																																														
2001：讀題。(28")	<p>$7 \div 1 = 7$ $10 \div 2 = 50$ 2×1 的 $50 = 49$ $100 - 1 \times 2 = 98$ $98 \div 2 = 49$</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2x1</th> <th>1x1</th> <th>2x1</th> <th>1x1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>50</td> <td>0</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>49</td> <td>2</td> <td>50</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>50</td> <td>0</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>49</td> <td>2</td> <td>50</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>50</td> <td>0</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>49</td> <td>2</td> <td>50</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>50</td> <td>0</td> <td>49</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>347</td> <td>6</td> <td>346</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>		2x1	1x1	2x1	1x1	1	50	0	49	2	2	49	2	50	0	3	50	0	49	2	4	49	2	50	0	5	50	0	49	2	6	49	2	50	0	7	50	0	49	2		347	6	346	8	R
		2x1	1x1	2x1	1x1																																										
1		50	0	49	2																																										
2		49	2	50	0																																										
3		50	0	49	2																																										
4		49	2	50	0																																										
5		50	0	49	2																																										
6		49	2	50	0																																										
7		50	0	49	2																																										
		347	6	346	8																																										
2002：因為高 7 公尺，所以共有 $7 \div 1 = 7$ 層。		A																																													
2003： $100 \div 2 = 50$ 。		A																																													
2004： 2×1 的 50 塊。		A																																													
2005： 1×1 最前面和最後面各有 1，共 2 塊。		A																																													
2006：所以 $100 - 1 \times 2 = 98$ 。		A																																													
2007： $98 \div 2 = 49$ 塊。	A																																														
2008：如果全部是 2×1 的有 50 塊。	A																																														
2009：有 1×1 和 2×1 ， 1×1 的有 2 塊， 2×1 的有 49 塊。(142")	A																																														
2010：第一種第一層先全部使用 2×1 的磚塊。(16")	P																																														
2011：第一層先使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的 0。	I																																														
2012：第二層使用 2×1 的有 49 塊， 1×1 的有 2 塊。	I																																														
2013：第三層使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的 0。	I																																														
2014：第四層使用 2×1 的有 49 塊， 1×1 的有 2 塊。	I																																														
2015：第五層使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的 0。	I																																														

(S3) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
2016：第六層使用 2x1 的有 49 塊，1x1 的有 2 塊。		I
2017：第七層使用 2x1 的有 50 塊，1x1 的 0。		I
2018：使用 2x1 的共有 $50 \times 4 + 49 \times 3 = 200 + 147 = 347$ 。		I
2019：1x1 的磚塊共有 $2 \times 3 = 6$ 。(145")		I
2020：第二種第一層先使用 2x1 和 1x1 的磚塊。(15")		P
2021：第一層先使用 2x1 的有 49 塊，1x1 的有 2 塊。		I
2022：第二層使用 2x1 的有 50 塊，1x1 的 0。		I
2023：第三層使用 2x1 的有 49 塊，1x1 的有 2 塊。		I
2024：第四層使用 2x1 的有 50 塊，1x1 的 0。		I
2025：第五層使用 2x1 的有 49 塊，1x1 的有 2 塊。		I
2026：第六層使用 2x1 的有 50 塊，1x1 的 0。		I
2027：第七層使用 2x1 的有 49 塊，1x1 的有 2 塊。		I
2028：2x1 的磚塊共有 $50 \times 3 + 49 \times 4 = 150 + 196 = 346$ 。		I
2029：1x1 的磚塊共有 $2 \times 4 = 8$ 。(133")		I
T：你如何驗證你的答案？		
2030：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
2031：符合。(45")		V
第 三 題 (N - 0 3)	解題時間合計：273"	
3001：讀題。(23")		R
3002：要分 2 組，所以把所有數加起來除以 2 求每一組的和是多少。		A
3003： $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12) \div 2 = 48 \div 2 = 24$ 。(27")		A
3004：第一種：第一組 $1 + 9 + 3 + 11 = 24$ ，第二組 $5 + 7 + 12 = 24$ 。		I
3005：第二種：第一組 $3 + 7 + 5 + 9 = 24$ ，第二組 $1 + 11 + 12 = 24$ 。		I
3006：第三種：第一組 $3 + 9 + 12 = 24$ ，第二組 $1 + 5 + 7 + 11 = 24$ 。(198)		I

$$50 \times 4 + 49 \times 3 = 200 + 147 = 347$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$50 \times 3 + 49 \times 4 = 150 + 196 = 346$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$(1+3+5+7+9+11+12) \div 2 = 48 \div 2 = 24$$

$$1. \quad 1+9+3+11=24$$

$$5+7+12=24$$

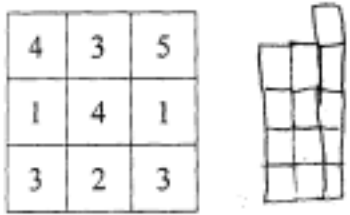

$$2. \quad 3+7+5+9=24$$

$$1+11+12=24$$

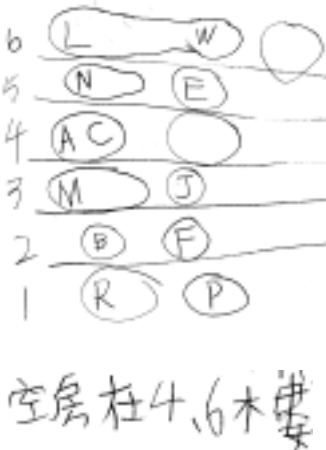
$$3. \quad 3+9+12=24$$

$$1+5+7+11=24$$

(S3) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
T : 你如何驗證你的答案？		
3007 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
3008 : 符合。(25'')		V
第 四 題 (M - 0 1)	解題時間合計：428''	
4001 : 讀題。(17'')		R
4002 : 在點與點之間畫線。把正三角形分為一邊為 1、2、3、4 個三角形四種。(97'')		P
4003 : 1 正的 + 反的，共有 $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ 。		I
4004 : 2 正的共有 $1 + 2 + 3 = 6$ 。		I
4005 : 3 正的共有 $1 + 2 = 3$ ，反的 0。		I
4006 : 2 反的有 1。		I
4007 : 4 正的有 1，反的 0。		I
4008 : 所以 15 點，共有 $16 + 6 + 3 + 1 + 1 = 27$ 。(153)		I
4009 : 補畫 6 個點，並補畫線。把正三角形分為一邊為 1、2、3、4、5 個三角形 5 種。(61'')		P
4010 : 1 正的 + 反的，共有 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ 。		I
4011 : 2 正的共有 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 。		I
4012 : 3 正的共有 $1 + 2 + 3 = 6$ 。		I
4013 : 4 正的有 $1 + 2 = 3$ 。		I
4014 : 5 正的有 1，		I
4015 : 2 反的有 $1 + 2 = 3$ 。		I
4016 : 所以 21 點，共有 $25 + 10 + 6 + 3 + 1 + 3 = 48$ 。(79'')	I	
T : 你如何驗證你的答案？		
4017 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
4018 : 符合。(21'')		V
第 五 題 (M - 0 2)	解題時間合計：200''	
5001 : 讀題。(26'')		R
5002 : 圖 1 第一行大數是 3，圖 2 可以看到最多的正方體個數是 3，圖 3 第一行有 3 個正方形；第二行最大數是 4，圖 2 可以看到最多的正方體個數是 4，圖 3 第二行有 4 個正方形。(47'')		A

(S3) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
5003：第一個圖：第一行最大數是3，所以畫3個方塊，第二行最大數是3，所以畫3個方塊，第三行最大數是4，所以畫4個方塊。		I
5004：第二個圖：第一行最大數是4，所以畫4個方塊，第二行最大數是4，所以畫4個方塊，第三行最大數是5，所以畫5個方塊。		I
5005：第三個圖：第一行最大數是4，所以畫4個方塊，第二行最大數是2，所以畫2個方塊，第三行最大數是4，所以畫4個方塊，第四行最大數是5，所以畫5個方塊。		I
5006：每行最大的數就是正面圖的個數。(106'')	<p>每行最大的數就是正面圖的個數。</p>	I
T：你如何驗證你的答案？		
5007：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
5008：符合。(21'')		V
第 六 題 (M - 0 3)	解題時間合計：301''	
6001：讀題。(21'')	$4 \times 4 \times 2 = 32$	R
6002：先考慮有接觸的。再以全部64個減去有接觸的，剩下就是沒有接觸的。(133'')	$4 \times 2 \times 2 = 16$ $2 \times 2 \times 2 = 8$	P
6003：左右兩層共有 $4 \times 4 \times 2 = 32$ 。	$8 + 32 + 16 = 56$	A
6004：上下兩層剩下 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 。	$64 - 56 = 8$	A
6005：前後兩層剩下 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。(92'')	<p>有接觸外面有56個</p>	A
6006： $8 + 32 + 16 = 56$ ，有接觸外面的有56個。	$64 - 56 = 8$	I
6007： $64 - 8 = 56$ ，沒接觸外面的有8個。(30'')	<p>沒接觸外面有8個</p>	I
T：你如何驗證你的答案？		
6008：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
6009：符合。(25'')		V
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計：296''	
7001：讀題。(47'')		R
7002：數列：58、29、24、12、6、54、27、22、11、6、54 (156'')	<p>58, 29, 24, 12, 6, 54, 27, 22, 11, 6, 54 從第5項開始重複 6, 54, 27, 22, 11</p> <p>$(5-1) \div 5 = 2 \dots 1$ 15項=6 $(27-4) \div 5 = 4 \dots 3$ 27項=27</p>	A

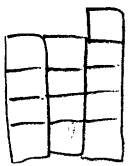
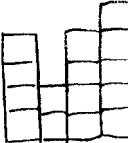
(S3) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
7003 : 這個數列的規律是從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。		I
7004 : $(15-4) \div 5 = 2 \quad 1, 15 \text{ 項} = 6。$		I
7005 : $(27-4) \div 5 = 4 \quad 3, 27 \text{ 項} = 27。(71'')$		I
T : 你如何驗證你的答案?		
7006 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
7007 : 符合。(22'')		V
第 八 題 (L - 0 2)	解題時間合計 : 101''	
8001 : 讀題。(25'')		R
8002 : 由左至右寫出一、二、三、四、五的位置。	一 二 三 四 五 5元 5元 20元 2元 10元	I
8003 : 幣值最高是 20 元, 排在中間, 所以 20 元放在第三個位置。		I
8004 : 5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊, 但沒有緊鄰, 所以 5 元硬幣放在第一個位置。		I
8005 : 2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔開, 所以 2 元硬幣放在第四個位置。		I
8006 : 1 元硬幣不會排列在最後, 所以 1 元硬幣只能放在第二個位置。10 元硬幣就放在最右邊。		I
8007 : 由左至右排列順序是 5 元、1 元 20 元、2 元、10 元。(63'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
8008 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
8009 : 符合。(13'')		V
第 九 題 (L - 0 3)	解題時間合計 : 530''	
9001 : 讀題。(63'')		R
9002 : 列出 J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R。	J, L, N, M, P, W, C, A, B, F, E, R	A
9003 : L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。		A
9004 : M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。		A
9005 : R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。(302'')		A
9906 : L 比 AC 高 2 層、比 M 高 3 層。		I
9007 : L 比 R 與 P 高 5 層。		I

(S3) 口 語 資 料	解 題 行 為	階 段 代 號
9008: 所以由上而下共 6 層, 如果 L 在第 6 層, A、C 在第 4 層, M 在第 3 層、P、R 住單人房在第 1 層。(L、A、C、M、P、R 畫記)(61'')	 <p>空房在4,6樓</p>	I
9009: J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。(18'')		A
9010: 如果 J 住在第 2 層, W 住在第 5 層, E 住在第 4 層。(18'')		I
9011: N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。(21'')		A
9012: 如果 J 住在第 2 層, B、F 就沒有同一層的單人房可以住, 所以 J 不能住在第 2 層。		I
9013: 第 2 層住 B、F, 第 5 層住 N, J 住第 3 層, W 住在第 6 層。E 住在第 5 層。(B、F、N、J、W、E 畫記)		I
9014: 那麼 L 的室友應該就是 W。		I
9015: 由下而上的排列為, 一樓住 R、P, 二樓住 B、F, 三樓住 M、J, 四住樓 AC, 五樓住 N、E, 六樓住 LW,		I
9016: 空房間可能是 4 樓、6 樓。(25'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
9017: 根據题目的條件來驗證。	V	
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
9018: 符合。(22'')	V	

(S4) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																											
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：194"																												
1001：讀題。(13")	$\begin{array}{r} 999 \\ 9 \\ + 9 \\ \hline 1017 \\ 888 \\ 98 \\ + 8 \\ \hline 994 \\ 111 \\ 21 \\ + 1 \\ \hline 133 \end{array}$	R																											
1002：當 = 9，三位數應該最大，當 = 1，三位數應該最小。(31")		A																											
1003：如果 = 9，就會變成四位數，所以 = 8。(26")		I																											
1004：當 = 8， = 9 時，三位數最大。(23")		P																											
1005：888 + 98 + 8 = 994。(28")		I																											
1006：當 = 1、 = 2 時，三位數最小。(23")		P																											
1007：111 + 21 + 1 = 133。		I																											
1008：最大三位數是 994，最小三位數是 133。(37")		I																											
T：你如何驗證你的答案？																													
1009：根據題目的條件來驗證。		V																											
T：你驗證看是否符合題目條件。																													
1010：符合。(13")		V																											
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：473"																												
2001：讀題。(25")	$\begin{array}{l} 7 \div 1 = 7 \\ 100 - 1 \times 2 = 98 \\ 98 \div 2 = 49 \\ 100 \div 2 = 50 \end{array}$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>2x1</th> <th>1x1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>和</td><td>346</td><td>8</td></tr> </tbody> </table>		2x1	1x1	1	49	2	2	50	0	3	49	2	4	50	0	5	49	2	6	50	0	7	49	2	和	346	8	R
		2x1	1x1																										
1		49	2																										
2		50	0																										
3		49	2																										
4		50	0																										
5		49	2																										
6		50	0																										
7		49	2																										
和		346	8																										
2002：有 2x1、1x1 兩類的磚塊。		A																											
2003：高度共有 7÷1 = 7 層。		A																											
2004：有 1x1 和 2x1 磚塊的 1x1 的有 2 塊。	A																												
2005：2x1 有 100 - 1x2 = 98，98÷2 = 49 塊。	A																												
2006：全部是 2x1 共有 100÷2 = 50 塊。(113")	A																												
2007：第一層先使用 2x1 和 1x1 的磚塊。(畫表格)(14")	P																												
2008：第一層 2x1 的磚塊有 49 塊，1x1 的磚塊有 2 塊。	I																												
2009：第二層 2x1 的磚塊有 50 塊，1x1 的磚塊有 0 塊。	I																												
2010：第三層 2x1 的磚塊有 49 塊，1x1 的磚塊有 2 塊。	I																												
2011：第四層 2x1 的磚塊有 50 塊，1x1 的磚塊有 0 塊。	I																												
2012：第五層 2x1 的磚塊有 49 塊，1x1 的磚塊有 2 塊。	I																												

(S4) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
2013: 第六層 2x1 的磚塊有 50 塊, 1x1 的磚塊有 0 塊。		I
2014: 第七層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I
2015: 2x1 的磚塊共有 $49 \times 4 + 50 \times 3 = 196 + 150 = 346$ 。	$49 \times 4 + 50 \times 3$ $= 196 + 150$ $= 346$	I
2016: 1x1 的磚塊共有 $2 \times 4 = 8$ 。(140")		I
2018 第一層全部使用 2x1 的磚塊。(12")	2×4 $= 8$	P
2019: 第一層 2x1 的磚塊有 50 塊, 1x1 的磚塊有 0 塊。		I
2020: 第二層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I
2021: 第三層 2x1 的磚塊有 50 塊, 1x1 的磚塊有 0 塊。		I
2022: 第四層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I
2023: 第五層 2x1 的磚塊有 50 塊, 1x1 的磚塊有 0 塊。		I
2024: 第六層 2x1 的磚塊有 49 塊, 1x1 的磚塊有 2 塊。		I
2025: 第七層 2x1 的磚塊有 50 塊, 1x1 的磚塊有 0 塊。		I
2026: 2x1 的磚塊共有 $50 \times 4 + 49 \times 3 = 200 + 147 = 347$ 。		I
2027: 1x1 的磚塊共有 $2 \times 3 = 6$ 。(125")		I
T : 你如何驗證你的答案?		
2028: 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
2029: 符合。(44")		V
第三題 (N-03)	解題時間合計: 199"	
3001: 讀題。(23")		R
3002: 因為要分成相等的 2 組, 所以把所有數加起來除以 2。 $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12) \div 2 = 24$ 。每一組 24。(25")	$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12) \div 2$ $= 48 \div 2$ $= 24$	A
3003: 第一組 $12 + 11 + 1 = 24$, 第二組 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$ 。	$(12 + 11 + 1 = 24$ $3 + 5 + 7 + 9 = 24$	I
3004: 第一組 $7 + 5 + 12 = 24$, 第二組 $3 + 9 + 11 + 1 = 24$ 。		I

(S4) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																																													
3005 : 第一組 $9 + 3 + 12 = 24$, 第二組 $11 + 1 + 5 + 7 = 24$ 。(126")	$\begin{aligned} &(7+5+12=24 \\ &3+9+11+1=24 \\ \\ &(9+3+12=24 \\ &11+1+5+7=24 \end{aligned}$	I																																													
T : 你如何驗證你的答案?																																															
3006 : 根據題目的條件來驗證。		V																																													
T : 你驗證看是否符合題目條件。																																															
3007 : 符合。(25")		V																																													
第四題 (M-01)	解題時間合計 : 352"																																														
4001 : 讀題。(17")	 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <thead> <tr> <th>15點</th> <th>正</th> <th>反</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>和</td><td>20</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>27</td><td></td></tr> </tbody> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr> <th>21點</th> <th>正</th> <th>反</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>15</td><td>10</td></tr> <tr><td>2</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>和</td><td>35</td><td>13</td></tr> <tr><td></td><td>48</td><td></td></tr> </tbody> </table>	15點	正	反	1	10	6	2	6	1	3	3	0	4	1	0	和	20	7		27		21點	正	反	1	15	10	2	10	3	3	6	0	4	3	0	5	1	0	和	35	13		48		R
15點		正	反																																												
1		10	6																																												
2		6	1																																												
3		3	0																																												
4		1	0																																												
和		20	7																																												
		27																																													
21點		正	反																																												
1		15	10																																												
2		10	3																																												
3		6	0																																												
4		3	0																																												
5		1	0																																												
和		35	13																																												
	48																																														
4002 : 在點與點之間畫線。把正三角形分邊長為 1、2、3、4 ,(畫表格)。(65")	P																																														
4003 : 邊長為 1 的正有 10、反有 6。	I																																														
4004 : 邊長為 2 的正有 6、反有 1。	I																																														
4005 : 邊長為 3 的正有 3、反有 0。	I																																														
4006 : 邊長為 4 的正有 1、反有 0。	I																																														
4007 : 15 點正的有 20、反的有 7 , 共有 27。(121")	I																																														
4008 : 補 6 個點並把點與點之間的線連起來 , 並把正三角形分邊長為 1、2、3、4、5 (畫表格)。(57")	P																																														
4009 : 邊長為 1 的正有 15、反有 10。	I																																														
4010 : 邊長為 2 的正有 10、反有 3。	I																																														
4011 : 邊長為 3 的正有 6、反有 0。	I																																														
4012 : 邊長為 4 的正有 3、反有 0。	I																																														
4013 : 邊長為 5 的正有 1、反有 0。	I																																														
4014 : 21 點正有 35 , 反有 13 , 共有 48。(70")	I																																														
T : 你如何驗證你的答案?																																															
4015 : 根據題目的條件來驗證。	V																																														
T : 你驗證看是否符合題目條件。																																															
4016 : 符合。(22")		V																																													
第 五 題 (M - 0 2)	解題時間合計 : 244"																																														
5001 : 讀題。(25")	 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	2	3	4	3	2	1	R																																							
2		3	4																																												
3	2	1																																													
5002 : 圖 1 第一行最大數 3 , 圖 3 第一行有 3 個正方形 ; 第二行最大數 4 , 圖 3 第二行有 4 個正方形。(92")	A																																														

(S4) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號												
5003：第一個圖：第一行最大數是3，所以畫3個正方形，第二行（最大數是3，所以畫3個正方形，第三行最大數是4，所以畫4個正方形。	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> 	4	3	5	1	4	1	3	2	3	I			
4	3	5												
1	4	1												
3	2	3												
5004：第二個圖：第一行最大數是4，所以畫4個正方形，第二行最大數是4，所以畫4個正方形，第三行最大數是5，所以畫5個正方形。	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table> 	4	1	3	3	1	1	2	4	2	2	4	5	I
4	1	3	3											
1	1	2	4											
2	2	4	5											
5005：第三個圖：第一行最大數是4，所以畫4個正方形，第二行最大數是2，所以畫2個正方形，第三行最大數是4，所以畫4個正方形，第四行最大數是5，所以畫5個正方形。	<p>答：直行的堆積圖形中最大的數就是正面圖的個數。</p>	I												
5006：直行的堆積圖形中最大的數就是正面圖的個數。(103'')		I												
T：你如何驗證你的答案？														
5007：根據題目的條件來驗證。		V												
T：你驗證看是否符合題目條件。														
5008：符合。(24'')		V												
第 六 題 (M - 0 3)	解題時間合計：305''													
6001：讀題。(18'')		R												
6002：先考慮沒有接觸的盒子外側的正方體個數，全部個數減去沒有接觸的盒子外側的正方體的個數剩下就是有接觸盒子外側的正方體個數。(143'')	$(4-2) \times (4-2) \times (4-2)$ $= 2 \times 2 \times 2$ $= 8 \dots \text{沒有接觸的}$	P												
6003：以長寬高來看，長有4層，扣掉接觸盒子外測的剩下2層。		A												
6004：寬有4層，扣掉接觸盒子外測的剩下2層。	$64 - 8$ $= 56 \dots \text{有接觸的}$	A												
6005：高有4層，扣掉接觸盒子外測的剩下2層。(95'')		A												
6006：沒接觸的有 $(4-2) \times (4-2) \times (4-2) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ 。		I												
6007：有接觸的 $64 - 8 = 56$ 。(26'')		I												
T：你如何驗證你的答案？														
6008：根據題目的條件來驗證。		V												
T：你驗證看是否符合題目條件。														

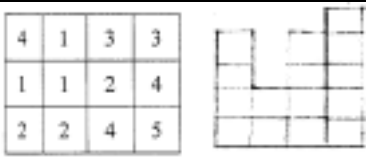
(S4) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
6009 : 符合。(23'')		V
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計 : 289''	
7001 : 讀題。(46'')		R
7002 : 數列 : 58、29、24、12、6、54、27、 22、11、6、54、27、22、11、6 (150'')	$\begin{array}{l} 58, 29, 24, 12, \\ 6, 54, 27, 22, 11, \\ \hline 6, 54, 27, 22, 11, 6, \end{array}$	A
7003 : 數列規律從第 5 項開始重複 6、54、27、 22、11 (畫底線)。	$\begin{array}{l} (15-4) \div 5 = 2 \dots 1 \\ (27-4) \div 5 = 4 \dots 3 \end{array}$	I
7004 : $(15-4) \div 5 = 2 \quad 1$, 第 15 項 : 6。	6 ... 15 項	I
7005 : $(27-4) \div 5 = 4 \quad 3$, 第 27 項 : 27。(72'')	27 ... 27 項	I
T : 你如何驗證你的答案?		
7006 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
7007 : 符合。(21'')		V
第八題 (L-02)	解題時間合計 : 83''	
8001 : 讀題。(25'')		R
8002 : 由左至右寫出一、二、三、四、五的位 置。	一、二、三、四、五	I
8003 : 幣值最高是 20 元, 排在中間, 所以第 三個位置是 20。	5元 1元 20元 2元 10元	I
8004 : 5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊, 但沒有 緊鄰, 所以 5 元硬幣排在第一個位置。		I
8005 : 2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔 開, 所以 2 元硬幣排在第四。		I
8006 : 1 元硬幣不會排列在最後, 所以 1 元硬 幣只能排在第二。10 元硬幣就排在第 五。		I
8007 : 由左至右排列順序是 5 元、1 元 20 元、 2 元、10 元。(45'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
8008 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
8009 : 符合。(13'')		V

(S4) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
第九題 (L-03)	解題時間合計：490"	
9001：讀題。(57")		R
9002：L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。		A
9003：與 A、C 有關的條件是 M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。		A
9004：R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層又與 M 有相關。(301")		A
9005：由上而下共 6 樓，如果 L 在 6 樓，A、C 在 4 樓，M 在 3 樓、P、R 住單人房在 1 樓。(48")		I
9006：N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。(15")		A
9007：因為 B、F 住單人房只有在 2 樓有二間，所以 B、F 只能住在 2 樓，N 住在 5 樓。(13")		I
9008：J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。(16")		A
9009：J 住在 3 樓，W 住在 6 樓，E 住在 5 樓。		I
9010：因為 L 的室友不知道，所以 W 是 L 的室友。		I
9011：由下而上的排列为，1 樓住 R、P，2 樓住 B、F，3 樓住 M、J，4 住樓 AC，5 樓住 N、E，6 樓住 LW。		I
9012：空房間可能是 6 樓、4 樓。(20")		I
T：你如何驗證你的答案？		
9013：根據题目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
9014：符合。(20")	V	

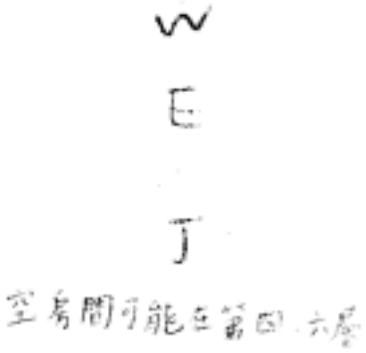
(S5) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																								
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：210"																									
1001：讀題。(15")	<p>最大</p> $\begin{array}{r} 999 \\ 89 \\ 9 \\ \hline 1097 \end{array}$ <p>最小：</p> $\begin{array}{r} 111 \\ 21 \\ 1 \\ \hline 133 \end{array}$	R																								
1002： $a = 9$ ， $b = 8$ 時三位數應該最大。(41")		P																								
1003：如果 $a = 9$ ， $b = 8$ ， $999 + 89 + 9 = 1097$ ， 就會變成四位數，所以 b 不會是 9。 (43")		A																								
1004： $a = 8$ ， $b = 9$ 時，最大是 $888 + 98 + 8 = 994$ 。(35")		I																								
1005： $a = 1$ ， $b = 2$ 時三位數應該最小。(28")		P																								
1006： $a = 1$ ， $b = 2$ ，最小是 $111 + 21 + 1 = 133$ 。		I																								
1007：最大三位數是 994，最小三位數是 133。 (34")		I																								
T：你如何驗證你的答案？																										
1009：根據題目的條件來驗證。		V																								
T：你驗證看是否符合題目條件。																										
1010：符合。(14")		V																								
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：520"																									
2001：讀題。(28")	<p>$7 \div 1 = 7$</p> <p>$100 \div 2 = 50$</p> <p>$(100 - 2 \times 1) \div 2 = 49$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>1x1</th> <th>2x1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>2</td><td>49</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>50</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>49</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>50</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>49</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>50</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>49</td></tr> </tbody> </table>		1x1	2x1	1	2	49	2	0	50	3	2	49	4	0	50	5	2	49	6	0	50	7	2	49	R
		1x1	2x1																							
1		2	49																							
2		0	50																							
3		2	49																							
4		0	50																							
5		2	49																							
6		0	50																							
7		2	49																							
2002：高度共有 $7 \div 1 = 7$ 層。		A																								
2003：全部是 2×1 共有 $100 \div 2 = 50$ 塊。		A																								
2004：有 1×1 和 2×1 的 1×1 的有 2 塊。		A																								
2005： 2×1 有 $(100 - 1 \times 2) \div 2 = 49$ 塊。(143")	A																									
2006：先使用有 1×1 和 2×1 的磚塊 (畫表)。 (15")	P																									
2007：第一層 1×1 的磚塊有 2 塊， 2×1 的磚塊有 49 塊。(畫表格)	I																									
2008：第二層 1×1 的磚塊有 0 塊， 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																									
2009：第三層 1×1 的磚塊有 2 塊， 2×1 的磚塊有 49 塊。	I																									
2010：第四層 1×1 的磚塊有 0 塊， 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																									
2011：第五層 1×1 的磚塊有 2 塊， 2×1 的磚塊有 49 塊。	I																									
2012：第六層 1×1 的磚塊有 0 塊， 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																									

(S5) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																								
2013 : 第七層 1×1 的磚塊有 2 塊, 2×1 的磚塊有 49 塊。	$2 \times 4 = 8 \dots 1 \times 1$ $50 \times 3 = 150$ $49 \times 4 = 196$ $150 + 196 = 346 \dots 2 \times 1$ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td></td> <td>1×1</td> <td>2×1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>49</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2</td> <td>49</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>2</td> <td>49</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>0</td> <td>50</td> </tr> </table> $2 \times 3 = 6 \dots 1 \times 1$ $50 \times 4 = 200$ $49 \times 3 = 147$ $200 + 147 = 347 \dots 2 \times 1$		1×1	2×1	1	0	50	2	2	49	3	0	50	4	2	49	5	0	50	6	2	49	7	0	50	I
		1×1	2×1																							
1		0	50																							
2		2	49																							
3		0	50																							
4		2	49																							
5		0	50																							
6		2	49																							
7		0	50																							
2014 : $2 \times 4 = 8$ 塊 1×1 的磚塊。		I																								
2015 : $50 \times 3 = 150$, $49 \times 4 = 196$, 共有 $150 + 196 = 346$ 塊 2×1 的磚塊。(151'')		I																								
2016 : 第一層全部使用 2×1 的磚塊。(12'')		P																								
2017 : 第一層 1×1 的磚塊有 0 塊, 2×1 的磚塊有 50 塊。		I																								
2018 : 第二層 1×1 的磚塊有 2 塊, 2×1 的磚塊有 49 塊。		I																								
2019 : 第三層 1×1 的磚塊有 0 塊, 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																									
2020 : 第四層 1×1 的磚塊有 2 塊, 2×1 的磚塊有 49 塊。	I																									
2021 : 第五層 1×1 的磚塊有 0 塊, 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																									
2022 : 第六層 1×1 的磚塊有 2 塊, 2×1 的磚塊有 49 塊。	I																									
2023 : 第七層 1×1 的磚塊有 0 塊, 2×1 的磚塊有 50 塊。	I																									
2024 : $2 \times 3 = 6$ 塊 1×1 的磚塊。	I																									
2025 : $50 \times 4 = 200$, $49 \times 3 = 147$, 共有 $200 + 147 = 347$ 塊 2×1 的磚塊。(122'')	I																									
T : 你如何驗證你的答案?																										
2026 : 根據題目的條件來驗證。		V																								
T : 你驗證看是否符合題目條件。																										
2027 : 符合。(49'')		V																								
第 三 題 (N - 0 3)	解題時間合計 : 238''																									
3001 : 讀題。(22'')	$(1+3+5+7+9+11+12) \div 2 = 24$ 1: 1, 11, 3, 9 2: 5, 7, 12 1: 1, 11, 12 2: 3, 9, 5, 7 1: 1, 11, 5, 7 2: 3, 9, 12	R																								
3002 : 因為要分為和相等的 2 組把所有數加起來除以 2。($1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12$) $\div 2 = 24$ 。(27'')		A																								
3003 : 第一個解: 第 1 組: 1、11、3、9, 第 2 組: 5、7、12。		I																								
3004 : 第二個解: 第 1 組: 1、11、12, 第 2 組: 3、9、5、7。		I																								
3005 : 第三個解: 第 1 組: 1、11、5、7, 第 2 組: 3、9、12。		I																								
T : 你如何驗證你的答案?																										

(S5) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號	
3006：根據題目的條件來驗證，沒有其他的解，因為每個數的組合都已使用過。		V	
T：你驗證看是否符合題目條件。			
3007：符合。(25")		V	
第 四 題 (M - 0 1)	解題時間合計：413"		
4001：讀題。(16")	 <p>正：1:10 反：1:6 2:6 2:1 3:3 3:0 4:1 4:0 ————— 20 7</p> <p>15點：20+7=27</p> <p>正：1:15 反：1:10 2:10 2:3 3:6 3:0 4:3 4:0 5:1 5:0 ————— 35 13</p> <p>21點：35+13=48</p>	R	
4002：畫點與點之間的直線，正三角形區分為邊長為1、2、3、4。(93")		P	
4003：邊長為1的正有10、反有6。		I	
4004：邊長為2的正有6、反有1。		I	
4005：邊長為3的正有3、反有0。		I	
4006：邊長為4的正有1、反有0。		I	
4007：15點共有20+7=27個正三角形(147")		I	
4008：補6個點畫點與點之間的直線，正三角形區分為邊長為1、2、3、4、5。(62")		P	
4009：邊長為1的正有15、反有10。		I	
4010：邊長為2的正有10、反有3。		I	
4011：邊長為3的正有6、反有0。		I	
4012：邊長為4的正有3、反有0。		I	
4013：邊長為5的正有1、反有0。		I	
4014：21點共有35+13=48個正三角形(73")		I	
T：你如何驗證你的答案？			
4015：根據題目的條件來驗證。			V
T：你驗證看是否符合題目條件。			
4016：符合。(22")		V	
第 五 題 (M - 0 2)	解題時間合計：275"		
5001：讀題。(28")		R	
5002：圖1第一行最大數3，圖3第一行有3個正方形；第二行最大數4，圖3第二行有4個正方形。(110")		A	
5003：第一個圖：第一行最大數是3，所以畫3個正方形，第二行最大數是3，所以畫3個正方形，第三行最大數是4，所以畫4個正方形。		I	

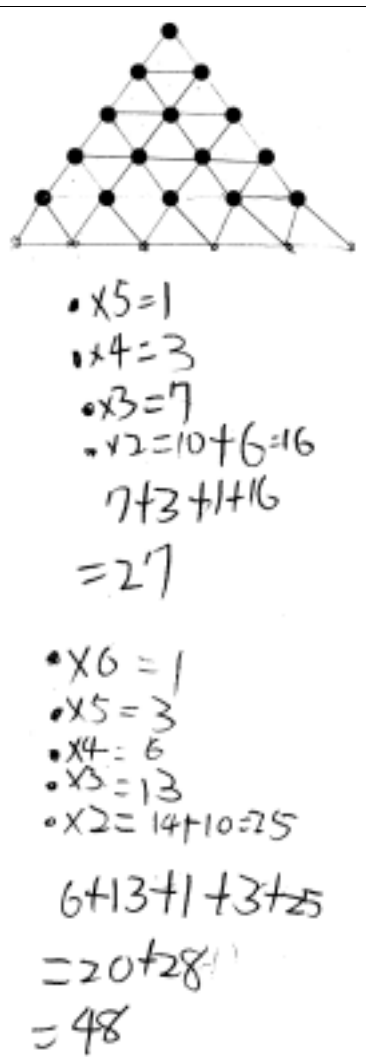
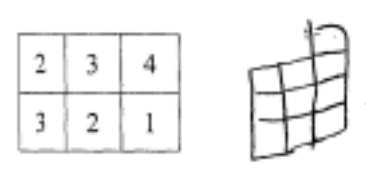
(S5) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
5004：第二個圖：第一行最大數是 4，所以畫 4 個正方形，第二行最大數是 4，所以畫 4 個正方形，第三行最大數是 5，所以畫 5 個正方形。	 <p>直行中的大數,就是正方形個數</p>	I
5005：第三個圖：第一行最大數是 4，所以畫 4 個正方形，第二行最大數是 2，所以畫 2 個正方形，第三行最大數是 4，所以畫 4 個正方形，第四行最大數是 5，所以畫 5 個正方形。		I
5006：直行中的最大數就是正方形個數。 (112'')		I
T：你如何驗證你的答案？		
5007：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
5008：符合。(25'')		V
第 六 題 (M - 0 3)		解題時間合計：291''
6001：讀題。(20'')	<p>有接觸的</p> $4 \times 4 \times 2 = 32$ $4 \times 2 \times 2 = 16$ $2 \times 2 \times 2 = 8$ $32 + 16 + 8 = 56$ $64 - 56 = 8 \dots \text{沒接觸的}$	R
6002：先考慮有接觸的，再已全部 64 個減去有接觸的，剩下就是沒接觸的。(141'')		P
6003：上下兩面有 $4 \times 4 \times 2 = 32$ 個。		A
6004：左右兩面剩下 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 個。		A
6005：前後兩面剩下 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個。(82'')		A
6007： $32 + 16 + 8 = 56$ 。		I
6006：有 $64 - 56 = 8$ 個沒有接觸的。(23'')		I
T：你如何驗證你的答案？		
6007：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
6008：符合。(25'')	V	
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計：372''	
7001：讀題。(48'')	$58, 29, 24, 12, 6, 54,$ $27, 22, 11, 6, 54, 27$ <p>規律：從第 5 項開始重複 6, 54, 27, 22, 11</p> <p>第 15 項是 6</p> <p>第 27 項是 27</p>	R
7002：數列：58、29、24、12、6、54、27、22、11、6、54、27、(203'')		A
7003：數列的規律為從第五項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。		I
7004：這個數列的第 15 項是 6。		I
7005：這個數列的第 27 項是 27。(95'')		I
T：你如何驗證你的答案？		
7006：根據題目的條件來驗證。		V

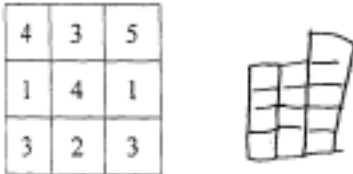

(S5) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
7007 : 符合。(26'')		V
第 八 題 (L - 0 2)	解題時間合計：94''	
8001 : 讀題。(23'')		R
8002 : 由左至右寫出一、二、三、四、五的位置。		I
8003 : 幣值最高是 20 元，排在中間，所以第三個位置是 20。		I
8004 : 5 元硬幣排在第一個位置，因為 5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊，但沒有緊鄰。		I
8005 : 2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔開，所以 2 元硬幣排在第四。		I
8006 : 1 元硬幣只能排在第二，因為 1 元硬幣不會排列在最後，10 元硬幣就排在最後。		I
8007 : 由左至右排列順序是 5 元、1 元 20 元、2 元、10 元。(53'')		I
T : 你如何驗證你的答案？		
8008 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
8009 : 符合。(18'')		V
第 九 題 (L - 0 3)	解題時間合計：502''	
9001 : 讀題。(61'')		R
9002 : L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。		A
9003 : M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。		A
9004 : R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層 (312'')		A
9005 : 共有六層，L 在第六層，A、C 在第四層，M 在第三層、P、R 住單人房在第一層。(53'')		I
9006 : N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高三層。(12'')		A
9007 : B、F 住在第二層，N 住在上面第五層。因為只有第二層有二間房間，其他的都沒有。(15'')		I
9008 : J 住單人房，住的樓層比 W 低三層、比 E 低二層。(11'')		A

(S5) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
9009 : 所以 J 只能住在第三層, W 住在第六層, E 住在第五層。		I
9010 : W 住在第六層, 所以 W 是 L 的室友。		I
9011 : 由下而上的排列為, 一樓住 R、P, 二樓住 B、F, 三樓住 M、J, 四住樓 AC, 五樓住 N、E, 六樓住 LW。		I
9012 : 空房間可能是第四層、六層。(22'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
9013 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
9014 : 符合。(16'')		V

(S6) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																								
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：195"																									
1001：讀題。(14")	$\begin{array}{r} 999 \\ 89 \\ + 9 \\ \hline 1097 \\ \\ 888 \\ 18 \\ + 8 \\ \hline 994 \\ \\ 111 \\ 21 \\ + 1 \\ \hline 133 \end{array}$	R																								
1002：當 $x=9$ 時，應該是最大三位數。當 $x=1$ 時，應該是最小三位數。(43")		A																								
1003：如果 $x=9$ 、 $y=8$ ，和等於 1097，就變成四位數，所以不符合條件。		I																								
1004：當 $x=8$ ， $y=9$ 時，最大是 $888+98+8=994$ 。		I																								
1005： $x=1$ ， $y=2$ ，最小是 $111+21+1=133$ 。		I																								
1006：最大三位數是 994，最小三位數是 133。(123")		I																								
T：你如何驗證你的答案？																										
1007：根據題目的條件來驗證。		V																								
T：你驗證看是否符合題目條件。																										
1008：符合。(15")		V																								
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：457"																									
2001：讀題。(25")	$17 \div 1 = 7$ $100 \div 2 = 50$ $(100-2) \div 2 = 49$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>2x1</th> <th>1x1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>50</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>		2x1	1x1	1	50	0	2	49	2	3	50	0	4	49	2	5	50	0	6	49	2	7	50	0	R
		2x1	1x1																							
1		50	0																							
2		49	2																							
3		50	0																							
4		49	2																							
5		50	0																							
6		49	2																							
7		50	0																							
2002：高度共有 $7 \div 1 = 7$ 層。		A																								
2003：全部是 2×1 的磚塊有 $100 \div 2 = 50$ 。		A																								
2004：有 1×1 和 2×1 的 1×1 的有 2 塊。		A																								
2005： 2×1 有 $(100-2) \div 2 = 49$ 塊。(109")		A																								
2006：先使用全部是 2×1 的磚塊 (畫表格)。(13")	P																									
2007：第一層使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的有 0 塊。	I																									
2008：第二層使用 2×1 的有 49 塊， 1×1 的有 2 塊。	I																									
2009：第三層使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的有 0 塊。	I																									
2010：第四層使用 2×1 的有 49 塊， 1×1 的有 2 塊。	I																									
2011：第五層使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的有 0 塊。	I																									
2012：第六層使用 2×1 的有 49 塊， 1×1 的有 2 塊。	I																									
2013：第七層使用 2×1 的有 50 塊， 1×1 的有 0 塊。	I																									

(S6) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號																								
2014: 2×1 的磚塊共有 $50 \times 4 = 200$, $49 \times 3 = 147$, $200 + 147 = 347$ 。	$50 \times 4 = 200$	I																								
2015: 1×1 的磚塊共有 $2 \times 3 = 6$ 。(138")	$49 \times 3 = 147$	I																								
2016: 先使用有 1×1 和 2×1 的磚塊 (畫表)。 (11")	$3 \times 2 = 6$	P																								
2017: 第一層使用 2×1 的有 49 塊, 1×1 的有 2 塊。	$\begin{array}{r} 200 \\ + 147 \\ \hline 347 \end{array}$	I																								
2018: 第二層使用 2×1 的有 50 塊, 1×1 的有 0 塊。		I																								
2019: 第三層使用 2×1 的有 49 塊, 1×1 的有 2 塊。	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2×1</th> <th>1×1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>50</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>49</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>		2×1	1×1	1	49	2	2	50	0	3	49	2	4	50	0	5	49	2	6	50	0	7	49	2	I
	2×1	1×1																								
1	49	2																								
2	50	0																								
3	49	2																								
4	50	0																								
5	49	2																								
6	50	0																								
7	49	2																								
2020: 第四層使用 2×1 的有 50 塊, 1×1 的有 0 塊。		I																								
2021: 第五層使用 2×1 的有 49 塊, 1×1 的有 2 塊。		I																								
2022: 第六層使用 2×1 的有 50 塊, 1×1 的有 0 塊。		I																								
2023: 第七層使用 2×1 的有 49 塊, 1×1 的有 2 塊。		I																								
2024: 2×1 的磚塊共有 $50 \times 3 = 150$, $49 \times 4 = 196$, $150 + 196 = 346$ 。	$50 \times 3 = 150$	I																								
2025: 1×1 的磚塊共有 $2 \times 4 = 8$ 。(118")	$49 \times 4 = 196$	I																								
T : 你如何驗證你的答案?	$2 \times 4 = 8$	V																								
2026: 根據題目的條件來驗證。	$\begin{array}{r} 150 \\ + 196 \\ \hline 346 \end{array}$	V																								
T : 你驗證看是否符合題目條件。		V																								
2027: 符合。(43")		V																								
第 三 題 (N - 0 3)	解題時間合計: 210"																									
3001: 讀題。(22")		R																								
3002: 因為要分成 2 組, 所以把所有數加起來 除以 2。	$1+3+5+7+9+11+12=48$	A																								
3003: $1+3+5+7+9+11+12=48$ 。	$48 \div 2 = 24$	A																								
3004: $48 \div 2 = 24$ 。(26")	$\begin{array}{r} 0 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \\ \hline 13 \cdot 9 \cdot 11 \\ \hline 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 3 \\ \hline 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 \\ \hline 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \end{array}$	A																								
3005: ①第一組 12、5、7, 第二組 1、3、9、 11。		I																								
3006: ②第一組 12、9、3, 第二組 11、7、5、 1。		I																								
3007: ③第一組 12、11、1, 第二組 3、5、7、 9。(138")		I																								

(S6) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
T : 你如何驗證你的答案?		
3008 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
3009 : 符合。(24'')		V
第 四 題 (M - 0 1)	解題時間合計: 400''	
4001 : 讀題。(18'')	 <p> $\bullet \times 5 = 1$ $\bullet \times 4 = 3$ $\bullet \times 3 = 7$ $\bullet \times 2 = 10 + 6 = 16$ $7 + 3 + 1 + 16 = 27$ </p> <p> $\bullet \times 6 = 1$ $\bullet \times 5 = 3$ $\bullet \times 4 = 6$ $\bullet \times 3 = 13$ $\bullet \times 2 = 14 + 10 = 25$ $6 + 13 + 1 + 3 + 25 = 20 + 28 = 48$ </p>	R
4002 : 因為 2 個點可以劃一直線, 所以 15 個點, 可以分成: 5 個點 4 個點 3 個點、2 個點等 4 類。(畫線)(92'')		P
4003 : 5 個點的有 1 個三角形。		I
4004 : 4 個點的有 3 個三角形。		I
4005 : 3 個點的有 7 個三角形。		I
4006 : 2 個點的有 $10 + 6 = 16$ 個三角形。		I
4007 : 15 個點的共有 $7 + 3 + 1 + 16 = 27$ 個三角形。(141'')		I
4008 : 21 個點, 補 6 個點, 可以分成: 6 個點、5 個點 4 個點 3 個點 2 個點等 5 類。(畫線)(60'')		P
4009 : 6 個點的有 1 個三角形。		I
4010 : 5 個點的有 3 個三角形。		I
4011 : 4 個點的有 6 個三角形。		I
4012 : 3 個點的有 13 個三角形。		I
4013 : 2 個點的有 $14 + 1 + 10 = 25$ 個三角形。		I
4014 : 21 個點的共有 $6 + 13 + 1 + 3 + 25 = 20 + 28 = 48$ 個三角形。(68'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
4015 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
4016 : 符合。(21'')		V
第五題 (M-02)	解題時間合計: 195''	
5001 : 讀題。(26'')		R
5002 : 圖 1 第一行最大數 3 第二行最大數 4, 圖 3 第一行有 3 個正方形、第二行有 4 個正方形。(45'')		A
5003 : 第一個圖: 第一行最大數 3、第二行最大數 3, 第三行最大數 4, 所以第一行畫 3 個正方形, 第二行畫 3 個正方形、第三行畫 4 個正方形。		I

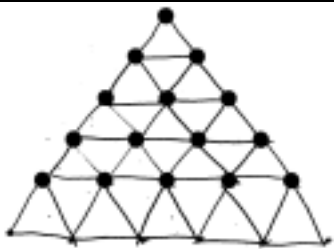
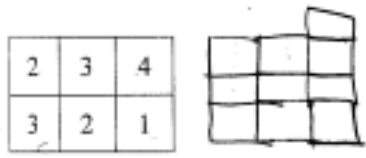
(S6) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
5004 : 第二個圖 : 第一行最大數 4、第二行最大數 4、第三行最大數 5, 所以畫第一行 4 個正方形、第二行畫 4 個正方形、第三行畫 5 個正方形。		I
5005 : 第三個圖 : 第一行最大數 4、第二行最大數 2、第三行最大數 4、第四行最大數 5, 第一行畫 4 個正方形、第二行畫 2 個正方形、第三行畫 4 個正方形、第四行畫 5 個正方形。		I
5006 : 每一直行的最大的數就是要畫的個數。 (101'')		I
T : 你如何驗證你的答案 ?	每一行最大的數就是要畫的個數	
5007 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
5008 : 符合。(23'')		V
第 六 題 (M - 0 3)	解題時間合計 : 144''	
6001 : 讀題。(19'')		R
6002 : 先考慮有接觸的盒子外側的正方體個數, 再已全部 64 個減去有接觸的, 剩下就是沒接觸的盒子外側的正方體個數。(41'')	$4 \times 4 \times 2 + 4 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2$ $= 32 + 16 + 8$ $= 56$ $64 - 56 = 8$ <p style="text-align: center;">有 = 56 沒 = 8</p>	P
6003 : 上下兩層有 $4 \times 4 \times 2$ 。		A
6004 : 左右剩下 $4 \times 2 \times 2$ 。		A
6005 : 前後剩下 $2 \times 2 \times 2$ 。(43'')		A
6006 : 所以有接觸共有 $4 \times 4 \times 2 + 4 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 32 + 16 + 8 = 56$ 。		I
6007 : 沒有接觸的 $64 - 56 = 8$ 。		I
6008 : 有接觸的有 56 個, 沒有接觸的有 8 個。 (23'')		I
T : 你如何驗證你的答案 ?		
6009 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
6010 : 符合。(18'')		V
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計 : 364''	
7001 : 讀題。(49'')	$582824 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 58 \cdot 27 \cdot 22 \cdot 11$ $6154 \cdot 27 \cdot 22 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 58 \cdot 27 \cdot 22 \cdot 116$ $158 \cdot 27 \cdot 22 \cdot 116 \cdot 54 \cdot 27$	R

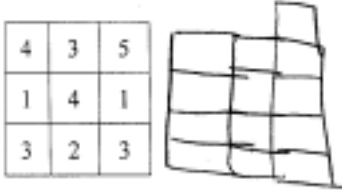
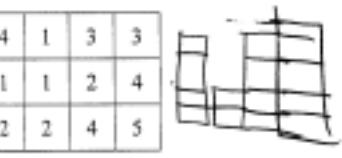
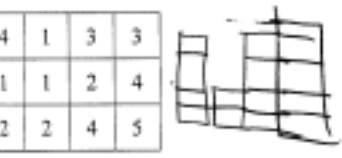
(S6) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
7002 : 數列 : 58、29、24、12、6、54、27、 22、11、6、54、27、22、11、6、54、 27、22、11、6、54、27、22、11、6、 54、27、22、11、6、54、54、27 (197'')	<p>從第5項開始循環: 6, 54, 27, 22, 11.</p> <p>第15項 = 6</p> <p>第27項 = 27</p>	A
7003 : 這個數列的規律是從第 5 項開始循環 6、54、27、22、11。		I
7004 : 第 15 項 = 6。		I
7005 : 第 27 項 = 27。(93'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
7006 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
7007 : 符合。(25'')		V
第 八 題 (L - 0 2)	解題時間合計 : 65''	
8001 : 讀題。(24'')		R
8002 : 由左至右寫出①、②、③、④、⑤的位 置。		I
8003 : 幣值最高是 20 元，排在中間，所以③ 是 20。		I
8004 : 5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊，但沒有 緊鄰，所以 5 元硬幣排在①。		I
8005 : 2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔 開，所以 2 元硬幣排在④。		I
8006 : 1 元硬幣不會排列在最後，所以 1 元硬 幣只能排在②。10 元硬幣就排在⑤。		I
8007 : 由左至右排列順序是 5 元、1 元 20 元、 2 元、10 元。(29'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
8008 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
8009 : 符合。(12'')	V	
第 九 題 (L - 0 3)	解題時間合計 : 480''	
9001 : 讀題。(60'')		R
9002 : L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。(畫表)		A
9003 : M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。		A
9004 : R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層 (289'')		A

(S6) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
9005 : 由上而下共 6 樓, 如果 L 住 6 樓, A、C 住在第三層, M 住在 3 樓、P、R 住單人房在 1 樓。(55'')		I
9006 : N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。(10'')		A
9007 : 所以 B、F 只能住在 2 樓, N 住在 5 樓。因為只有 2 樓有兩間空房間。(16'')		I
9008 : J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。(12'')		A
9009 : 所以 J 只能住在 3 樓, W 住在 6 樓, E 住在 5 樓。		I
9010 : L 的室友是 W。		I
9011 : 由下而上的排列為, 一樓住 R、P, 二樓住 B、F, 三樓住 M、J, 四住樓 AC, 五樓住 N、E, 六樓住 LW,		I
9012 : 空房間可能在六樓、四樓。(18'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
9013 : 根據题目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
9014 : 符合。(20'')	V	


(S7) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
第 一 題 (N - 0 1)	解題時間合計：117''	
1001：讀題。(13'')	$\begin{array}{r} 1099 \\ + 89 \\ + 9 \\ \hline 1097 \end{array}$ <p>最大</p> $\begin{array}{r} 128 \\ 98 \\ + 8 \\ \hline 994 \end{array}$ <p>最小</p> $\begin{array}{r} 111 \\ 21 \\ + 1 \\ \hline 133 \end{array}$	R
1002：當 = 9，三位數最大。(15'')		A
1003： = 9、 = 8， $999 + 89 + 9 = 1097$ ，就會變成四位數，所以 不會是 9。(14'')		I
1004： = 8， = 9，最大三位數。(12'')		P
1005： $888 + 98 + 8 = 994$ 。(14'')		I
1006：當 = 1，三位數最小。(12'')		A
1007： = 1， = 2，三位數最小。(13'')		P
1008： $111 + 21 + 1 = 133$ 。		I
1009：最大三位數是 994，最小三位數是 133。(12'')		I
T：你如何驗證你的答案？		
1010：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
1011：符合。(12'')		V
第 二 題 (N - 0 2)	解題時間合計：500''	
2001：讀題。(29'')	$7 \div 1 = 7$ $100 - (1+1) = 98$ $98 \div 2 = 49$ $100 \div 2 = 50$	R
2002：圍牆高 7 公尺，磚塊高 1 公尺，所以圍牆高度共有 $7 \div 1 = 7$ 層。		A
2003：有 1×1 和 2×1 的 1×1 的有 2 塊。		A
2004： $100 - (1 + 1) = 98$ 。		A
2005： $98 \div 2 = 49$ 塊。		A
2006：全部是 2×1 共有 $100 \div 2 = 50$ 塊。(132'')		A
2007：第一層全部使用 2×1 的磚塊。(12'')		P
2008：第一層 1×1 的磚塊有 0 塊， 2×1 的磚塊有 50 塊。		I
2009：第二層 1×1 的磚塊有 2 塊， 2×1 的磚塊有 49 塊。		I
2010：第三層 1×1 的磚塊有 0 塊， 2×1 的磚塊有 50 塊。		I
2011：第四層 1×1 的磚塊有 2 塊， 2×1 的磚塊有 49 塊。		I

(S7) 口 語 資 料	解 題 行 為	階 段 代 號	
2012 : 第五層 1x1 的磚塊有 0 塊 , 2x1 的磚塊有 50 塊。		I	
2013 : 第六層 1x1 的磚塊有 2 塊 , 2x1 的磚塊有 49 塊。		I	
2014 : 第七層 1x1 的磚塊有 0 塊 , 2x1 的磚塊有 50 塊。		I	
2015 : 1x1 的磚塊共有 6 塊。		I	
2016 : 2x1 的磚塊共有 $147 + 200 = 347$ 塊。 (147'')		I	
2017 : 第一層先使用 2x1 和 1x1 兩種磚塊。 (13'')		1x1 有 6	P
2018 : 第一層 1x1 的磚塊有 2 塊 , 2x1 的磚塊有 49 塊。		2x1 有 $147 + 200 = 347$	I
2019 : 第二層 1x1 的磚塊有 0 塊 , 2x1 的磚塊有 50 塊。		∴ 2x1 有 347	I
2020 : 第三層 1x1 的磚塊有 2 塊 , 2x1 的磚塊有 49 塊。		1x1 有 8	I
2021 : 第四層 1x1 的磚塊有 0 塊 , 2x1 的磚塊有 50 塊。		2x1 有 $196 + 150 = 346$	I
2022 : 第五層 1x1 的磚塊有 2 塊 , 2x1 的磚塊有 49 塊。		∴ 2x1 有 346	I
2023 : 第六層 1x1 的磚塊有 0 塊 , 2x1 的磚塊有 50 塊。			I
2024 : 第七層 1x1 的磚塊有 2 塊 , 2x1 的磚塊有 49 塊。			I
2025 : 1x1 的磚塊共有 8。		I	
2026 : 2x1 的磚塊共有 $196 + 150 = 346$ (125'')		I	
T : 你如何驗證你的答案 ?			
2027 : 根據题目的條件來驗證。		V	
T : 你驗證看是否符合題目條件。			
2028 : 符合。(42'')		V	
第 三 題 (N - 0 3)	解題時間合計 : 196''		
3001 : 讀題。(21'')		R	
3002 : 因為要把這 7 個數分成和相等的 2 組 , 所以把所有數加起來除以 2。($1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12$) $\div 2 = 48 \div 2 = 24$ (24'')	$(1+3+5+7+9+11+12) \div 2$ $= 48 \div 2 = 24$	A	
3003 : ① 第一組 $12 + 11 + 1$, 第二組 $3 + 5 + 7 + 9$ 。		I	

(S7) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
3004 : ②第一組 $5 + 7 + 12$, 第二組 $1 + 3 + 9 + 11$ 。	① $12+11+1$ $3+5+7+9$ ② $5+7+12$ $1+3+9+11$ ③ $5+1+11+7$ $3+9+12$	I
3005 : ③第一組 $5 + 1 + 11 + 7$, 第二組 $3 + 9 + 12$ 。(125'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
3006 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
3007 : 符合。(26'')		V
第 四 題 (M - 0 1)		解題時間合計 : 327''
4001 : 讀題。(17'')	 <p>1有16 2有$6+1=7$ 3有$3+0=3$ 4有$1+0=1$ 15點\Rightarrow 27個正Δ 1有25 2有$10+3=13$ 3有$6+0=6$ 4有$3+0=3$ 5有$1+0=1$ 21點\Rightarrow 48個正Δ</p>	R
4002 : 15 個點分成邊長為 1、2、3、4 等 4 種正三角形。(畫點與點之間的線)(62'')		P
4003 : 邊長為 1 有 16 個(用數的)。		I
4004 : 邊長為 2 有 $6 + 1 = 7$ 個。		I
4005 : 邊長為 3 的有 $3 + 0 = 3$ 個。		I
4006 : 邊長為 4 的有 $1 + 0 = 1$ 個。		I
4007 : 15 點有 27 個正三角形。(123'')		I
4008 : 把 21 個點分成邊長為 1、2、3、4、5 等 5 種正三角形。(補 6 個點, 並補畫點與點之間的線)(42'')		P
4009 : 邊長為 1 有 25 個。		I
4010 : 邊長為 2 的有 $10 + 3 = 13$ 個。		I
4011 : 邊長為 3 的正有 $6 + 0 = 6$ 個。		I
4012 : 邊長為 4 的正有 $3 + 0 = 3$ 個。		I
4013 : 邊長為 5 的正有 $1 + 0 = 1$ 個。		I
4014 : 21 點有 48 個正三角形。(64'')		I
T : 你如何驗證你的答案?		
4015 : 根據題目的條件來驗證。		V
T : 你驗證看是否符合題目條件。		
4016 : 符合。(19'')	V	
第 五 題 (M - 0 2)	解題時間合計 : 263''	
5001 : 讀題。(27'')		R

(S7) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
5002：圖 1 第一行最大數 3、第二行最大數 4，圖 3 第一行有 3 個正方形、第二行有 4 個正方形。(103'')		A
5003：第一個圖：第一行最大數 3，所以畫 3 個正方形，第二行最大數 3，所以畫 3 個正方形，第三行最大數 4，所以畫 4 個正方形。		I
5004：第二個圖：第一行最大數 4，所以畫 4 個正方形，第二行最大數 4，所以畫 4 個正方形，第三行最大數 5，所以畫 5 個正方形。	 <p data-bbox="869 683 1244 728">每行最大的數為正面圖個數。</p>	I
5005：第三個圖：第一行最大數 4，所以畫 4 個正方形，第二行最大數 2，所以畫 2 個正方形，第三行最大數 4，所以畫 4 個正方形，第四行最大數 5，所以畫 5 個正方形。		I
5006：每行最大的數就是正面圖的個數。(107'')		I
T：你如何驗證你的答案？		
5007：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
5008：符合。(26'')		V
第 六 題 (M - 0 3)	解題時間合計：271''	
6001：讀題。(20'')		R
6002：先考慮沒有接觸的，全部在減去沒有接觸的剩下就是接觸的。(123'')		P
6003：以長來看，扣掉接觸盒子外測的 2 層剩下 2 層。	$2 \times 2 \times 2 = 8$ <p>未接觸的立方體有 8 個</p>	A
6004：以寬來看，扣掉接觸盒子外測的 2 層剩下 2 層。	$64 - 8 = 56$ <p>接觸的立方體有 56 個</p>	A
6005：以高來看，扣掉接觸盒子外測的 2 層剩下 2 層。(83'')		A
6006： $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。		I
6007：沒接觸的正方體有 8 個。		I
6008： $64 - 8 = 56$ 。		I
6009：接觸的正方體有 56 個。(24'')		I
T：你如何驗證你的答案？		
6010：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
6011：符合。(21'')		V

(S7) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
第 七 題 (L - 0 1)	解題時間合計：304"	
7001：讀題。(46")		R
7002：數列：58 29 24 12 6 54 27 22 11 6 54 27 22 11 (161")	58 → 29 → 24 → 12 → 6 → 54 → 27 → 22 → 11 → 6 → 54 → 27 → 22 → 11 從第5項開始重複：6、54、27、22、11	A
7003：規律是從第5項開始重複：6、54、27、22、11。		I
7004：15 - 4 = 11。	15 - 4 = 11	I
7005：11 ÷ 5 = 2 1。	11 ÷ 5 = 2 ... 1	I
7006：27 - 4 = 23。	27 - 4 = 23	I
7007：23 ÷ 5 = 4 3。	23 ÷ 5 = 4 ... 3	I
7008：第15項是6。	第15項是6。	V
7009：第27項是27。(74")	第27項是27。	V
T：你如何驗證你的答案？		
7010：根據題目的條件來驗證。		
T：你驗證看是否符合題目條件。		
7011：符合。(23")		
第八題 (L-02)	解題時間合計：107"	
8001：讀題。(26")		R
8002：由左至右寫出一、二、三、四、五的位置。		I
8003：幣值最高是20元，排在中間，所以第三個位置是20。		I
8004：5元硬幣排在20元硬幣的左邊，但沒有緊鄰，所以5元硬幣只能排在第一個位置。	一 二 三 四 五 ⑤ ① ②⑩	I
8005：2元硬幣與5元硬幣被另外兩個硬幣隔開，所以2元硬幣只能排在第四位置。		I
8006：1元硬幣不會排列在最後，所以1元硬幣只能排在第二位置。剩下第五位置就排10元硬幣。		I
8007：由左至右排列順序是5元、1元、20元、2元、10元。(63")		I
T：你如何驗證你的答案？		
8008：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
8009：符合。(18")		V

(S7) 口 語 資 料	解 題 行 為	階段代號
第 九 題 (L - 0 3)	解題時間合計：387"	
9001：讀題。(59")		R
9002：L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。		A
9003：與 A、C 有關的條件是 M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。		A
9004：R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層又與 M 和 A、C 有相關。(201")		A
9005：由以上的三個條件可以得到，共有六層，L 在最第 6 層，A、C 在第 4 層，M 在第 3 層 R R 住單人房在第 1 層 (50")		I
9006：N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。(12")		A
9007：因為其他層沒有二間房間可以容納 B、F，所以 B、F 只能住在第二層。N 就住在第五層。(14")		I
9008：J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。(9")		A
9009：W 與 J 位於四個樓層，所以 W 只能住在第 6 層，J 住在第 3 層，E 住在第 5 層。		I
9010：但是 L 的室友還不知道，所以 W 就是 L 的室友。		I
9011：由下而上的排列為，1 樓住 R、P，2 樓住 B、F，3 樓住 M、J，4 樓住樓 AC，5 樓住 N、E，6 樓住 LW。		I
9012：空房間可能在第 4 和 6 層。(24")		I
T：你如何驗證你的答案？		
9013：根據題目的條件來驗證。		V
T：你驗證看是否符合題目條件。		
9014：符合。(18")	V	

附錄六 原案分析

第一題 (N-01): 直式算式

如果、為 0 9 中不同的數，請問下面的算式，所得到的最小三位數與最大三位數各是多少？而、所代表的值各是多少？

$$\begin{array}{r}
 \triangle \triangle \triangle \\
 \quad \circ \triangle \\
 + \quad \quad \triangle \\
 \hline
 \square \diamond \odot
 \end{array}$$

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■			■				
計畫 (P)			■			■			
執行 (I)				■			■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	13	34	37	27	25	24	19	15	194

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(13")

(1)能注意到問題的所有條件(最大與最小三位數、所代表的值各是

多少)。

(2)能瞭解題目的要求(求最大與最小的三位數)。

2.分析階段(A):(口語資料 1002、1003)(34")

如果要求最大數,就是9。但是如果 是9, $999 + 19 + 9 = 1027$,就變成四位數,所以 是8。

3.計畫階段(P):(口語資料 1004)(37")

假定 $= 8$, $= 9$ 可以求最大三位數。

4.執行階段(I):(口語資料 1005)(27")

求得最大三位數 994。

5.分析階段(A):(口語資料 1006)(25")

如果求最小的,是0,但是不可能,所以就是1

6.計畫階段(P):(口語資料 1007)(24")

假定 $= 1$, $= 2$ 三位數最小。

7.執行階段(I):(口語資料 1008)(19")

求得最小三位數 133。

8.驗證階段(V):(口語資料 1009、1010)(15")

根據題目的條件來驗證。 $= 8$, $= 9$ 最大數 994, $= 1$, $= 2$ 最小數 133。結果也符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)				■					
計畫 (P)		■			■				
執行 (I)			■			■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	13	37	31	37	33	34	12	197	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(13 ")

(1)能注意到問題的所有條件 (最大與最小三位數 、 所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求 (求最大與最小的三位數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 1002)(37 ")

當 $a = 1$, $b = 2$ 三位數最小。

3. 執行階段 (I):(口語資料 1003)(31 ")

求得最小三位數 133。

4. 分析階段 (A):(口語資料 1004、1005)(37 ")

當 $a = 9$, $b = 8$ 時、當 $a = 9$, $b = 7$ 時 , 結果變成四位數。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 1006)(33 ")

當 $a = 8$, $b = 9$ 三位數最大。

6. 執行階段 (I):(口語資料 1007、1008)(34 ")

求得最大三位數 994。

7. 驗證階段 (V):(口語資料 1009、1010)(12 ")

根據題目的條件來驗證。 = 1, = 2 最小數 133, = 8, = 9 最大數 994, 結果符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)				■					
計畫 (P)		■			■				
執行 (I)			■			■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	14	35	41	39	37	38	15	219	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(14 ")

(1)能注意到問題的所有條件 (最大與最小三位數 、 所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求 (求最大與最小的三位數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 1002)(35 ")

當 = 1, = 2 時三位數最小。

3. 執行階段 (I):(口語資料 1003)(41 ")

求得最小三位數 133。

4. 分析階段 (A):(口語資料 1004)(39 ")

如果 = 9, 就會變成四位數。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 1005)(37 ")

當 $x = 8$, $y = 9$ 三位數最大。

6. 執行階段 (I):(口語資料 1006)(38 ")

9 求得最大三位數 994。

7. 驗證階段 (V):(口語資料 1007、1008)(15 ")

根據題目的條件來驗證。 $x = 1$, $y = 2$ 最小三位數為 133 , $x = 8$, $y = 9$ 最大三位數為 994 , 結果符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)				■		■			
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	13	31	26	23	28	23	37	13	194

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(13 ")

(1)能注意到問題的所有條件 (最大與最小三位數 x 、 y 所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求 (求最大與最小的三位數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 1002)(31 ")

當 $a = 9$ ，三位數應該最大，當 $a = 1$ ，三位數應該最小。

3. 執行階段 (I): (口語資料 1003) (26 ")

$a = 9$ ， $b = 8$ 結果為四位數，所以 $a = 8$ 。

4. 計畫階段 (P): (口語資料 1004) (23 ")

當 $a = 8$ 、 $b = 9$ 時，三位數最大。

5. 執行階段 (I): (口語資料 1005) (28 ")

求得最大三位數 994。

6. 計畫階段 (P): (口語資料 1006) (23 ")

當 $a = 1$ 、 $b = 2$ 時，三位數最小。

7. 執行階段 (I): (口語資料 1007、1008) (37 ")

求得最小三位數 133。

8. 驗證階段 (V): (口語資料 1009、1010) (13 ")

根據題目的條件來驗證。 $a = 8$ ， $b = 9$ 最大三位數為 994， $a = 1$ ， $b = 2$ 最小三位數為 133，結果符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)			■						
計畫 (P)		■			■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	15	41	43	35	28	34	14	210	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(15 ")

(1)能注意到問題的所有條件(最大與最小三位數、所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求(求最大與最小的三位數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 1002)(41 ")

當 $a = 9$, $b = 8$ 時三位數最大。

3. 分析階段 (A):(口語資料 1003)(43 ")

當 $a = 9$, $b = 8$ 時三位數應該最大,結果會變成四位數,所以 a 不會是 9。

4. 執行階段 (I):(口語資料 1004)(35 ")

$a = 8$, $b = 9$ 求得最大三位數 994; $a = 1$, $b = 2$ 求得最小三位數 133。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 1005)(28 ")

當 $a = 1$, $b = 2$ 時三位數最小。

6. 執行階段 (I):(口語資料 1006、1007)(34 ")

求得最小三位數 133。

7. 驗證階段 (V):(口語資料 1009、1010)(14 ")

根據題目的條件來驗證。 $a = 8$, $b = 9$, 最大三位數為 994 $a = 1$, $b = 2$ 最小三位數為 133, 結果符合題意。

(六) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	14	43	123	15	195				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(14 ")

(1)能注意到問題的所有條件 (最大與最小三位數 、 所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求 (求最大與最小的三位數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 1002)(43 ")

當 $x=9$ 時, 應該是最大三位數。當 $x=1$ 時, 應該是最小三位數。當 $x=9$ 時, 就變成 4 位數, 所以不符合條件

3. 執行階段 (I):(口語資料 1003、1004、1005、1006)(123 ")

$x=8$, $x=9$ 求得最大三位數 994, $x=1$, $x=2$ 求得最小三位數 133。

4. 驗證階段 (V):(口語資料 1007、1008)(15 ")

根據題目的條件來驗證。 $x=8$, $x=9$ 最大三位數為 994, $x=1$, $x=2$ 最小三位數為 133, 結果符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 1 解題階段順序和時間 (S 7)									
讀題 (R)	■									
分析 (A)		■				■				
計畫 (P)				■			■			
執行 (I)			■		■			■		
驗證 (V)									■	
時間(秒)	13	15	14	12	14	12	13	12	12	117

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 1001)(13")

(1)能注意到問題的所有條件(最大與最小三位數、所代表的值各是多少)。

(2)能瞭解題目的要求(求最大與最小的三位數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 1002)(15")

= 9, 最大三位數。

3. 執行階段 (I):(口語資料 1003)(14")

當 = 9、 = 8, 三位數最大, 就會變成四位數, 所以 不會是 9。

4. 計畫階段 (P):(口語資料 1004)(12")

= 8, = 9, 三位數最大。

5. 執行階段 (I):(口語資料 1005)(14")

求得最大三位數 994。

6. 分析階段 (A):(口語資料 1006)(12")

= 1, 三位數最小。

7. 計畫階段 (P):(口語資料 1007)(13")

$a = 1$, $b = 2$, 三位數最小。

8. 執行階段 (I):(口語資料 1008、1009)(12")

求得最小三位數 133。所以最大三位數 994、最小三位數 133。

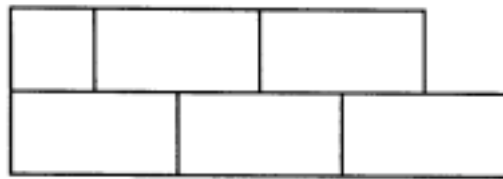
9. 驗證階段 (V):(口語資料 1010、1011)(12")

根據題目的條件來驗證。 $a = 8$, $b = 9$ 最大三位數為 994, $a = 1$, $b =$

2 最小三位數為 133, 結果符合題意。

第二題 (N-02): 圍牆整建

學校一道長 100 公尺高 7 公尺的圍牆, 因為颱風來襲, 被大風吹倒, 現在學校要使用兩種磚塊重新整建: 長 2 公尺高 1 公尺、長 1 公尺高 1 公尺。垂直堆砌磚塊必須如下圖所示交錯間隔, 而且牆的兩端必須堆砌平整。請問學校使用這兩種磚塊重新整建這一道圍牆各需要多少塊才可以整建完成? (假設磚塊間沒有間隔)



(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)			■		■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	25	129	13	136	14	125	43	485	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 2001)(25 ”)

(1)能注意到問題的所有條件(圍牆的長度與高度,磚塊的種類)。

(2)能瞭解題目的要求(求 2×1 與 1×1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002、2003、2004)(129 ”)

分析全部共有 7 排,每排全部使用 2×1 的磚塊共有 50 塊與使用 2×1 和 1×1 的磚塊各 49 塊和 2 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2005)(13 ”)

第一排使用 2×1 的磚塊 49 塊和 1×1 的磚塊 2 塊 第二排就用 2×1 的磚塊 50 塊交錯使用。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2006-2011)(136 ”)

自行畫表格以輔助解題第一排使用 2×1 的磚塊 49 塊和 1×1 的磚塊 2 塊 第二排就用 2×1 的磚塊 50 塊,交錯使用,得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 2012)(14 ”)

第一排使用 2x1 有 50 塊，第二排就使用 2x1 的磚塊 49 塊和 1x1 的磚塊 2 塊交錯使用。

6. 執行階段 (I): (口語資料 2013-2018) (125 ")

自行畫表格以輔助解題第一排使用 2x1 有 50 塊，第二排使用 2x1 的磚塊 49 塊和 1x1 的磚塊 2 塊，交錯使用，得到 2x1 的磚塊共 347 塊、1x1 的磚塊共 6 塊。

	2x1	1x1
1	49	2
2	50	0
3	49	2
4	50	0
5	49	2
6	50	0
7	49	2
合計	346	6

	2x1	1x1
1	50	0
2	49	2
3	50	0
4	49	2
5	50	0
6	49	2
7	50	0
合計	347	6

7. 驗證階段 (V): (口語資料 2019、2020) (43 ")

根據題目的條件來驗證。有兩種整建圍牆的方式，得到的結果都符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	27	127	13	134	12	121	43	477	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 2001)(27 ")

- (1)能注意到問題的所有條件(圍牆的長度與高度,磚塊的種類)。
- (2)能瞭解題目的要求(求 2×1 與 1×1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002、2003、2004、2005)(127 ")

分析全部共有 7 層,全部使用 2×1 磚塊的那一層共有 50 塊與使用 1×1 的磚塊 2 塊和 2×1 的磚塊 49 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2006)(13 ")

先使用 2×1 的磚塊。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2007-2015)(134 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 347 塊、 1×1 的磚塊共 6 塊。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 2016)(12 ")

先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I):(口語資料 2017-2025)(121 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

	2×1	1×1		2×1	1×1
7	50		7	49	2
6	49	2	6	50	
5	50		5	49	2
4	49	2	4	50	
3	50		3	49	2
2	49	2	2	50	
1	50		1	49	2
合計	347	6	合計	346	8

7. 驗證階段 (V):(口語資料 2026、2027)(43 ")

根據題目的條件來驗證。先使用 2x1 的磚塊；先使用 2x1 和 1x1 的磚塊，結果符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)			■		■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	28	142	16	145	15	133	45	524	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 2001)(28 ")

(1)能注意到問題的所有條件(圍牆的長度與高度,磚塊的種類)。

(2)能瞭解題目的要求(求 2x1 與 1x1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002-2009)(142 ")

分析全部共有 7 層,全部使用 2x1 磚塊的那一層共有 50 塊與使用 1x1 的磚塊 2 塊和 2x1 的磚塊 49 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2010)(16 ")

第一種第一層先全部使用 2x1 的磚塊。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2011-2019)(145 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2x1 的磚塊,得到 2x1 的磚塊共 347 塊、1

×1 的磚塊共 6 塊。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 2020)(15 ”)

第二種第一層先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I):(口語資料 2021-2029)(133 ”)

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 346 塊、1×1 的磚塊共 8 塊。

	2x1	1x1	2x1	1x1
1	50	0	49	2
2	49	2	50	0
3	50	0	49	2
4	49	2	50	0
5	50	0	49	2
6	49	2	50	0
7	50	0	49	2
	346	6	346	8

7. 驗證階段 (V):(口語資料 2030、2031)(45 ”)

根據題目的條件來驗證。先使用 2×1 的磚塊;先使用 2×1 和 1×1 的磚塊,結果符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)			■		■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	25	113	14	140	12	125	44	473	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 2001)(25 ")

(1)能注意到問題的所有條件(圍牆的長度與高度,磚塊的種類)。

(2)能瞭解題目的要求(求 2×1 與 1×1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002、2003、2004、2005、2006)(113 ")

分析全部共有 7 層,使用 1×1 的磚塊 2 塊和 2×1 的磚塊 49 塊與全部使用 2×1 磚塊的那一層共有 50 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2007)(14 ")

第二種第一層先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2008-2016)(140 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 2018)(12 ")

第一種第一層先全部使用 2×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I):(口語資料 2019-2027)(125 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 347 塊、 1×1 的磚塊共 6 塊。

	2×1	1×1
1	49	2
2	50	0
3	49	2
4	50	0
5	49	2
6	50	0
7	49	2
和	346	8

	2×1	1×1
1	50	0
2	49	2
3	50	0
4	49	2
5	50	0
6	49	2
7	50	0
和	347	6

7. 驗證階段 (V): (口語資料 2028、2029) (44 ")

根據題目的條件來驗證。先使用 2x1 和 1x1 的磚塊；先使用 2x1 的磚塊，結果符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 02 解題階段順序和時間和時間 (S 5)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)			■		■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	28	143	15	151	12	122	49	520	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 2001) (28 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (圍牆的長度與高度，磚塊的種類)。
- (2)能瞭解題目的要求 (求 2x1 與 1x1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A): (口語資料 2002、2003、2004、2005) (143 ")

分析全部共有 7 層，全部使用 2x1 磚塊的那一層共有 50 塊與使用 1x1 的磚塊 2 塊和 2x1 的磚塊 49 塊。

3. 計畫階段 (P): (口語資料 2006) (15 ")

第一層先使用 2x1 和 1x1 的磚塊。

4. 執行階段 (I): (口語資料 2007-2015) (151 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2x1 和 1x1 的磚塊，得到 2x1 的磚塊共 346

塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

5. 計畫階段 (P): (口語資料 2016) (12 ")

第一層先全部使用 2×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I): (口語資料 2017-2025) (122 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 的磚塊，得到 2×1 的磚塊共 347 塊、 1×1 的磚塊共 6 塊。

	1x1	2x1
1	2	49
2	0	50
3	2	49
4	0	50
5	2	49
6	2	50
7	2	49

	1x1	2x1
1	0	50
2	2	49
3	0	50
4	2	49
5	0	50
6	2	49
7	0	50

7. 驗證階段 (V): (口語資料 2026、2027) (49 ")

根據题目的條件來驗證。先使用 2×1 和 1×1 的磚塊；先使用 2×1 的磚塊，結果符合題意。

(六) S6 (小字)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	109	13	138	11	118	43	457	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 2001)(25 ")

(1)能注意到問題的所有條件(圍牆的長度與高度,磚塊的種類)。

(2)能瞭解題目的要求(求 2×1 與 1×1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002、2003、2004、2005)(109 ")

分析全部共有 7 層,全部使用 2×1 磚塊的那一層共有 50 塊與使用 1×1 的磚塊 2 塊和 2×1 的磚塊 49 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2006)(13 ")

第一層先全部使用 2×1 的磚塊。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2007-2015)(138 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 347 塊、 1×1 的磚塊共 6 塊。

5. 計畫階段 (P):(口語資料 2016)(11 ")

第一層先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I):(口語資料 2017-2025)(118 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊,得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

	2×1	1×1
1	50	0
2	49	2
3	50	0
4	49	2
5	50	0
6	49	2
7	50	0

	2×1	1×1
1	49	2
2	50	0
3	49	2
4	50	0
5	49	2
6	50	0
7	49	2

7. 驗證階段 (V):(口語資料 2026、2027)(43 ")

根據題目的條件來驗證。先使用 2x1 的磚塊；先使用 2x1 和 1x1 的磚塊，結果符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 2 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)			■		■				
執行 (I)				■		■			
驗證 (V)							■		
時間(秒)	29	132	12	147	13	125	42	500	

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 2001)(29 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (圍牆的長度與高度，磚塊的種類)。
- (2)能瞭解題目的要求 (求 2x1 與 1x1 磚塊的個數)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 2002、2003、2004、2005、2006)(132 ")

分析全部共有 7 層，全部使用 2x1 磚塊的那一層共有 50 塊與使用 1x1 的磚塊 2 塊和 2x1 的磚塊 49 塊。

3. 計畫階段 (P):(口語資料 2007)(12 ")

第一種第一層先全部使用 2x1 的磚塊。

4. 執行階段 (I):(口語資料 2008-2016)(147 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2x1 的磚塊，得到 2x1 的磚塊共 347 塊、1

1×1 的磚塊共 6 塊。

5. 計畫階段 (P): (口語資料 2017) (13 ")

第二種第一層先使用 2×1 和 1×1 的磚塊。

6. 執行階段 (I): (口語資料 2018-2026) (125 ")

自行畫表格以輔助解題先使用 2×1 和 1×1 的磚塊, 得到 2×1 的磚塊共 346 塊、 1×1 的磚塊共 8 塊。

1×1	2×1		1×1	2×1
0	50	1	2	49
2	49	2	0	50
0	50	3	2	49
2	49	4	0	50
0	50	5	2	49
2	49	6	0	50
0	50	7	2	49

7. 驗證階段 (V): (口語資料 2027、2028)

根據題目的條件來驗證。先使用 2×1 的磚塊; 先使用 2×1 和 1×1 的磚塊, 結果符合題意。

第三題 (N-03): 數字分組

請你將 1、3、5、7、9、11、12 等 7 個數分成兩組, 使每一組內所有數加起來的和相等。請問每一組數的和是多少? 並請你找出所有分組的方法。

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	22	25	132	24	203				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 3001)(22")

能瞭解題目的要求(把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組,每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 3002、3003、3004)(25")

知道把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數加起來除以 2,以得到每一組數的和。

3. 執行階段 (I):(口語資料 3005、3006、3007)(132")

就 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數,利用數字重組的策略找出不同的三個解:

(1)第一組 $12 + 11 + 1 = 24$, 第二組 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$ 。

(2)第一組 $9 + 12 + 3 = 24$, 第二組 $1 + 5 + 7 + 11 = 24$ 。

(3)第一組 $12 + 5 + 7 = 24$, 第二組 $1 + 3 + 9 + 11 = 24$

4. 驗證階段 (V):(口語資料 3008、3009、3010)(24 ”)

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	21	26	129	23	199				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 3001)(21 ”)

能瞭解題目的要求 (把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 3002、3003、3004)(26 ”)

知道把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數加起來除以 2，以得到每一組數的和為 24。

3. 執行階段 (I):(口語資料 3005、3006、3007)(129 ”)

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，利用數字重組的策略共找出不同的三個解，並自行畫表格列答：

(1)第一組 12、9、3，第二組 11、1、5、7。

(2)第一組 12、1、11，第二組 3、5、7、9。

(3)第一組 12、5、7，第二組 1、3、9、11。

第1組	第2組
12, 9, 3	11, 1, 5, 7
12, 1, 11	3, 5, 7, 9
12, 5, 7	1, 3, 9, 11

4. 驗證階段 (V): (口語資料 3008、3009、3010) (23 "))

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)	█								
分析 (A)		█							
計畫 (P)									
執行 (I)			█						
驗證 (V)				█					
時間(秒)	23	27	198	25	273				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 3001) (23 "))

能瞭解題目的要求 (把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A): (口語資料 3002、3003) (27 "))

知道把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數加起來除以 2，得到每一組數的和為 24。

4. 執行階段 (I): (口語資料 3004、3005、3006) (198 ")

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，共利用數字重組的策略找出不同的三種解：

(1) 第一組 $1 + 9 + 3 + 11 = 24$ ，第二組 $5 + 7 + 12 = 24$ 。

(2) 第一組 $3 + 7 + 5 + 9 = 24$ ，第二組 $1 + 11 + 12 = 24$ 。

(3) 第一組 $3 + 9 + 12 = 24$ ，第二組 $1 + 5 + 7 + 11 = 24$ 。

5. 驗證階段 (V): (口語資料 3007、3008) (25 ")

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且符合題意。

(四) 學生 S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	23	25	126	25	199				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 3001) (23 ")

能瞭解題目的要求 (把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每

一組內的數字和相等)。

2.分析階段 (A):(口語資料 3002)(25 ”)

因為要分成相等的 2 組，所以把所有數加起來除以 2。 $(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12) \div 2 = 24$ 。每一組 24。

3.執行階段 (I):(口語資料 3003、3004、3005)(126 ”)

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，利用數字重組的策略共找出不同的三個解：

(1)第一組 $12 + 11 + 1 = 24$ ，第二組 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$ 。

(2)第一組 $7 + 5 + 12 = 24$ ，第二組 $3 + 9 + 11 + 1 = 24$ 。

(3)第一組 $9 + 3 + 12 = 24$ ，第二組 $11 + 1 + 5 + 7 = 24$ 。

4.驗證階段 (V):(口語資料 3006、3007)(25 ”)

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等，符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階 段	N - 0 3 解 題 階 段 順 序 和 時 間 (S 5)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	22	27	164	25	238				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 3001) (22 ”)

能瞭解題目的要求 (把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A): (口語資料 3002) (27 ”)

因為要分為和相等的 2 組把所有數加起來除以 2，每一組的和為 24。

3. 執行階段 (I): (口語資料 3003、3004、3005) (164 ”)

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，利用數字重組的策略

共找出三種不同的解：

(1) 第一組 1、11、3、9，第二組 5、7、12。

(2) 第一組 1、11、12，第二組 3、9、5、7。

(3) 第一組 1、11、5、7，第二組 3、9、12。

5. 驗證階段 (V): (口語資料 3006、3007) (25 ”)

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且符合題意。

(六) S6 (小字)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	22	26	138	24	210				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 3001)(22 ")

能瞭解題目的要求(把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組,每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 3002、3003、3004)(26 ")

根據題意因為要分成相等的 2 組,所以把所有數加起來除以 2,每一組的和為 24。

3. 執行階段 (I):(口語資料 3005、3006、3007)(138 ")

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數,利用數字重組的策略共找出不同的三種解:

(1)第一組 12、5、7,第二組 1、3、9、11。

(2)第一組 12、9、3,第二組 11、7、5、1。

(3)第一組 12、11、1,第二組 3、5、7、9。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 3008、3009)(24 ")

根據題目的條件來驗證。共有三個解,每個解的二組答案的和都相等,符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	N - 0 3 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	21	24	125	26	196				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 3001)(21 ")

能瞭解題目的要求(把 1、3、5、7、9、11、12 等七個數分成二組，每一組內的數字和相等)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 3002)(24 ")

因為要把這 7 個數分成和相等的 2 組，所以把所有數加起來除以 2，每一組的和為 24。

3. 執行階段 (I):(口語資料 3003、3004、3005)(125 ")

把 1、3、5、7、9、11、12 分成和相等的二組數，利用數字重組的策略共找出不同的三種解：

(1)第一組 $12 + 11 + 1$ ，第二組 $3 + 5 + 7 + 9$ 。

(2)第一組 $5 + 7 + 12$ ，第二組 $1 + 3 + 9 + 11$ 。

(3)第一組 $5 + 1 + 11 + 7$ ，第二組 $3 + 9 + 12$ 。

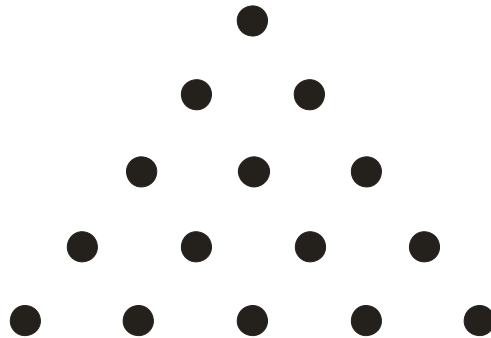
4. 驗證階段 (V):(口語資料 3006、3007)(26 ")

根據題目的條件來驗證。共有三個解，每個解的二組答案的和都相等且

符合題意。

第四題 (M-01): 三角形個數

在平面上有 15 個點，點與點之間の間隔距離都相等，如下圖，請問使用這 15 個點可以畫出大大小小的正三角形共多少個？如果有這種點 21 個，那麼可以畫出大大小小的正三角形共多少個？



(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	18	66	134	51	65	22	356		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(18 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P) : (口語資料 4002、4008) (66 ")

15 點可畫出邊長為 1、2、3、4 的正三角形個數。

3. 執行階段 (I) : (口語資料 4003-4007、4009、4010) (134 ")

15 點可畫出邊長為 1 正的 10 個、反的 6 個；邊長為 2 正的 6 個、反的 1 個、邊長為 3 正的 3 個、反的 0 個、邊長為 4 正的 1 個、反的 0 個，共可畫出 27 個正三角形。

4. 計畫階段 (P) : (口語資料 4002、4008) (51 ")

21 點比 15 點增加邊長為 1、2、3、4、5 的正三角形個數共多少個。

5. 執行階段 (I) : (口語資料 4003-4007、4009、4010) (65 ")

21 點增加了邊長為 5 正的有 1 個；邊長為 1 正的有 5 個、反的有 4 個；邊長為 2 正的有 4 個、反的有 2 個；邊長為 3 正的有 3 個；邊長為 4 正的有 2 個，共可畫出 48 個正三角形。

$$\begin{array}{l} \text{邊長 } \geq 1 \quad 1+2+3=6 \\ \text{反 } 1 \\ \text{邊長 } \geq 2 \quad 1+2=3 \\ \text{反 } 0 \\ \text{邊長 } \geq 3 \quad 1 \\ \text{反 } 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 21 \text{ 點} \\ 21+1+5+4+4+2 \\ +3+2 \\ =33+10+5 \\ =48 \end{array}$$

6. 驗證階段 (V) : (口語資料 4011、4012) (22 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	18	67	128	54	63	23	353		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(18 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 4002)(67 ")

把正三角形分為邊長為 1、2、3、4 等 4 種，並在點與點之間畫線。

3. 執行階段 (I):(口語資料 4004、4005、4006、4007、4008)(128 ")

15 點可畫出邊長為 1 的正三角形有 16 個、邊長為 2 的正三角形有 7 個、邊長為 3 的正三角形的有 3 個、邊長為 4 的正三角形的有 1 個，共有正三角形 27 個。

4. 計畫階段 (P):(口語資料 4009)(54 ")

補畫 6 個點並補畫線。

5. 執行階段 (I):(口語資料 4010-4018)(63 ")

21 點比 15 點增加邊長為 1 的正三角形有 9 個、邊長為 2 的正三角形有 6 個、邊長為 3 的正三角形的有 3 個、邊長為 4 的正三角形的有 6 個，邊

長為 5 的正三角形的有 1 個，所以 21 點共可畫出 $21 + 27 = 48$ 個正三角形。

$$\begin{array}{r} 1-16 \\ 2-7 \\ 3-3 \\ 4-1 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1-9 \\ 2-6 \\ 3-3 \\ 4-2 \\ 5-1 \\ \hline 21 \end{array}$$

6. 驗證階段 (V): (口語資料 4019、4020) (23 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)	█								
分析 (A)									
計畫 (P)		█		█					
執行 (I)			█		█				
驗證 (V)						█			
時間(秒)	17	97	153	61	79	21	428		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 4001) (17 ")

- (1) 能注意到問題的所有條件。
- (2) 能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P): (口語資料 4002) (97 ")

在點與點之間畫線。並以畫圖分類的方式，把正三角形分為一邊為 1、2、3、4 個三角形四種。

3. 執行階段 (I): (口語資料 4003-4008) (153 ")

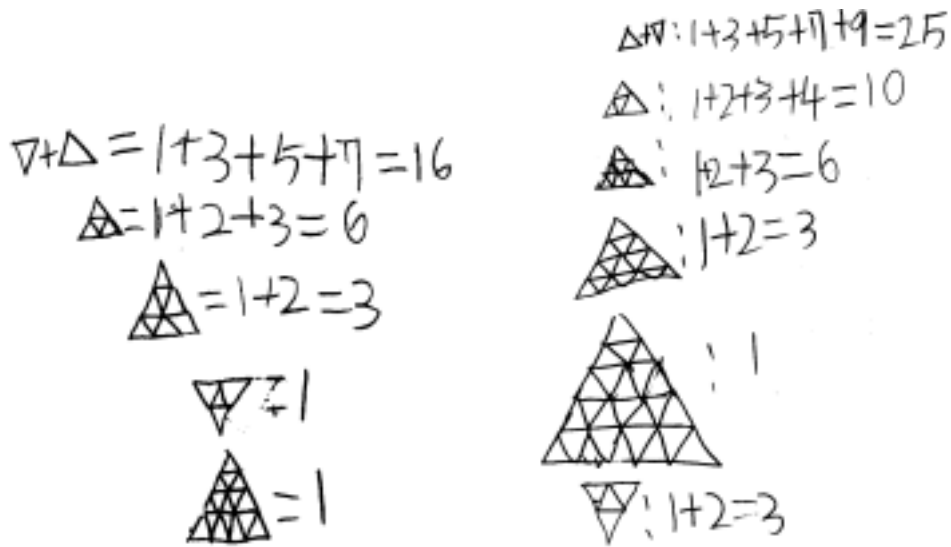
1 正的 + 反的共有 16、2 正的共有 6、3 正的共有 3、3 反的 0、2 反的有 1、4 正的有 1、4 反的 0，15 點共有正三角形 27 個正三角形。

4. 計畫階段 (P): (口語資料 4009) (61 ")

補畫 6 個點，並補畫線。把正三角形分為一邊為 1、2、3、4、5 個三角形 5 種。

4. 執行階段 (I): (口語資料 4010-4016) (79 ")

1 正的 + 反的共有 25、2 正的共有 10、3 正的共有 6、4 正的有 3、5 正的有 1、2 反的有 3，21 點共可畫出 48 個正三角形。



5. 驗證階段 (V): (口語資料 4017、4018) (21 ")

根據题目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)									
計畫 (P)		■		■					
執行 (I)			■		■				
驗證 (V)						■			
時間(秒)	17	65	121	57	70	22	352		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(17 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 4002)(65 ")

在點與點之間畫線。自行畫表格，把正三角形分邊長為 1、2、3、4 及正、反。

3. 執行階段 (I):(口語資料 4003、4004、4005、4006、4007)(121 ")

邊長為 1 的正有 10、反有 6，邊長為 2 的正有 6、反有 1，邊長為 3 的正有 3、反有 0，邊長為 4 的正有 1、反有 0。15 點正的有 20、反的有 7，共有 27。

4. 計畫階段 (P):(口語資料 4008)(57 ")

補 6 個點並把點與點之間的線連起來，並自行畫表格，把正三角形分邊長為 1、2、3、4、5 及正、反。

5. 執行階段 (I):(口語資料 4009、4010、4011、4012、4013、4014)(70 ")

邊長為 1 的正有 15、反有 10，邊長為 2 的正有 10、反有 3，邊長為 3 的正有 6、反有 0，邊長為 4 的正有 3、反有 0，邊長為 5 的正有 1、反有 0。21 點正有 35，反有 13，共有 48。

15點	正	反
1	15	10
2	10	3
3	6	0
4	3	0
和	35	13
	48	

21點	正	反
1	15	10
2	10	3
3	6	0
4	3	0
5	1	0
和	35	13
	48	

6. 驗證階段 (V):(口語資料 4015、4016)(22 ")

根據题目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	16	93	147	62	73	22	413		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(16 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P) : (口語資料 4002) (93 ")

畫點與點之間的直線，以條列式的方式把正三角形區分為邊長為 1、2、3、4。

3. 執行階段 (I) : (口語資料 4003、4004、4005、4006、4007) (147 ")

邊長為 1 的正有 10、反有 6，邊長為 2 的正有 6、反有 1，邊長為 3 的正有 3、反有 0，邊長為 4 的正有 1、反有 0，15 點共有正三角形 27 個正三角形。

4. 計畫階段 (P) : (口語資料 4008) (62 ")

補 6 個點畫點與點之間的直線，以條列式的方式把正三角形區分為邊長為 1、2、3、4、5。

5. 執行階段 (I) : (口語資料 4009、4010、4011、4012、4013、4014) (73 ")

邊長為 1 的正有 15、反有 10，邊長為 2 的正有 10、反有 3，邊長為 3 的正有 6、反有 0，邊長為 4 的正有 3、反有 0，邊長為 5 的正有 1、反有 0，21 點共可畫出 48 個正三角形。

正: 1: 10	反: 1: 6	正: 1: 15	反: 1: 10
2: 6	2: 1	2: 10	2: 3
3: 3	3: 0	3: 6	3: 0
4: 1	4: 0	4: 3	4: 0
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	5: 1	5: 0
20	7	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
		35	13

6. 驗證階段 (V) : (口語資料 4015、4016) (22 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(六) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	18	92	141	60	68	21	400		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(18 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 4002)(92 ")

因為 2 個點可以劃一直線，所以 15 個點，可以分成：5 個點、4 個點、3 個點、2 個點等 4 類。(畫線)

3. 執行階段 (I):(口語資料 4003-4007)(141 ")

5 個點的有 1 個三角形，4 個點的有 3 個三角形，3 個點的有 7 個三角形，2 個點的有 $10 + 6 = 16$ 個三角形，15 點共有正三角形 27 個正三角形。

4. 計畫階段 (P):(口語資料 4008)(60 ")

21 個點，補 6 個點，可以分成：6 個點、5 個點、4 個點、3 個點、2 個點等 5 類。(畫線)

5. 執行階段 (I):(口語資料 4009-4014)(68 ")

6 個點的有 1 個三角形，5 個點的有 3 個三角形，4 個點的有 6 個三角形，

3 個點的有 13 個三角形，2 個點的有 25 個三角形，21 點共可畫出 48 個正三角形。

$$\begin{aligned}
 & \bullet x5=1 \\
 & \bullet x4=3 \\
 & \bullet x3=7 \\
 & \bullet x2=10+6=16 \\
 & \quad 7+3+1+16 \\
 & =27 \\
 \\
 & \bullet x6=1 \\
 & \bullet x5=3 \\
 & \bullet x4=6 \\
 & \bullet x3=13 \\
 & \bullet x2=14+10=25 \\
 & \quad 6+13+1+3+25 \\
 & =20+28 \\
 & =48
 \end{aligned}$$

6. 驗證階段 (V):(口語資料 4015、4016)(21 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 1 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	17	62	123	42	64	19	327		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 4001)(17 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求 (15 點和 21 點的正三角形個數)。

2. 計畫階段 (P) : (口語資料 4002) (62 ")

15 個點分成邊長為 1、2、3、4 等 4 種正三角形。(畫點與點之間的線)

3. 執行階段 (I) : (口語資料 4003-4007) (123 ")

邊長為 1 有 16 個，邊長為 2 有 7 個，邊長為 3 的有 3 個，邊長為 4 的有 1 個，15 點共有正三角形 27 個正三角形。

4. 計畫階段 (P) : (口語資料 4008) (42 ")

把 21 個點分成邊長為 1、2、3、4、5 等 5 種正三角形。(補 6 個點，並補畫點與點之間的線)。

5. 執行階段 (I) : (口語資料 4009-4014) (64 ")

邊長為 1 有 25 個，邊長為 2 的有 13 個，邊長為 3 的正有 6 個，邊長為 4 的正有 3 個，邊長為 5 的正有 1 個，21 點共可畫出 48 個正三角形。

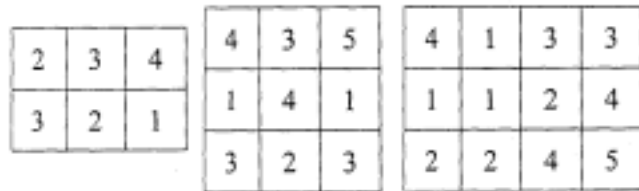
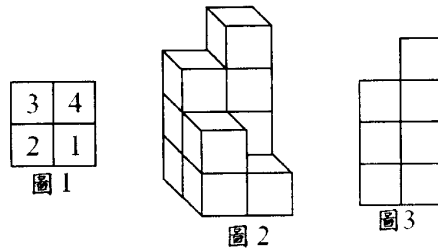
1 有 16	1 有 25
2 有 $6 + 1 = 7$	2 有 $10 + 3 = 13$
3 有 $3 + 0 = 3$	3 有 $6 + 0 = 6$
4 有 $1 + 0 = 1$	4 有 $3 + 0 = 3$
15 點 27 個正 Δ	5 有 $1 + 0 = 1$
	21 點 48 個正 Δ

6. 驗證階段 (V) : (口語資料 4015、4016) (19 ")

根據題目的條件來驗證，15 點共可畫出 27 個正三角形、21 點共可畫出 48 個正三角形，結果符合題意。

第五題 (M-02): 堆積圖形

圖 1 叫做「堆積圖形」，這個圖形中的數是告訴我們在這個位置上堆積多少個正方體。圖 2 是顯示出全部的正方體，而圖 3 是由圖形正面方向觀看所獲得的正面圖。請你畫出下面堆積圖形的正面圖。由下面三個堆積圖形，你能不能找出畫出正面圖的規律？如果可以請把規律寫出來。



(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	61	107	22	216				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 5001)(26 ")

(1)能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。

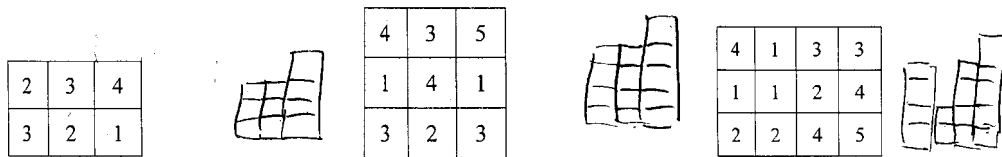
(2)能瞭解題目的要求(找出畫正面圖的規律)。

2.分析階段(A):(口語資料 5002)(61 ”)

圖 1 第一行最大數 3, 圖 3 第一行有 3 層; 第二行最大數 4, 圖 3 第二行有 4 層。圖 2 第一行有 3 層、第二行有 4 層, 所以取每一行的最大數。

3.執行階段(I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(107 ”)

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖的正方形個數分別為(3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為(4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為(4、2、4、5)。
- (4)畫正面圖的規律為每一行最大數就是正面圖的層數。



4.驗證階段(V):(口語資料 5007、5008)(22 ”)

根據題目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	65	103	23	217				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 5001)(26 ")

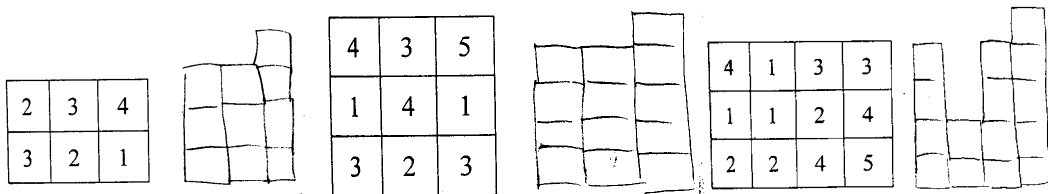
- (1)能注意到問題的所有條件(堆積圖、全部正方體、正面圖)。
- (2)能瞭解題目的要求(找出畫正面圖的規律)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 5002)(65 ")

圖 1 第一行最大數是 3，圖 3 第一行有 3 個正方形；圖 1 第二行最大數是 4，圖 3 第二行有 4 個正方形。

4. 執行階段 (I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(103 ")

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為(3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為(4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為(4、2、4、5)。
- (4)畫正面圖的規律為在一排中最大的數字就是你應該畫幾個正方形。



5. 驗證階段 (V):(口語資料 5007、5008)(23 ")

根據題目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	47	106	21	200				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 5001)(26 ")

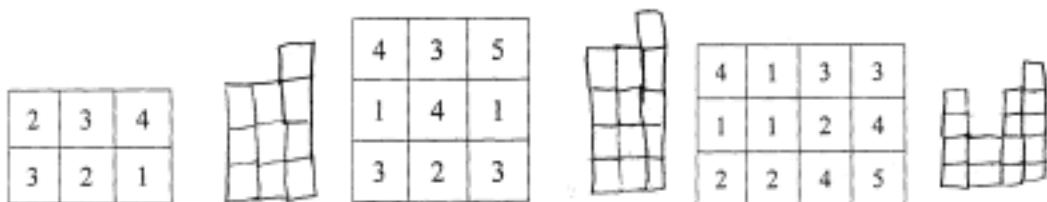
- (1)能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 5002)(47 ")

由圖 1 的每行的最大數、圖 2 可以看每行到最多的正方體個數、圖 3 每行的正方形個數之間的關係。

4. 執行階段 (I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(106 ")

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)。
- (4)畫正面圖的規律為每行最大的數就是正面圖的個數。



5. 驗證階段 (V):(口語資料 5007、5008)(21 ”)

根據題目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	92	103	24	244				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 5001)(25 ”)

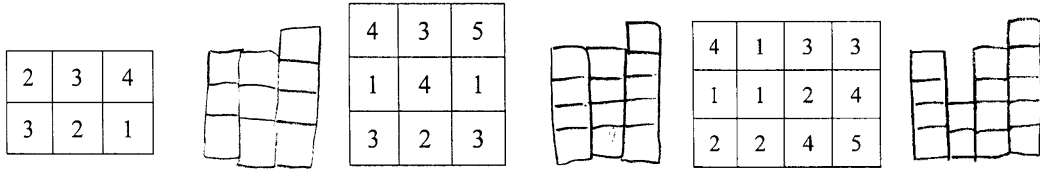
- (1)能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 5002)(92 ”)

圖 1 第一行最大數 3，圖 3 第一行有 3 個正方形；第二行最大數 4，圖 3 第二行有 4 個正方形。

3. 執行階段 (I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(103 ”)

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)
- (4)直行的堆積圖形中最大的數就是正面圖的個數。



4. 驗證階段 (V): (口語資料 5007、5008) (24 ")

根據題目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	28	110	112	25	275				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 5001) (28 ")

(1)能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。

(2)能瞭解題目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

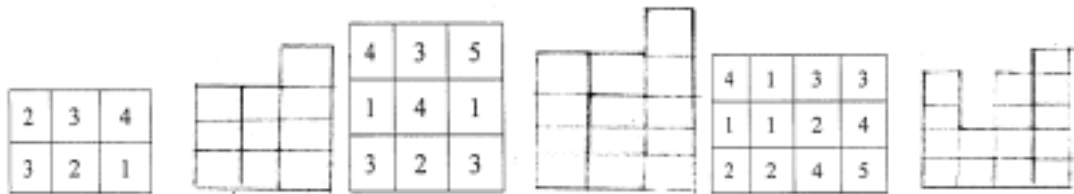
2. 分析階段 (A): (口語資料 5002) (110 ")

圖 1 第一行最大數 3，圖 3 第一行有 3 個正方形；第二行最大數 4，圖 3 第二行有 4 個正方形。

3. 執行階段 (I): (口語資料 5003、5004、5005、5006) (112 ")

(1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。

- (2) 找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3) 找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)。
- (4) 畫正面圖的規律為直行中的最大數就是正方形個數。



4. 驗證階段 (V): (口語資料 5007、5008) (25 ")

根據题目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(六) S6 (小字)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	45	101	23	195				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 5001) (26 ")

- (1) 能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。
- (2) 能瞭解题目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

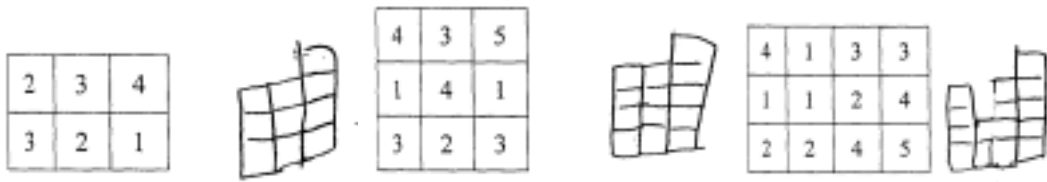
2. 分析階段 (A): (口語資料 5002) (45 ")

圖 1 第一行最大數 3、第二行最大數 4，圖 3 第一行有 3 個正方形、第二

行有 4 個正方形。

3. 執行階段 (I): (口語資料 5003、5004、5005、5006) (101 ")

- (1) 找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。
- (2) 找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3) 找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)。
- (4) 畫正面圖的規律為每一直行的最大的數就是要畫的個數。



4. 驗證階段 (V): (口語資料 5007、5008) (23 ")

根據题目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 2 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	27	103	107	26	263				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 5001) (27 ")

- (1) 能注意到問題的所有條件 (堆積圖、全部正方體、正面圖)。

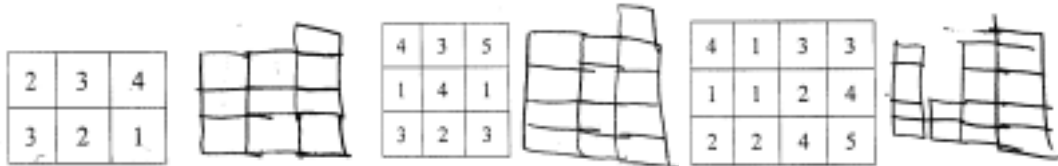
(2)能瞭解題目的要求 (找出畫正面圖的規律)。

2.分析階段 (A):(口語資料 5002)(103 ”)

圖 1 第一行最大數 3、第二行最大數 4，圖 3 第一行有 3 個正方形、第二行有 4 個正方形。

4.執行階段 (I):(口語資料 5003、5004、5005、5006)(107 ”)

- (1)找出並畫出第一個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (3、3、4)。
- (2)找出並畫出第二個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、4、5)。
- (3)找出並畫出第三個堆積圖形的正面圖正方形個數分別為 (4、2、4、5)
- (4)畫正面圖的規律為每行最大的數就是正面圖的個數。

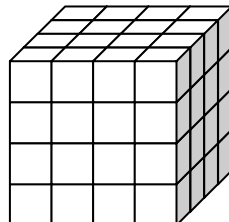


5.驗證階段 (V):(口語資料 5007、5008)(26 ”)

根據題目的條件來驗證 所畫出的每一個堆積圖的正面圖個數符合題意。

第六題 (M-03): 正方體個數

一個 $4 \times 4 \times 4$ 的正方體盒子剛好裝滿 64 個大小相同的小正方體，請問會接觸到盒子外側的小正方體的個數共有多少個？沒有接觸的盒子外側的正方體有多少個？



(一) 學生 S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)			■						
計畫 (P)		■							
執行 (I)				■					
驗證 (V)					■				
時間(秒)	19	43	40	22	20	144			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 6001)(19 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(43 ")

先考慮有接觸的，全部減去有接觸的剩下就是沒接觸的。

3. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004、6005)(40 ")

分析上、下、前、後、左、右等 6 個面有接觸盒子外側的正方體個數。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6006、6007)(22 ")

(1)先求有接觸盒子外側的正方體個數為 56 個。

(2)再以全部減去有接觸盒子外側的正方體個數，就是未接觸盒子外側的正方體個數為 8 個。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 6008、6009)(20 ")

根據題目的條件來驗證。有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外

側的正方體個數，符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	18	51	45	24	21	159			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 6001)(18 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(51 ")

先找出有接觸盒子外側的正方體的個數，再把全部減去有接觸盒子外側的正方體的個數，剩下的就是沒有接觸盒子外側的正方體個數。

3. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004)(45 ")

上下兩層共 32 個小正方體、前後共有 24 個小正方體。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6005、6006)(24 ")

(1)先求有接觸盒子外側的正方體個數，上下兩層共 $16 \times 2 = 32$ 個，前後左右接觸的剩下 $8 \times 2 + 4 \times 2 = 24$ 個，共 56 個。

(2)再以全部減去有接觸盒子外側的正方體個數，就是未接觸盒子外側的正方體個數為 8 個。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 6007、6008)(21 ")

根據題目的條件來驗證。有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)			■						
計畫 (P)		■							
執行 (I)				■					
驗證 (V)					■				
時間(秒)	21	133	92	30	25	301			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 6001)(21 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(133 ")

先考慮有接觸的。再以全部 64 個減去有接觸的，剩下就是沒有接觸的。

3. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004、6005)(92 ")

分析有接觸的外面的小正方體左右兩層共有 $4 \times 4 \times 2 = 32$ 上下兩層剩下 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 、前後兩層剩下 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6006、6007)(30 ")

接觸外面的共有 $8 + 32 + 16 = 56$ 個。未接觸的有 $64 - 56 = 8$ 個。

5. 驗證階段 (V): (口語資料 6008、6009) (25 ")

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	█								
分析 (A)			█						
計畫 (P)		█							
執行 (I)				█					
驗證 (V)					█				
時間(秒)	18	143	95	26	23	305			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 6001) (18 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

3. 計畫階段 (P): (口語資料 6002) (143 ")

先考慮沒有接觸的盒子外側的正方體個數，全部個數減去沒有接觸的盒子外側的正方體的個數剩下就是有接觸盒子外側的正方體個數。

2. 分析階段 (A): (口語資料 6003、6004、6005) (95 ")

以長寬高來看，長有 4 層，扣掉接觸盒子外測的剩下 2 層；寬有 4 層，

扣掉接觸盒子外測的剩下 2 層；高有 4 層，扣掉接觸盒子外測的剩下 2 層。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6006、6007)(26 ")

沒接觸的有 $(4-2) \times (4-2) \times (4-2) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ 。接觸的有 $64-8 = 56$ 個。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 6007、6008)(23 ")

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	20	141	82	23	25	291			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 6001)(20 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(141 ")

先考慮有接觸的，再以全部 64 個減去有接觸的，剩下就是沒接觸的。

3. 分析階段 (A): (口語資料 6003、6004、6005) (82 ")

分析上下兩面有 $4 \times 4 \times 2 = 32$ 、左右兩面剩下 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 、前後兩層剩下 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

4. 執行階段 (I): (口語資料 6006、6007) (23 ")

接觸外面的共有 $8 + 32 + 16 = 56$ 個。未接觸的有 $64 - 56 = 8$ 個。

5. 驗證階段 (V): (口語資料 6007、6008) (25 ")

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

(六) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)			■						
計畫 (P)		■							
執行 (I)				■					
驗證 (V)					■				
時間(秒)	19	41	43	23	18	144			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 6001) (19 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(41 ")

先考慮有接觸盒子外側的正方體個數，再以全部 64 個減去有接觸的，剩下就是沒接觸的盒子外側的正方體個數。

3. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004、6005)(43 ")

分析有接觸的上下兩層共有 $4 \times 4 \times 2 = 32$ 、左右兩層剩下 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 、前後兩層剩下 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6006、6007、6008)(23 ")

有接觸的共有 $8 + 32 + 16 = 56$ 個。沒有接觸的有 $64 - 56 = 8$ 個。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 6009、6010)(18 ")

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	M - 0 3 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)			■						
計畫 (P)		■							
執行 (I)				■					
驗證 (V)					■				
時間(秒)	20	123	83	24	21	271			

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 6001)(20 ")

能瞭解題目的要求 (有接觸盒子外側的正方體個數及未接觸盒子外側的

正方體個數)。

2. 計畫階段 (P):(口語資料 6002)(123 ”)

先考慮沒有接觸的，全部在減去沒有接觸的剩下就是接觸的。

2. 分析階段 (A):(口語資料 6003、6004、6005)(83 ”)

以長來看，扣掉接觸盒子外測的 2 層剩下 2 層，以寬來看，扣掉接觸盒子外測的 2 層剩下 2 層，以高來看，扣掉接觸盒子外測的 2 層剩下 2 層。

4. 執行階段 (I):(口語資料 6006、6007、6008、6009)(24 ”)

未接觸外面的共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個。接觸的有 $64 - 8 = 56$ 個。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 6010、6011)(21 ”)

根據題目的條件來驗證。未接觸盒子外側的正方體個數及有接觸盒子外側的正方體個數，符合題意。

第七題 (L-01): 奇妙數列

老師藉由下列的三個規則製造出一串數列，剛開始先寫一個正整數，然後再依下列的三個規則，寫出後面的數字：

規則 1：如果這個數比 10 小，將它乘以 9。

規則 2：如果這個數為偶數而且比 9 大，則將它除以 2。

規則 3：如果這個數為奇數而且比 9 大，則將它減去 5。

【例】數列：25、20、10、5、45、40、20

請問數列 58、29、24、 的第 15 項與第 27 項的各是什麼數字？這種數列是否有規律？如果有請你找出這種數列的規律，並把它寫出來。

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	48	170	91	24	333				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 7001) (48 ”)

- (1) 能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2) 能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A) : (口語資料 7002) (170 ”)

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I) : (口語資料 7003、7004、7005、7006) (91 ”)

- (1) 找出數列的規律為從第 5 個數開始，6、54、27、22、11 等 5 個數循環。
- (2) 用數項數的方式找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

4. 驗證階段 (V) : (口語資料 7007、7008) (24 ”)

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律以求的第 15 項與第 27 項的數，結果也符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	46	143	82	21	292				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 7001) (46 ")

- (1) 能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2) 能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A) : (口語資料 7002) (143 ")

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I) : (口語資料 7003-7008) (82 ")

- (1) 找出數列的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。
- (2) 利用餘數定理找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

$$\begin{array}{l}
 15 - 4 = 11 \\
 11 \div 5 = 2 \dots 1 \\
 27 - 4 = 23 \\
 23 \div 5 = 4 \dots 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{第 15 項} = 6 \\
 \text{第 27 項} = 27
 \end{array}$$

4. 驗證階段 (V) : (口語資料 7009、7010) (21 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果也符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	47	156	71	22	296				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 7001)(47 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 7002)(156 ")

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I):(口語資料 7003、7004、7005)(71 ")

- (1)找出數列的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。
- (2)利用餘數定理找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

$$\begin{aligned}(15-4) \div 5 &= 2 \dots 1 & 15 \text{項} &= 6 \\(27-4) \div 5 &= 4 \dots 3 & 27 \text{項} &= 27\end{aligned}$$

5. 驗證階段 (V):(口語資料 7006、7007)(22 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果也符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	46	150	72	21	289				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 7001)(46 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 7002)(150 ")

利用產生數列的規則產生數列數列：58、29、24、12、6、54、27、22、11、6、54、27、22、11、6，以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I):(口語資料 7003、7004、7005)(72 ")

- (1)找出數列的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。
- (2)利用餘數定理找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

$$\begin{array}{l} (15-4) \div 5 = 2 \dots 1 \quad 6 \dots 15 \text{項} \\ (27-4) \div 5 = 4 \dots 3 \quad 27 \dots 27 \text{項} \end{array}$$

4. 驗證階段 (V):(口語資料 7006、7007)(21 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果也符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	48	203	95	26	372				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 7001)(48 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 7002)(203 ")

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

4. 執行階段 (I):(口語資料 7003、7004、7005)(95 ")

- (1)找出數列的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。
- (2)利用數項數的方式，找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

5. 驗證階段 (V):(口語資料 7006、7007)(26 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果也符合題意。

(六) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	49	197	93	25	364				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 7001) (49 ”)

- (1) 能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2) 能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A) : (口語資料 7002) (197 ”)

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I) : (口語資料 7003、7004、7005) (93 ”)

- (1) 找出數列的規律為從從第 5 項開始循環 6、54、27、22、11。
- (2) 利用數項數的方式找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

4. 驗證階段 (V) : (口語資料 7006、7007) (25 ”)

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果也符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 1 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■							
計畫 (P)									
執行 (I)			■						
驗證 (V)				■					
時間(秒)	46	161	74	23	304				

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 7001)(46 ")

- (1)能注意到問題的所有條件 (製造數列的規則)。
- (2)能瞭解題目的要求 (找出數列的規律並求第 15 項及第 27 項)。

2. 分析階段 (A):(口語資料 7002)(161 ")

利用產生數列的規則產生一數列以進行找尋規律。

3. 執行階段 (I):(口語資料 7003-7009)(74 ")

- (1)找出數列的規律為從第 5 項開始重複 6、54、27、22、11 等 5 個數。
- (2)利用餘數定理找出第 15 項為 6、第 27 項為 27。

$$\begin{array}{l}
 15 - 4 = 11 \\
 11 \div 5 = 2 \dots 1 \\
 27 - 4 = 23 \\
 23 \div 5 = 4 \dots 3
 \end{array}$$

$\begin{array}{l} \text{第 15 項是 6。} \\ \text{第 27 項是 27。} \end{array}$

5. 驗證階段 (V):(口語資料 7010、7011)(23 ")

根據題目的條件來驗證。數列依照規則產生，並驗證找出的規律，結果

也符合題意。

第八題 (L-02) : 硬幣排列

五種香港硬幣：1 元、2 元、5 元、10 元、20 元，在桌上由左至右排成一列。

幣值最高的硬幣排在中間。

5 元硬幣排在 20 元硬幣的左邊，但沒有緊鄰。

2 元硬幣與 5 元硬幣被另外兩個硬幣隔開。

1 元硬幣不會排列在最後。

請你找出這五種硬幣的排列順序。

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	24	47	13	84					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R) : (口語資料 8001) (24 ”)

(1) 能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由左至右排列)。

2.執行階段(I):(口語資料 8002、8003、8004、8005、8006)(47")

(1) 20 元硬幣排在第三個位置。

(2) 5 元硬幣排在第一個位置。

(3) 2 元硬幣排在第四個位置。

(4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

3.驗證階段(V):(口語資料 8007、8008)(13")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	45	14	84					

【解題階段分析】

1.讀題階段(R):(口語資料 8001)(25")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由左至右排列)。

2.執行階段(I):(口語資料 8002、8003、8004、8005、8006)(45")

自行畫表格以輔助解題。

(1) 20 元硬幣排在第三個位置。

(2) 5 元硬幣排在第一個位置。

(3) 2 元硬幣排在第四個位置。

(4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

	一	二	三	四	五
1元		✓			✗
2元				✓	
5元	✓				
10元					✓
20元			✓		

3. 驗證階段 (V): (口語資料 8007、8008) (14 ")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 3)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	63	13	101					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 8001)

- (1) 能注意到問題的所有條件。
- (2) 能瞭解題目的要求 (由左至右排列)。

2. 執行階段 (I): (口語資料 8002、8003、8004、8005、8006、8007)(63")

- (1) 20 元硬幣排在第三個位置。
- (2) 5 元硬幣排在第一個位置。
- (3) 2 元硬幣排在第四個位置。
- (4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

3. 驗證階段 (V): (口語資料 8009、8009)(13")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	25	45	13	83					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 8001)(25")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由左至右排列)。

2.執行階段(I):(口語資料 8002、8003、8004、8005、8006、8007)(45")

(1)20元硬幣排在第三個位置。

(2)5元硬幣排在第一個位置。

(3)2元硬幣排在第四個位置。

(4)1元硬幣排在第二個位置、10元硬幣排在第五個位置。

3.驗證階段(V):(口語資料 8009、8009)(13")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列5元、1元、20元、2元、10元，結果也符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	23	53	18	94					

【解題階段分析】

1.讀題階段 (R):(口語資料 8001)(23")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由左至右排列)。

2. 執行階段(I):(口語資料 8002、8003、8004、8005、8006、8007)(53")

- (1) 20 元硬幣排在第三個位置。
- (2) 5 元硬幣排在第一個位置。
- (3) 2 元硬幣排在第四個位置。
- (4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

3. 驗證階段(V):(口語資料 8008、8009)(18")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

(六) S6 (小字)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	24	29	12	65					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 8001)(24")

- (1)能注意到問題的所有條件。
- (2)能瞭解題目的要求(由左至右排列)。

2. 執行階段(I):(口語資料 8002、8003、8004、8005、8006、8007)(29")

- (1) 20 元硬幣排在第三個位置。

(2) 5 元硬幣排在第一個位置。

(3) 2 元硬幣排在第四個位置。

(4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

3. 驗證階段 (V):(口語資料 8009、8009)(12 ")

根據题目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 2 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)									
分析 (A)									
計畫 (P)									
執行 (I)									
驗證 (V)									
時間(秒)	26	63	18	107					

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 8001)(26 ")

(1) 能注意到問題的所有條件。

(2) 能瞭解题目的要求 (由左至右排列)。

2. 執行階段 (I):(口語資料 8002、8003、8004、8005、8006、8007)(63 ")

(1) 20 元硬幣排在第三個位置。

(2) 5 元硬幣排在第一個位置。

(3) 2 元硬幣排在第四個位置。

(4) 1 元硬幣排在第二個位置、10 元硬幣排在第五個位置。

3. 驗證階段 (V): (口語資料 8009、8009) (18 ")

根據題目的條件來驗證。由左至右排列 5 元、1 元、20 元、2 元、10 元，結果也符合題意。

第九題 (L-03): 大樓住戶

J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R 等 12 人住在同一棟六層樓的大樓內。每層樓有 2 間房間，任何一間房間最多住 2 人。有某些房間是空房間的。

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。

M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。

R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。

請問由下往上排列的順序為何？空房間可能位於哪些樓層？

(一) S1 (小萱)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 1)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	57	298	51	15	24	17	23	26	551

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (57 ")

(1) 能注意到問題的所有條件。

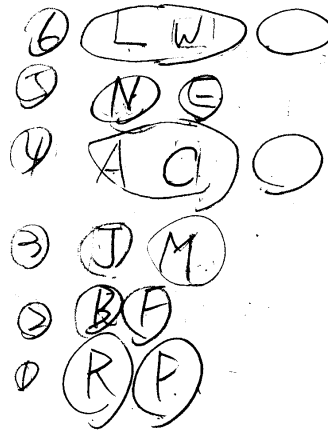
(2) 能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序, 空房間可能位於哪些樓層)

2. 分析階段 (A): (口語資料 9002、9003、9004、9005) (298 ")

(1) 列出 J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R, 使用過就畫記以確認有無疏漏。

J K L M N P W C A B F E R

(2) 由三個條件：L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。推論 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。



3. 執行階段 (I): (口語資料 9006) (51 ")

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件推論 L 住在最第 6 層, A、C 住在第 4 層, M 住在第 3 層、P、R 住單人房住在第 1 層。(畫記 L、A、C、M、P、R)

4. 分析階段 (A): (口語資料 9007) (15 ")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。推論 N、B、F 之間相對位

置的關係。

5. 執行階段 (I): (口語資料 9008) (24 ")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。因為 B、F 住單人房，而只有第 2 層有二間單人房外，其他層沒有，所以 B、F 住在第 2 層，N 住在第 5 層。(畫記 B、F、N)

6. 分析階段 (A): (口語資料 9009) (17 ")

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。

7. 執行階段 (I): (口語資料 9010、9011、9012、9013) (23 ")

因為 J 只能住在第 3 層，W 住在第 6 層，E 住在第 5 層。(畫記 J、W、E)。推論 L 的室友是 W，空房間可能在四樓、六樓。

8. 驗證階段 (V): (口語資料 9014、9015) (26 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四住樓 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

(二) S2 (小瑾)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 2)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■					
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■				
驗證 (V)						■			
時間(秒)	61	289	56	26	59	23	514		

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R):(口語資料 9001)(61")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序,空房間可能位於哪些樓層)

2. 分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004)(289")

結合三個條件:L與他的室友住的樓層比A與他的室友C住的樓層高2層。M住的樓層比A、C住的樓層低1層。R與P住單人房的樓層比M低2層。推論L、A、C、M、R、P之間相對位置的關係。

3. 執行階段 (I):(口語資料 9005)(56")

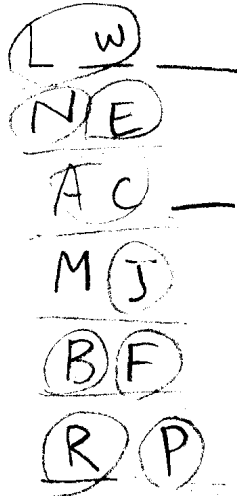
由三個條件:L與他的室友住的樓層比A與他的室友C住的樓層高2層。M住的樓層比A、C住的樓層低1層。R與P住單人房的樓層比M低2層。推論出L、A、C、M、R、P所在的位置共有六層,L住在6樓,A、C住在4樓,M住在3樓、P、R住在1樓。

4. 分析階段 (A):(口語資料 9006、9007)(26")

N住的樓層比B、F住的單人房的樓層高3層。J住單人房,住的樓層比W低3層、比E低2層。推論N、B、F、J、W、E之間相對位置的關係。

5. 執行階段 (I):(口語資料 9008、9009、9010、9011、9012)(59")

由二個條件:N住的樓層比B、F住的單人房的樓層高3層。J住單人房,住的樓層比W低3層、比E低2層。推論出J不住在2樓,B、F住在2樓,N住在5樓,J住在3樓,E住在5樓,W住在6樓。L的室友是W。



6. 驗證階段 (V): (口語資料 9013、9014) (23 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四樓住 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

(三) S3 (小亨)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 03 解題階段順序和時間 (S3)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	63	302	61	18	18	21	25	22	530

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (63 ")

(1) 能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2.分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004、9005)(302")

列出 J、L、N、M、P、W、C、A、B、F、E、R，作畫記以避免疏漏。

J, L, N, M, P, W, C, A, B, F, E, R

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層。M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。推論 L、A、C、M 之間相對位置的關係。

3.執行階段 (I):(口語資料 9006、9007、9008)(61")

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層，M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層等二個條件，推論 L 比 AC 高 2 層、比 M 高 3 層。由 R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層，推論 L 比 R 與 P 高 5 層。進而推論出 L、AC、M、R、P 所在的位置共有六層，L 住在 6 樓，A、C 住在 4 樓，M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。(L、A、C、M、P、R 畫記)

4.分析階段 (A):(口語資料 9009)(18")

由 J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J、W、E 之間的相對位置。

5.執行階段 (I):(口語資料 9010)(18")

由 J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論出如果 J 住在 2 樓，E 住在 4 樓，W 住在 5 樓。

6.分析階段 (A):(口語資料 9011)(21")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。推論 N、B、F、J、W、E 之間相對位置的關係。

7.執行階段 (I):(口語資料 9012、9013、9014、9015、9016)(25")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。推論出 J 不能住在 2 樓，B、F 住在 2 樓，N 住在 5 樓，J 住在 3 樓，E 住在 5 樓，W 住在 6 樓。L

的室友是 W。



8. 驗證階段 (V): (口語資料 9017、9018) (22 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四樓住 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

(四) S4 (小藜)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 4)								
讀題 (R)	█								
分析 (A)		█		█		█			
計畫 (P)									
執行 (I)			█		█		█		
驗證 (V)								█	
時間(秒)	57	301	48	15	13	16	20	20	490

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (57 ")

(1) 能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2.分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004)(301")

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層 M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層。R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層。推論出 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。

3.執行階段 (I):(口語資料 9005)(48")

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層，M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層，由 R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件，推論出 L、A、C、M、R、P 所在的位置共有六層，L 住在 6 樓，A、C 住在 4 樓，M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。

4.分析階段 (A):(口語資料 9006)(15")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。推論 N、B、F 之間相對位置的關係。

5.執行階段 (I):(口語資料 9007)(13")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層，推論出 B、F 住單人房只有在 2 樓有二間，所以 B、F 只能住在 2 樓，N 住在 5 樓。

6.分析階段 (A):(口語資料 9008)(16")

J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J、W、E 之間相對位置的關係。

7.執行階段 (I):(口語資料 9009、9010、9011、9012)(20")

由 J 住單人房，住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論出 J 住在 3 樓，E 住在 5 樓，W 住在 6 樓。L 的室友是 W。

6	LW	
5	N	E
4	AC	
3	M	J
2	B	F
1	R	P

8. 驗證階段 (V): (口語資料 9013、9014) (20 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列为，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四樓住 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

(五) S5 (小均)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 5)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	61	312	53	12	15	11	22	16	502

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (61 ")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2.分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004)(312")

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件。

推論出 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。

3.執行階段 (I):(口語資料 9005)(53")

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件, 推論出共有 6 層, L 在第 6 層, A、C 在第 4 層, M 在第 3 層、P、R 住單人房在第一層。

4.分析階段 (A):(口語資料 9006)(12")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層, 推論 N、B、F 之間相對位置的關係, 推論 B、F 住在第 2 層, N 住在上面第 5 層。

5.執行階段 (I):(口語資料 9007)(15")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層, 推論 B、F 住在 2 樓, N 住在 5 樓。

6.分析階段 (A):(口語資料 9008)(11")

J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J、W、E 之間相對位置的關係, J 只能住在第 3 層, W 住在第 6 層, E 住在第 5 層。

7.執行階段 (I):(口語資料 9009、9010、9011、9012)(22")

由 J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J 住在 3 樓, E 住在 5 樓, W 住在 6 樓。L 的室友是 W。

六 L.W
 五 N.E
 四 A.C
 三 M.J
 二 B.F
 一 R.P

8. 驗證階段 (V): (口語資料 9013、9014) (16")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四住樓 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

(六) S6 (小宇)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 6)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	60	289	55	10	16	12	18	20	480

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (60")

(1)能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2.分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004)(289")

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層, 推論 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。

3.執行階段 (I):(口語資料 9005)(55")

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件, 推論出 L、A、C、M、R、P 所在的位置共有六層, L 住在 6 樓, A、C 住在 4 樓, M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。

4.分析階段 (A):(口語資料 9006)(10")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層, 推論 N、B、F 之間相對位置的關係。

5.執行階段 (I):(口語資料 9007)(16")

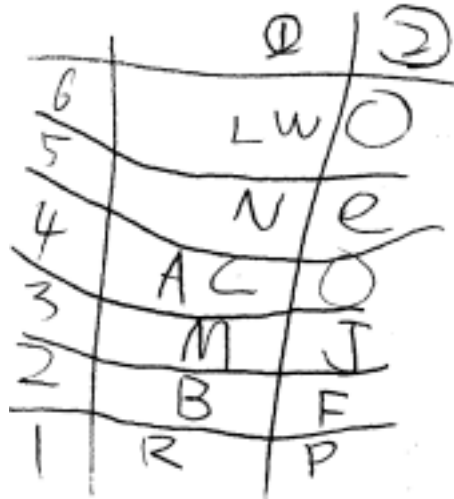
N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。因為其他層沒有二間房間可以容納 B、F, 推論 B、F 只能住在第二層。N 就住在第五層。

6.分析階段 (A):(口語資料 9008)(12")

J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論、J、W、E 之間相對位置的關係。

7.執行階段 (I):(口語資料 9009、9010、9011、9012)(18")

由 J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J 住在 3 樓, E 住在 5 樓, W 住在 6 樓。L 的室友是 W。



8. 驗證階段 (V): (口語資料 9013、9014) (20 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四樓住 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能是四樓、六樓的結果也符合題意。

(七) S7 (小睿)

【解題歷程順序和時間】

階段	L - 0 3 解題階段順序和時間 (S 7)								
讀題 (R)	■								
分析 (A)		■		■		■			
計畫 (P)									
執行 (I)			■		■		■		
驗證 (V)								■	
時間(秒)	59	201	50	12	14	9	24	18	387

【解題階段分析】

1. 讀題階段 (R): (口語資料 9001) (59 ")

(1) 能注意到問題的所有條件。

(2)能瞭解題目的要求(由下往上排列的順序 空房間可能位於哪些樓層)

2.分析階段 (A):(口語資料 9002、9003、9004)(201")

L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層, 推論 L、A、C、M、R、P 之間相對位置的關係。

3.執行階段 (I):(口語資料 9005)(50")

由 L 與他的室友住的樓層比 A 與他的室友 C 住的樓層高 2 層, M 住的樓層比 A、C 住的樓層低 1 層, R 與 P 住單人房的樓層比 M 低 2 層等三個條件, 推論出 L、A、C、M、R、P 所在的位置共有六層, L 住在 6 樓, A、C 住在 4 樓, M 住在 3 樓、P、R 住在 1 樓。

4.分析階段 (A):(口語資料 9006)(12")

N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層, 推論 N、B、F 之間相對位置的關係。

5.執行階段 (I):(口語資料 9007)(14")

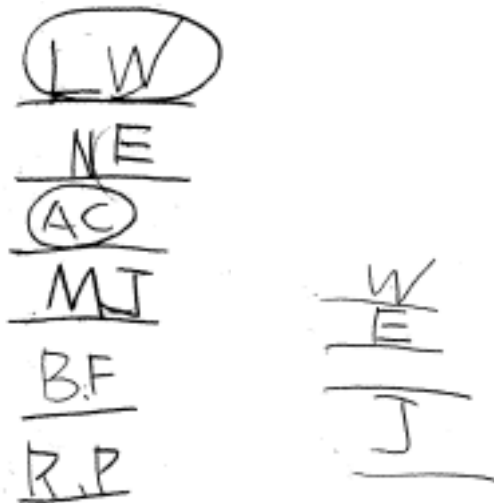
N 住的樓層比 B、F 住的單人房的樓層高 3 層。因為其他層沒有二間房間可以容納 B、F, 推論 B、F 只能住在第二層。N 就住在第五層。

6.分析階段 (A):(口語資料 9008)(9")

J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J、W、E 之間相對位置的關係。

7.執行階段 (I):(口語資料 9009、9010、9011、9012)(24")

由 J 住單人房, 住的樓層比 W 低 3 層、比 E 低 2 層。推論 J 住在 3 樓, E 住在 5 樓, W 住在 6 樓。L 的室友是 W。



8. 驗證階段 (V): (口語資料 9013、9014) (18 ")

根據題目的條件來驗證。由下而上的排列為，一樓住 R、P，二樓住 B、F，三樓住 M、J，四樓住 AC，五樓住 N、E，六樓住 LW，空房間可能在第四、六層的結果符合題意。